Alexander UNGER, Berlin, Falk EBERT, Berlin &
Luise FEHLINGER, Berlin

Thales und Co – Vom Beweis zum Satz

Antworten auf die Frage „Warum?“ zu liefern, ist eine zentrale mathematische Tätigkeit (Jahnke & Ufer, 2015). Beispielhaft am Satz des Thales werben wir daher dafür, das Argumentieren und Beweisen in den Mittelpunkt des Mathematikunterrichts in der Schule zu stellen. Dazu präsentieren wir eine enaktive Möglichkeit, wie nicht der Satz, sondern zuerst ein Beweis entdeckt werden kann. Das anschließende Formulieren des Satzes als erwiesene Tatsache wird damit zum Höhepunkt. Die Stärke der Argumente verdeutlichen wir, indem wir mit denselben Ideen auch die bekannten Sätze über Sehnenvierecke und Peripheriewinkel über ihre Beweise kennenlernen.

Ausgangspunkt

Viele Lehrerinnen und Lehrer haben sicher gute Erinnerungen an Einführungsstunden zum Satz des Pythagoras. Mit Puzzleteilen wird ein gegebenes Quadrat auf verschiedene Arten gelegt. Fast „von allein“ offenbart sich dadurch der Satz des Pythagoras. Die Schülerinnen und Schüler sind stolz auf ihre Entdeckung. Sie wissen am Ende der Stunde, dass dieser Satz wahr ist, weil sie ihn selbst bewiesen haben – durch das Puzzle. In vielen Klassen ist es sogar möglich, die Schülerinnen und Schüler auf passenden Niveaus erklären zu lassen, warum das Puzzle den Satz beweist.

Von solchen Stunden könnten wir mehr gebrauchen. Wünschenswert ist daran vor allem, dass nicht zuerst der Satz über (Mess-)Ergebnisse entdeckt wird und im Anschluss oft mühevoll die Beweisbedürftigkeit zur Begründung der Richtigkeit der Ergebnisse geweckt werden muss (Almeida, 2001, Winter, 1983), sondern umgekehrt der Satz über seine Argumente gefunden wird, wodurch die Richtigkeit des Satzes sofort einsichtig klar ist.

Eine weitere solche Möglichkeit möchten wir für den Satz des Thales vorschlagen.

Impuls

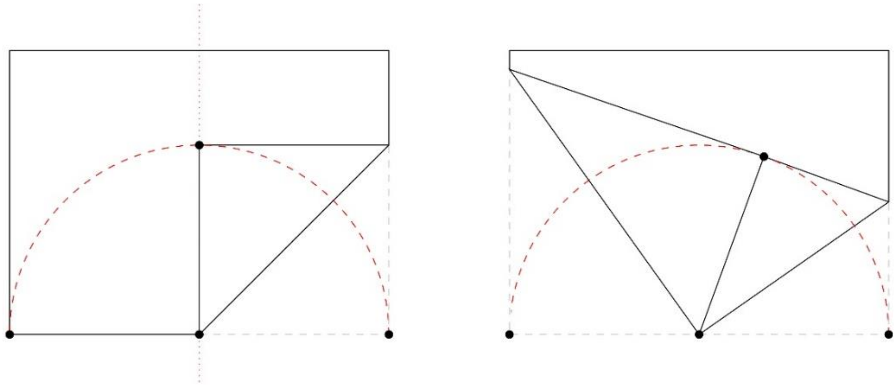
Nimm ein Blatt Papier und finde nur durch Falten und Markieren einen Punkt, der auf dem Halbkreis über der unteren Papierkante liegt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen. Viele Schülerinnen und Schüler werden sicherlich recht schnell den Punkt auf dem Halbkreis senkrecht zur Papierkante über ihrem Mittelpunkt erzeugen können. Manch einer wird vielleicht auch die Ecken des Papiers als Punkte auf dem

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Halbkreis identifizieren. Wunderbar, gut mitgedacht! Nun sollte der Impuls erweitert werden: Kannst du noch einen weiteren Punkt finden? Lässt sich dieser Punkt nur auf diese eine Art und Weise falten?

Es entstehen Faltungen wie die Folgende:



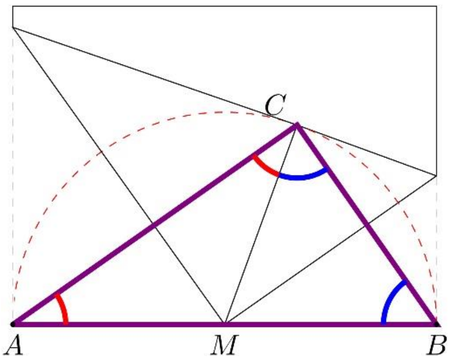
Viele Mathematiklehrerinnen und -lehrer kommen übrigens auf die Idee, eine Umkehrung des Satzes des Thales zu nutzen, indem zunächst eine Gerade gefaltet wird, die durch den einen Eckpunkt der unteren Papierkante geht, und dann eine zweite, dazu senkrechte Gerade, die durch den anderen Eckpunkt geht. Den meisten Schülerinnen und Schülern steht dieses Wissen natürlich noch nicht zur Verfügung – und das soll es ja auch nicht. Sie können den Fokus nur auf das einzige legen, was sie in diesem Zusammenhang kennen: den Begriff des Kreises, definiert über Mittelpunkt und Radius. Ein Punkt liegt genau dann auf dem Kreis um den Punkt M mit dem Radius r, wenn sein Abstand zu M gleich r ist. Da der Radius das zentrale Mittel war, sollten wir alle benutzten Radien farbig markieren.

Die Entdeckung des Beweises

Wir haben in unsere Konstruktion des Punktes Informationen über Strecken und ihre Längen reingesteckt. Können wir damit über andere Objekte etwas herausbekommen? Welche Objekte könnten wir untersuchen?

- Geraden: Welche Eigenschaften könnten diese haben?
- Winkel: Interessant, sie würden uns auch etwas über Geraden verraten.
- Dreiecke: Die haben schon oft im Mittelpunkt gestanden. Welche Dreiecke finden wir hier?
- Strecken: Vielleicht finden wir Informationen über weitere Strecken – ein wesentliches Mittel, um etwas über Dreiecke herauszubekommen.

Um den Überblick zu bewahren und den Fokus auf wenige Objekte zu richten, bietet es sich an, das große Dreieck auszuschneiden und dann in diesem Dreieck möglichst viel über Geraden, Winkel, Dreiecke und Strecken herauszufinden. Selbstverständlich soll dazu die Faltung genutzt werden, schließlich ist der konstruierte Punkt auf diese Weise entstanden. Die Ergebnisse werden ikonisch gefasst, zum Beispiel durch Markieren mit Farben:



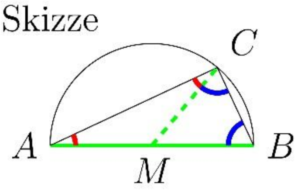
Die Entdeckung des Satzes

Nun wird sich der bekannte Beweis des Satzes des Thales recht schnell entwickeln. Falls bereits durch das Untersuchen von Geraden und ihren Eigenschaften die Idee im Raum steht, dass der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter sein könnte, liegt es nahe, diesen mit der Innenwinkelsumme des Dreiecks in Verbindung zu bringen. Andernfalls kann das Untersuchen der Innenwinkelsumme als Impuls in die Klasse gegeben werden. Die Erkenntnisse können auf der Ebene eines präformalen Beweises gesichert werden (Blum & Kirsch, 1991) oder aufbauend auf der ikonischen Präsentation (z.B. auch durch Einkleben des gefalteten Dreiecks ins Heft) in einem knappen Tafelbild wie z.B. dem folgenden festgehalten werden, das die Übertragung auf die formale Ebene einschließt:

Wenn in einem Dreieck ABC der Punkt C auf dem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ liegt, dann ist der Winkel $\measuredangle ACB$ ein rechter Winkel.

Beweis:

Skizze



Es gilt $|\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}|$ (Radien).
Also sind ΔAMC und ΔBMC gleichschenklig mit Basen $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$.
Aus dem Basiswinkelsatz folgt:

$$\begin{array}{rrcccl} & |\measuredangle MAC| & = & |\measuredangle ACM| & = & \alpha \\ \text{und} & |\measuredangle MCB| & = & |\measuredangle CBM| & = & \beta. \end{array}$$

Aus dem Innenwinkelsummensatz folgt für ΔABC:

$$\begin{array}{rcll} \alpha + \beta + (\alpha + \beta) & = & 180^\circ & \\ 2\alpha + 2\beta & = & 180^\circ & \mid :2 \\ \alpha + \beta & = & 90^\circ. & \end{array}$$

Also gilt $|\measuredangle ACB| = 90^\circ$. $\square$

Mit den Argumenten zu weiteren Sätzen

Damit der Beweis des Satzes des Thales nicht als alleinstehendes Phänomen wahrgenommen oder gar auswendig gelernt wird, sollten (neben Anwendungen des Satzes) die Argumente aufgegriffen und mit ihnen weitere Resultate bewiesen werden. So wird genau herausgearbeitet, welche Argumente dienlich waren (Radien als Hilfslinien, gleichschenklige Dreiecke), sodass außerdem eine tragfähige Vorstellung von Beweisen an sich gefördert wird. Hier sind Anregungen, wie sich auch der Satz über Sehnenvierecke und der Peripheriewinkelsatz schrittweise mit diesen Argumenten erarbeiten lassen:

- Können wir noch mehr herausfinden? Was passiert beispielsweise, wenn wir nicht ein Dreieck über dem Durchmesser konstruieren, sondern ein Viereck?
- Was passiert, wenn die Seite, über der wir das Viereck konstruieren, nicht mehr ein Durchmesser, sondern nur eine Sehne des Kreises ist?
- Und was passiert, wenn wir nur einen einzigen Punkt unseres Sehnenvierecks auf dem Kreis verschieben?

Literatur

Almeida, D. (2001). Pupils’ proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 32(1), 53-60.

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics,* 22(2), 183-203.

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331-355). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 4(1), 59-95.