

Nina STEIN, Gießen & Katja LENGNINK, Gießen

Concept Images und Concept Definition zur Analyse von Aufgabenbearbeitungen zur Folgenkonvergenz

Lehramtsstudierende begegnen in ihrem Mathematikstudium einer zentralen Herausforderung: Zum einen sollen sie ein angemessenes Concept Image zu Begriffen der Hochschulmathematik aufbauen, um diese in der Schule angemessen propädeutisch anzubahnen (vgl. Tall & Vinner, 1981, S. 152). Zum anderen müssen sie den Umgang mit dem hohen Formalisierungsgrad der mathematischen Fachsprache erlernen, deren Kern die Concept Definition des mathematischen Begriffs bildet (vgl. ebd.). In verschiedenen Studien hat sich bereits angedeutet, dass das Concept Image der Studierenden nicht immer zur Concept Definition eines Begriffs passt (z.B. ebd.). In einer von mir durchgeführten Pilotstudie wurde das Zusammenspiel von Concept Image und Concept Definition während der Bearbeitung von mathematischen Übungsaufgaben untersucht, da mathematische Übungsaufgaben neben der Vorlesung ein wichtiger Bestandteil des Lernens von Mathematik an der Hochschule sind und die Lernenden hier in einem besonders hohen Maß aktiv sind. Für die Studie wurde der Begriff der Folgenkonvergenz gewählt, da die Konvergenz von Folgen ein grundlegendes Konzept der gesamten Analysis darstellt. Ein tiefes Verständnis der Concept Definition und der Aufbau eines angemessenen Concept Images sind im weiteren Verlauf der Analysis-Veranstaltungen von großer Bedeutung. Die Pilotstudie verfolgt die Forschungsfrage: „Welches Zusammenspiel findet zwischen dem (Evoked) Concept Image und der (Personal) Concept Definition während der Bearbeitung der Aufgaben zur Folgenkonvergenz statt?“

Theoretischer Hintergrund

Tall und Vinner versuchten 1981 erstmals mit den Begriffen Concept Image und Concept Definition zu erklären, wie Lernende mathematische Begriffe denken. Ihre Theorie basiert auf der Annahme, dass bei den Lernenden bereits vor der formalen Einführung eines Begriffs ein komplexes Gefüge aus inneren Repräsentationen, die durch den Begriff hervorgerufen werden, existiert. Diese kognitiven Strukturen sind veränderlich und werden als Concept Image bezeichnet. Es wird beschrieben als „total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes“ (ebd.). Oft wird durch einen bestimmten Stimulus nur ein kleiner Ausschnitt des Concept Images aktiviert, welcher Evoked Concept Image genannt wird. Das Gegenstück zum Concept Image bildet in der Theorie nach Tall und Vinner (1981) die Concept Definition.

Diese ist eine Ansammlung von Wörtern, die den Begriff spezifizieren. Individuell wird zu jeder Concept Definition von den Lernenden eine Personal Concept Definition konstruiert, die aus Wörtern besteht, die der Lernende wählt, um den Begriff zu erklären. Damit ist die Personal Concept Definition auch immer Ausdruck des zu dem Zeitpunkt aktivierten Evoked Concept Images (vgl. ebd.).

Concept Image zur Folgenkonvergenz

Um das Evoked Concept Image der Studierenden zu Folgenkonvergenz detaillierter beschreiben zu können, ist es hilfreich, dieses in verschiedene Bestandteile zu gliedern. Dazu finden sich in anderen didaktischen Theorien geeignete Zugänge, wie etwa die Grundvorstellungen, die Theorie der Begriffsbildung und die Darstellungsebenen zu einem Themenfeld.

Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff, die bei Schülerinnen und Schülern und dementsprechend auch bei Lehramtsstudierenden ausgebildet werden sollen, sind in der Literatur beschrieben. Hier sind die Annäherungsvorstellung und die Umgebungsvorstellung zu nennen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 104-106). Die Annäherungsvorstellung beschreibt das Zustreben der Werte der Folgeglieder an einen festen Wert, den Grenzwert. Hier wird eine dynamische Sicht auf den Grenzwertbegriff deutlich. Die Umgebungsvorstellung bietet eine statische Sicht. Nun muss zu jeder beliebigen Umgebung um den Grenzwert ein fester Wert gefunden werden können, sodass ab diesem Wert alle weiteren Folgewerte in dieser Umgebung liegen (vgl. ebd.).

Auch vielfältige Beispiele sind ein wichtiger Bestandteil des Concept Images, da diese unter anderem bei einem Beweis durch ein Gegenbeispiel notwendig oder zum Explorieren und Entdecken neuer Sätze hilfreich sind (vgl. Weigand, 2018, S. 85ff). In das Concept Image der angehenden Lehrkräfte sollten außerdem geeignete verbalsprachliche Beschreibungen integriert werden, da andernfalls die Gefahr besteht, dass durch ungeeignete Formulierungen im späteren Unterricht Fehlvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern erzeugt werden, die einer adäquaten Weiterentwicklung des Begriffsverständnisses im Wege stehen (vgl. Bender, 1991, S. 243).

Für ein erfolgreiches Bearbeiten einiger Übungsaufgaben ist es außerdem erforderlich, graphische und numerische Darstellungen miteinander verknüpfen zu können. Die Lernenden sollen Informationen aus graphischen und numerischen Darstellungen entnehmen können und durch das eigene Anfertigen von Darstellungen verfügbar machen. Darüber hinaus sollen sie die Angemessenheit einer Darstellung vor dem Hintergrund der Aufgabenstellung beurteilen können (vgl. Laakmann, 2013, S. 24).

Umgang mit der Concept Definition und anderer Formalsprache

Um die Lernhürden beim Umgang mit den formalen Definitionen der Hochschulmathematik zu beschreiben, ist es hilfreich, die Concept Definition um den Umgang mit anderen formalsprachlichen und symbolischen Ausdrücken zu erweitern. Neben dem Umgang mit der Definition gehört dazu also der Umgang mit mathematischen Sätzen, Beweisen, symbolischen Ausdrücken und Quantoren. Ostsieker und Biehler (2012) haben in einer explorativen Studie Fehler und Schwierigkeiten von Studierenden bei Aufgaben zur Konvergenz von Folgen kategorisiert. Dabei konnten sie feststellen, dass insbesondere das Umformen von symbolischen Ausdrücken fehleranfällig ist, Begründungen fehlen oder formale Aussagen unvollständig sind. Darüber hinaus zeigen sich ein mangelndes Verständnis der Definition und logische Fehler in der Beweisführung wie das Verwechseln von Behauptung und Voraussetzung (vgl. Ostsieker & Biehler, 2012, S. 641-644).

Qualitative Pilotstudie

Eine Pilotstudie zum Erfassen des Zusammenspiels von Concept Image und Concept Definition wurde im Sommersemester 2019 mit vier Gymnasiallehramtsstudierenden und sieben Haupt- und Realschullehramtsstudierenden durchgeführt. Alle Studierenden besuchten zu dem Zeitpunkt der Untersuchung eine Analysis-Veranstaltung der JLU Gießen, die üblicherweise im vierten Fachsemester belegt wird. In den Vorlesungen wurde der Begriff der Folgenkonvergenz klassisch über die ε - n_ε -Definition eingeführt. Die Veranstaltung für die Haupt- und Realschullehramtsstudierenden war allerdings reicher an Darstellungen und Beispielen als die Veranstaltung der Gymnasiallehramtsstudierenden. Für die Pilotstudie wurden vier Aufgaben so konzipiert, dass sie zum einen repräsentativ für hochschulmathematische Übungsaufgaben sind und zum anderen das Einbringen von Concept Image und Concept Definition in besonderer Weise ermöglichen. In der ersten Aufgabe wurden Fragen zur Definition gestellt, die zweite und dritte Aufgabe forderten Konvergenznachweise und die vierte Aufgabe forderte einen Beweis zu den Rechenregeln für Grenzwerte. Die Studierenden haben die Aufgaben in Einzelarbeit mit der Methode des lauten Denkens bearbeitet. Sie wurden also vorab gebeten, möglichst alle Gedanken, die ihnen während des Bearbeitens einer Aufgabe in den Sinn kommen, laut zu verbalisieren. So werden Daten über die kognitiven Prozesse, die zeitgleich zur Handlung ablaufen, erhoben (vgl. Sandmann, 2014, S. 179-181). Anschließend fand ein kurzes Leitfadenterview statt. Die Aufgabenbearbeitung und das Interview wurden videografiert und zum Teil transkribiert.

Erste Einblicke in die Pilotstudie

In einer ersten Analyse zeigt sich ein breites Spektrum an Bearbeitungen. Dabei fallen mit Blick auf die oben spezifizierten Bestandteile des Concept Images auf, dass Proband 1 eine Umgebungsvorstellung und eine Annäherungsvorstellungen ausgebildet hat. Er nutzt numerische und graphische Darstellungen einer Folge und wechselt häufig zwischen ihnen, um zu einer Vermutung über die Konvergenz zu gelangen. In Aufgaben, bei denen er Beispiele generieren möchte, verbleibt er bei der Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Mit Blick auf die Concept Definition lässt sich festhalten, dass es dem Studierenden meist nicht gelingt, eine formale Lösung wie zum Beispiel einen Konvergenzbe-
weis zu generieren. Es zeigt sich, dass auch Studierende mit passenden Grundvorstellungen zur Folgenkonvergenz nur wenig Erfolg bei der Über-
setzung von Vorstellungen in die formalsprachlich präzise Beweisführung im Bereich der Concept Definition haben. Durch eine detaillierte Analyse der Bearbeitungsprozesse sollen qualitative Ansatzpunkte identifiziert werden, die den Studierenden helfen, die notwendige Verknüpfung zwischen Concept Image und Concept Definition herzustellen.

Literatur

- Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* 4, 238-243.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). Aspects and „Grundvorstellungen“ of the Concepts of Derivative and Integral. Subject Matter-related Didactical Perspectives of Concept Formation. *Journal für Mathematikdidaktik* 37, 99-129.
- Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Eine Untersuchung in rechnergestützten Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Ostsieker, L. & Biehler, R. (2012). Analyse von Beweisprozessen von Studienanfänger/innen bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Konvergenz von Folgen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012: Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik* 2 (S. 641-644).
- Sandmann, A. (2014). Lautes Denken – die Analyse von Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 179-188). Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
- Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B.- & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. 3., erweiterte und überarbeitete Auflage*. Berlin: Springer Spektrum.