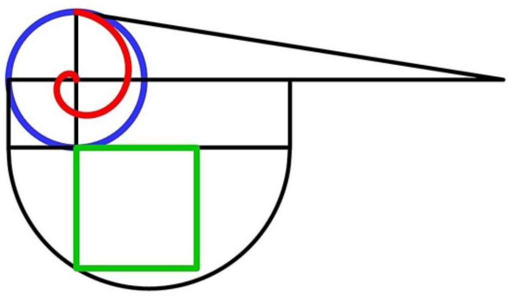
Bodo VON PAPE, Oldenburg

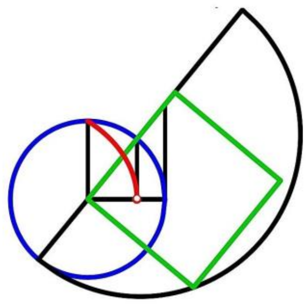
Die Quadratur des Kreises als Paradigma einer antiken „Konstruktion“

Pappus hält in Buch IV ausdrücklich fest: „Es ist völlig klar, wie man ein dem Kreis gleiches Quadrat konstruiert.“ (#32, Prop. 27) Auch das umgekehrte Problem ist leicht gelöst: „Wie man einen Kreis findet, dessen Umfang einer gegebenen Strecke gleich ist, ist einfach.“ (#49, Prop. 39) Eine Lösung erfordert einen Rückgriff auf eine höhere Kurve. Deren Genese ist komplexer als die der Kegelschnitte. Alle derartigen Kurven bilden in der bekannten Klassifikation in Buch III/IV eine eigene Klasse: „linienartig“. Neben der Konchoide und der Kissoide kommt den Quadratur-Kurven „Archimedische Spirale“ und „Quadratix“ ein besonderes Gewicht zu. Diese Kurven ermöglichen beliebige Winkelteilungen und damit Konstruktionen beliebiger regelmäßiger Polygone. All das führt Pappus in Buch IV weiter aus, z.B. auch eine Dreieckskonstruktion auf dieser Basis. (#48, Prop. 37)

Im Unterschied zu den Lösungen der anderen beiden „Großen Probleme“ sind die zur Kreisquadratur nirgends eigentlich ausgeführt. Theoretisch sollte eine Lösung eine Analyse und die Synthese umfassen. Das erstere ist für die beiden Quadraturlösungen schwer vorstellbar, es mag hier auch überflüssig sein. In den beiden von Pappus ausgeführten Beispielen geht es eigentlich auch gar nicht um ein dem Kreis flächengleiches Quadrat. Es geht um eine der Kreislinie längengleiche Strecke, also um die Rektifikation der Kreislinie. Hat man diese, dann ist – nach einem von Archimedes bewiesenen Satz – das Quadraturproblem eine Aufgabe, deren Lösung dem Leser überlassen bleiben kann. Die ausgeführten „Konstruktionen“ könnten die folgenden Figuren sein:



Eigentlich geht es aber wohl gar nicht um „Konstruktion“, jedenfalls nicht um das Erzeugen einer Figur.



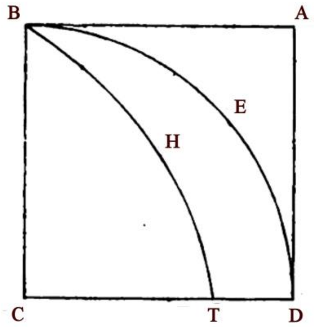
Es geht um Sätze zu Figuren, die über eine Beschreibung gegeben sind.

Die Darlegung der Beweise macht eine Beschriftung unverzichtbar. Zu Details der Erzeugung der speziellen Linien – bei der Figur nach Dinostratus die Quadratix, bei der nach Archimedes die Spirale und die Tangente im Endpunkt – erfährt man aber rein gar nichts.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Bei den Kurven wird immerhin deren „Genese“ beschrieben, ihr „Zustandekommen“. Das legt jeweils die Eigenschaft fest, das „symptoma“ der Kurve.

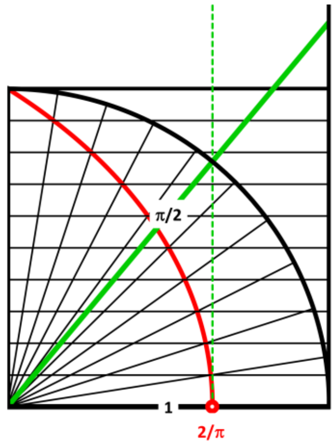
Für die sog. „Quadratur des Kreises“ mit Hilfe der Quadratix stellt Pappus den Kern am Ende von #31 dar, in Prop. 26. Hier wird der Viertelkreis in ein Verhältnis gesetzt zu einer Strecke:



„Wenn ABCD ein Quadrat ist und BED ein Kreisbogen um das Zentrum C und BHT die auf die beschriebene Weise geführte Quadratix, dann wird gezeigt, dass der Bogen BED sich zu der Strecke BC so verhält wie die Strecke BC zu GT.“

Der Beweis erfolgt über eine doppelte reductio ad absurdum. Dazu reichen Verhältnisgleichungen.

Unter Beachtung der beschriebenen „Genese“ der Quadratix ergibt sich für die „Konstruktion“ von Pi/2 die nebenstehende Figur.



Gegen die ursprüngliche Darstellung der „Genese“ sind Einwände erhoben worden. Deshalb bringt Pappus dazu eigene Darstellungen. (Prop. 28/29)

Prop. 26 ist nur ein Theorem, also nicht eigentlich das Gesuchte. Was dies betrifft – die Quadratur als „Konstruktion“ –, so heißt es in der nachfolgenden Prop. 27 schlicht: „Nachdem eine Strecke gefunden ist, die dem Umfang des Kreises gleich ist, ist offenbar, wie man für den Kreis selbst ein flächengleiches Quadrat konstruiert. Denn das Rechteck aus dem Umfang und dem Durchmesser des Kreises ist doppelt so groß wie der Kreis selbst, wie Archimedes gezeigt hat.“

Mit dieser Bemerkung wird angespielt auf Satz 1 der Archimedischen Schrift „Die Ausmessung des Kreises“: „Jeder Kreis ist gleich einem rechtwinkligen Dreieck, in dem eine Seite vom rechten Winkel gleich dem Radius ist und die Basis gleich dem Umfang. “

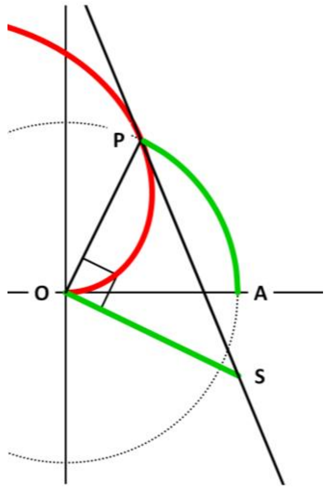
Der Beweis erfolgt auch hier über eine doppelte reductio ad absurdum:

Annahme I: Kreisfläche > Dreiecksfläche: $A(r) > D$; $A(r) – D = \varepsilon > 0$

Dann gibt es ein einbeschriebenes Polygon $P(n)$, für dessen Fläche $F(n)$ gilt: $A(r) – F(n) < \varepsilon$. Konsequenz $F(n) > D$. Die Summe $s(n)$ der Seitenlängen von $P(n)$ wäre kleiner als u. Zugleich wäre die Höhe $h(n)$ einer (dreieckigen) Zelle von $P(n)$ kleiner als r. Konsequenz: $F(n) = s(n)*h(n)/2 < D = u*r/2$. Widerspruch zu $F(n) > D$!

Die Widerlegung der Annahme II: A(r) < D folgt analog. (Die Existenz eines geeigneten Polygons P(n) gründet sich je auf das Archimedische Axiom.)

Zum gleichen Problem, der Rektifikation eines Kreisbogens, äußert sich Archimedes an ganz anderer Stelle, in seiner Schrift „Über Spiralen". Dort formuliert und beweist er einen allgemeinen Satz:



Sei P ein Punkt auf der Spirale und dem Radius OP. Sei S der Schnittpunkt der Tangente in P mit der Senkrechten auf OP in O. Dann gilt für die Länge des Kreisbogens: $\widehat{AP}$ = OS

Dieser Satz 20 ist der dritte in einer Folge von Sätzen, bei denen es erst um eine Volldrehung geht (Satz 18), dann um mehrere Volldrehungen (Satz 19).

Der Beweis erfolgt abermals in Form einer doppelten reductio ad absurdum. Er greift zurück auf eine Gruppe von Sätzen (Satz 5-9), in denen „Neusis" eine Rolle spielt, nämlich eine „geneigte" Gerade, die eine (hier recht komplexe) Bedingung erfüllt. Zu einer „Konstruktion" äußert Archimedes sich nicht. Der Grundtenor der Kommentare ist: „Die geometrische Konstruierbarkeit ist nicht erforderlich." (Czwalina) "All he requires for his purpose is its possibility. " (Thomas) Im Rahmen eines (Widerspruchs-)Beweises zu einem Theorem ist das wohl wenig überraschend. Das Spekulieren über das Procedere (Neusis-Lineal? Kegelschnitte?) erscheint hier besonders kurios.

Was die Neusis bei Archimedes anbetrifft, so muß wohl Weiteres in die Betrachtung einbezogen werden, nämlich zwei Lösungen, die Archimedes in arabischen Quellen zugeschrieben werden. Zum einen handelt es sich um die Dreiteilung des Winkels: In Prop. 8 des „Buch der Lemmata" geht es um die Verdreifachung eines Winkels. In einer „Nota" dazu formuliert der Herausgeber: Die Umkehrung wäre – „esset" – die gesuchte Konstruktion. In der Rezeption wird diese Winkeldreiteilung per Neusis „das wohl berühmteste Beispiel für die Anwendung dieses Konstruktionsmittels". (Schreiber)

Bei der Archimedischen „Konstruktion des Heptagon" erfüllt die Neusis-Gerade eine Bedingung, die weit entfernt ist von dem, was als Neusis definiert ist: Zwei der Geraden anliegende Dreiecke sollen flächengleich sein. Über ein Vorgehen beim Legen dieser Geraden erfährt man nichts. Für den nachfolgenden Beweis genügt es aber, dass man sich vorstellt, dass die Gerade in der beschriebenen Weise liegt.

Die Einstellung des Archimedes zu seinen Beweisfiguren trifft möglicherweise Newton am besten: Man möge denken an „figurae a Deo fabricatae".

Das “goal of research” der antiken Geometer

In der Frage, worum es im Rahmen der „Großen Probleme der Antike“ geht, ist man sich eigentlich einig: Es geht um Lösungen in Form einer Konstruktion, idealerweise „mit Zirkel und Lineal“. Was die Griechen uns hinterlassen haben sind ihre – „Wir wissen: zwangsläufig!“ – gescheiterten Versuche.

Die besten Kenner der alten Texte allerdings halten sich zurück. Knorr bescheinigt den antiken Geometern abschließend “the unability to articulate their goal of research”. Sefrin-Weis spricht nur unbestimmt von “construction, but not quite as this is commonly understood”. Bos vermisst “positive criteria for distinguishing genuinely geometrical procedures” gar bis ins frühe 17. Jahrhundert.

Zu den sog. „Konstruktionen“ bei Archimedes hat bereits Heath konstatiert und umfassend belegt, dass an keiner Stelle die Rede davon ist, dass ein Handeln erwartet wird. Auch bei Euklid und bei Pappus geht es grundsätzlich darum, dass etwas als getan angesehen werden soll: Bei aller Vielfalt der Wendungen für „geometrische Handlungen“(?) gibt es eine Konstante: Die Handlung wird als bereits ausgeführt beschrieben: Es heißt nicht – wie in den Interpretationen und teilweise sogar in Übersetzungen – „Lege die Linie …“, sondern „Die Linie sei gelegt.“ Standard ist der unpersönliche Perfekt Passiv. Die Grundfloskel ist das „Gegoneto – Es sei geschehen“.

Auch bei der Kreisquadratur vermisst Knorr “a clear perception of the problem – that is under what condition a circle quadrature will be judged proper.”

Eine unvoreingenommene Sicht auf die Neusis speziell bei Archimedes legt eine neue Interpretation des “goal of research” der antiken Geometer nahe.

Welche Rolle der „Konstruktion“, dem „systēsasthai“ (Euklid, „zusammenstellen“) bzw. „kataskeuazein“ (Pappus) zukommt, das ist zu hinterfragen.

Was die antike Geometrie auszeichnet, ist die Synthesis.

And specially delightful unto me
Was that clear Synthesis, built up aloft
So gracefully! Even then when it appeared
No more than as a plaything or a toy
Embodied to the sense; not what it is
In verity, an independent world
Created out of pure Intelligence.

So feierte der Dichter W. Wordsworth die Welt der antiken Geometer im Jahr 1798 – zu einer Zeit, als die Infinitesimalmathematik der Neuzeit noch tief verstrickt war in einer Konfusion in ihrer Grundlegung. Der Weg, den man 50 Jahre später fand, führte zurück zu Archimedes und zu Eudoxus.