Peter STENDER, Halle

Repräsentationswechsel und Superzeichenbildung in der Bruchrechnung

1. Einleitung

Heuristische Strategien im Sinne von Pólya (2010/1973) oder Dörner (1976) sind in erster Linie Strategien zum Problemlösen. Die bei der Entwicklung mathematischer Gegenstände verwendeten Strategien hinterlassen jedoch Spuren in der so entwickelten Mathematik, so dass sich in den Gegenständen heuristische Strategien rekonstruieren lassen, die für den Umgang mit diesen relevant sind.

Eine breite Konzeptionalisierung von heuristischen Strategien (z.B. Stender, 2019) unter Einbeziehung verschiedener Autoren (neben Pólya z.B. Engel, 1977; Kießwetter, 1977; Tietze, 1978, Bruder & Collet, 2011) ermöglicht dabei ein differenziertes Analysekonzept für Tiefenstrukturen in der Mathematik. Dabei haben sich zwei Strategien als besonders relevant herausgestellt: die Verwendung von Superzeichen (Kießwetter, 1977) und der flexible Wechsel der Repräsentation eines Gegenstandes Pólya (2010/1973). Wenn Kinder diese Strategien selbständig verwenden, ist dies ein gutes Indiz für mathematische Begabung (z. B. Fritzlar, 2013). Daraus kann man schließen, dass diese Strategien besonders relevant in der Mathematik sind und gleichzeitig für weniger begabte besonders schwierig sind.

Hier wird als Beispiel die Bruchrechnung hinsichtlich dieser beiden Strategien analysiert und es werden Konsequenzen für den Unterricht gezogen.

2. Superzeichenbildung

Das Konzept der Superzeichenbildung (Dörner (1976) nennt es „Komplexion“) wurde von Kießwetter (1977) in die Fachdidaktik eingeführt. Das Konzept korrespondiert mit Chunks / Bündeln (Miller, 1956) und meint „ein Zeichen, das für mehrere Zeichen steht.“ Die Verwendung von einzelnen Buchstaben für Mengen, Vektoren, Matrizen, Funktionen oder Punkten (aus zwei oder drei Koordinaten) gehört dazu, aber auch Begriffe für mathematische Gegenstände oder Algorithmen. Beim Umgang mit diesen Superzeichen muss regelhaft flexibel zwischen der Verwendung der Elemente / Komponenten und „dem Ganzen“ hin und her gewechselt werden. Dies erweist sich als schwierig von der Grundschule bis in die Universitätsmathematik.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

3. Repräsentationswechsel

Die Auswahl einer geeigneten Repräsentation eines Sachverhaltes erweist sich oft als Schlüssel für eine besonders einfache Lösung eines Problems. Bruner (1967) unterscheidet drei Ebenen der Repräsentation (EIS: enaktiv, ikonisch, symbolisch), wobei in der Mathematik in jeder dieser Ebenen oft unterschiedliche Darstellungen auftreten, die für jeweils spezifische Fragestellungen besser geeignet sind (Schnotz, 2010).

Werden verschiedene Darstellungen für dasselbe Objekt verwendet, muss dabei klar werden, dass wirklich dasselbe Objekt dargestellt wird: nur wenn der Wechsel zwischen den Repräsentationen unverzüglich gelingt, ist diese „Objektkonstanz" zwischen den verschiedenen Repräsentationen beim Lernenden gegeben. Dabei impliziert die Kenntnis der Repräsentationen nicht notwendig die Fähigkeit zum Repräsentationswechsel, diese muss oft explizit gelehrt und gelernt werden.

In der Mathematik wird oft zwischen verschiedenen Darstellungen eines Gegenstandes gewechselt, so dass in der Lehre wichtig ist, diese Repräsentationen und die Repräsentationswechsel bewusst zu verwenden, insbesondere wenn diese Repräsentationswechsel den Lernenden noch nicht vertraut sind.

4. Superzeichen beim Bruchrechnen

Brüche sind Paare von (natürlichen oder ganzen) Zahlen und somit Superzeichen. Eine rationale Zahl kann dabei mit unendlich vielen verschiedenen Zahlenpaaren (Brüchen) dargestellt werden, die durch Erweitern oder Kürzen ineinander übergehen können. Alle Brüche, die eine rationale Zahl darstellen, bilden damit wiederum ein Superzeichen. Durch Brüche dargestellte rationale Zahlen sind also Superzeichen (Brüche erweitern) von Superzeichen (Zahlenpaaren) und somit ein komplexes mathematisches Konstrukt. In der Universitätsmathematik wird dies über Äquivalenzklassen von Zahlenpaaren konstruiert, diese Komplexität wird beim Bruchrechnen in der Schule vollständig wirksam, auch wenn die Begriffe nicht verwendet werden (sollten!). Ist man erfahren im Umgang mit Brüchen, wechselt man ständig den Repräsentanten (erweitern / kürzen), aber auch den Aspekt, ob man im Bruch „zwei Zahlen" (Nenner und Zähler) oder „eine Zahl" (Wert des Bruches) sieht. Wir schreiben $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ aber dies ist nicht immer richtig: in Klassenarbeiten gibt es zuweilen für die linke Antwort die volle Punktzahl, für die rechte nicht. Richtig ist diese Gleichheit, wenn man den Wert des Bruches meint oder die korrespondierende Divisionsaufgabe, die Brüche selbst sind nicht gleich, sondern verschiedene Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse. Wann was gemeint ist, ist Lehrpersonen immer klar, Lernenden oft nicht.

Beim Umgang mit Brüchen müssen also beide auftretenden Superzeichen ständig gebildet (vom Teil zum Ganzen) oder aufgefaltet (vom Ganzen zum Teil) werden. Bevor man zum Kalkül (Addition, Multiplikation oder Vergleich von Brüchen) übergeht, müssen diese Übergänge für Lernende in hohem Maße vertraut sein.

5. Repräsentationswechsel beim Bruchrechnen

Brüche werden in der Schule in vielen verschiedenen Weisen dargestellt. Für das Entwickeln von Verständnis sind ikonische (und ggfs. enaktiv entwickelte) Darstellungen unverzichtbar, für die Bruchkalküle (Addieren, Multiplizieren, Vergleichen) symbolische Darstellungen. Für die Anwendung von Brüchen sind weitere Repräsentationen notwendig. Eine Liste erforderlicher Repräsentationen umfasst mindestens die folgenden Darstellungen:

- Enaktiv / ikonisch: Kreisteil (auch: Uhr, Pizza, Kuchen, …), Zahlenstrahl (auch: Füllstände, Teil einer Schnur, andere Längenanteile), Teil einer Rechteckfläche (für die Klärung der Multiplikation von Brüchen), Anteile an diskreten Mengen ($\frac{3}{4}$ der Kinder).
- Symbolisch: $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$,…0,75, 75%, 3 : 4, 270°.
- Verbal: dreiviertel.
- Anwendung: Übersetzungsverhältnis (Zahnräder), Maßstab, Wahrscheinlichkeit, Steigung einer Straße / Geraden.

Dies sind mindestens (je nach Zählweise) neun verschiedene Repräsentationen mit 81 Repräsentationswechsel oder mehr. Ein großer Teil dieser Repräsentationswechsel ist notwendig, um das Begriffskonzept „Bruch“ zu verstehen und diese müssen von Schülerinnen und Schülern dementsprechend beherrscht werden, **bevor** die Bruchkalküle erlernt werden können, da diese auf Grundlage dieser Repräsentationswechsel **erklärt** werden.

6. Konsequenzen für den Unterricht

Bevor Bruchrechenunterricht in die Kalküle zum Vergleichen, Addieren und Multiplizieren von Brüchen einsteigt, müssen Schülerinnen und Schüler den Umgang mit Brüchen selbst erlernen. Dies umfasst die Fähigkeit, Brüche in den meisten der oben genannten Repräsentationen darstellen zu können und bezüglich konkreter Brüche zwischen diesen Repräsentationen flexibel wechseln zu können. Die große Anzahl der benötigten Repräsentationen und Repräsentationswechsel macht dies zu einem umfangreichen Lernprojekt, das nicht in wenigen Unterrichtsstunden realisiert werden kann. Enaktive und ikonische Darstellungen müssen in großem Umfang verwendet werden.

Dazu kann beispielsweise das Herstellen und Beschriftung von Bruchkreisteilen aus Papier gehören und das Operieren mit diesen Kreisteilen, z. B. zum Vergleich von Brüchen, zum Vergleich von Brüchen mit Winkeln etc.

Gerade in leistungsschwächeren Lerngruppen sollte sich dabei auf diejenigen Repräsentationen beschränkt werden, die für weitere Erklärungen unbedingt notwendig sind, da Repräsentationswechsel selbst zunächst als schwierig wahrgenommen werden und ein „representational overkill“ (vgl. Seeger 1998) droht.

Literatur

Bruner, Jerome Seymour (1967). On Cognitive Growth: I. In Jerome Seymour Bruner (Hrsg.), *Studies in cognitive growth. A collaboration at the Center for Cognitive Studies* (S. 1-29). John Wiley & Sons Inc.

Engel, Arthur (1977). *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*. 1. Aufl. Stuttgart: Klett (Klett Studienbücher: Mathematik).

Bruder, Regina & Collet, Christina (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Dörner, Dietrich (1997). *Die Logik des Misslingens. Strategisches Denken in komplexen Situationen.* Hamburg: Rowohlt.

Fritzlar, Torsten (2013). Mathematische Begabungen im Grundschulalter. Ein Überblick zu aktuellen mathematikdidaktischen Forschungsarbeiten. *mathematica didactica* 36, 5-27.

Miller, George A. (1956). The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on our Capacity for Processing Information. *Psychological Review* 63, 81-97.

Pólya, George (1973). *How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

Pólya, George (2010). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. 4. Aufl. Tübingen, Basel: Francke (Sammlung Dalp).

Schnotz, W., Baadte, Chr. & Müller, A. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. de Jong & J. Elen (Hrsg.), *Use of representations in reasoning and problem solving. Analysis and improvement* (S. 11-35). London, New York: Routledge (New perspectives on learning and instruction).

Seeger, F. (1998). Representations in the Mathematics Classroom: Reflections and Constructions. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Hrsg.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (S. 308-343). Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press.

Stender, Peter (2019). Heuristic Strategies as a Toolbox in Complex Modelling Problems. In Gloria Stillman & Jill Brown (Hrsg.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (S. 197-212).

Tietze, Uwe-Peter (1978). Heuristik – Überlegungen und Untersuchungen zu kognitiven Strategien im MU. *mathematica didactica* 1, 43-54.