Emese VARGYAS, Mainz

Erkundungen um ein elementargeometrisches Problem

Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet eine Aufgabe der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik aus dem Jahr 1989. Diese lautet wie folgt: „Auf jeder Seite eines Sehnenvierecks S wird nach außen ein Rechteck errichtet, wobei die eine Rechteckseite mit der Seite von S übereinstimmt und die andere Rechteckseite genau so lang wie die jeweilige Gegenseite im Sehnenviereck S ist. Man zeige, dass die Mittelpunkte dieser vier Rechtecke stets die Eckpunkte eines weiteren Rechtecks sind.“ (Siehe Langmann et al., 2016, S. 245).

Die Aufgabe bietet ein breites Spektrum an Zugängen und Lösungsmöglichkeiten; eine Auswahl davon ist in Löffler (1992) zu finden. Unser erstes Ziel bildet weniger die tatsächliche Lösung der Aufgabe, sondern vielmehr die Erkundung verschiedener Fragestellungen, welche man sich in Verbindung mit diesem Problem stellen kann. Legt man Schülern und Schülerinnen nicht die Aufgabenformulierung, sondern nur ein entsprechendes Bild vor (siehe Abb. 1), stellt sich die Frage, was daraus abgelesen werden kann.

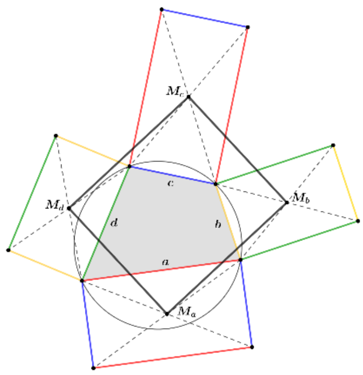

Abb. 1

Im Folgenden präsentieren wir eine Auswahl an möglichen Fragestellungen, welche in Verbindung mit einer solchen Abbildung formuliert werden könnten:

- Wie ist das Bild überhaupt entstanden? Welche sind die gegebenen Objekte bzw. was ist zu zeigen?
- Damit $M_aM_bM_cM_d$ ein Rechteck wird, muss das Viereck $ABCD$ unbedingt ein Sehnenviereck sein? D. h.: Gibt es außer Sehnenvierecken noch weitere Vierecke, für welche $M_aM_bM_cM_d$ ein Rechteck ist?
- Kann man etwas über das Viereck $M_aM_bM_cM_d$ sagen, wenn man von einem beliebigen Viereck $ABCD$ ausgeht?

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

- Müssen die auf die Seiten des Sehnenvierecks aufgesetzten Vierecke unbedingt Rechtecke sein? D. h.: Lässt sich die Aufgabe irgendwie verallgemeinern?
- Gibt es irgendwelche Verbindungen dieser Aufgabe zu bekannten elementargeometrischen Sätzen? Falls ja, zu welchen?

Die Klärung der ersten Frage würde wahrscheinlich zur ursprünglichen Aufgabenformulierung führen, aus Platzgründen lassen wir aber diese weg. Zur Beantwortung der zweiten Frage schauen wir uns Abbildung 2 an. Ein Blick darauf lässt erkennen, dass $ABCD$ kein Sehnenviereck sein muss, damit $M_aM_bM_cM_d$ ein Rechteck ist.

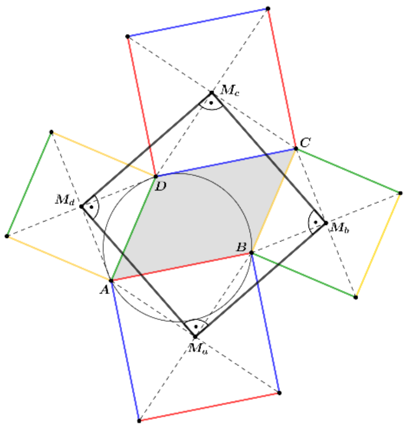

Abb. 2

Weiterhin kann man in der Abbildung 3 sehen, dass im Falle eines allgemeinen Vierecks $ABCD$ – auch wenn dieses ein beliebiges Trapez ist – das Viereck $M_aM_bM_cM_d$ kein Rechteck ist.

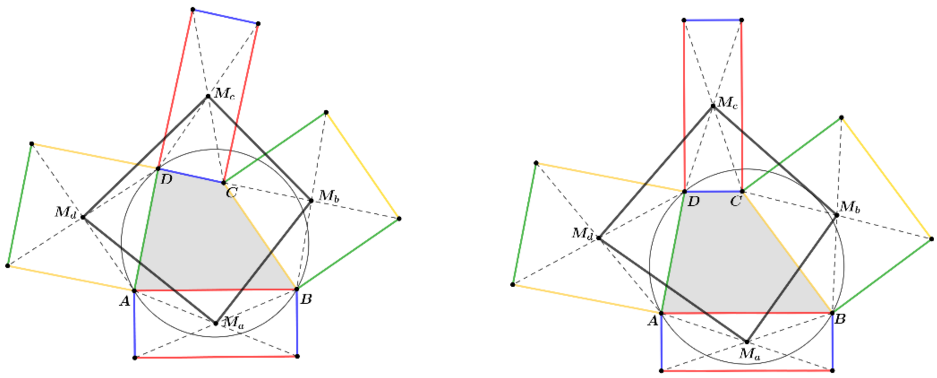

Abb. 3

Eine Antwort auf die Frage nach einer möglichen Verallgemeinerung dieser Aufgabe kann man in Walser (2018) finden.

Wie sieht es mit möglichen Verbindungen zu weiteren elementargeometrischen Sätzen aus? Der Fall des Parallelogramms (siehe Abb. 2) liefert uns folgende Idee: Anstatt der Rechtecke könnte man auf die Seiten von $ABCD$ Quadrate konstruieren und deren Mittelpunkte miteinander verbinden (siehe Abb. 4).

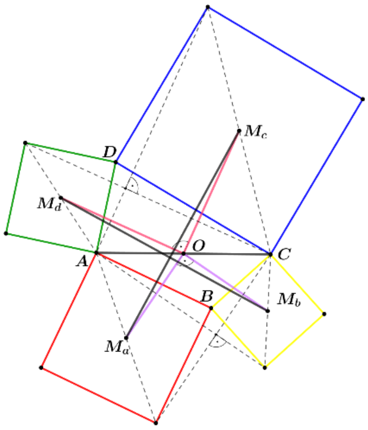

Abb. 4

In diesem Fall erhalten wir den *Satz von van Aubel*, d. h. die Diagonalen des Vierecks $M_aM_bM_cM_d$ sind orthogonal und gleich lang. Mehr dazu siehe Vargyas (2017).

Folgt man dieser Idee der Konstruktion von regelmäßigen Vielecken, so kommt man vom Satz von van Aubel zum sogenannten *Satz von Napoleon*: Werden über den Seiten eines Dreiecks nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet, so bilden ihre Umkreismittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck (dazu siehe z. B. Coxeter & Greitzer, S. 67).

Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit werden zwei verschiedene Beweise vorgestellt, die Folgendes gemeinsam haben: Man sucht bei beiden Beweisen nach *Invarianten*. Der erste Beweis geht von einem Spezialfall aus und kommt, einer Leitidee verfolgend, schrittweise zum allgemeinen Fall. Die leitende Idee entsteht durch die Untersuchung der aufeinanderfolgenden Fälle auf Unterschiede und Gemeinsamkeiten. Dabei spielt die statische Sichtweise, wo wir uns auf Objekte und deren Eigenschaften konzentrieren, eine Rolle. Der zweite Beweis geht dagegen von dem allgemeinen Fall aus und führt uns auf einen Spezialfall zurück. Dafür nimmt er eine dynamische Perspektive ein, wo Prozesse und deren Auswirkungen im Vordergrund stehen. Diese Sichtweisen sind in der Literatur auch unter dem Stichwort *prädikatives* beziehungsweise *funktionales Denken* zu finden; mehr dazu siehe in Schwank (2003).

Die entsprechenden Beweise sind in den Abbildungen 5 und 6 zusammengefasst.

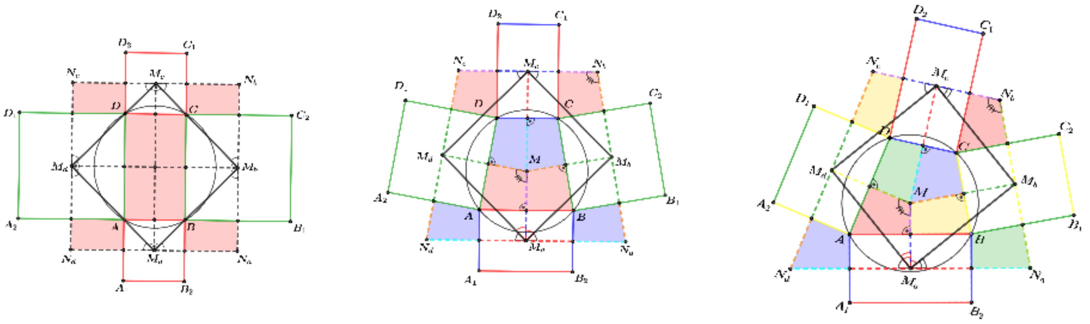

Abb. 5

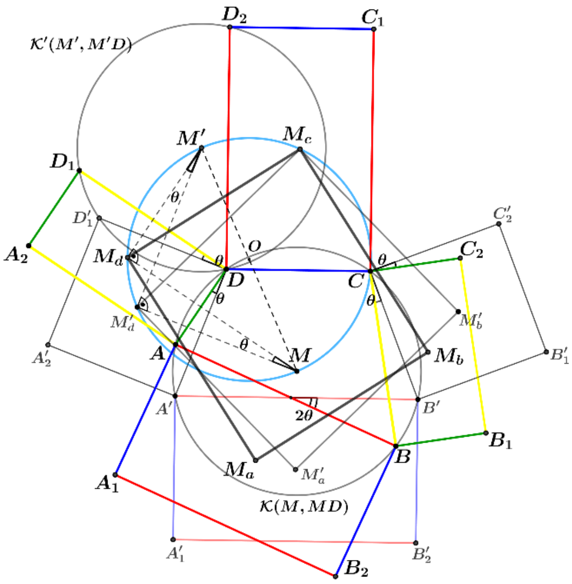

Abb. 6

Literatur

Coxeter, H. S. M. & Greitzer, S. L. (1983). *Zeitlose Geometrie*. Stuttgart: Klett Verlag.

Langmann, H. H., Quaisser, E. & Specht, E. (2016). *Bundeswettbewerb Mathematik*. Berlin: Springer-Verlag.

Löffler, K. R. (1992). *Bundeswettbewerb Mathematik 1988 – 1992. Aufgaben und Lösungen.* Klett Verlag.

Schwank, I. (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 35 (3), 70-78.

Vargyas, E. (2017). Einige Bemerkungen zum Satz von van Aubel. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017,* 989-992.

Walser, H. (2018). Klassifikation der Symmetriegruppen der Flächenornamente als Werkzeug. In Filler, A. & Lambert, A. (Hrsg.), *Geometrie mit Tiefe* (S. 73-90). Hildesheim: Franzbecker.