

Kinga SZÜCS, Erfurt & Lukas TRAXL, Erfurt

## **Einstellung von Lehramtsstudierenden mathematischen Beweisen gegenüber – Erstellung eines Kategoriensystems**

Hohe Abbruchquoten in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern, Brücken- und Crashkurse und Tutorien in Mathematik an Hochschulen deuten auf eine große Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik hin. Die Gründe hierfür sind vielfältig, ein wichtiger Aspekt ist dabei die unterschiedliche mathematische Kultur, die in den Schulen bzw. an den Hochschulen herrscht. Hierbei spielen Beweise eine wichtige Rolle, wie Jahnke und Ufer (2015, S. 350) formulieren: „Besonders die Studienanfangsphase in Studiengängen mit Schwerpunkt Mathematik stellt Studierende vor die Herausforderung, Verständnis für die Beweis- und Argumentationskultur der wissenschaftlichen Mathematik zu erwerben. Theoretisch fundierte und empirisch evaluierte Ansätze sind hier derzeit kaum verfügbar, haben jedoch das Potential für eine nachhaltige Unterstützungsmaßnahme zu Beginn des Studiums.“ Um die genannten Ansätze der Förderung entwickeln zu können, soll die beweisbezogene Diskrepanz zwischen Schule und Hochschule empirisch erfasst werden. Hierzu wird eine Befragung auf Schüler-, Studierenden- und Lehrerseite entworfen, zu der die Studien von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) sowie von Törner und Grigutsch (1994) als Vorbild dienen.

### **1. Forschungsdesign**

Im Mittelpunkt der Studie stehen die folgenden drei Forschungsfragen: Welche konkreten Erfahrungen machen Schülerinnen und Schüler in der Schule bzw. Studierende an der Hochschule mit Beweisen in der Mathematik? Welchen Stellenwert messen sie Beweisen und dem Prozess des Beweisens bei? Was sind ihre Beliefs über Beweise sowie über den Prozess des Beweisens? In einem ersten explorativen Schritt werden zu diesen Forschungsfragen Hypothesen generiert. Dies erfolgt im Rahmen einer schriftlichen Befragung, bei der zu acht offenen Fragen Studierende ihre Erfahrungen mit und ihre Einstellungen zu Beweisen frei äußern können. Die Antworten werden im Sinne der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) zu Kategorien, die jeweils eine Hypothese darstellen, zusammengefasst. In einem weiteren Schritt wird eine Auswahl an diesen Kategorien in Form von Items im Rahmen einer weiteren schriftlichen Befragung von Lehramtsstudierenden pilotiert. Hierbei werden erste Rückschlüsse über die Tauglichkeit des erstellten Kategoriensystems gezogen. In einem letzten Schritt wird das Kategoriensystem überarbeitet und eine einschlägige schriftliche, digitale Befragung entworfen, die ebenfalls vorwiegend quantitativ ausgewertet wird.

## 2. Offene Befragung zur Generierung von Hypothesen

Die oben genannte schriftliche Befragung mit acht offen formulierten Fragen wurde im Februar 2018 an der Friedrich-Schiller-Universität in drei Übungsgruppen durchgeführt. Teilgenommen haben insgesamt 48 Studierende des Lehramts Mathematik, wobei durch die teilweise freie Belegung der Module alle Fachsemester vom ersten bis zum neunten abgedeckt waren. Die Teilnahme erfolgte freiwillig und anonym. Die handschriftlichen Antworten wurden durch vollständiges Abtippen digitalisiert, Rechtschreibfehler wurden dabei korrigiert. Exemplarisch sollen die nachfolgenden Beispiele einen Einblick in die Befragung und deren Auswertung gewähren.

Die fünfte Frage auf dem Fragebogen lautete: „Beweise kommen in den Bildungsstandards erst im Anforderungsbereich III in der Sekundarstufe II explizit vor, im aktuellen Thüringer Lehrplan erscheinen sie nur indirekt: Einfache Varianten von Beweisen als Realisation der Entwicklung von mathematischen Argumentationen. Wie stehen Sie dazu? Würden Sie die Beweise im Lehrplan / in den Bildungsstandards verankern? Begründen Sie Ihre Meinung.“ Diese Frage wurde von 44 Probanden beantwortet. Anhand einer zufälligen Stichprobe von zehn Antworten wurden Kategorien gebildet, die anschließend auf den restlichen Korpus angewandt wurden. Tabelle 1 verdeutlicht, wie die vollständige Antwort des Probanden 1 (erste Spalte) nach der Methode der Qualitativen Inhaltsanalyse zuerst paraphrasiert (zweite Spalte) und anschließend zu drei Kategorien generalisiert (dritte Spalte) wurde.

Kodiereinheit	Paraphrasierung	Generalisierung
Ich bin mir sehr unsicher. Beweise eröffnen ein tieferes Verständnis für die Mathematik und sind wichtig für das logische Denken. Aber ich sehe die Gefahr, dass Beweise am Ende einfach auswendig gelernt werden (was einfach nur ätzend ist).	<p>Unsicherheit</p> <p>Beweise eröffnen tieferes Verständnis für die Mathematik</p> <p>Beweise sind wichtig für das logische Denken.</p> <p>Gefahr des Auswendiglernens.</p>	<p>Beweise haben eine Verständnisfunktion.</p> <p>Beweise fördern das logische Denken.</p> <p>Beweise haben methodische Vor- und Nachteile.</p>

Tab. 1: Erzeugung von Kategorien anhand des Textmaterials

Da im Allgemeinen die gleichen Kategorien aus mehreren Textstellen entstehen (können), sollen jeweils die für eine Kategorie typischen Aussagen, die sogenannten Ankerbeispiele, festgehalten werden. Tabelle 2 zeigt Ankerbeispiele für zwei der drei Kategorien, die in Tabelle 1 vorkommen.

Kategorie	Ankerbeispiele
Beweise haben eine Verständnisfunktion.	„Beweise eröffnen ein tieferes Verständnis für die Mathematik und sind wichtig für das logische Denken.“ „Für einen Beweis wird Transferwissen gefragt; außerdem sorgt ein Beweis für ein tieferes Verständnis der zu beweisenden Aussage.“
Beweise haben methodische Vor- und Nachteile.	„Aber ich sehe die Gefahr, dass Beweise am Ende einfach auswendig gelernt werden (was einfach nur ätzend ist).“ „Ja, ich würde sie verankern. Da durch den CAS-Einsatz das "Denken" gefördert wird, halte ich es für sinnvoll da anzuknüpfen und diese "Art" des mathematischen und logischen Denkens direkt mit anzugreifen“

Tab. 2: Ankerbeispiele für drei Kategorien

Im Zusammenhang mit der fünften Frage sind 16 Kategorien abstrahiert worden, aus dem gesamten Textmaterial sind insgesamt 73 Kategorien entstanden, die jeweils eine Hypothese bezogen auf das Beweisen darstellen. Diese können zu folgenden übergeordneten, allerdings nicht trennscharfen Kategorien (in Anlehnung an Grigutsch, Ratz & Törner, 1998, S. 9) zusammengefasst werden: (1) Erfahrungen mit Beweisen, (2) Einstellungen über Beweise als Bestandteil der Mathematik als Wissenschaft, (3) Einstellungen über das Lernen von Beweisen, (4) Einstellungen über das Lehren von Beweisen.

### 3. Erste Items und deren Pilotierung

Eine Auswahl von 13 der ermittelten 73 Kategorien, die allerdings alle vier oben genannten übergeordneten Kategorien abdecken, wurde im Rahmen der Staatsexamensarbeit von Traxl (2019) pilotiert. Da schulische Erfahrungen mit Beweisen insbesondere bei Studienanfängern oft von Einstellungen über das Lernen von Beweisen nicht zu trennen sind, wurde im Rahmen der Arbeit darauf geachtet, dass die Schülersicht (Oberkategorien (1) und (3)), die Lehrersicht (Oberkategorie (4)) und die allgemeine Einstellung (Oberkategorie (2)) durch eine ähnliche Anzahl an Items (9, 8 bzw. 7) belegt werden. Die Items waren bis auf eines, auf einer 5-Punkte-Likert-Skala erfragt. Um nicht nur die Einstellungen von Studienanfängern zu Beweisen, sondern auch die Veränderung der Einstellungen erfassen und Hypothesen hierüber formulieren zu können, wurde die schriftliche Befragung bei Erstsemesterstudierenden insgesamt zu drei (vor Semesterbeginn, Semestermitte und -ende), bei allen anderen Jahrgängen zu zwei (Semesteranfang und -ende)

verschiedenen Zeitpunkten durchgeführt. Die Wiederholung der Studie sowie die Beachtung der durch das Studium entstandenen Erfahrungen bei höheren Semestern erforderten eine leichte Anpassung der Items, auf die hier nicht näher eingegangen wird. Eine stichprobenartige Ermittlung der Korrelationen zwischen allen Items untereinander in der letzten Datenerhebung zeigt, dass ähnliche Items korrelieren oder stark korrelieren, während eher kontroverse Items negativ korrelieren (Traxl, 2019, S. 43-44). Somit kann – zumindest die vorliegende Auswahl an Kategorien und Items – als valide angesehen werden. Überdies hat die Studie weitere Hypothesen über die Veränderung von Einstellungen während des Studiums geliefert (bspw. „Im Laufe des ersten Semesters [...] nimmt die Zustimmung zur Behandlung von Beweisen in der Schule und der Universität [...] signifikant ab,“ Traxl, 2019, S. 58), die als zusätzliche Kategorien in das bereits vorhandene Kategoriensystem eingehen sollen. Außerdem ergab die Auswertung von offenen Äußerungen zur Studie drei weitere Kategorien, die sich alle auf das Lernen von Beweisen (Oberkategorie (4)) beziehen (ebenda).

#### **4. Revidierung des Kategoriensystems**

Durch die Erweiterung des erstellten Kategoriensystems durch die oben beschriebenen zusätzlichen Kategorien, die sich aus der Pilotierung ergaben, besteht es aktuell aus 78 Kategorien. Auch wenn bisher keine ungeeigneten oder missverständlichen Items gefunden wurden, wird aus Handhabungsgründen eine Reduktion durch inhaltliche Überlegungen auf ca. 50 Kategorien und 100 Items angestrebt. Anschließend sollen ein digitaler Fragebogen, der in erster Linie 5-Punkt-Likert-Skala-Items enthalten soll, erstellt sowie zwei weitere Versionen für Lehrer und Schüler formuliert werden.

#### **Literatur**

- Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal der Mathematikdidaktik*, 19, 3-45.
- Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In Bruder, R. et al. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331-355). Berlin & Heidelberg: Springer Spektrum.
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim & Basel: Beltz.
- Törner, G. & Grigutsch, S. (1994). Mathematische Weltbilder bei Studienanfängern – eine Erhebung. *Journal der Mathematikdidaktik*, 15, 211-251.
- Traxl, L. (2019). *Einstellungen von Mathematiklehramtsstudierenden der Mathematik zum Beweisen – Konzeption, Durchführung und Evaluation einer Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena*. Wissenschaftliche Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien. Erfurt: Landesprüfungsamt der Lehrämter des Freistaates Thüringen.