Anna Susanne STEINWEG, Bamberg

Muster und Strukturen: Anschlussfähige Mathematik von Anfang an

Mathematikdidaktik hat als Zieldimension immer den Mathematikunterricht im Blick. Die prinzipielle Ausrichtung des Mathematikunterrichts war noch nie so konsensual getragen wie aktuell. In den Bildungsstandards von der Primarstufe bis zur allgemeinen Hochschulreife finden sich, auch vor dem Hintergrund der bundesweiten Sinus-Projekte, gemeinsam getragene allgemeine Prozessziele und eine weitgehend anschlussfähige Einteilung der Inhalte von der Grundschule an. Der Bereich Muster und Strukturen scheint hier allerdings eine Sonderrolle einzunehmen, da er als Inhaltsthema in den Standards für die Primarstufe auftritt (Gesetzmäßigkeiten und funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen (KMK, 2005)) und in den Standards der weiterführenden Schulen in anderen Inhalten aufgeht. Offensichtlich ist somit eine genauere Betrachtung, was genau mit einer Orientierung an Mustern und Strukturen gemeint sein kann, lohnenswert.

Schon in den weiteren Publikationen zu den Bildungsstandards, die als Konkretisierungen verstanden werden, gibt es Kritik daran, Muster und Strukturen als eigenständige oder sogar unabhängige Inhaltsthematik zu verstehen. Vielmehr schlagen Wittmann & Müller (2007) vor, Muster und Strukturen allumfassend anzunehmen. Weiter plädieren sie dafür, das Wortpaar getrennt zu betrachten und Muster als Oberbegriff zu verwenden sowie dann von Strukturen zu sprechen, „wenn es sich um grundlegende, vorgegebene Muster handelt“ (S. 43). Diese hier genannte Vorgabe ist keine didaktische (durch Lehrperson oder Aufgabenstellung), sondern sie ergibt sich mathematisch aus Definitionen bzw. aus dem mathematischen Raum, d. h. einer Menge mit ihren mathematischen Strukturen (Wittmann & Müller, 2007).

Im Grundsatz haben sich die jüngsten Lehrpläne der Bundesländer dieser Einschätzung angeschlossen, sodass der Bereich Muster und Strukturen nun ebenfalls als ein alle Themen und Inhalte durchziehendes Element beschrieben wird. Die Lehrpläne bieten somit allerdings für die Schulpraxis keine Orientierungshilfe durch Konkretisierungen. Damit stehen Muster und Strukturen im Dilemma zwischen Diffusität und Allgegenwärtigkeit. Muster und Strukturen werden zum einen nicht durch bestimmte Inhalte greifbar und zum anderen scheinen sie stets thematisiert; was zu dem Fehlschluss führen könnte, sie bräuchten folglich keine weitere unterrichtliche Beachtung.

Muster und Strukturen sind jedoch wesentlich im wörtlichen Sinne für die Mathematik und alle mathematischen Tätigkeiten. Sie können von Anfang

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

an ein handlungsleitendes Modell sein, sich Mathematik in ihren Spezifika als ‚Wissenschaft der Muster' (Devlin, 1997) zu nähern. „Pattern is less a topic of mathematics than a defining quality of mathematics itself. Mathematics 'makes sense' because its patterns allow us to generalize our understanding from one situation to another. Children who expect mathematics to 'makes sense' look for patterns" (Brownell et al., 2014, S. 84). Diesem Grundgedanken soll im Weiteren nachgegangen werden.

Muster und Strukturen

Mathematik entzieht sich in ihren strukturellen Eigenschaften der konkreten Betrachtung. Diese Eigenschaften – und damit die strukturellen Zusammenhänge – können sich jedoch in Mustern zeigen. Sie werden damit als Phänomene beobachtbar und erlauben die von den Bildungsstandards erwarteten Tätigkeiten des Erkennens, Beschreibens und Darstellens: „The mathematical objects are nooumena, but a piece of mathematics can be experienced as a phainomenon; numbers are nooumena, but working with number can be a phainomenon" (Freudenthal, 1983, S. 28).

Vorgeschlagen wird hier von der Autorin also eine Klärung des Begriffspaars Muster und Strukturen durch je eine eigene Beschreibung:

- Muster sind Regelmäßigkeiten in sichtbaren Phänomenen.
- Strukturen sind mathematische Eigenschaften und Relationen.

Die Sichtbarkeit der Muster erlaubt den konkreten Zugriff des Erkennens, Fortsetzens und Beschreibens. Die Suche nach Begründungen des Musters erwartet, die Tür zu dahinterliegenden Strukturen zu öffnen und einen mathematischen Blick hinter die Kulissen des Musters zu werfen. Die Strukturen, d. h. die mathematischen Eigenschaften und Relationen, können dann als ursächlich für die Regelmäßigkeit des Musters erkannt werden. Schwarzkopf (2019) spricht hier von der im Mathematikunterricht notwendigen Balance zwischen empirischem Wissen und dem relational allgemeinen Wissen. Diese Einteilung entspricht auch den Hinweisen von Mulligan & Mitchelmore (2009), die zwei Komponenten der Bewusstheit für Muster und Strukturen definieren: Eine Tätigkeit bzw. Neigung als „tendency to seek and analyse pattern" geht hier mit der „knowledge of structure" als kognitive Komponente einher.

Mathematische Strukturen sind der Hintergrund *aller* mathematischer Phänomene. Damit ergibt sich erneut eine Schwierigkeit der Konkretisierung. Es gilt zu beschreiben, welche Muster-Türen im Unterricht zu thematisieren sind. Hilfreiche Hinweise bietet der Blick auf die internationale Forschung zu Mustern und Strukturen.

Muster und Strukturen international

Im internationalen Kontext sind Muster und Strukturen vom Kindergarten bis zum Schulabschluss selbstverständlicher Bestandteil eines Themenstrangs (Early) Algebra. Dieser wird in den international allgemein anerkannten Zugängen noch weiter unterteilt (vgl. Abb. 1). Hierbei werden neben Funktionen und Relationen insbesondere arithmetische Strukturen bzw. verallgemeinerte Arithmetik in den Inhaltskatalogen genannt.

		patterns	objects and order
generalised arithmetic	generalised arithmetic	arithmetical structures	operations
	equivalence, expressions, equations, and inequalities		equivalence
functional thinking	functional thinking	relations	functions
application of modelling languages			
Kaput (2008)	Blanton et al. (2019)	Kieran et al. (2016)	Steinweg

Abb. 1: Übersicht der Early Algebra Bereiche

Muster werden bei Kieran et al. (2016) gesondert betrachtet, in den anderen gehen sie in den genannten Strängen der Algebra auf. Kaput (2008) sieht Modellierungen und entsprechende Sprache als eigenständig, Blanton et al. (2019) differenzieren Gleichungen und Äquivalenzen von verallgemeinerter Arithmetik. Bei näherer Betrachtung der beschriebenen Beispiele sind jedoch weitgehende Übereinstimmungen festzustellen. Auffällig ist darüber hinaus, dass die inhaltlichen Lernpfade keine abgeschlossenen Themen beschreiben, sondern sich überlappen. Gleichungen gehören natürlich auch zur Arithmetik, ebenso sind Terme ein Element funktionaler Betrachtungen.

Folgt man den Ausführungen in deutschen Standards und Lehrplänen, so gehen alle Themenstränge im Gebiet Muster und Strukturen auf und werden nicht weiter differenziert. Auf den ersten Blick könnte es somit so scheinen, als sei der deutsche Themenkatalog damit den internationalen Ansätzen unterlegen bzw. würde die erforschten Bereiche einer (Early) Algebra nicht ernst nehmen. Im Vergleich mit den unterrichtlichen Angeboten, z. B. in Schulbüchern, wird jedoch deutlich, dass der deutschsprachige Mathematikunterricht sehr wohl nicht nur Muster, sondern auch arithmetische Strukturen bis hin zu Funktionen (wenn auch zumeist proportionale Zuordnungen) im Grundschulbereich thematisiert. Woran es also fehlt ist eine Bewusstheit dafür, dass z. B. die Einführung des kleinen Einmaleins über Kernaufgaben und

Ableitungsstrategien arithmetische Strukturen adressiert und damit Muster und Strukturen im besten Sinne aufgreift.

Muster-Türen zu wesentlichen Strukturen identifizieren

Die schlichte Übertragung der internationalen Vorschläge ist – insbesondere für die Schulpraxis – nicht direkt möglich. Dennoch regen die genannten Einteilungen dazu an, die in der Mathematik allgegenwärtigen Muster und Strukturen aus der inhaltlichen Perspektive genauer zu differenzieren. Vorgeschlagen wird hier eine Orientierung am spezifischen Fokus der unterrichtlichen Auseinandersetzung. In der Begegnung mit mathematischen Mustern können verschiedene Blickwinkel eingenommen, d. h. verschiedene Muster-Türen ausgewählt werden, die Eigenschaften von spezifischen mathematischen Phänomenen betrachten. Es ist für die Unterrichtspraxis – und auch die Forschung – dabei ein Unterschied auszumachen, ob z. B. Zahlen als Objekte in ihren Eigenschaften als gerade und ungerade Zahlen fokussiert werden oder ob durch geeignete Muster die Operation der Addition in $\mathbb{N}$ als kommutativ von den Lernenden entdeckt werden soll. Natürlich finden sich ebenso Beispiele aus der Geometrie: So kann z. B. die Operation der zentrischen Streckung als längenverhältnistreu, das Objekt Raute als zweifach achsensymmetrisch an den Diagonalen usw. erkannt werden. Der Fokus der Auseinandersetzung lässt sich also jeweils konkretisieren.

Vorgeschlagen wird von der Autorin hier demnach (vgl. Abb. 1), zwischen diesen jeweiligen Foki auf strukturelle Eigenschaften von

(i) Objekten und Ordnungen
(ii) Operationen und Äquivalenzen sowie
(iii) Funktionen

zu differenzieren.

Auch diese Einteilung ist natürlich keineswegs überlappungsfrei. Im Gegenteil besteht ja gerade die Komplexität der Muster darin, dass in vielen Fällen verschiedene Muster-Türen zu ganz unterschiedlichen Strukturen durchschritten und damit verschiedene Schwerpunkte fokussiert werden können.

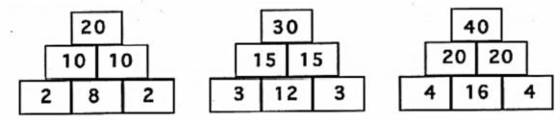

Abb. 2: Muster in und zwischen Zahlenmauern

Im wohlbekannten Aufgabenformat der Zahlenmauern (Abb. 2) kann z. B. das Muster entdeckt werden, dass die mittlere Zahl unten das Vierfache der Randzahlen ist; dies wäre ein Fokus auf Objekte. Wird hingegen beschrieben, dass die Zahlen in der mittleren Reihe das Fünffache der Randzahlen sind, da $1\cdot 2 + 4\cdot 2 = 5\cdot 2$, so werden Operationen in ihrer Eigenschaft Distributivität in den Mittelpunkt gestellt und genauer betrachtet.

Diese Reichhaltigkeit entsprechender Aufgaben kann im Mathematikunterricht dazu verführen, beliebig viele verschiedene Entdeckungen zu sammeln, die dann verinselt nebeneinander stehen bleiben und eine tiefere unterrichtliche Auseinandersetzung erschweren oder auch ausbleiben lassen. Für die zieltransparente Unterrichtsgestaltung ist es hingegen essenziell, dass die Lehrperson zum einen die verschiedenen Möglichkeiten der Betrachtung der vorliegenden Aufgabe selbst erkennt und zum anderen in der unterrichtlichen Auseinandersetzung die Lernenden gezielt auf die gemeinsame Betrachtung fokussiert. Hierzu kann die vorgeschlagene Differenzierung der Foki, die jeweils genau analysiert werden, eine Orientierung bieten.

Türen durchschreiten „ReCoDE the pattern“

Muster machen auf Eigenschaften aufmerksam, die zu weiteren Tätigkeiten und letztlich im besten Fall zum Durchschreiten der Muster-Tür führen, um strukturelle Zusammenhänge zu nutzen, zu beschreiben und argumentativ zu verallgemeinern. Die Entwicklung von Kompetenzen der Kinder in der Beschäftigung mit Mustern und Strukturen umfasst dabei mindestens vier Elemente, die anhand des entwickelten ReCoDE-Modells (Abb. 3, basierend auf eigenen Vorarbeiten, z. B. Steinweg, 2014) abgebildet werden können.

Re	*recognise*	sehen, hineindeuten
Co	*continue*	replizieren, nutzen, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren
D	*describe*	mündlich oder schriftlich kommunizieren
E	*explain*	argumentieren, erklären, verallgemeinern

Abb. 3: ReCoDE: Muster erforschen – Strukturen erklären

Alle ReCoDE-Elemente dienen als Orientierung für unterrichtliches Handeln und gleichzeitig zur Überprüfung von Aufgabenstellungen. Die in der jeweiligen Altersgruppe angebotenen Muster sollten immer einer argumentativen Verallgemeinerung und damit Begründung zugänglich sein, d. h. alle ReCoDE-Phasen ermöglichen.

Der erste Schritt ist eine rein mentale Tätigkeit, die sich dem beobachtenden Zugriff entzieht. Dennoch ist dieser Schritt wesentlich. Er kann nur dann allen Lernenden ermöglicht werden, wenn genügend Zeit für die individuelle Beschäftigung mit dem Muster eingeräumt wird. Weniger hilfreich ist es, sofort in Partner- oder Gruppenarbeit zu beginnen, da die eigene Denkhandlung dann nicht in die Kommunikation eingebracht werden kann (vgl. auch

Götze, 2007). Als sichtbares und der Kommunikation zugängliches Ergebnis der Phase dient die Tätigkeit des Nutzens und Fortsetzens. „Generalizing starts when you sense an underlying pattern, even if you cannot articulate it" (Mason, Burton & Stacey, 2010, S. 8). Selbst, wenn die Beschreibung also nicht oder noch nicht verbal erfolgen kann, zeigt die selbstständige Fortsetzung des Musters an, dass es als solches in seiner Regelmäßigkeit erkannt worden ist. Vielfältig erforscht ist, dass Kinder Musterkompetenzen vom Kindergarten an entwickeln können (z. B. Lüken, 2012; Benz, 2018). Ebenso ist im Kindergarten und Grundschulbereich nachgewiesen, dass sich ein Musterverständnis auf andere mathematische Kompetenzen positiv auswirkt bzw. dass umgekehrt Kinder mit hohen Kompetenzen, Muster zu erkennen und zu nutzen, in anderen mathematischen Bereichen bessere Leistungen zeigen als Kinder, die das nicht (von sich aus) können. Der enge Zusammenhang von Beschreibungen und vertiefter Auseinandersetzung sowie geeignete Anregungen sind ebenso in Forschungen adressiert worden (z. B. Link, 2012). Akinwunmi (2012) bietet eine differenzierte Betrachtung von verallgemeinernden Beschreibungen und Twohill (2018) integriert Beschreibungen und Begründungen und unterbreitet einen Vorschlag für einen Entwicklungsverlauf mit jeweiligen ‚growth points'.

Herausforderungen an Lehrerinnen und Lehrerbildung

Im Hinblick auf die Lernenden haben sich durchweg hohe Ansprüche an kommunikative und argumentative Kompetenzen etabliert. Muster als Phänomene sollen nicht nur beschrieben, sondern aufgrund der dahinterliegenden Strukturen auch begründet werden (s. o. ReCoDE-Modell und z. B. Bezold, 2009). Einen mindestens ebenso hohen und gleichzeitig doppelten Anspruch gilt es auch in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung anzustreben.

Die Thematisierung von Mustern darf zum einen nicht als methodischer Kniff missverstanden werden, sondern muss von den Lehrenden zunehmend und bewusst als Zugang zur Struktur der Objekte, Operationen und Relation und damit zum System der Mathematik verstanden werden. Fachinhalte sind demnach stets als Hintergrundinformation zu mathematischen Phänomenen zu kontextualisieren.

Darüber hinaus muss die Professionalisierung der Lehrenden zum anderen eine Bewusstheit für Schlüsselmomente und Lernchancen in der unterrichtlichen Auseinandersetzung schaffen. Möglichkeiten und Herausforderungen, eine solche professionelle Entwicklung zu fördern, werden im aktuellen internationalen Forschungsprojekt der Autorin gemeinsam mit Sharon McAuliffe und Aisling Twohill adressiert. Das Projekt richtet sein Hauptaugenmerk auf die Rolle der Lehrenden bei der unterrichtlichen Erarbeitung funktionaler Strukturen von wachsenden Punktmustern. Theoretischer Hintergrund sind dabei vorliegende Forschungen (z. B. Wilkie, 2015). McAuliffe (2013) konnte bereits in einer vorangehenden Studie besondere Herausforderungen in der professionellen Entwicklung von Lehrenden detailliert herausarbeiten. Diese Ergebnisse dienen nun als eine der Folien für das Design von Bildungs- und Fortbildungsangeboten. Neben der bewussten Wahrnehmung und dem stimmigen Aufgreifen der Beschreibungen der Kinder ist ebenso eine Schulung der Beurteilung von Aufgaben mit Mustern zu fördern, die (auf je entsprechendem Niveau der Lernenden) in den mathematischen Strukturen begründbar sein müssen (Steinweg, 2014).

Ausblick

Mathematik ist ein einzigartiges Fach, da Strukturen verlässlich gegeben sind und sich in Mustern zeigen. Muster sind jeweils eine anschauliche Reflexion der mathematischen Strukturen und können mit geschultem Bewusstsein „with the eyes of the mind" (Devlin, 1997, S. 4) gesehen werden.

Um Strukturen auf die Spur zu kommen, braucht es geeignete Aufgabenstellungen, die Muster-Türen anbieten, die durchschritten werden können. Die *bewusste Wahrnehmung der Muster-Türen zu mathematischen Strukturen* und damit zum System Mathematik gilt es auf Seiten der Lernenden und insbesondere auch auf Seiten der Lehrenden zu fördern.

Mathematikunterricht bietet damit eine besondere Chance, zukunftsfähige Kompetenzen zu fördern. Die immer stärkere Vernetzung der globalisierten Welt, die Erkenntnis, dass lokale Lösungen nicht hinreichend sind, sondern Zusammenhänge beachtet werden müssen, erwartet die Fähigkeit, systemisch zu denken. Mathematik bietet diesen Zugang zu einer zusammenhängenden Struktur und erlaubt die Entwicklung eines solchen systemischen Blicks auf Relationen. Die Verlässlichkeit der Zusammenhänge und die Erfahrung, dass es möglich ist, Strukturen zu verstehen, erlauben den Aufbau besonders tragfähiger und wesentlicher Kompetenzen. Die Anschlussfähigkeit der von Kindergarten und Grundschule an erarbeiteten Erkenntnisse über mathematische Strukturen in den Sekundarbereich hinein ist ein weiteres Argument für diese bewusste unterrichtliche Thematisierung.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Benz, C. (2018). Den Blick schärfen. In A. Steinweg (Hrsg.), *Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln* (S. 9–24). Bamberg: ubp.

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbst differenzierende Lernangebote*. Hamburg: Kovac.

Blanton, M. L., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E. & Murphy Gardiner, A. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics,*102(2), 193–219.

Brownell, J., Chen, J.-Q. & Ginet, L. (2014). *Big Ideas of Early Mathematics*. Boston u.a.: Pearson.

Devlin, K. (1997). *Mathematics: The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*. 2nd printing. New York: Scientific American Library.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Dodrecht, Boston, Lancester: Reidel.

Götze, D. (2007). *Mathematische Gespräche unter Kindern*. Hildesheim: Franzbecker.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Hrsg.), *Algebra in the early grades* (S. 5–17). New York: Routledge.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer.

KMK (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich* – Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht.* Münster: Waxmann.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. 2nd edition. London: Pearson Education Ltd.

McAuliffe, S. (2013). *The development of preservice teachers' content knowledge for teaching early algebra*. PhD thesis, Cape Peninsula University of Technology. http://etd.cput.ac.za/handle/20.500.11838/1975

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal,* 21(2), 33–49.

Schwarzkopf, R. (2019). Produktive Kommunikationsanlässe im Mathematikunterricht der Grundschule. In A. Steinweg (Hrsg.), *Darstellen und Kommunizieren* (S. 55–68). Bamberg: ubp.

Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends – Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51–66). Bamberg: ubp.

Twohill, A. (2018). *The construction of general terms for shape patterns*. PhD thesis, Dublin City University. http://doras.dcu.ie/22206/

Wilkie, K. J. (2015). Learning to teach upper primary school algebra: changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal,* 28(2), 245–275.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen.