

Christian VAN RANDENBORGH, Bielefeld

## **Mathematiklernen mit einer Simulation**

Das Lernen von Mathematik mit einer Simulation setzt voraus, dass diese im Unterricht von den Schülerinnen und Schülern als solche aufgefasst wird. Eine Simulation ist also nicht a priori gegeben, sondern entsteht erst in einem wechselseitigen Beeinflussungsprozess zwischen Artefakt (Objekt oder Gegenstand) und Lernenden (Subjekt). Für die Beobachtung, Beschreibung und Interpretation dieses (Lern-)Prozesses ist im Allgemeinen die Berücksichtigung des Ansatzes der instrumentellen Genese (Rabardel, 2014) und speziell des Begriffs des Ideenkonglomerats (van Randenborgh, 2018) weiterführend.

### **1. Die instrumentelle Genese einer Simulation**

Die Unterscheidung zwischen einem Artefakt und einem Instrument kann als Grundannahme der instrumentellen Genese bezeichnet werden (vgl. Schmidt-Thieme & Weigand, 2015; Verillon & Rabardel, 1995). Beide Begriffe beziehen sich auf das zugrundeliegende Ausgangsobjekt. Allerdings verweist die Unterscheidung darauf, dass ein Gegenstand nicht unmittelbar oder zwangsläufig ein Instrument für das Subjekt ist. Es kommt auf die Bildung eines instrumentellen Bezuges zwischen Artefakt und Subjekt an. In Folge dieses wechselseitigen Beeinflussungsprozesses kann ein Instrument entstehen (Verillon & Rabardel, 1995). Die Differenzierung macht deutlich, dass ein Instrument nicht ein a priori gegebener Gegenstand ist. Beim Einsatz einer Simulation (als Artefakt) ist daher auch davon auszugehen, dass es einen entsprechenden subjektiven Konstruktionsprozess geben wird. Als wichtige Beeinflussungsgrößen werden auf der Seite des Artefakts die Zwänge (constraints) und Möglichkeiten (potentialities) und auf Seiten des Subjekts sein Wissen (knowledge) und seine Fertigkeiten (work method) genannt (vgl. Maschietto & Trouche, 2010). Ein so entstandenes Instrument ist „the psychological construct of the artefact together with the mental schemes the user develops for specific types of tasks.“ (Drijvers et al., 2010, S. 1349).

Fragt man nun, wie es zu einer Entwicklung eines solchen psychologischen Konstrukts kommt, ist der Begriff des Ideenkonglomerats wichtig.

### **2. Der Begriff des Ideenkonglomerats mit Blick auf eine Simulation**

Dieser Zugang geht davon aus, dass es in einem mathematischen Gegenstand – also auch bei einer Simulation – zwei Arten von Ideen gibt, die zu einem Ganzen verwoben sind. Es gibt *gegenständliche Ideen*: (1) eine Einsatzidee (Was macht die Simulation?); (2) eine mechanisch-technische Idee

(Wie ist die Simulation aufgebaut?) und (3) eine mathematische Idee (Warum macht die Simulation dieses? Weshalb verhält sie sich so?).

Darüber hinaus gibt es *personale Ideen*, die erst in der Auseinandersetzung mit dem Artefakt gebildet wurden oder werden: (4) Nutzungs- und Erklärungsideen des Subjekts (also der Schülerinnen und Schüler); (5) eine didaktische Idee (die der Lehrende vor dem Unterricht hatte) und (6) eine kulturell-historische Idee. Diese kann man als Nutzungs- und Erklärungsidee der Vergangenheit (etwa des Erfinders) auffassen.

Das Entdecken, Untersuchen, Erklären und Verknüpfen dieser Ideen führt dazu, dass ein Ideenkonglomerat gebildet wird (van Randenborgh, 2018). Im Folgenden soll aufgezeigt werden, wie dieses im Unterricht geschehen kann. Doch zunächst soll der Begriff der Simulation ausgeschärft werden.

### **3. Was ist eine Simulation?**

Hier ist zunächst die Definition von Greefrath & Weigand (2012, S.2f.) zu nennen: „Simulationen sind Experimente mit Modellen, die Erkenntnisse über das im Modell dargestellte reale System oder das Modell selbst liefern sollen.“ Damit ist ein wichtiges didaktisches Ziel für den Unterrichtseinsatz einer Simulation angesprochen: Simulationen können zu subjektiven Erkenntnissen bzw. subjektiv neuem Wissen führen. Dabei ist zu beachten, dass „Simulationen [...] auf Aktionen der Nutzer nach vorgegebenen Regeln [reagieren], die von der Realität abgeleitet sind oder neue Ideen umsetzen“ (Girwidz, 2015, S. 859). Simulationen setzen also Ideen um, wobei insbesondere die zugrundeliegende Mathematik die vorgegebenen Regeln bestimmt. Aber noch mehr: Es gibt immer auch eine mechanische oder technische Idee des Erfinders bzw. Entwicklers. Hinzu kommen die didaktischen Ideen des Lehrenden. Außerdem haben Simulationen eine besondere Einsatzidee und ermöglichen bestimmte Tätigkeiten der Lernenden. Darüber hinaus reagieren sie ihrerseits auf die Aktionen der Lernenden auf eine bestimmte – vorher festgelegte – Weise. Ebenso können Simulationen (von den Lernenden) angehalten, verändert, erweitert etc. werden. Dadurch erzeugen Simulationen Ideen bei den Lernenden. Das sind die Nutzungs- und Erklärungsideen der Schülerinnen und Schüler. Das bedeutet, dass eine Simulation für ein Subjekt erst in einem (Lern-)Prozess entsteht.

### **4. Lernen mit einer Simulation**

Simulationen erzeugen Ideen bei den Lernenden. Dabei gibt es im Wesentlichen drei wichtige Beschäftigungsphasen (vgl. auch van Randenborgh, 2015). Zuerst wird von den Schülerinnen und Schülern untersucht, was die Simulation macht, also was sie z.B. zeichnet (Einsatzidee). Dann steht die

Untersuchung der mechanischen oder technischen Idee im Vordergrund, also die Frage, wie etwas durch die Simulation erzeugt oder gezeichnet wird. In der dritten Phase geht es dann zentral darum zu klären, warum die Simulation genau dieses so macht (mathematische Idee und ihr Zusammenhang zur mechanisch-technischen Idee).

In diesen Phasen beschäftigen sich die Lernenden mit den Grenzen, Zwängen und Möglichkeiten der Simulation. Dabei ist eine *Grenze* ein Aspekt der mechanischen bzw. technischen Idee. Sie kann daher beseitigt, erweitert oder verändert werden. Ein *Zwang* hingegen ist eine Notwendigkeit, die in der Simulation – also in der Konstruktion oder im Konstruierten – steckt. Dieser kann nicht verändert oder gar beseitigt werden. Hier ist daher ein direkter Zusammenhang mit der zugrundeliegenden Mathematik gegeben. Der Begriff *Möglichkeit* bezeichnet die Dinge, die die Simulation optional bietet bzw. grundsätzlich bereitstellt. Diese Möglichkeiten sind somit von der Simulation vorgegeben und erlauben eine Veränderung der Simulation, aber so, dass die Einsatzidee erhalten bleibt. Eine genauere Darstellung und Abgrenzung der Begriffe voneinander findet sich in van Randenborgh (2018).

Das Untersuchen und Erklären der Zwänge führt die Schülerinnen und Schüler zu der in der Simulation verborgenen Mathematik. Dabei wird das Ausgangsobjekt zu einem *vermittelnden Artefakt* – oder *Medium* –, wenn die einzelnen Ideen, insbesondere die mechanisch-technische, mit der mathematischen Idee verknüpft werden. Bei diesem Schritt, werden auch die Zwänge als solche, also als eine Notwendigkeit, erkannt. Werden diese dann erklärt, wird aus dem Objekt nicht nur ein Medium, sondern auch ein subjektives Konstrukt oder Instrument (im Sinne der instrumentellen Genese).

## **5. Fazit: Mathematiklernen als Weg vom Artefakt zur inhärenten Mathematik**

Durch den Einsatz eines Artefakts im Mathematikunterricht werden die Lernenden mit den jeweiligen Zwängen, Grenzen und Möglichkeiten des Objekts konfrontiert. Dadurch bestimmt und beeinflusst das Artefakt die Lernwege, die als das Bilden eines Ideenkonglomerats beschrieben werden können. *So kann eine Simulation erst in der Auseinandersetzung eines Subjekts mit dem Artefakt entstehen.* Sie muss von einem Subjekt als solche anerkannt werden. Dabei durchläuft dieses „**Simulation-Sein**“ für ein Subjekt drei Stufen: Zunächst werden durch das Ausprobieren des Objekts seine gegenständlichen Ideen sichtbar. Hierbei werden Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten wahrgenommen. Es entsteht ein (mentales) *Modell* des Artefakts. Mit dem Erkennen und Unterscheiden von Grenzen und Zwängen, bzw. Möglichkeiten und Zwängen, wird die erste Stufe des „Simulation-Seins“ erreicht. Das

Subjekt nimmt wahr, dass es sich um eine *Simulation von einem Gegenstand* handelt. Wird anschließend die Bedeutung der Zwänge erkannt und werden die einzelnen Ideen miteinander verknüpft, wird die Simulation als *Simulation von Mathematik* erkannt (Stufe 2). Werden dann die Zwänge als Erklärung für die Bau- und Funktionsweise der Simulation aufgefasst und findet eine Reflexion über die Konstruktion statt, kann man von einer nächsten „Simulation-Sein“-Stufe sprechen. Nun ist das ursprüngliche Artefakt für das Subjekt zu einer *Simulation für Mathematik* geworden, die den Gegenstand zu einem Träger einer mathematischen (und didaktischen) Idee macht. Nicht jeder Lernende erreicht diese Stufe. Das bedeutet, dass das Anfangszitat von Greefrath & Weigand (2012, S. 2), „Simulationen sind Experimente mit Modellen“, dahingehend abgeändert werden sollte, dass Simulationen Experimente mit Modellen sein können. Denn es sollte stärker – auch im Sinne der instrumentellen Genese – die Bedeutung des Subjekts hervorgehoben werden. Daher können Simulationen zur Mathematik führen, wenn ein entsprechendes Ideenkonglomerat von den Lernenden gebildet wird – oder anders ausgedrückt, wenn die Zwänge als Notwendigkeit erkannt und untersucht werden und so als Erklärung für die Simulation genutzt werden.

## Literatur

- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. & van Gisbergen, S. (2010). Instrumental orchestration: theory and practice. *Proceedings of CERME 6* (1349-1358). Lyon.
- Girwidz, R. (2015). Multimedia unter lerntheoretischen Aspekten. In E. Kircher, R. Girwidz & P. Häußler (Hrsg.), *Physikdidaktik* (S. 843-877). Berlin u.a.: Springer.
- Greefrath, G. & Weigand, H.-G. (2012). Simulieren: Mit Modellen experimentieren. *Mathematik lehren* 174, 2-6.
- Maschietto, M. & Trouche, L (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM Mathematics Education* 42, 33-47.
- Rabardel, P. (2014). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, S. 239, (zuerst 1995, dann überarbeitet 2002; 2014).
- van Randenborgh, Chr. (2015). *Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht. Der Prozess der Instrumentellen Genese von historischen Zeichengeräten*. Wiesbaden: Springer.
- van Randenborgh, Chr. (2018). Mathematiklernen beim Einsatz eines mathematischen Instruments. Das Wahrnehmen von Ideen und die Entwicklung eines Ideenkonglomerats am Beispiel des Parabelzirkels von Frans van Schooten. *mathematica didactica* 41, 1-27.
- Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder et al. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461-490). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education* Vol. X (1), 77-101.