Gerald WITTMANN, Freiburg

Analysen zum Komma-trennt-Fehler beim Rechnen mit Dezimalbrüchen – Eine Pilotstudie

Der sog. Komma-trennt-Fehler ist ein Fehlermuster, das beim Rechnen mit Dezimalbrüchen auftritt. Es ist dadurch charakterisiert, dass die Vor- und Nachkommastellen von Dezimalbrüchen wie zwei durch das Komma getrennte natürliche Zahlen behandelt werden, ungeachtet möglicherweise unterschiedlicher Stellenwerte. Typische Fehlerphänomene sind beim Addieren 3,48 + 4,2 = 7,50 bzw. 7,5 oder beim Multiplizieren 1,9 · 3,1 = 3,9.

Empirische Befunde und theoretischer Rahmen

Der Komma-trennt-Fehler ist sowohl beim Vergleichen von Dezimalbrüchen als auch bei allen vier Grundrechenarten das mit Abstand häufigste Fehlermuster (Heckmann, 2006, S. 154 ff.; Padberg & Wartha, 2017, S. 198 ff.). Er passiert besonders oft bei (vermeintlich) einfachen Aufgaben, die sich gut im Kopf rechnen lassen, und seltener bei Aufgaben, die eine schriftliche Rechnung erfordern. Die Häufigkeit des Komma-trennt-Fehlers nimmt im Zuge der Behandlung von Dezimalbrüchen deutlich ab (Heckmann, 2006, S. 421 f.), was darauf hinweist, dass er Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler widerspiegelt. Der Komma-trennt-Fehler tritt zudem bei Schülerinnen und Schülern, die Dezimalbrüche falsch sprechen (3,48 als „drei Komma achtundvierzig"), häufiger auf als bei jenen, die sie korrekt stellenweise sprechen (ebd., S. 436). Der Komma-trennt-Fehler passiert nur wenigen Schülerinnen und Schülern durchgängig (ebd., S. 420 ff.): Vielmehr gehen sie bei einer Reihe von Aufgaben, die den Komma-trennt-Fehler erlauben, anders vor – wobei offenbleibt, wie sie dann jeweils rechnen.

Als mögliche Fehlerursache wird häufig die Übergeneralisierung von Verfahren, die von den natürlichen Zahlen stammen, genannt. In der englischsprachigen Literatur wird dies als „natural number bias" bezeichnet (Alibali & Sidney, 2015; Zazkis & Mamolo, 2016). In ähnlicher Weise erklären Bikner-Ahsbahs, Schäfer & Dygas (2017, S. 254) den Komma-trennt-Fehler als Situationsverhaftung in den natürlichen Zahlen, d. h. in den gegebenen Dezimalbrüchen werden natürliche Zahlen als relevant wiedererkannt. Zudem ist der Komma-trennt-Fehler sehr intuitiv und kann auch zu richtigen Ergebnissen führen.

Inkonsistenzen im Auftreten von Fehlern in der Arithmetik und der Algebra erklärt Tietze (1988) in einer theoretischen Modellierung basierend auf kognitionstheoretischen Schema-Modellen damit, dass auch Fremdfaktoren im

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Laufe des Lösungsprozesses auftreten, die unter anderem auf Schwierigkeitsreduktion zielen.

Forschungsfragen

Die vorliegende Studie untersucht im Sinne einer Pilotstudie Konsistenzen bzw. Inkonsistenzen beim Komma-trennt-Fehler. Es ergeben sich zwei Forschungsfragen: *Inwieweit sind die Lösungen der Schülerinnen und Schüler beim Rechnen mit Dezimalbrüchen bezüglich des Komma-trennt-Fehlers konsistent? Wie gehen Schülerinnen und Schüler, die bei einzelnen Aufgaben den Komma-trennt-Fehler machen, bei anderen Aufgaben vor?* Dies betrifft (1) Aufgaben, die den Komma-trennt-Fehler erlauben und nahelegen, (2) Aufgaben, die ihn erlauben, jedoch andere Lösungswege nahelegen, und (3) Aufgaben, die ihn nicht erlauben, jedoch ein anderes Hauptfehlermuster nach sich ziehen. Während die erste Forschungsfrage auf eine Replikation von Heckmann (2006) zielt, geht die zweite darüber hinaus: Es wird erfasst, in welcher Weise die Lösungswege der Schülerinnen und Schüler inkonsistent sind.

Forschungsdesign

Es wurde ein 20 Aufgaben umfassender schriftlicher Test konzipiert (Tabelle 1). Alle Aufgaben können prinzipiell im Kopf gerechnet werden. Bei den 17 Aufgaben (in der zweiten Zeile der Tabelle) ist der Komma-trennt-Fehler möglich; allerdings wurden Aufgaben wie 4,5 + 4,5 oder 2,7 : 2,7 aufgenommen, um zu prüfen, in welcher Weise hier aufgrund des „Alltagsbruchs“ 4,5 und des Quotienten zweier gleicher Zahlen konzeptuelle Lösungen auftreten. Alle 17 Aufgaben sind so konstruiert, dass der Komma-trennt-Fehler stets eine falsche Lösung nach sich zieht (Desmet, Grégoire & Mussolin, 2010).

Addition	**Subtraktion**	**Multiplikation**	**Division**
4,5 + 4,5 3,48 + 4,2 4,75 + 3,8 1,7 + 1,05 5,7 + 6,132	0,75 – 0,5 3,32 – 0,7	7,8 · 0,1 2,4 · 0,5 3,3 · 3,3 4,2 · 4,2 1,9 · 3,1 0,6 · 2,3	2,7 : 2,7 0,18 : 9 8,12 : 0,4 0,44 : 0,11
0,45 + 7	8,13 − 6		5,4 : 3

Tab. 1: Aufgabenset

Bei drei Aufgaben (in der letzten Zeile der Tabelle) ist der Komma-trennt-Fehler nicht möglich. Die nach Padberg (1991) zu erwartenden fehlerhaften Lösungswege 0,45 + 7 = 0,52 und 8,13 – 6 = 8,07 werden im Kontext dieser Studie als Flüchtigkeitsfehler eingestuft, die – insbesondere bei zweifachem Auftreten – als Indikatoren für eine oberflächliche Betrachtung der Aufgaben fungieren können.

Um Reihenfolgeeffekte ausschließen zu können, wurden die Aufgaben auf zehn verschiedenen Testbögen jeweils in zufälliger Weise angeordnet.

Es liegen Aufgabenbearbeitungen von N = 286 Schülerinnen und Schülern aus 16 Klassen nicht-gymnasialer Schulformen vor; dabei handelt es sich um eine Gelegenheitsstichprobe.

Die Kodierung der Lösungen umfasst stets drei Kategorien:

- *richtige Lösung* oder *richtiger Lösungsweg*, der auf ein Stellenwertverständnis hinweist, aber einen nachvollziehbaren Fehler (z. B. Einmaleins-Fehler) aufweist,
- *Hauptfehlermuster* (bei 17 der 20 Aufgaben ist das der Komma-trennt-Fehler), ggf. auch mit weiteren nachvollziehbaren Fehlern,
- *sonstige Fehlermuster* oder *nicht nachvollziehbare Bearbeitungen*.

Da die Kodierung auf die Konsistenz des Komma-trennt-Fehlers zielt, blendet sie gezielt Einmaleins-Fehler und Ähnliches aus. Eine Gegenkodierung von 235 Testbögen durch andere Personen bestätigt, dass diese Art der Kodierung reliabel ist.

Die Auswertung erfolgt häufigkeitsanalytisch und liefert zunächst, wie oft der Komma-trennt-Fehler bzw. andere Hauptfehlermuster bei den einzelnen Aufgaben vorkommen. Ferner geben Kreuztabellen Aufschluss darüber, in welcher Weise sich die Lösungswege bei jeweils zwei der Aufgaben unterscheiden. Sie zeigen, wie Schülerinnen und Schüler, die bei einer Aufgabe den Komma-trennt-Fehler gemacht haben, bei der anderen Aufgabe vorgehen, und umgekehrt.

Ergebnisse und Interpretation

Zentrale Befunde lassen sich so zusammenfassen: Der Komma-trennt-Fehler ist nur bei wenigen Schülerinnen und Schülern konsistent. Diesbezüglich bestätigen sich die Ergebnisse von Heckmann (2006). Die Häufigkeit des Komma-trennt-Fehlers hängt stark von den gegebenen Zahlen ab: Während er beispielsweise bei 3,3 · 3,3 sehr häufig ist, tritt er bei 4,5 + 4,5 nur selten auf; letztere Aufgabe wird offenbar eher auf der Basis von konzeptuellem Wissen gelöst und kaum prozedural. Schülerinnen und Schüler, bei denen sich der Komma-trennt-Fehler häufiger zeigt, machen auch häufiger die beiden Fehler 0,45 + 7 = 0,52 und 8,13 – 6 = 8,07.

Diese Befunde werden wie folgt interpretiert: Das Vorgehen entsprechend dem Komma-trennt-Fehler ist bei den meisten Schülerinnen und Schülern nur eine von mehreren auftretenden Vorgehensweisen. Er ist deshalb mit der Automatisierung eines falschen Verfahrens nur bedingt zu erklären. Vielmehr wechselt sich der Komma-trennt-Fehler mit richtigen Vorgehensweisen und anderen Fehlern ab oder tritt in Kombination mit diesen auf (z. B. Kommasetzung bei der Multiplikation, die auf eine gleiche Anzahl von Nachkommastellen bei den beiden Faktoren und dem Produkt zielt; Nullfehler bei der Multiplikation; Weglassen überflüssiger Endnullen), bis hin zum oft willkürlich erscheinenden „Ziffernrechnen“, das als Verrechnen von Ziffern gedeutet werden kann, bei dem Merkmale von Dezimalbrüchen einbezogen werden. Der Komma-trennt-Fehler erscheint damit insbesondere nicht als „Strategie“, auch wenn er in der deutschsprachigen Literatur oftmals so bezeichnet wird, sondern eher als eine Vorgehensweise, die im Laufe des Lösungsprozesses entsteht. Wie auch die Lösungswege 0,45 + 7 = 0,52 und 8,13 – 6 = 8,07 zeigen, ist insgesamt der Blick für die relevanten Aufgabenmerkmale, die Besonderheiten der jeweiligen Aufgaben, wenig ausgeprägt.

Literatur

Alibali, M. W. & Sidney, P. G. (2015). Variability in the natural number bias: Who, when, how, and why. *Learning and Instruction*, 37, 56-63.

Bikner-Ahsbahs, A., Schäfer, I. & Dygas, R. (2017). Lernschwierigkeiten im Umgang mit Dezimalbrüchen: ein situativer Blick. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 38(2), 239-262.

Desmet, L., Grégoire, J. & Mussolin, C. (2010). Developmental changes in the comparison of decimal fractions. *Learning and Instruction*, 20, 521-532.

Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos.

Padberg, F. (1991). Problembereiche bei der Behandlung von Dezimalbrüchen – eine empirische Untersuchung an Gymnasialschülern. *Der Mathematikunterricht,* 37(2), 39-69.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Tietze, U.-P. (1988). Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Arithmetik und Algebra – Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 9(2/3), 163-204.

Zazkis, R. & Mamolo, M. (2016). On numbers: concepts, operations and structure. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Hrsg.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (S. 39-71). Rotterdam: Sense Publishers.