Franziska TILKE, Münster & Karina HÖVELER, Münster

Konstanzeigenschaften erkunden: Schwierigkeiten beim Ordnen der individuellen Erkenntnisse

Ausgangspunkte und theoretischer Hintergrund

Das Wissen über die Operationseigenschaften wie Kommutativität, Assoziativität, Distributivität sowie die Konstanzeigenschaften ist für vorteilhaftes Rechnen und die Förderung des algebraischen Denkens von hoher Relevanz (Steinweg, 2013). Die *Konstanzeigenschaften der Operationen* (zum Beispiel der Differenz: $a - b = (a + x) - (b + x)$) bieten unter anderem Vorteile beim geschickten Rechnen, so kann die Aufgabe $63 - 29$ durch gleichsinniges Verändern zu $64 - 30$ einfacher gelöst werden. Die Thematisierung der Konstanzeigenschaften kann im Unterricht beispielsweise auf der Basis von Entdeckerpäckchen erfolgen (Steinweg, 2013). Das Entdecken dieser mathematischen Strukturen ist ein bedeutsamer Lerngegenstand für den inklusiven Mathematikunterricht (Schöttler, 2019) und erfüllt die Gegenstandsreichhaltigkeit als Prinzip für ein erfolgreiches mit- und voneinander Lernen (Korten, 2018). Konstanzeigenschaften können ebenso wie andere (Eigenschafts-) Strukturen mit dem Fokus auf Besonderheiten und lokale Beziehungen wie spezielle Zahlen als sogenannte ‚emergente Strukturen' oder mit dem Fokus auf generische oder allgemeine Beziehungen als ‚mathematische Strukturen' analysiert werden (Venkat, Askew, Watson & Mason, 2019). Somit werden durch „Situativität und Allgemeinheit" (Korten, 2018, S. 1053) zieldifferente Lernprozesse für alle Kinder im inklusiven Unterricht ermöglicht. Dass das Verbleiben bei emergenten Strukturen eine Hürde für das Nutzen der Eigenschaften im Unterricht darstellt, konnte Stern (1998, S. 214) aufzeigen, da „das mathematische Verständnis etwa der Hälfte der Kinder am Ende der Grundschulzeit […] auf aufgabenspezifischen und deshalb nicht transferierbaren expliziten Regeln basiert". Für die unterrichtlichen Anforderungen müssten diese jedoch auf einem „generalisierbaren Niveau explizit verfügbar sein" (Stern 1998, S. 215).

Die meisten Studien zu Eigenschaftsstrukturen in der Grundschule fokussieren darauf, wie Lernende Strukturen beschreiben oder erklären (z. B. Kieran, 2018). Forschungsergebnisse, ob und wie die Lernenden das neue Wissen über die Strukturen auf andere Situationen übertragen, fehlen (Kieran, 2018). Barzel, Hußmann, Leuders und Prediger (2012) haben für die Sekundarstufe ein Konzept entwickelt, dass neben den Kernprozessen Erkunden, Vertiefen und Üben auch eine Phase des Ordnens erhält. Im Kernprozess *Ordnen* wer-

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

den individuelle Ideen und Erkenntnisse strukturiert und mit mathematischen Konzepten verbunden (Systematisieren) und als konsolidiertes Wissen und Können angeeignet, um langfristig darauf zuzugreifen (Sichern). Das Ordnen stellt somit für den Inhalt der Konstanzeigenschaften den Übergang von den individuellen Entdeckungen zum geschickten Rechnen im alltäglichen Unterricht dar. Trotz der Relevanz des Ordnens für die individuellen Lernprozesse gibt es bisher noch wenig Forschung in diesem Bereich (Prediger, Hußmann, Leuders & Barzel, 2014). Die Frage nach Bedingungen für das erfolgreiche Systematisieren und Sichern wurde bisher noch nicht erforscht (Schnell, 2014). Für die Sekundarstufe entwickelten Prediger et al. (2014) verschiedene kognitive Aktivitäten für das Ordnen, ob und wie sich diese auf die Grundschule übertragen lassen, gilt es zu untersuchen.

Die Studie

Aufgrund des skizzierten Forschungsdesiderats ist es das Ziel der nachfolgend dargestellten fachdidaktischen Entwicklungsforschungsstudie, herauszufinden, wie Lernende im inklusiven Mathematikunterricht in der Grundschule in der Phase des Ordnens angeregt werden können, ihre neuen individuellen Erkenntnisse zu strukturieren, um diese flexibel im Unterricht zu nutzen. Zu diesem Zweck wurde ein Lehr-Lern-Arrangement zu Konstanzeigenschaften entwickelt, das in drei Zyklen iterativer Design-Experimente analysiert, erforscht und weiterentwickelt wird. In dem Lehr-Lern-Arrangement werden die Kinder im Rahmen von Entdeckerpäckchen ($57 - 36, 56 - 35, 55 - 34, 54 - 33$) angeregt, die Konstanzeigenschaften zu entdecken und die Erkenntnisse durch gezielte Arbeitsaufträge (u. a. Regeln formulieren; Beispiele & Gegenbeispiele sortieren) anschließend zu ordnen. Als Forschungsrahmen dient das Dortmunder FUNKEN-Modell (Prediger et al., 2012). Im Rahmen der Studie werden folgende Fragestellungen auf der Forschungs- (F) und Entwicklungsebene (E) untersucht:

(F) Wie verlaufen individuelle Lernprozesse von Kindern beim Systematisieren und Sichern der Erkenntnisse über Konstanzeigenschaften in der Phase des Ordnens?

(E) Wie kann ein Lehr-Lern-Arrangement gestaltet sein, um im inklusiven Mathematikunterricht die individuell-zieldifferenten Erkenntnisse über Konstanzeigenschaften in der Phase des Ordnens weiterzuentwickeln?

Im Folgenden wird auf der Forschungsebene ein Einblick in die Erkenntnisse des ersten Zyklus gegeben. Es wird auf der Basis einer induktiv angelegten qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) aufgezeigt, welche *Hürden in den Lernprozessen* beim Ordnen auftreten. Die Datengrundlage bildet dazu das videografierte und transkribierte Lehr-Lern-Arrangement.

Ausgewählte Ergebnisse und Ausblick

Nachdem die Lernenden die Konstanzeigenschaften individuell erkundet hatten, waren sie in der Phase des Ordnens aufgefordert, eine (allgemeine) Regel zu formulieren (vgl. ‚Explizite Formulierung' als kognitive Aktivität nach Barzel et al., 2012). Im Austausch mit seinem Mitschüler Leo fand Jonas über die Konstanzeigenschaft der Differenz heraus, dass Minuend und Subtrahend eins kleiner werden müssen und notierte folgende Regel:

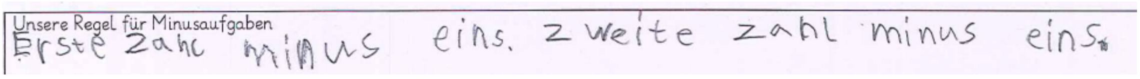

Abb.: Regel für die Konstanzeigenschaft der Differenz von Jonas und Leo

Die Jungen notierten den speziellen Fall der Verminderung von Minuend und Subtrahend um eins. Sie bezogen sich dabei auf eine lokale Beziehung, also eine ‚*emergente Struktur*' (Venkat et al., 2019). Eine Verallgemeinerung erfolgte nicht. Die Jungen blieben, wie bei Stern (1998) beschrieben, bei einer aufgabenspezifischen Formulierung der Regel. Ebenso beschrieben die meisten Kinder eine emergente Struktur. Eine Verallgemeinerung der mathematischen Struktur notierte kein Paar. Weiterhin stellte sich heraus, dass zwei Paare nicht in der Lage waren, eine *Regel zu formulieren*, wenngleich sie die Strukturen in der Phase des Erkundens beschrieben hatten.

In einer weiteren Aufgabe sollte das neue Wissen anhand von Beispielen und Gegenbeispielen vertieft werden (vgl. ‚Konkretisierung & Abgrenzung' als kognitive Aktivität nach Barzel et al., 2012). Die Kinder waren aufgefordert, ohne zu rechnen zu entscheiden, ob ein präsentiertes Entdeckerpäckchen auf den Konstanzeigenschaften basiert (‚gleiches Ergebnis') oder nicht (‚Ergebnis verschieden'). Im Folgenden wird ein typisches Gespräch analysiert:

Mats und Emil arbeiteten an dem Päckchen: $57 - 36, 57 - 35, 57 - 34, 57 - 33$:

Mats So. Warte kurz. 21, lass mich kurz 22, Ergebnis verschieden (*schiebt das Päckchen zu ‚Ergebnis verschieden'*).

Als nächstes Päckchen wählten die Schüler: $57 - 36, 56 - 35, 55 - 34, 54 - 33$:

Mats Lass kurz, ehm, das ist 21, 21 alles gleich (*schiebt das Päckchen zu ‚Ergebnis gleich'*).

Die Schüler rechneten die Aufgaben aus und entschieden dann über ihre Zuordnung. Das Beispiel zeigt, dass die beiden Jungen auf das *Ausrechnen fokussierten* (obwohl sie aufgefordert waren, nicht zu rechnen), anstatt ihre Aufmerksamkeit auf die mathematische Struktur zu richten. Dabei hatten die Jungen diese in der Phase des Erkundens identifiziert und eine Regel formuliert. Die identifizierte Hürde *Perspektivwechsel von konkreten Zahlen zur mathematischen Struktur* wird von Steinweg (2013) als typische Schwierigkeit für das algebraische Denken herausgestellt.

Die Analyse zeigt, dass obwohl viele Lernende Eigenschaftsstrukturen in der Erkundungsphase erkannt hatten, sie diese in der Phase des Ordnens erstens häufig nicht (allgemein) beschreiben und zweitens nicht wiedererkennen und nutzen konnten. Dies verdeutlicht die Relevanz von speziellen Reflexionsaufträgen, die das Ordnen der Erkenntnisse fördern. Im Sinne des inklusiven Unterrichts sollen alle Kinder einen Zugang zur situativen, emergenten Struktur finden und viele Kinder sich zunehmend der mathematischen Struktur annähern. Für den zweiten Entwicklungszyklus sollen daher spezifische Aufträge und Materialien entwickelt und erprobt werden, die dazu beitragen die beschriebenen Hürden zu überwinden (E) und die Lernenden zu befähigen, das neue Wissen in anderen Situationen nutzen zu können. Gleichzeitig sollen die Lernprozesse (F) genauer beschrieben werden.

Literatur

Barzel, B., Hussmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012). Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern – Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 93-96). Münster: WTM Verlag.

Kieran, C. (2018). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*, ICME-13 Monographs (S. 79-105). Cham: Springer.

Korten, L. (2018). Gemeinsam individuell Lernen: Zieldifferente Förderung flexibler Rechenkompetenzen im inklusiven Mathematikunterricht – Herausforderung und Chance. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1051-1054). Münster: WTM Verlag.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., überarbeitete Auflage). Weinheim: Beltz Verlag.

Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T. & Barzel, B. (2014). Kernprozesse – Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (S. 81-92). Münster: WTM Verlag.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU*, 65(8), 452-457.

Schnell, S. (2014). *Muster und Variabilität erkunden. Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall*. Wiesbaden: Springer.

Schöttler, C. (2019). *Deutung dezimaler Beziehungen: Epistemologische und partizipatorische Analysen von dyadischen Interaktionen im inklusiven Mathematikunterricht*. Wiesbaden: Springer.

Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Lengerich: Pabst.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule*. Berlin: Springer.

Venkat, H., Askew, M., Watson, A. & Mason, J. (2019). Architecture of mathematical structure. *For the Learning of Mathematics*, 31(1), 13-17.