Inge SCHWANK, Köln

Gelegenheit zur mentalen Zahlenraumkonstruktion

Die zum ersten Zahlenaufbau konzipierte Mathematische Spielwelt **Zahlenraumorientierungsrahmen [ZARAO]** existiert in zwei Ausführungen:

ZARAO-NV: Zur Abdeckung des Zahlenraums von Null bis Vier, passend zur unmittelbar gegebenen Erfassung der ersten Vielheiten. Vier ist die erste kritische Vielheit (vgl. z.B. keins, ein/e, beide, triple, quadrupel);********
ZARAO-NN: Zur Abdeckung des Zahlenraums von Null bis Neun, passend zu den für die dezimale Zahlschrift benötigten zehn Schriftzeichen. Die Schreibweise 10 mit den gereihten Ziffern 1 und 0 für Zehn bedarf einer expliziten, gesonderten Hinführung und Erklärung.********************

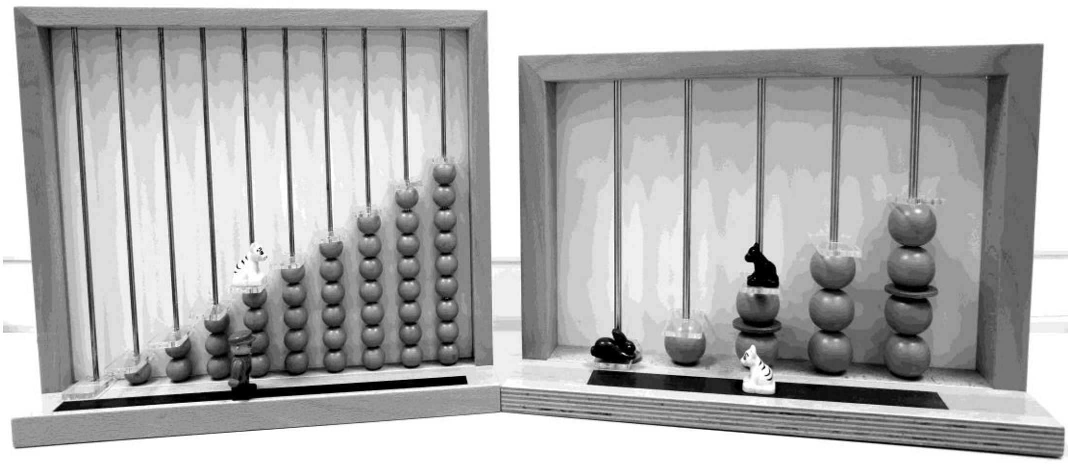

Abb.: Links: ZARAO-NN / Rechts: ZARAO-NV

Die Zahlen sind beim ZARAO einerseits im Sinne einer *statischen Objektsicht* repräsentiert als treppenartig angeordnete, von Stangen aufrecht gehaltenen Kugeln, andererseits im Sinne einer *dynamischen Prozesssicht* repräsentiert als Entfernungen vom Treppenanfang, gemessen in Hüpfern von Figuren hin zu den einzelnen Treppenstufen. Der Treppenanfang ist hier charakterisiert als der Ort, von dem aus eine Figur nach oben loshüpft, um all die anderen Stufen zu erreichen. In solchen Situationen ist eine Figur am Treppenanfang noch keinmal (also nullmal) gehüpft. Startet eine Figur am Treppenanfang und hüpft z.B. viermal, so ist sie nach Ausführung vier Hüpfer vom Treppenanfang entfernt – und dabei auf vier Kugeln gelandet. Die Bewegung einer Figur realisiert +1 / -1 bzw. allgemein plus / minus. Entscheidend ist die Erreichbarkeit von natürlichen Zahlen im Zahlenraum und ihre dadurch gegebene Anordnung. Im Kugelaufbau ist jeweils eine Kugel mehr vorhanden, zum Erreichen der jeweils nächsten Stufe wird ein Hüpfer mehr in Entfernung vom Treppenanfang benötigt. So wie mit den Peano-

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Dedekind-Axiomen herausgearbeitet, ist die *Nachfolgerfunktion* das konstitutive Element der natürlichen Zahlen und damit ihres *Zahlenraums*. Vor dem Treppenaufbau befindet sich eine dunkelbraune Holzplatte. Diese dient als Weg, auf dem Figuren ebenfalls hüpfen können, z.B. parallel zu auf der Treppe hüpfenden Figuren. ZARAO wurde erfolgreich in der mathematischen Frühförderung eingesetzt, ein aktuelles ZARAO-Projekt widmet sich Kindern im Förderbereich Hören und Kommunikation (Zurnieden, 2020).

Motivation. In der Literatur ist eine Überbetonung der Rolle der Sprache beim Aufbau von ersten Zahlkonzepten, die über drei (oder vier; den angeborenerweise per Subitizing erfassbaren Vielheiten) hinausreichen, zu verzeichnen. Prominentes Beispiel ist Carey (2012), die sich mit vielen Studien auseinandergesetzt und selbst wichtige Beiträge geleistet hat. „First, the child learns the explicit numeral list together with the count routine as a numerically meaningless game.“ (S. 18) „The list of numeral words and the counting routine are learned as numerically meaningless structures.“(S. 19). Zentrale Idee hier ist, dass zunächst die stabile Anordnung von Wörtern in einer Reihe (Zahlwortreihe) erlernt werden muss, um dieses Angeordnetsein dann in Anzahlen wiederzufinden. In der Reihe ein Wort weiter zu sein, entspricht einem eins mehr sein, womit auf diese Weise über die Wortreihe die Nachfolgerfunktion gegeben sein soll. Neben der Schwierigkeit, ein Angeordnetsein als Prinzip über eine bestimmte Wortreihe zu etablieren, ist problematisch, dass mit den verwendeten Wörtern nur das jeweilige Eins-Mehr-*Sein*, nicht aber das Eins-Mehr-*Werden* ausgedrückt wird, und damit das wesentliche Element des Zahlenraum*konstruktionsprozesses* sprachlich unerfasst bleibt. Außer Acht gelassen wird, dass eine Idee in der Auseinandersetzung mit einer struktur- und prozesshaltigen Situation entstehen kann. Die Aufgabe ist, geeignete Situationen zu kreieren und Möglichkeiten für ihre Wirksamkeit nachzuweisen. Zu attestieren, Kinder könnten (ohne Hilfsmittel) weder fliegen noch schwimmen, macht einen wichtigen Unterschied deutlich. Es mag sein, dass man nur Kinder antrifft, die beide Leistungen nicht erbringen können, aber im letzteren Fall ist bekanntlich Unterricht hilf- und erfolgreich. Für die Entwicklung mathematischen Denkens ist es unbedingt wichtig, selbst auf mathematische Ideen kommen zu dürfen, sich selbst gedanklich in mathematischen Gegebenheiten tummeln zu dürfen – gedanklich bedeutet dabei nicht notwendiger Weise eine Dominanz von Worten. In Kenntnis vielfältiger Schwierigkeiten von Kindern beim Erwerb arithmetischer Erkenntnisse und Techniken, insbesondere im Falle sich herausbildender Rechenschwäche, oftmals in Kombination mit sonderpädagogischen Förderbedarfen plädieren wir dringend dafür, Umgebungen für Kinder zu schaffen, in denen der Aufbau von tragfähigen arithmetischen Vorstellungen nicht primär ausgehend von einer einseitigen Objektsicht und vorrangig sprachbasiert versucht wird, sondern einen solchen Aufbau durch die Bereitstellung von Mathematischen Spielwelten zu begünstigen, die die Prozesssicht in einem materialisierten Zahlenraum ins Zentrum des Tuns stellen – und zwar von Anfang an, sprich spätestens, wenn begonnen wird, sprechen zu lernen, so dass etwa Zahlwörter in sinnhaften Kontexten sinnvoll verwendet werden.

Die Zahl Null – Vorteil: Repräsentation im ZARAO ist gegeben. Eine adäquate Einbindung der Zahl Null wird sträflich vernachlässigt mit weitreichenden negativen Konsequenzen wie Fehlern bei den schriftlichen Rechenverfahren. Null wird zumeist weder inhaltsträchtig eingeführt noch bei ersten Rechnungen vielfältig genutzt, die Schreibweise 10 „fällt vom Himmel", Multiplikationsreihen beginnen erst bei $1 \cdot n$ (statt bei $0 \cdot n$). Dabei sind bereits fünfjährige Kinder in der Lage, sich gedanklich auf diese Zahl einzulassen: z.B. Null als neutrales Element der Addition/Subtraktion oder als gerade Zahl (letzteres s. Schwank, 2011). Bei bestimmten Kugelstangen in solch treppenartigen Anordnungen wie der des ZARAOs ist es in bestimmten Fällen möglich, eine Moosgummischeibe so zwischen den Kugeln an den Stangen zu platzieren, dass ober- und unterhalb gleich viele Kugeln sind. Dies stimmt auch am Treppenanfang: ober- und unterhalb sind keine / null Kugeln, also gleich viele. Die Erkenntnis basiert auf der arithmetisch gehaltvollen Struktur des Aufbaus und des vorgegebenen ideenanregenden Tuns. Dass diese besondere Eigenschaft, die bestimmte Zahlen miteinander verbindet, auch in Worte gefasst werden kann, sogar mit einem einzigen (Eigenschafts-)Wort bezeichenbar ist, ist ein dem nachfolgender Schritt.

Zahlwortreihe – Vorwärts- / Rückwärtszählen. Die Zahlwortreihe wird gegenüber Kindern so benutzt, dass ein Wort pro gezähltem Gegenstand gesprochen wird. Dies widerspricht der Zahlidee. Bekannt sind Vorkommnisse, dass Kinder einen Finger, z.B. ihren Ringfinger, hinhalten und fragen: „Wie heißt diese Zahl?". Dass Kinder, denen keine andere hilfreiche Anordnung des Zahlenraums angeboten wird, ihre Finger als (unzureichenden) Ersatz nehmen, liegt auf der Hand. Die feste Fingerreihung stützt bei der Anwendung der Abfolge der Zahlwortreihe. Die Aufgabe ist, Kindern statt ihrer Finger arithmetisch passendere Utensilien zur Verfügung zu stellen, an denen ihre kognitiven Fähigkeiten wachsen und sich entfalten können. Es wäre hilfreich, wenn schon von Beginn an der Prozess der Veränderung betont und ausformuliert werden würde. Z.B.: In einer Kinderkrippe: Erzieherin hält im Spiel die Hand auf für Holzbausteine. Ein Kind gibt ihr einen Baustein auf die noch leere Hand „Ein Baustein. Gib mir noch einen Baustein." Das Kind legt ihr einen weiteren Baustein auf die Hand. „Ein Baustein. Noch ein Baustein. Zusammen habe ich zwei Bausteine (mit einer zunächst jeden einzelnen Baustein, dann die beiden Bausteine zusammen zeigenden Handstellung)." Beim schlichten Auszählen anhand der Zahlwortreihe werden der Veränderungsprozess und das Zusammen unterschlagen. Dadurch, dass in der Regel die Zahlwortreihe (ab Eins!) nur aufwärts- aber nicht abwärtszählend zur Anwendung kommt, fehlt zur Idee der Subtraktion die entscheidende Grundlage. Umgebungen müssen und können so gestaltet werden, dass dieses Defizit nicht entsteht. Im ZARAO sind beide Richtungen auf natürliche Weise gegeben: Figuren hüpfen sowohl hoch und runter / vor und zurück. „-1" entspricht tatsächlich der Umkehrung von „+1".

Zahlenstrahl – Messen mit dem Lineal/Geodreieck. Die Stangen liefern beim ZARAO zusammen mit dem Weg den *Zahlenstrahl*, wobei das Problem gelöst ist, warum bei seiner graphischen Fassung zur Untergliederung ein Strich mehr benötigt wird als die Beschriftung des letzten Striches anzeigt, oder warum der zweite Strich mit 1 und der erste mit 0 beschriftet wird: Der erste Strich ist im o.g. Sinne der Ort, an dem eine Figur noch keinmal gehüpft ist, der zweite Strich derjenige, bis zu dem eine Figur einmal gehüpft ist. Der Zahlenstrahl bildet die Prozesssicht (nicht die Objektsicht) auf Zahlen ab. Die Beschriftung dient der Beantwortung nach einem „*Wie oft?*" (passierte +1/hüpfen) und nicht nach einem „*Wie viel?*" (von etwas ist vorhanden). Den Zahlenstrahl in seinem Aufbau zu verstehen, hilft, um später mit Lineal und Geodreieck Messungen passend beginnen zu können und zwar bei 0.

Funktional-logisches Denken versus prädikativ-logisches Denken. Explizit Gelegenheit zur mentalen Zahlenraum*konstruktion* zu geben, ist fundamental wichtig: Menschen unterscheiden sich dahingehend, ob sie sich überhaupt auf eine Prozesssicht im Sinne des funktional-logischen Denkens im Unterschied zum prädikativ-logischen Denken einlassen können (Schwank, 2003). Blickbewegungsexperimente offenbaren, dass Menschen kognitiv dafür einen blinden Fleck haben können (S. 74). Wie bei Fehlsichtigkeiten Brillen helfen können, trotzdem klar zu sehen, so können geeignete Utensilien helfen, ideenkonstituierende Prozesse trotzdem wahrzunehmen.

Literatur

Carey, S. (2012). Where Our Number Concepts Come From. Author Manuscript, PMC. www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3489488/ (19.12.2020)

Schwank, I. (2003). Einführung in funktionales und prädikatives Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 35(3), 70-78.

Schwank, I. (2011). Mathematisches Grundverständnis: Denken will erlernt werden. In H. Keller (Hrsg.), *Handbuch der Kleinkindforschung*. (S. 1154-1174). Bern: Huber.

Zurnieden, A. (2020). *Bewegungen von Akteuren als Prozesse des Erzeugens.* Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.