Felix WLASSAK, Leipzig

Abstraktionsgrad von Übungsaufgaben der Analysis I

1. Übungsaufgaben an der Hochschule

Mit dem traditionellen Lehrbetrieb im Fach Mathematik an deutschen Universitäten ist die Bearbeitung von Übungsaufgaben verbunden. Das korrekte Lösen eines Anteils der Aufgaben ist für die Prüfungszulassung notwendig. Der Begriff „Übungsaufgabe“ erscheint für diese Aufgaben kaum zutreffend, da es sich bei ihnen nicht um Aufgaben zum Einüben von Routinen handelt, sondern um „Probleme, die intensive Auseinandersetzung mit Vorlesungsinhalten verlangen“ (Liebendörfer, 2018, S. 22). Der Problemlösecharakter mathematischer Übungsaufgaben an der Hochschule wird durch empirische Studien gestützt. So sind nur rund ein Achtel aller Studierenden im ersten Semester in der Lage, selbstständig die gestellten Aufgaben zu lösen (Rach, 2014). Aus konstruktivistischer Sicht wäre eine höhere eigenständige Bearbeitungsquote natürlich wünschenswert. Trotz der aufgezeigten Schwierigkeiten mit den Übungsaufgaben liegen bisher keine systematischen, deskriptiven Studien vor, die Merkmale von Übungsaufgaben an verschiedenen Hochschulen erfassen.

2. Abstraktion und der Abstraktionsprozess

Ein Merkmal, welches die Diskrepanz zwischen den Aufgaben der Schul- und Hochschulmathematik erklären könnte, ist die Abstraktion, welche den Prozess der Isolation von Attributen eines Konzeptes, um diese einzeln betrachten zu können, bezeichnet (Tall, 1988). In der Literatur lassen sich verschiedene Abstraktionsbegriffe identifizieren, von denen zwei kurz vorgestellt werden sollen. Piaget (1977) unterscheidet zwischen empirischer Abstraktion und reflektierender Abstraktion. Der Prozess der empirischen Abstraktion ist an das sinnliche Wahrnehmen von Objekten gebunden. Das Individuum löst dabei eine Eigenschaft des beobachteten Objektes aus der Menge der beobachtbaren Eigenschaften ebenjenes Objektes heraus und kann diese Eigenschaft verallgemeinert betrachten. Bei der reflektierenden Abstraktion wird hingegen nicht von sinnlich wahrnehmbaren Objekten abstrahiert, sondern von realen bzw. mentalen Handlungen, die ein Individuum mit den Objekten durchführt. Somit geht die reflektierende Abstraktion über das Abstrahieren sinnlich wahrnehmbarer Eigenschaften hinaus. Bei der Konstruktion mathematischer Begriffe zeigen sich beide Arten der Abstraktion. „Eine empirische Abstraktion führt zu einer Feststellung, die reflektierende Abstraktion geht tiefer und führt zum Verstehen“ (Kesselring, 1988,

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

S. 94). Fraglich ist, wie Abstraktion als individuell durchlaufener Prozess in einer produktorientierten Untersuchung mathematischer Übungsaufgaben gemessen werden kann. Einen Vorschlag bietet das folgende Kategoriensystem.

3. Ein Kategoriensystem für den Abstraktionsgrad mathematischer Übungsaufgaben

Als wichtigster Bestandteil der Abstraktion gilt die Generalisierung, d.h. dass Regeln auf mehrere Situationen bzw. Objekte angewendet werden können bzw. ein konkreter Fall von seiner Zufälligkeit befreit wird (Strachota, 2016). In Übungsaufgaben kann *Generalität* über den Umfang der zu betrachtenden Objekte bestimmt werden. Der Abstraktionsprozess ist an gewisse epistemische *Handlungen* geknüpft, die für die Konstruktion mathematischer Objekte charakteristisch sind. Hershkowitz et al. (2001) benennen das Wiedererkennen bekannter Strukturen, das Verwenden und Kombinieren bekannter Konstrukte sowie das Zusammenfügen und Integrieren bekannter Konstrukte zu einem neuen Konstrukt. Abstraktion ist weiterhin mit der Interaktion zwischen Subjekt und (realem oder mentalem) Objekt verbunden. Somit spielen individuelle *(Vor)kenntnisse* eine Rolle, inwiefern ein Objekt als abstrakt wahrgenommen wird. Für den universitären Kontext sind die Vorkenntnisse bezüglich mathematischer Objekte in der Schulmathematik verankert. Die Theorie der empirischen Abstraktion legt nahe, dass Objekte abstrakter sind, wenn sie nicht sinnlich wahrnehmbar sind. Da in mathematischen Übungsaufgaben oftmals nicht mit sinnlich wahrnehmbaren Objekten umgegangen wird, werden die in den Aufgaben möglicherweise zu findenden *Realitätsbezüge* untersucht, die eine Brücke zwischen realem Objekt und mathematischer Darstellung bilden. Der Umgang mit abstrakten Objekten wird erst durch das Verwenden von Zeichensystemen möglich (Dörfler, 2015). Eine Stufung, wann eine *Darstellung* in einem Zeichensystem abstrakter ist als eine andere, ist beispielsweise durch das EIS-Prinzip möglich.

Folgende Forschungsfragen sollen mittels dieses Kategoriensystems untersucht werden: Wie sehen typische Muster des Abstraktionsgrades in den Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I aus? Inwiefern entwickelt sich der Abstraktionsgrad der Übungsaufgaben im Laufe des ersten Semesters? Wie groß sind die Unterschiede im Abstraktionsgrad der Übungsaufgaben zwischen verschiedenen Analysisvorlesungen?

In der folgenden Tabelle werden die Kategorien mit ihren Ausprägungen dargestellt.

Kategorie	Generalität	Handlung	Kenntnis	Realitätsbezug	Darstellung
Code 0	Ein Einzelobjekt	Rechnen ohne Einordnung in Oberkategorie	Große Rolle in Schulmathematik	Ja/ authentisch	Ikonisch
Code 1	Mehrere Einzelobjekte	Einordnen/ Wiederkennen/ Kombinieren	Geringe Rolle in Schulmathematik	Ja/ konstruiert	Symbolisch
Code 2	Gesamtkonstrukt	Konstruieren/ Abstrahieren	Keine Rolle in Schulmathematik	Nein	Transfer

Tab. 1: Kategoriensystem der Dimensionen des Abstraktionsgrades

4. Datensatz und Ergebnisse

Für die durchgeführte Untersuchung wurden die Übungsaufgaben von acht der größten 40 Universitäten gelöst. Die Lösungen durchliefen ein Reviewverfahren, um ihre Korrektheit sowie die Nutzung aus der Vorlesung verfügbarer Mittel sicherzustellen. Die Verteilung der Merkmale auf die einzelnen Kategorien ist nachfolgender Tabelle zu entnehmen.

Kategorie	Generalität	Handlung	Kenntnis	Realitätsbezug	Darstellung
Code 0	55,9%	76,1%	6,9%	0,1%	2,0%
Code 1	7,8 %	20%	16,6%	1,3%	86,8%
Code 2	36,3%	3,9%	76,5%	98,6%	11,2%
Cohens κ	.84	.68	.68	.54	.62

Tab. 2: Merkmalsverteilung auf die Kategorien

Zur Untersuchung der Entwicklung des Abstraktionsgrades wurde ein Abstraktionsscore AS gebildet, der Generalität mit 0,5, die Kategorien Kenntnis und Handlung mit 0,2 und Realitätsbezüge sowie Darstellung mit 0,05 wichtet. Der Abstraktionsscore AS nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, wobei 0 für einen geringen und 1 für einen hohen Abstraktionsgrad steht. Folgende Tabelle zeigt die Entwicklung des Abstraktionsscore nach Wochen.

Woche	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
AS	.59	.50	.56	.56	.56	.58	.53	.54	.54	.59	.53	.43	.53

Tab. 3: Abstraktionsscore nach Woche

Zwischen Abstraktionsscore und der jeweiligen Woche liegt eine negative Korrelation ($r=-0,086$) vor. Die Aufgaben werden im Laufe eines Semester nicht abstrakter, wobei dieses Ergebnis wegen der geringen Korrelation vorsichtig zu interpretieren ist. Mögliche Gründe einer negativen Korrelation sind in der Reihung der Inhalte zu sehen. Häufig werden zu Beginn des Semesters mengentheoretische Grundlagen behandelt, die in der Schule keine Rolle spielen und am Ende des Semesters Ableitungen berechnet, was aus der Schule bekannt ist. Da meist Ableitungen einzelner Funktionen berechnet werden, hat dies Einfluss auf die Kategorie Generalität. Folgende Tabelle zeigt den durchschnittlichen Abstraktionsscore der Universitäten.

Universität	A	B	C	D	E	F	G	H
AS	.49	.43	.47	.71	.64	.47	.74	.58

Tab. 4: Abstraktionsscore nach Universität

Hier zeigen sich alle Mittelwertsunterschiede zwischen je zwei Universitäten signifikant, außer zwischen den Universitäten C und F. Die Effektstärken liegen dabei zwischen d=0,22 und d=1,13. Somit hat der Lesende einen nicht zu unterschätzenden Einfluss auf den Abstraktionsgrad der Übungsaufgaben, was vor allem mit einem fehlenden Curriculum an der Hochschule zu begründen ist. Zusammenfassend ist festzustellen, dass Übungsaufgaben im Fach Analysis I häufig die Betrachtung von Einzelobjekten erfordern und nur selten abstrahierende Handlungen erforderlich sind. Der Abstraktionsgrad sinkt im Laufe eines Semesters. In den Daten zeigt sich der Einfluss der Lesenden auf den Abstraktionsgrad der Übungsaufgaben.

5. Literatur

Dörfler, W. (2015). Abstrakte Objekte in der Mathematik. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Hershkowitz, R.; Schwarz, B. & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in Context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 32, 195–222.

Kesselring, T. (1988). *Jean Piaget.* München: Beck.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Piaget, J. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*. Vol. I. Paris, Presses Universitaires de France.

Rach, S. (2014) *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester*. Münster: Waxmann.

Strachota, S. (2016). Conceptualizing Generalization. *Open Mathematical Education Notes,* Vol. 6, 41–55.

Tall, D. (1988). The Nature of Advanced Mathematical Thinking. Discussion Paper for the working group on advanced mathematical thinking. *PME-XII,* Vezprém, Hungary.