

Daniel SOMMERHOFF, München, Esther BRUNNER, Kreuzlingen & Stefan UFER, München

Mathematik- und beweisbezogene Beliefs: Zusammenhänge zu Beweiskonstruktion und -auswahl

Die Bedeutung affektiv-motivationaler Faktoren sowie Beliefs wird innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung betont (z. B. Leder, Pehkonen & Törner, 2002; Schmotz, Felbrich & Kaiser, 2008) und spiegelt sich in theoretischen Konzeptionen, bspw. im Kontext des Kompetenzbegriffs nach Weinert (2001), wider. Trotzdem gibt es nur wenige Studien (z. B. Stylianou, Blanton & Rotou, 2015), die den Einfluss von Beliefs prüfen und quantifizieren, insbesondere im Hinblick auf unterrichtliche Entscheidungen.

Im Rahmen des BABS I Projekts, welches Präferenzen und Einflussfaktoren bei der Auswahl von Beweisen für den Einsatz im Unterricht der Sekundarstufe I untersucht, klärt dieser Beitrag zunächst i) deskriptiv die Beliefs von Lehramtsstudierenden zur Struktur der Mathematik, zum Erwerb mathematischen Wissens sowie zur Leistung von Schülerinnen und Schülern im Fach Mathematik im Allgemeinen sowie im Kontext mathematischen Beweisens im Speziellen und anschließend ii) deren Zusammenhang mit der Leistung bei der Konstruktion von mathematischen Beweisen sowie der Auswahl von Beweisen für den Mathematikunterricht.

Theoretischer Hintergrund

Argumentieren im Allgemeinen sowie das Konstruieren von Beweisen im Speziellen sind zentrale Aktivitäten innerhalb der Mathematik als Wissenschaft (Reiss & Ufer, 2009; Ufer & Sommerhoff, 2019) und sind im Mathematikunterricht, beispielsweise in den deutschen Bildungsstandards (vgl. KMK, 2004), fest verankert. Wiederholt hat sich jedoch gezeigt, dass Schülerinnen und Schülern, Studierenden sowie auch Lehrkräften der Umgang mit Beweisen schwerfällt (z. B. Healy & Hoyles, 2000).

Aufbauend auf Frameworks von Schoenfeld (1985) oder De Corte, Verschaffel & Op't Eynde (2002) werden mathematisches Wissen, domänenspezifische wie -allgemeine Heuristiken, meta-kognitive Strategien sowie mathematische Beliefs und affektiv-motivationale Variablen als wichtige Ressourcen für den erfolgreichen Umgang mit mathematischen Beweisen gesehen. Quantitative Forschung hat sich bisher jedoch meist auf die Untersuchung kognitiver Ressourcen sowie die Analyse von Schülerinnen und Schülern beschränkt (z. B. Chinnappan, Ekanayake & Brown, 2012; Ufer, Heinze & Reiss, 2008). Ein Grund für diese Fokussierung liegt an der teils

uneinheitlichen Konzeptualisierung affektiv-motivationaler Faktoren sowie Beliefs. Letztere wurden im Rahmen der internationalen Vergleichsstudie TEDS-M ausführlich diskutiert (vgl. Schmotz, Felbrich & Kaiser, 2008), wobei sich für ein weites Verständnis von Beliefs entschieden wurde und in Beliefs über die Struktur der Mathematik (statisch/dynamisch), den Erwerb mathematischen Wissens (transmissiv/konstruktiv) sowie Beliefs in Bezug auf mathematische Leistung unterschieden wurde.

Beliefs von Lehrkräften wird eine „handlungsleitende Funktion zugesprochen“ (Schmotz, Felbrich, & Kaiser 2008, S. 279), auch wenn diese in der bisherigen Forschung selten empirisch nachgewiesen bzw. quantifiziert wurde. Im Kontext des Argumentierens und Beweisens ist entsprechend ungeklärt, inwieweit sich verschiedene Beliefs von Lehrkräften auf i) deren Erfolg bei der Konstruktion von Beweisen und ii) die Auswahl von Beweisen für den Unterricht auswirken. Gerade bei der Auswahl von Beweisen könnten leicht unterschiedliche Präferenzen für verschiedene Beweistypen (vgl. Wittmann & Müller, 1988) angenommen werden. Bspw. könnten Lehrkräfte mit konstruktiv geprägten Beliefs eher operative Beweise bevorzugen.

Forschungsfragen

Basierend auf dem dargestellten theoretischen Hintergrund ergeben sich folgende Forschungsfragen: (FF1) Was sind die Beliefs von Lehramtsstudierenden zur Struktur der Mathematik, zum Erwerb mathematischen Wissens sowie zur Leistung von Schülerinnen und Schülern im Fach Mathematik im Allgemeinen sowie im Kontext mathematischen Beweisens im Speziellen? (FF2) Wie hängen die Beliefs der Lehramtsstudierenden mit deren Erfolg bei der Konstruktion von Beweisen sowie der Auswahl von Beweisen für den Unterricht zusammen?

Methode

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden insgesamt $N = 183$ Studierende (78 M, 104 W, 1 NA) des Lehramts Mathematik für Realschulen und Gymnasien im dritten Semester befragt, wobei vollständige Daten von 165 Teilnehmenden vorlagen. Diese hatten bereits einführende Vorlesungen in den Bereichen Mathematik, Didaktik der Mathematik sowie Psychologie & Pädagogik gehört. Die Erhebung der Daten erfolgte fragebogenbasiert, wobei dieser aus insgesamt 6 Abschnitten bestand. Im ersten Abschnitt wurden zwei Aussagen der elementaren Zahlentheorie vorgelegt, die selbstständig bewiesen werden mussten. In Abschnitten 2 und 3 wurden verschiedene Beweise (basierend auf den Typen von Wittmann & Müller, 1988) zu den Aussagen vorgestellt. Die Studierenden mussten anschließend für verschiedene Klassenprofile jeweils einen oder mehrere Beweise auswählen. Abschnitt 4

erfasste auf die einzelnen Beweise bezogene Einschätzungen der Teilnehmenden. Abschnitt 5 enthielt schließlich Skalen zu den Beliefs der Teilnehmenden zur Struktur der Mathematik (12 Items), zum Erwerb von mathematischem Wissen (14 Items) sowie zur Leistung von Schülerinnen und Schülern im Fach Mathematik (8 Items) und im Kontext mathematischen Beweisens (2 Items). Die Skalen sind der internationalen Vergleichsstudie TEDS-M (Laschke & Blömeke, 2014) entnommen, sowie die Skala zur Leistung von Schülerinnen und Schülern im Kontext mathematischen Beweisens selbstkonstruiert. Abschnitt 6 erfasste demographische Daten.

Ergebnisse

Erste Analysen der Daten zeigten, dass die Teilnehmenden in Bezug auf die Struktur der Mathematik eher eine dynamische als statische Perspektive einnahmen. Jedoch ergab sich, dass eine statische Struktur nicht deutlich abgelehnt wurde, was unterstreicht, dass beide Aspekte wahrgenommen wurden. Beim Erwerb mathematischen Wissens zeigte sich hingegen eine weitgehend ablehnende Haltung gegenüber einer transmissiven Perspektive und deutliche Zustimmung zu einer konstruktivistischen Sichtweise. Bei der Leistung von Schülerinnen und Schülern in Mathematik lehnten die Teilnehmenden schließlich größtenteils Aussagen ab, die eine fixe Begabung für Mathematik implizierten.

Korrelative Zusammenhangsanalysen zwischen Beliefs und der Leistung im Konstruieren von Beweisen ergaben im Wesentlichen schwache, teils jedoch signifikante Zusammenhänge. So zeigten Teilnehmende mit stärker statisch bzw. transmissiv geprägten Beliefs schlechtere Leistungen, ebenso wie Teilnehmende, die eher einer fixen Begabung für Mathematik zustimmten.

Zusammenhangsanalysen zu den Beliefs der Teilnehmenden und der Auswahl von Beweisen für den Unterricht zeigten ein differenziertes Bild, wobei jedoch konstruktivistische Beliefs besonderen Einfluss zu scheinen haben.

Diskussion

Die Studie erlaubt vertiefende Einblicke in die Beliefs von Studierenden der Mathematik in der ersten Phase der Lehramtsausbildung. Die Verwendung der TEDS-M Skalen erlaubt es, diese mit Beliefs der dort befragten Referendarinnen und Referendare zu vergleichen und ermöglicht so quasi-longitudinale Kontraste. Erste Ergebnisse zeigen ähnliche, wenn auch nicht identische Muster. Auch beim Zusammenhang zwischen Beliefs und dem Erfolg bei der Konstruktion von Beweisen ergeben sich interessante Muster, die jedoch im Hinblick auf die Prädiktionskraft über andere Konstrukte (wie z.B. mathematischem Wissen) hinaus noch genauer beleuchtet werden müssen. Von

besonderem Interesse in Bezug auf die „handlungsleitende“ Funktion von Beliefs sind schließlich jedoch die Zusammenhänge zwischen Beliefs und der Auswahl von Beweisen für den Unterricht.

Hinweis: Dies ist ein Forschungsprojekt an der LMU München und der PH Thurgau.

Literatur

- Chinnappan, M., Ekanayake, M. B. & Brown, C. (2012). Knowledge use in the construction of geometry proof by Sri Lankan students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(4), 865–887.
- De Corte, E., Verschaffel, L. & Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In M. Boekaerts, M. Zeidner & P. R. Pintrich (Hrsg.), *Handbook of self-regulation* (S. 687–726). San Diego: Academic Press.
- Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 296–428.
- Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. Bonn: KMK.
- Laschke, C. & Blömeke, S. (Hrsg.). (2014). *Teacher Education and Development Study: Learning to Teach Mathematics (TEDS-M 2008). Dokumentation der Erhebungsinstrumente*. Münster: Waxmann.
- Leder, G. C., Pehkonen, E. & Törner, G. (Hrsg.). (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (Vol. 31). Dordrecht: Springer Science & Business Media.
- Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, 111(4), 155–177.
- Schmotz, C., Felbrich, A. & Kaiser, G. (2008). Überzeugungen angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. *TEDS-M 2008*, 279–305. Münster: Waxmann.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Elsevier.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *IJRUME*, 1(1), 91–134.
- Ufer, S., Heinze, A. & Reiss, K. (2008). Individual predictors of geometrical proof competence. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Hrsg.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the IGPME and the XX North American Chapter* (Vol. 1, S. 361–368). Morelia, Mexico: PME.
- Ufer, S. & Sommerhoff, D. (2019). Hauptsache überzeugt? Was kann Argumentieren (und Begründen und Beweisen) für den Mathematikunterricht leisten – und wie? In N. von Schroeders (Hrsg.), *MaMut Materialien für den Mathematikunterricht – Argumentieren, Begründen, Beweisen* (S. 7–34). Hildesheim: Franzbecker
- Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17–32). Weinheim: Beltz.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, N. G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.