Moritz L. SÜMMERMANN, Köln

Entwicklung von mathematischen Lernumgebungen als mathematikdidaktische Forschung

Die Digitalisierung verändert alle Aspekte unseres Lebens und damit auch die Art, wie wir Mathematik betreiben können. Beispiele dafür gibt es zur Genüge, von digital erschaffenen und von 3D-Druckern realisierten Modellen (z. B. die Skulptur in Abb. 1, links), über Visualisierungen (z. B. Hyperbolic VR in Abb. 1, rechts, KnotPortal in Abb. 3), bis hin zu interaktiver Software (z. B. Ariadne in Abb. 2).

Abb. 1: 3D-Druck des Menger-Schwamms (Bill Owens, CC-BY-CC0), Hyperbolic VR (http://h3.hypernom.com, unter MIT Licence Expat, https://www.tldrlegal.com/l/mit)

Diese Umgebungen müssen nicht notwendigerweise einen didaktischen Hintergrund haben, teils handelt es sich dabei nicht um ein Werkzeug zum Lernen, sondern es dient der Darstellung von Mathematik und folgt dabei einem Selbstzweck (wie die Skulptur in Abb. 1). Bei anderen Entwicklungen ist es durchaus das Ziel, einem Lernenden Einblicke zu ermöglichen; über einen neuen und ungewohnten Blickwinkel wie bei GeoGebra, welches es radikal einfacher macht, geometrische Objekte zu erzeugen und zu verändern als in traditionellen Papier-und-Bleistift-Umgebungen, oder sogar aus einer zuvor nicht möglichen Perspektive, wie in Projekten wie Hyperbolic VR (Hart, Hawksley, Matsumoto & Segerman, 2017) oder KnotPortal.

Die Frage, welche nach Erfahrung des Autors dabei oft gestellt wird, lautet, ob diese Entwicklung solcher letzterer didaktisch orientierten Umgebungen *an sich* ein Teil mathematikdidaktischer Forschung sein sollte.

Dabei geht es nicht um eine „ingenieurwissenschaftliche Sicht der Fachdidaktik als design science“ (Wittmann, 1998), bei der die Entwicklung von Lernumgebungen in Einheit mit der Evaluierung durch empirische Studien steht. Stattdessen geht es um das Ansehen der Entwicklung selbst als eigenständige wissenschaftliche Arbeit, welches zurzeit in der durch empirische Bildungsforschung geprägten Mathematikdidaktik keinen Platz findet. Dies

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

geht hinaus über den stoffdidaktischen Mehrwert, den solche Umgebungen haben können.

Diese Frage haben andere Disziplinen wie Physik oder Informatik schon entschieden. Dort ist die Entwicklung z. B. eines Chips für einen Detektor (Germic, 2019) ein klarer Teil der Forschung, nicht nur eine Vorarbeit zu ebenjener.

Um diese Frage auch für die Mathematikdidaktik entschieden zu bejahen, werden im Folgendem zwei Projekte des Autors vorgestellt, bei denen die Entwicklung einer Software zu didaktischen Erkenntnissen geführt hat. Dadurch wird aufgezeigt, wie Entwicklung und Untersuchung solcher Umgebungen miteinander verwoben sind. Dabei stellen die Untersuchungen lediglich Beispiele von Erkenntnisprozessen dar, welche durch das Anfertigen von Umgebungen ausgelöst werden können.

1. Ariadne

Ariadne ist ein Projekt zum Konstruieren von und Interagieren mit Homotopien von Wegen auf der Ebene (Sümmermann, 2019). Der Nutzer kann durch Berührungsgesten auf einem geeigneten Gerät wie einem Tablet-PC oder einem Smartphone Punkte, Wege zwischen Punkten und Homotopien zwischen Wegen konstruieren.

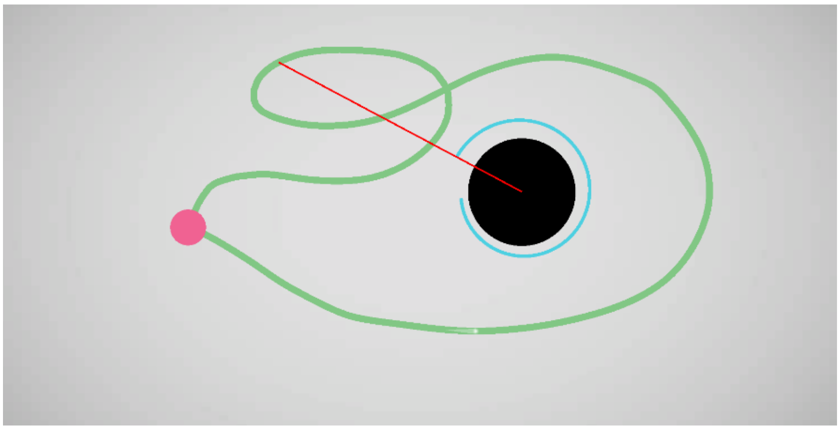

Abb. 2: Ein vom Nutzer gemalter Weg um eine Punktierung auf der Ebene in Ariadne. Es wird gerade die Windungszahl des Weges um die Punktierung berechnet.

Diese Konstruktionen, zusammen mit der Darstellung von Invarianten wie der Windungszahl, ermöglicht die mathematische Untersuchung von Phänomenen wie der Fundamentalgruppe der mehrfach punktierten Ebene.

1.1 Untersuchungen zu Ariadne

Bei der Entwicklung und Erprobung von Ariadne ist aufgefallen, dass die Lernumgebung zusammen mit dem Lerngegenstand der Topologie neue Arten der Beweisführung möglich macht (Sümmermann, Sommerhoff & Rott, in review). Dabei wurden Erkenntnisse über die Bedeutung von Beweisen in solchen Umgebungen an sich gewonnen.

Bisher ist die gängige Meinung, dass Computerumgebungen einen Beitrag zum Beweisen nur über das Sammeln von Beispielen und der damit verbundenen Erkundung eines Problems dienen können (Hanna, 1998). Mit Ariadne konnte beispielhaft gezeigt werden, dass man Argumentationen auf Software in einer solchen Art und Weise stützen kann, dass durchaus von Beweisen die Rede sein kann.

2. KnotPortal

KnotPortal ist eine Software zum Erzeugen von begehbaren dreidimensionalen Überlagerungen. In KnotPortal wird eine Frage angegangen, welche von Bill Thurston aufgeworfen wurde: Angenommen, man hätte einen Draht aus einem magischen Material. Sobald man die Enden des Drahtes verbindet, reißt man ein Portal in ein anderes Universum auf. Aber was geschieht, wenn man, bevor man die Enden verbindet, einen Knoten in den Draht bindet? Wie viele Portale entstehen und in wie viele (und welche) Welten führen sie?

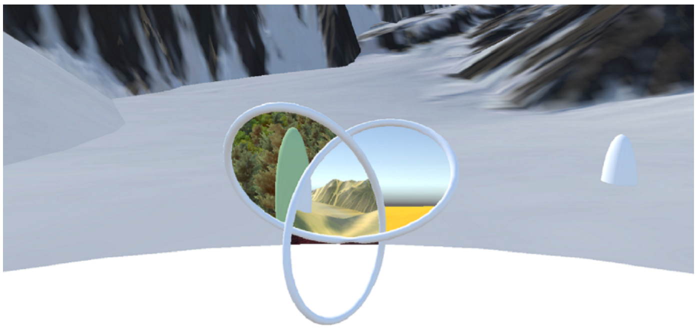

Abb. 3: Blick auf den Kleeblattknoten in KnotPortal. Man kann durch die gebildeten Portale in 4 andere Welten sehen.

In KnotPortal werden diese Portale in Virtual Reality dargestellt und sind frei begehbar. Damit kann der Nutzer durch Bewegen seines Körpers und seines Kopfes neue Perspektiven gewinnen und so besser verstehen, wie die Portale aufgebaut sind.

Mathematisch „verbirgt“ sich hinter dieser Darstellung die Theorie der Überlagerungen, in diesem Fall entlang eines Knotens verzweigte Überlagerungen des Komplements des Knotens. Wie im Fall von Ariadne kann die interaktive Visualisierung ein Thema zugänglich machen, welches für die formale Aufarbeitung einiges an Vorarbeit verlangen würde.

2.1 Untersuchungen zu KnotPortal

KnotPortal stellt eine Umgebung bereit, in der Embodiment (Gerofsky, 2015) in einem mathematikdidaktischen Kontext untersucht werden kann. Dabei geht es tatsächlich um Nutzung des Körpers zur Erkenntnisgewinnung, nicht nur, wie in der Literatur oft beschrieben, Nutzung der Finger bei Einsatz von touchbasierter Software. KnotPortal gibt damit die Möglichkeit, den Begriff des Embodiments mit Inhalt zu füllen.

3. Implikationen

Ohne die Software wären die Erkenntnisse nicht möglich gewesen. Digitalisierung wird in der Mathematikdidaktik eine Worthülse sein, wenn nicht die Forschung aktiv an der Erstellung von Materialien und Untersuchung von dabei auftretenden neuen Phänomenen teilhat. Daher muss der Erstellung solcher Umgebungen der notwendige Platz eingeräumt werden.

Dies ist zu unterscheiden von der empirischen Untersuchung existierender Umgebungen mit dem Ziel einen bestimmten Effekt, wie zum Beispiel die Wirksamkeit auf den Lernerfolg, zu untersuchen. Es geht vielmehr um das Erkennen der Möglichkeiten und Grenzen, welche diese neuen Umgebungen bieten. Der Prozess der Digitalisierung darf dabei nicht als „Black Box“ behandelt werden, welcher aufs Geratewohl Objekte wie Apps o. ä. produziert, die dann durch die Forschung auf ihre Eigenarten untersucht werden. Vielmehr muss die Forschung es als ihren ureigenen Auftrag wahrnehmen, die Eigenarten eben dieses Prozesses zu untersuchen.

Literatur

Germic, Leonard (2019). *Data Handling Processor and Signal Transmission in the Belle II DEPFET Pixel Detector* (Dissertation, Physik). Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.

Gerofsky, S. (2015). Approaches to embodied learning in mathematics. In L. D. English & D. Kirshner (Hrsg.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (S. 72–109). Routledge.

Hanna, G. (1998). *Proof as Explanation in Geometry. Focus on Learning Problems in Mathematics.*

Hart, V., Hawksley, A., Matsumoto, E. & Segerman, H. (2017). Non-euclidean Virtual Reality I: Explorations of H3. In *Proceedings of Bridges 2017: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture* (S. 33–40). Tessellations Publishing.

Sümmermann, M. L. (2019). Ariadne – A Digital Topology Learning Environment. *The International Journal for Technology in Mathematics Education,* 26 (1), 21–26.

Sümmermann, M. L., Sommerhoff, D. & Rott, B. (in review). Mathematics in the Digital Age: The Case of Simulation-Based Proofs.

Wittmann, E. C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung,* 16 (3), 329–342.