Patrick WEBER, Regensburg, Stefan KRAUSS, Regensburg &
Karin BINDER, Regensburg

Mehr als erwartete Häufigkeiten: Was wir noch nicht über natürliche Häufigkeiten wissen

Einleitung und Begriffsklärungen

Seit etwa 20 Jahren wird das aus der Kognitionspsychologie stammende Konzept der *natürlichen Häufigkeiten* (Gigerenzer & Hoffrage, 1995) auch in der Stochastikdidaktik diskutiert. So hat es sich als verständnisfördernd erwiesen, bei Bayesianischen Aufgaben Wahrscheinlichkeiten (z. B. „70%") durch ein geordnetes Paar zweier natürlicher Zahlen (z. B. „7 von 10") zu ersetzen (McDowell & Jacobs, 2017). Doch auch über ihre reine Verwendung in Wahrscheinlichkeitskontexten hinaus spielen natürliche Häufigkeiten in unserem Alltag eine Rolle, beispielsweise in den Medien zur Darstellung statistischer Informationen, insbesondere von Anteilen (s. Abb. 1).

Zwei von fünf Alleinerziehenden beziehen Hartz IV

[…]

In etwa jeder fünften deutschen Familie ist nur ein Erwachsener allein für die Kinder verantwortlich, mit steigender Tendenz. Und für sie ist das Armutsrisiko besonders hoch: Rund 40 Prozent aller Alleinerziehenden beziehen Hartz IV – während bei Familien mit zwei Elternteilen nur acht Prozent auf die Grundsicherung angewiesen sind.

[…]

In fast neun von zehn Fällen sind die Alleinerziehenden Frauen. […]

Abb. 1: Statistische Informationen in den Medien (Beispiel aus *Die Welt* vom 9.3.2014)

Um die Rolle der natürlichen Häufigkeiten in der Welt zu verstehen (im Sinne von Winters erster Grunderfahrung, 1995) und Schülerinnen und Schüler zu einem kritischen Umgang mit numerischen Datendarstellungen zu befähigen (im Sinne von Gals *statistical literacy*, 2002), ist eine – bislang noch ausgebliebene – Analyse der natürlichen Häufigkeiten als Darstellungsformat von Anteilen und Unsicherheit in Alltagskommunikation und Medien unabdingbar. Darüber hinaus sind einige begriffliche und stoffdidaktische Fragestellungen bezüglich des Häufigkeitsformats noch ungeklärt.

Im Folgenden erläutern wir, (a) dass natürliche Häufigkeiten in den Medien als Anteilsrepräsentation – im Gegensatz zu den schulüblichen Darstellungsarten Brüche und Dezimalbrüche – weit verbreitet sind (s. Abb. 1). Außerdem beleuchten wir (b) stoffdidaktische Hintergründe zu diesem Format (z. B. Welche Zahlen sind durch natürliche Häufigkeiten darstellbar? Wel-

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

che Eigenschaften hat eine Häufigkeitsaddition?) und machen (c) konstruktive Vorschläge, wie unsere Ergebnisse im Stochastikunterricht umgesetzt werden könnten. Der vorliegende Beitrag gibt hierbei einen Überblick über einen JMD-Artikel (Krauss, Weber, Binder & Bruckmaier, im Druck), wobei im entsprechenden Vortrag detailliert auf das Begriffsnetz in Abb. 2 sowie die Darstellung natürlicher Häufigkeiten in den Medien eingegangen wird.

Da das Häufigkeitskonzept bislang lediglich im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten als eine Art „didaktischer Kniff“ zur Lösung Bayesianischer Aufgaben (Gigerenzer & Hoffrage, 1995) oder als Grundvorstellung für gewöhnliche Brüche (Malle, 2004) angesehen wurde, soll zunächst der Begriffsumfang der natürlichen Häufigkeiten auf die Darstellung von Anteilen und Unsicherheit erweitert werden. Dazu definieren wir die natürlichen Häufigkeiten – im Gegensatz zu ihrer gängigen Darstellung als erwartete Häufigkeiten – allgemein als geordnete Paare zweier natürlicher Zahlen in der Sprechweise „a von b“ (mit $a \leq b$). Abbildung 2 zeigt eine Einordnung des Häufigkeitskonzepts in das Netz bereits bestehender Begrifflichkeiten, welches zum Teil durch Präzisierungen auf der dritten Ebene erweitert wird.

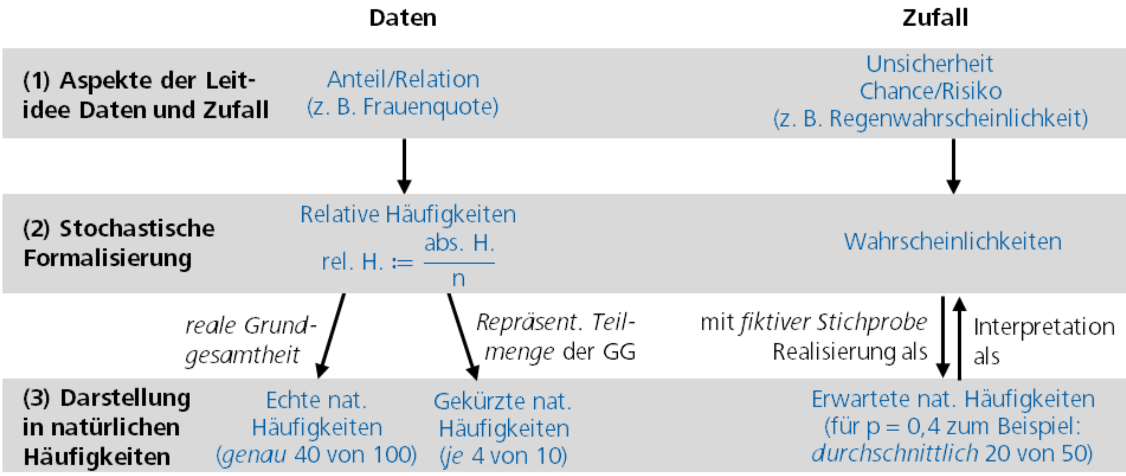

Abb. 2: Verwendung natürlicher Häufigkeiten als geordnete Zahlenpaare

In der Sprache der Stochastik werden Anteile und Unsicherheiten als relative Häufigkeiten (links) beziehungsweise als Wahrscheinlichkeiten (rechts) formalisiert (Ebene 2). Diese können in konkreten Situationen mit natürlichen Häufigkeiten numerisch präzisiert werden (Ebene 3): Wir bezeichnen sie dabei als ungekürzte oder echte natürliche Häufigkeiten, wenn sie exakt die absolute Häufigkeit eines Merkmals und die Gesamtanzahl an betrachteten Objekten oder Personen angeben (Ebene 3, ganz links). So wäre eine Aussage über *genau* „4 von 11“ Spielern einer Fußballmannschaft ein Beispiel für eine echte natürliche Häufigkeit. In den Medien werden echte natürliche Häufigkeiten gelegentlich durch Kürzen und/oder Runden übersichtlicher dargestellt. Ein Beispiel für eine solche gekürzte natürliche Häufigkeit wäre die Meldung, dass *je* „2 von 10“ Kindern übergewichtig sind. Auch theoretische oder empirisch geschätzte Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit natürlichen Häufigkeiten beschreiben, indem die Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Erwartungswertes auf eine fiktive Stichprobe bezogen werden (Ebene 3, rechts). Beispielsweise entspricht eine Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$ bei einer fiktiven Stichprobengröße von $n = 50$ der natürlichen Häufigkeit *durchschnittlich* „20 von 50“ (vgl. Gage & Spiegelhalter, 2016).

Natürliche Häufigkeiten in den Medien

Wie oft werden nun natürliche Häufigkeiten im Vergleich zu anderen numerischen Darstellungsarten (z. B. Prozent oder Bruchdarstellungen) zur Beschreibung von Anteilen und Unsicherheit tatsächlich in den Medien verwendet? Um dieser Frage nachzugehen, wurden je fünf Komplettausgaben von fünf verschiedenen deutschen Tageszeitungen, je eine Stunde Sendezeit von sechs Radiostationen sowie je drei Ausgaben der Nachrichtensendungen „Punkt 12“ und „Tagesschau“ auf das Vorkommen der verschiedenen numerischen Repräsentationen von Anteilen und Unsicherheit analysiert.

Dabei wurde deutlich, dass Prozentangaben in allen untersuchten Medien mit Abstand am häufigsten vorkommen (2.189-mal von insgesamt 2.469 Anteilsrepräsentationen), während die anderen beiden schulrelevanten Darstellungsarten gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche zur Beschreibung von Anteilen und Unsicherheit kein einziges Mal in ihrer üblichen Schreibweise verwendet wurden (gewöhnliche Brüche immerhin 111-mal als *Zahlwörter*, z. B. „drei Viertel“). Die in der Schule bislang kaum thematisierten natürlichen Häufigkeiten wurden insgesamt 105-mal gezählt, was darauf schließen lässt, dass sie relativ oft zur Kommunikation von statistischen Informationen verwendet werden. Darüber hinaus kamen auch alternative Darstellungsarten wie Ausdrücke der Art „jeder Wievielte“ vor (46-mal). Interessanterweise wurden alle numerischen Repräsentationen nur zur Darstellung von Anteilen, nicht jedoch von Unsicherheit genutzt (mit einer Ausnahme). Natürliche Häufigkeiten konnten daher in den analysierten Medien nur in echter (relativ oft) oder gekürzter Form (deutlich seltener) gefunden werden.

Natürliche Häufigkeiten in der Schule – stoffdidaktische Überlegungen

Trotz ihres Vorkommens in den Medien und ihres positiven Effekts für das Verständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten finden die natürlichen Häufigkeiten bislang in Lehrplänen und Schulbüchern kaum Beachtung. Mögliche Gründe dafür könnten in ihrer bislang unzureichenden mathematischen und stoffdidaktischen Fundierung liegen, welche im Folgenden angedeutet werden soll (für Details siehe Krauss, Weber, Binder & Bruckmaier, im Druck).

Aufgrund der Bedingung $a \leq b$ können durch natürliche Häufigkeiten nur Zahlen im Intervall [0,1] dargestellt werden, wodurch eine Beschreibung von Zuwächsen (z. B. um 200%) oder Reduktionen mit Häufigkeiten anders als mit Prozent unmöglich wird. Außerdem ist ein Größenvergleich schwieriger als bei den anderen Formaten (z. B. sind „3 von 17“ mehr als „5 von 29“). Möchte man jedoch natürliche Häufigkeiten addieren, so ist diese Rechenoperation mit echten und erwarteten natürlichen Häufigkeiten im Gegensatz zur Bruchaddition *komponentenweise* und damit sehr einfach möglich: Kommen zum Beispiel zunächst „2 von 5“ Personen zu einem Treffen und danach noch „4 von 6“ aus einer anderen Gruppe, sind insgesamt „(2+4=) *6* von (5+6=) *11*“ erschienen. Die komponentenweise Addition ist der Grund, dass die Pfadregeln und die Formel von Bayes mit natürlichen Häufigkeiten stark vereinfacht dargestellt werden können (vgl. Gigerenzer & Hoffrage, 1995).

Implikationen für den Stochastikunterricht

Da die natürlichen Häufigkeiten nach unseren Analysen also sowohl im Themenfeld „Daten“ (als numerische Darstellungsart von Anteilen) als auch im Bereich „Zufall“ (als Hilfsmittel bei Aufgaben mit bedingten Wahrscheinlichkeiten) eine große Rolle spielen, schlagen wir folgende Modifikationen für den Stochastikunterricht vor: eine Integration von echten und gekürzten natürlichen Häufigkeiten als Kommunikationsmittel für relative Häufigkeiten in Medien (um Winters erster Grunderfahrung zu genügen), das Aufgreifen echter natürlicher Häufigkeiten bei der Behandlung von Situationen mit zwei dichotomen Merkmalen sowie das erneute Aufgreifen echter und die Thematisierung erwarteter natürlicher Häufigkeiten beim Thema bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Literatur

Gage, J. & Spiegelhalter, D. J. (2016). *Teaching probability*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gal, I. (2002). Adults’ statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review,* 70(1), 1-25.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review,* 102(4), 684-704.

Krauss, S., Weber, P., Binder, K. & Bruckmaier, G. (im Druck). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematikdidaktik*.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren,* 123, 4-8.

McDowell, M. & Jacobs, P. (2017). Meta-Analysis of the Effect of Natural Frequencies on Bayesian Reasoning. *Psychological bulletin,* 143(12), 1273-1312.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 61, 37-46.