

Annalisa STEINECKE, Bayreuth

## **Funktionale Zusammenhänge beGREIFEN: Förderung des funktionalen Denkens im Bereich der Analysis**

Funktionen stellen einen zentralen Themenkomplex der Schulmathematik dar. Die Schülerinnen und Schüler sollen in diesem Bereich besonders vielfältige mathematische Kompetenzen erwerben, um Funktionen und funktionale Zusammenhänge flexibel nutzen zu können (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 23). Den Höhepunkt der schulischen Funktionenlehre bildet die Analysis. Tall (1996, S. 289) betont: „One purpose of the function is to represent *how things change*. With this meaning it is natural to move on to consider the calculus concept of the *rate of change* (differentiation) and *cumulative growth* (integration)“. Funktionales Denken wird somit als geistige Vorbereitung der Infinitesimalrechnung gesehen, in der Veränderungsprozesse eine wichtige Rolle spielen.

### **Grundvorstellungen von Funktionen**

Für einen verständnisvollen Umgang mit dem Funktionsbegriff ist die Entwicklung tragfähiger *Grundvorstellungen* essenziell, damit den fachlichen Aspekten des Begriffs eine inhaltliche Bedeutung beigemessen werden kann (vgl. Greefrath et al., 2016). In der didaktischen Literatur haben sich drei verschiedene Sichtweisen von Funktionen etabliert (vgl. z.B. Vollrath, 1989): Die Zuordnungs-, die Kovariations- und die Objektvorstellung.

Im Rahmen des vorliegenden Beitrags wird die Kovariationsvorstellung, die für den Funktionsbegriff in der Analysis von besonderer Bedeutung ist, fokussiert. Der Begriff der „Kovariation“ drückt das „Miteinander-Variieren“ zweier Größen aus; mithilfe von Funktionen wird demnach erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 48).

### **Empirische Erkenntnisse**

Empirische Untersuchungen weisen immer wieder auf Schwierigkeiten von Lernenden im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff hin (vgl. z. B. Vogel, 2006). Diese Schwierigkeiten lassen sich häufig auf das Fehlen adäquater Grundvorstellungen zurückführen. Im Zusammenhang mit der Kovariationsvorstellung liefert beispielsweise das folgende Item der Studie von Hoffkamp (2011), in deren Rahmen mehr als 100 Erstsemesterstudierende des Fachs Mathematik befragt wurden, aufschlussreiche Erkenntnisse:

Die gestrichelte Linie wird vom Punkte A um die Entfernung  $x$  nach rechts gezogen. Der Wert  $F(x)$  gibt die Größe der grau unterlegten Fläche an. Welcher Graph passt? Begründen Sie Ihre Wahl!

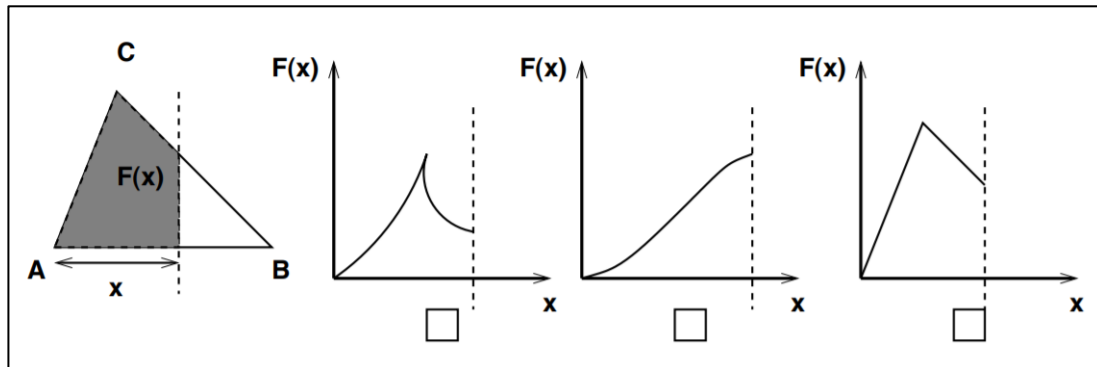


Abb. 1: Testaufgabe zur Kovariationsvorstellung (Hoffkamp, 2011)

In der obigen Aufgabe stellt die Funktion  $F$  die Flächeninhaltsfunktion dar. Zieht man die gestrichelte Linie vom Punkt A aus wie beschrieben nach rechts, so wird der Flächeninhalt zunehmend größer; der Graph der Funktion  $F$  ist somit monoton steigend. Die korrekte mittlere Antwortoption wurde von 66% der Studierenden angekreuzt; nur 57% der Befragten konnten ihre Wahl auch richtig begründen. Der rechte Graph wurde im Übrigen sehr viel häufiger angekreuzt als der linke, was durch den sogenannten Graph-als-Bild-Fehler erklärt werden kann (vgl. Hoffkamp, 2011, S. 12).

Die obigen Resultate der Studierendenbefragung deuten auf eine mangelhafte Ausprägung der Kovariationsvorstellung hin. Für den Mathematikunterricht ergibt sich daraus die Frage: Wie kann die Entwicklung von Grundvorstellungen im Bereich der Analysis gefördert werden?

### Förderung von Grundvorstellungen durch enaktives Lernen

Grundvorstellungen können zum Beispiel aus konkreten Materialhandlungen erwachsen. Im Rahmen des vorliegenden Dissertationsprojekts hat sich gezeigt, dass konkrete Lernmaterialien Schülerinnen und Schülern auch im Bereich der Analysis wertvolle Hilfestellung bieten und den Aufbau von Grundvorstellungen anregen können. Ein entsprechendes Konzept zur Förderung der Kovariationsvorstellung, das auf die obige Aufgabe Bezug nimmt, wird im Folgenden vorgestellt.

Im qualitativen Forschungsprojekt, das mit 18 Schülerinnen und Schülern der 11. Jahrgangsstufe einer Montessori-Fachoberschule durchgeführt wurde (vgl. Steinecke, 2019), wurde der Flächeninhalt, den der Graph einer (stückweise stetigen) linearen Funktion mit der  $x$ -Achse einschließt, mithilfe von

hölzernen Flächenplättchen dargestellt. Diese Flächenplättchen wurden jeweils unter dem Graphen ausgelegt (vgl. Abb. 2, untere Zeile). Das jeweils betrachtete Intervall wurde dabei mithilfe von verschiebbaren Gummibändern veranschaulicht. Unter Zuhilfenahme von kompatiblen Streckenstäben, deren Länge der jeweiligen Anzahl an Flächenplättchen entspricht, wurde der Graph der Flächeninhaltsfunktion in einem zweiten Koordinatensystem Schritt für Schritt generiert (vgl. Abb. 2, obere Zeile). Der Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Funktionswert wurde auf diesem Wege haptisch erfahrbar.

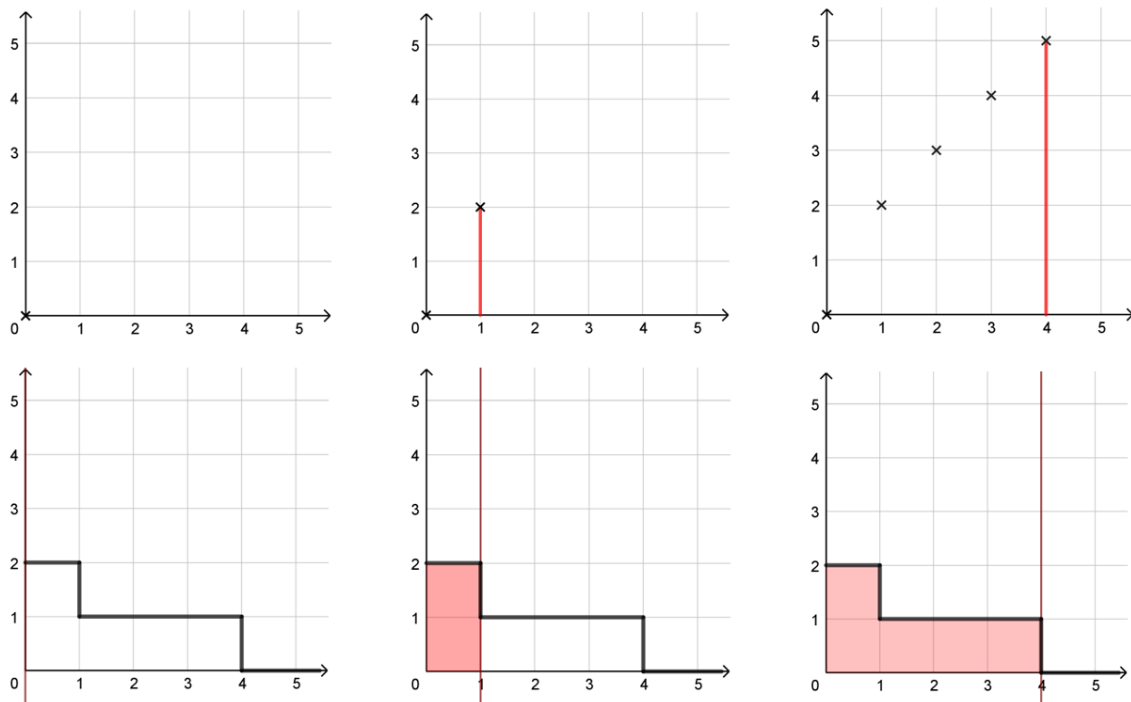


Abb. 2: Enaktives Generieren der Flächeninhaltsfunktion

### Ergebnisse des Unterrichtsprojekts

Im Anschluss an die enaktive Materialarbeit wurden die Lernenden unter anderem gebeten, die obige Aufgabe der Untersuchung von Hoffkamp (2011) zu bearbeiten. 15 der 18 Teilnehmenden kreuzten die korrekte mittlere Antwortoption an, was auf eine zufriedenstellende Ausprägung der Kovariationsvorstellung schließen lässt. Die Schülerin Mia begründete ihre Entscheidung etwa folgendermaßen:

*Zunächst steigt der Flächeninhalt sehr schnell,  
nach einiger Strecke ~~steigt~~ wird der Flächeninhalt  
immer noch mehr, aber er steigt nicht mehr  
so schnell wie zuvor,*

Vier – interessanterweise eher lernschwächere – Teilnehmende stellten in ihren Erläuterungen des Weiteren einen expliziten Bezug zur konkreten Materialhandlung her. Der Schüler René schrieb beispielsweise:

Es kommen immer mehr Plättchen dazu, also ist der Graph nur steigend.

Nicht zuletzt gaben die Teilnehmenden übereinstimmend an, dass sie das gegenständliche Lernmaterial als hilfreich empfanden. Die Schülerin Michelle schrieb etwa:

Die Materialien haben sehr dabei geholfen, dass ich mich beim Lösen der Aufgaben durchgehend konzentrieren konnte und es hat mir auch ein Gefühl von Sicherheit gegeben, den Sachverhalt in Form von Material vor mir zu haben.

## Fazit und Ausblick

Im Zuge des vorgestellten Dissertationsprojekts hat sich gezeigt, dass handelndes Lernen an konkreten Lernmaterialien die Entwicklung von Grundvorstellungen auch im Bereich der Analysis anregen und unterstützen kann. In zukünftigen Forschungsaktivitäten gilt es die empirischen Erkenntnisse – etwa mithilfe quantitativer Erhebungsmethoden – noch fundierter abzusichern, wobei auch die Interdependenz der verschiedenen Grundvorstellungen berücksichtigt werden sollte.

## Literatur

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin: Springer Spektrum.
- Hoffkamp, A. (2011). *Entwicklung qualitativ-inhaltlicher Vorstellungen zu Konzepten der Analysis durch den Einsatz interaktiver Visualisierungen – Gestaltungsprinzipien und empirische Ergebnisse*. Berlin: Dissertation.
- Steinecke, A. (2019). Begreifen der Integralrechnung: Konzeption und empirische Erprobung montessori-pädagogischer Lernmaterialien zur Förderung vielfältiger Grundvorstellungen. In press.
- Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. Bishop et al. (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education* (S. 289-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimedia-basierter Supplantation*. Hildesheim: Franzbecker Verlag.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10(1), 3–37.