Annika UMIERSKI, Bielefeld

„Unterwegs zur Regel" – Zum Verallgemeinern von distributiven Zusammenhängen

Für die unterrichtliche Erarbeitung des kleinen Einmaleins kann das ganzheitliche Konzept nach Gaidoschik (2014) ein wichtiger Orientierungspunkt sein. Dessen Kernidee ist es, die Schüler/innen zu befähigen, unbekannte Multiplikationsaufgaben durch den Rückgriff auf auswendig gelernte Kernaufgaben und das Nutzen mathematischer Gesetze, wie z. B. des Distributivgesetzes, lösen zu können. Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner (2018, S. 50) sprechen in diesem Zusammenhang von einem strategischen Werkzeug, das aufgabenunabhängig und flexibel eingesetzt werden kann.

Sollen Lernende das Distributivgesetz im Sinne eines strategischen Werkzeugs flexibel nutzen können, sind Verallgemeinerungsprozesse erforderlich. Die Lernenden müssen in der Arbeit mit konkreten Multiplikationsaufgaben die allgemeine algebraische Struktur des Distributivgesetzes erkennen, um diese dann auf unbekannte Aufgaben übertragen zu können. Im Hinblick auf ein solches Verallgemeinern unterscheidet Ellis (2007) drei mentale Prozesse. In Anlehnung daran kann von einem Verallgemeinern distributiver Zusammenhänge gesprochen werden, wenn Kinder **Gemeinsamkeiten** zwischen unterschiedlichen Multiplikationsaufgaben **identifizieren** („immer eine 3"), wenn sie eine **Regelmäßigkeit** in Aufgaben entdecken und diese an weiteren Aufgaben **überprüfen** („das geht auch, weil hier eine 3 ist") oder wenn sie eine allgemeine Struktur erfassen und ihre **Regel kontextunabhängig erweitern** („wenn hier immer dieselbe Zahl ist"). Derartige Verallgemeinerungsprozesse können zumindest potenziell vom Kind selbst ausgehen und als ein mentaler Konstruktionsprozess verstanden werden (Strachota et al., 2018). Sie können aber auch durch Impulse von außen angeregt und als ein mentaler Konstruktionsprozess verstanden werden, der dann auch eine soziale Seite hat (Strachota et al., 2018, S. 356).

Um die soziale Einbettung und Realisierung von Verallgemeinerungsprozessen besser zu verstehen und für eine adaptive Förderung nutzen zu können, wird in dem vorgestellten Dissertationsprojekt den Fragen nachgegangen:

- Welche Regeln und Regelbedingungen formulieren die Lernenden beim Verallgemeinern von distributiven Zusammenhängen?
- Inwiefern können Impulse, die auf einzelne Prozesse des Verallgemeinerns abzielen, eine Veränderung bereits formulierter Regeln und Regelbedingungen anregen?

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Datenerhebung

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden leitfadengestützte Einzelinterviews mit Drittklässler/innen durchgeführt. In den Interviews wurde ausschließlich das distributive Zusammensetzen zweier Multiplikationsaufgaben thematisiert. Um Verallgemeinerungsprozesse, wie das Überprüfen einer Regelmäßigkeit (Ellis, 2007), anzuregen, bezogen sich die Impulse im Interview auf Aufgaben, die u.a. hinsichtlich der Position des Faktors variierten: „Kann man 5x3 mit der 2x3 oder 3x2 verbinden?“. Die dabei genutzten Aufgaben wurden z. T. symbolisch auf Aufgabenkarten (Abb. 1) und z. T. konkret-gegenständlich in Form von Holzblöcken (Abb. 1) präsentiert.

Abb.1: Symbolische Aufgabenkarten und Holzblöcke 3x3 und 2x3

Datenauswertung und Ergebnisse

Um der ersten Forschungsfrage nachzugehen, wurden die videografierten Daten zunächst inhaltsanalytisch sortiert. Unterschieden wird bezüglich der Regel selbst und der Regelbedingung. Basierend auf einer stoffdidaktischen Analyse, ergeben sich zwei deduktive Kategorien (Tab. 1, Z.1).

Regel beim Zusammensetzen		**Regelbedingung/Gültigkeitsbereich**
Gemeinsamer Faktor unverändert, additive Verknüpfung der beiden anderen Faktoren: 2x3 + 4x3 = 6x3		Ein gemeinsamer Faktor in beiden Aufgaben muss gleich sein: 2x**3** und **3**x4
Übergeneralisierung: Verknüpfung aller Faktoren: 2x3 + 4x3 = 6x6		Hinterer Faktor beider Aufgaben muss gleich sein: 2x**3** und 4x**3**

Tab. 1: Beispiele für Regeln und Regelbedingungen

Kategorien weiterer und davon abweichender Regeln und Regelbedingungen wurden induktiv gebildet und können beispielhaft der zweiten Zeile in Tabelle 1 entnommen werden. Insgesamt verwendeten die Kinder im Kontext der distributiven Zusammenhänge fünf unterschiedliche, teils unkorrekte Regeln beim Zusammensetzen der Multiplikationsaufgaben und formulierten sechs abweichende oder zusätzliche Regelbedingungen.

Am Beispiel von Ole kann die Nutzung einer solchen abweichenden Regelbedingung, die zwar im Kontext distributiver Zusammenhänge nicht falsch ist, jedoch nicht den gesamten Geltungsbereich des Distributivgesetzes umfasst (Tab.1, Z.2, Sp.2), illustriert werden:

1	08:27	Int.	5 mal 3\ könnte ich die mit der 2 mal 3 verbinden/ [legt die 5x3-Karte oberhalb der 2x3-Karte auf den Tisch]
2	08:32	Ole	ja\ denn dann wären es ja 7 mal 3 und das hier passt dann ja auch [zeigt mit Zeigefinger und Daumen auf die beiden hinteren Dreien der Aufgabenkarten] sind ja zweimal die Drein hier\
3	08:43	Int.	ja und dürfte ich die 5 mal 3 auch mit der 3 mal 2 verbinden/ [legt die 3x2-Karte neben die 5x3-Karte]
4	08:45	Ole	(.) nein\ (.) denn es sind ja auch nicht die zw die beiden gleichen [zeigt auf die 3 der 2x3-Karte & auf die 2 der 3x2-Karte] es ist umgekehrt aber man darfs trotzdem nicht\

Während Ole die Aufgaben 5x3 und 2x3 entsprechend der distributiven Strukturen zur Aufgabe 7x3 zusammensetzt (turn 2) und damit eine mathematisch allgemeingültige Regel anwendet, verneint er ein mögliches Zusammenfügen der Aufgaben 5x3 und 3x2 (turn 4). Dementsprechend bezieht sich Oles Regelbedingung ausschließlich auf Aufgaben, deren jeweils zweiter Faktor identisch ist (Tab.1, Z.2, Sp.2).

Zur Analyse unterschiedlicher Verallgemeinerungsprozesse (Ellis, 2007) und zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage wurden einzelne Szenen qualitativ interpretiert. Das folgende Transkript knüpft an die obige Szene zwischen Ole und der Interviewerin an. Es lassen sich zwei Verallgemeinerungsprozesse, das Überprüfen einer Regelmäßigkeit (turn 5-10) und das aufgabenunabhängige Ausweiten der Regel (turn 11-12), identifizieren:

5	09:22	Int.	sonst mach doch mal\ such doch mal ob du hier [zeigt in Richtung der Blöcke] den 5 mal 3 und 3 mal 2 Block findest\
6	09:30	Ole	hmm (.) ja der 5 mal 3\ [nimmt den 5x3-Block und legt in ihn vor sich ab] ja und der hier [legt den 2x3-Block an den 5x3-Block] (10 sec.) ja das sind dann aber 3 mal 7\ [...]
7	10:02	Int.	ja wieso geht das auch/ (7 sec.) [...]
8	10:21	Ole	[schaut auf den Tisch] (20 sec.) ahh weil man die Blöcke zusammenschieben kann und es sind trotzdem auch 3 hier\ [zeigt mit der Daumen und Zeigefinger auf die erste Dreierspalte des zusammengeschobenen Blockes]
9	10:47	Int.	ja und siehst du auch [...] das in den Aufgabenkarten/
10	10:52	Ole	ja da man das geht auch- obwohl die 3 woanders da ist\ [zeigt auf 3x2- und 5x3-Karte]
11	10:56	Int.	ja\ das heißt wenn du einem anderen Kind erklären müsstest- wann zwei Mal-Aufgaben zu einer neuen Mal-Aufgabe verbinden kannst\ wie würde deine Regel dann lauten/
12	11:10	Ole	also es müssen in beiden Kärtchen [zeigt auf 3x2- und 5x3-Karten] die die ne doppelte Zahl vorkommen- denn sonst gehts nicht\

Ole wird aufgefordert unter Verwendung der Holzblöcke die Gültigkeit seiner Regel bezüglich der Aufgaben 5x3 und 3x2 zu prüfen (turn 5), obwohl er dies zuvor auf Basis seiner Regelbedingung verneint hatte (turn 4). Das Überprüfen der Regel (Ellis, 2007) ist damit impulsgesteuert von der Interviewerin veranlasst worden. Durch das Zusammenschieben der passenden Holzblöcke und sein Deuten einer gemeinsamen Blockseite als einen gemeinsamen Faktor (turn 8), erweitert Ole seine Regelbedingung von einer festen auf eine variable Faktorposition: „das geht auch- obwohl die 3 woanders da ist" (turn 10). Hier kann demnach von einer sozial eingebetteten Verallgemeinerung (Strachota et al., 2018) gesprochen werden, in der der Lernende durch sein Handeln mit den Blöcken (veranlasst durch den Impuls) den Geltungsbereich seiner Regel erweitert (Ellis, 2007). Der Ausdruck „ne doppelte Zahl" (turn 12) deutet daraufhin, dass Ole seine Regelbedingung (turn 10) auf alle (ihm bekannten) Multiplikationsaufgaben ausgeweitet hat, denn die Reichweite seiner Regelbedingung gilt nun über ein konkretes Aufgabenbeispiel hinaus. Damit macht Ole einen weiteren Schritt auf seinem Weg hin zur Nutzung des Distributivgesetzes als strategisches Werkzeug (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018). Da der Impuls (turn 11) den Fokus auf diese allgemeine Regelbedingung lenkt, wurde auch hier eine sozial eingebettete Verallgemeinerung (Strachota et al., 2018) hervorgebracht.

Fazit

Am Beispiel von Ole konnte gezeigt werden, dass sowohl unterschiedliche Regelbedingungen im Kontext distributiver Zusammenhänge auftreten als auch Impulse entsprechend der Verallgemeinerungsprozesse zu Umformulierungen der Regeln bzw. Regelbedingung führen können (turn 4, 12). Durch das Prüfen verschiedener Aufgaben anhand der Holzblöcke hat Ole seine Regelbedingungen den der distributiven Strukturen angepasst. Wie dabei multimodale Ressourcen (Sprache, Symbole, Material) genutzt werden, ist ein weiterer Gegenstand des Forschungsprojektes.

Literatur

Strachota, S., Knuth, E. & Blanton, M. (2018). Cycles of Generalizing Activities in the Classroom. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (S. 351-378). Cham: Springer.

Ellis, A. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221-262.

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten.* Seelze: Klett und Kallmeyer.

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen – Förderung – Beispiele.* Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.