Katharina ZENTGRAF, Dortmund

Auffalten von Grundvorstellungen bei funktionalen Zusammenhängen – am Beispiel Füllgraphen

Theoretischer Rahmen: Darstellungen vernetzen, Grundvorstellungen auffalten

Funktionsverständnis lässt sich durch drei Grundvorstellungen charakterisieren, die *Zuordnung*, die *Kovariation* sowie die *Funktion als Ganzes* (Vollrath, 1989). Um diese tragfähig und langfristig anschlussfähig aufzubauen, sind unterschiedliche Darstellungen zu vernetzen (etwa Leinhardt et al., 1990). Dazu wurden verschiedene Lehr-Lern-Arrangements entwickelt und erforscht, z. B. die Füllgraphen-Umgebung für den Aufbau von Kovariationsvorstellungen (Swan, 1985), in der verschiedene Füllgraphen interpretiert und der situativ-ikonischen Darstellung zugeordnet werden sollen (vgl. Abb. 1). Schon Leinhardt et al. (1990, S. 11) betonten die Notwendigkeit, die *Funktion als Ganze* (den ganzen Füllgraphen) mit den Mustern der *Kovariation* zu verknüpfen, um diese Zuordnungsaufgabe zu lösen. Eine genauere Charakterisierung, wie diese Verknüpfungen im Lernprozess erfolgen, steht jedoch noch aus.

Der Beitrag untersucht die Lernprozesse eines neuzugewanderten Jugendlichen in dieser Füllgraphen-Umgebung und rekonstruiert qualitativ, wie er die extrem kondensierte graphische Darstellung der Füllgraphen sukzessive mit Bedeutung füllt. Gezeigt werden soll, dass sich dieser Verstehensprozess als Prozess des Auffaltens (Prediger, 2018) charakterisieren lässt.

Die Metapher des Auffaltens von Verstehenselementen geht auf Drollinger-Vetters (2011) Interpretation Aeblis zurück, sie beschreibt dadurch, dass Experten verdichtete mathematische Konzepte in ihre einzelnen Verstehenselemente zerlegen können und genau diese Auffaltung zentral für den Verstehensprozess ist. Gerade bei sprachlich schwachen Lernenden konnte gezeigt werden, dass die für die Auffaltung notwendige Sprache nicht immer zur Verfügung steht (Prediger, 2018). Die Analyse wird zeigen, dass es dem Neuzugewanderten dennoch gelingt.

Methodischer Rahmen

Die Lernprozessanalyse erfolgt im Rahmen eines Design-Research-Projekts, bei dem die empirisch fundierte Entwicklung eines fach- und sprachintegrierten Lehr-Lern-Arrangements für Neuzugewanderte iterativ verknüpft wird mit der empirischen Untersuchung individueller Lernwege (Prediger, 2018).

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Die Designexperimente wurden in Serien von fünf bzw. sieben Sitzungen à 70–90 Minuten mit je zwei bis drei Jugendlichen durchgeführt. Der Lernende Bela, der in diesem Artikel vorgestellt wird, ist 17 Jahre alt und 15 Monate vor der ersten Erhebung aus Mazedonien zugewandert. Alle Lernprozesse wurden videographiert (über 900 Minuten Videomaterial) und weitgehend transkribiert. Die Äußerungen zum funktionalen Zusammenhang von Wassermenge und Füllhöhe in den Transkripten wurden analysiert bzgl. (1) der Darstellung (SIT für situativ, GR für graphisch), (2) der genutzten Grundvorstellung (*zu* für Zuordnung, *kov* für Kovariation, *gan* für Funktion als Ganzes) sowie (3) der Adressierung der Grundvorstellung in der Darstellung (Aussehen des Graphen, Steigung oder Füllgeschwindigkeit).

Erste Analyseergebnisse

Die Lernenden haben zu Beginn des Lehr-Lern-Arrangements selbst Füllexperimente mit verschiedenen Gefäßen durchgeführt, diese graphisch dargestellt und neben dem Zuordnungsaspekt bereits erste Ideen zur Kovariation aufgebaut. Zudem wurden wichtige Sprachmittel sowie die Sprachhandlung des Vergleichens von Graphenabschnitten eingeführt. Im abgedruckten Transkript erläutert Bela, inwiefern der Graph GR2 (in Abb. 1) zu dem Füllgefäß IK1 passt.

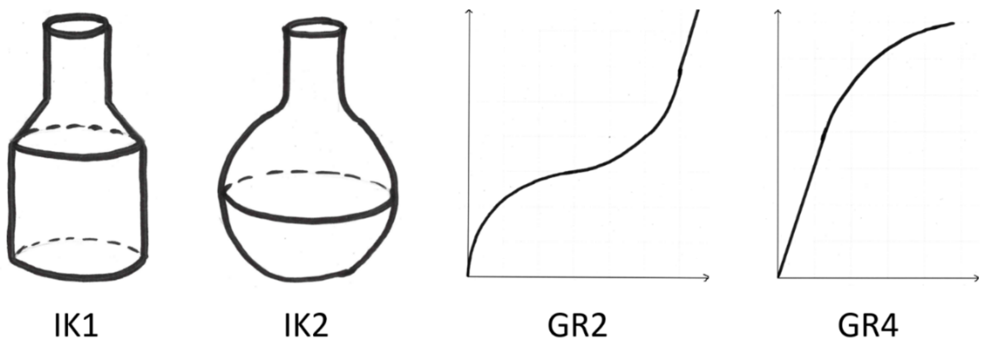

Abb. 1: Füllgefäße und zugehörige Füllgraphen

Erklärung der Passung im Objektaspekt

8	Leh	Wir füllen hier unten erstmal ein bisschen Wasser rein. Zack, zack, zack [*zeigt auf den unteren Teil IK1*]. Ungefähr bis hier zu dieser ersten Ecke, zu der Kante. Wie muss das Stück von dem Graphen aussehen, das dazu passt? […]	SIT (*kov*): Veränderung 1. Größe
11	Bela	Einfach geradeaus [*bewegt im Graphen die senkrechte Hand mehrfach nach vorne*].	GR (*gan*): Aussehen des Graphen
12	Leh	Geradeaus, mhm. Und wieso?	
13	Bela	Äh weil hier [*zeigt auf unteren Teil IK2*] ist, äh, gleiche B- was Wort? Bereit? #, ist gleich bereit, ist gleich breiter und	GR (*gan*):

	das muss hier [*zeigt auf Anfang von GR2*] bis halb äh, gleich aussehen, so geradeaus einfach [*bewegt senkrechte Hand nach vorne*].	Aussehen des Graphen

Die Lehrerin knüpft zu Beginn der Aufgabe an die Erfahrungen der Lernenden im Experiment an und fragt nach der graphischen Darstellung der Situation, wenn sich die erste Größe verändert (T. 8). Bela nimmt den Impuls auf, indem er zunächst das Aussehen des Graphen sowohl sprachlich als auch gestisch beschreibt (T. 11) und dies nach Aufforderung der Lehrerin noch einmal ausführlicher ausführt (T. 13). Hierbei verknüpft er auf der Ebene der *Funktion als Ganzes* die charakteristischen Eigenschaften der Gefäß-Form und des Graphen miteinander, geht jedoch nicht mehr auf die beiden Größen der Ausgangsfrage ein. Er nutzt also hoch verdichtete Formulierungen zur *Funktion als Ganzes*: ‚Der Graph steigt am Anfang flacher als am Ende, deshalb muss das Gefäß unten breiter als oben sein.' Auch nach weiteren Impulsen der Lehrerin im Kontext (in den nicht abgedruckten Turns) begründet Bela seine mathematisch richtigen Zuordnungen zunächst weiter über die Vorstellung der *Funktion als Ganzes* und adressiert dabei die graphische Darstellung meist über die Steigung oder das Aussehen des Graphen.

Das Auffalten der Funktion als Ganzes

68 Leh	So und jetzt gucken wir uns mal den Rest von diesem Graphen hier an [GR1], das ist ja irgendwie ganz schön geschlängelt. Bela, kannst du einmal erklären: Warum passt dieses Stück [*zeigt auf Anfang GR1*] zu dem runden Teil [IK1]?	GR (*gan*): Aussehen des Graphen
69 Bela	Weil so ist auch uns- unsere Glas [IK1]. Am Anfang ist er schmaler, dann werdet er breiter [*zeigt eine breite Lücke mit seinen Händen*], dann ja, ganz hoch, ist gleich-mäßig ...? [*führt die Hände nach oben*] # und schmal. Ganz gleichmäßig breit und schmal. Und so ist auch unsere Füllgraph. Hier steht ein bisschen, dass er geht- dass unsrer Füllhöhe geht schneller nach oben, danach ein bisschen langsamer und wieder sch- ganz schnell nach oben. Das, ja, das beschreibt uns, dass ist schmaler, breiter, dann wieder schmaler [*zeigt die Stellen an GR1*].	GR (*kov*): Vergleich versch. Geschwindigkeiten

Im Gegensatz zu vorangegangenen Begründungen ist Bela hier in der Lage, die Passung ‚schmales Gefäß – steiler Graph, breites Gefäß – flacher Graph' zu begründen, statt nur zu konstatieren. Erst in dieser Auffaltung beschreibt er nicht nur die Form des Graphen oder des Gefäßes *als Ganzes*, sondern beschreibt die Kovariation der Größen und überträgt dies auf den Verlauf des Graphen. Die Auffaltung der *Funktion als Ganze* erfolgt hier in *Kovariationsvorstellung*, indem er die Veränderung der 2. Größe anhand der

Geschwindigkeit sowie des Vergleichs unterschiedlicher Geschwindigkeiten mit den unterschiedlichen Breiten des Füllgefäßes verbindet.

Fazit und Ausblick

Die skizzierte Analyse von Belas Erklärungen zur Passung von Füllgraph und Füllgefäß zeigt, dass das Muster ‚schmales Gefäß – steiler Graph, breites Gefäß – flacher Graph' in der Grundvorstellung der *Funktion das Ganzes* verbleibt und zu seiner Begründung aufgefaltet werden muss. Dieses Auffalten erfordert die explizitere Identifikation der Größen (*Zuordnung* Wassermenge/Zeit – Füllhöhe) und die Beschreibung ihrer *Kovariation*.

In diesem Aufgabensetting wird die Grundvorstellung der *Funktion als Ganzes* in der graphischen Darstellung über die Steigung oder das Aussehen des Graphen adressiert, wohingegen die Kovariation situativ über Geschwindigkeit adressiert wird. Des Weiteren liegt die Vermutung nahe, dass ebendiese Prozesse des Auffaltens und Verdichtens die Kernprozesse des inhaltlichen Verstehens widerspiegeln, sodass sie im vorliegenden Material und den folgenden Zyklen in den Designsettings deutlicher verankert werden sollen.

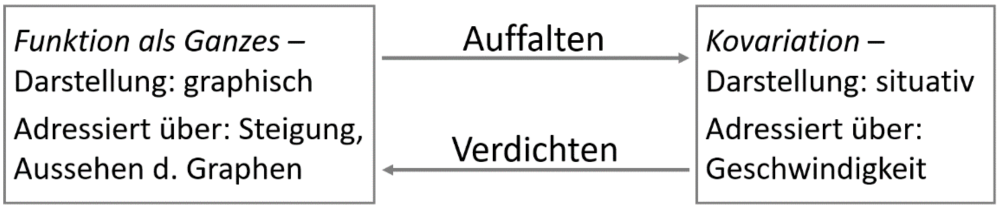

Abb. 2: Auffalten und Verdichten der Grundvorstellungen

Dank: Die Fallstudie wird in der MuM-Forschungsgruppe (Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit) durchgeführt, die vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert wird. Ich danke meiner Doktormutter S. Prediger für die Gelegenheit und die Betreuung.

Literatur

Drollinger-Vetter, B. (2011). Verstehenselemente und strukturelle Klarheit. Münster: Waxmann.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Math.-Didaktik*, 10(1), 3–37.

Prediger, S. (2018). Design-Research als fachdidaktisches Forschungsformat: Am Beispiel Auffalten und Verdichten mathematischer Strukturen. In Fachgruppe Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 33–40). Münster: WTM.

Swan, M. (1985). *The Language of Functions and Graphs. An Examination Module for Secondary Schools*. Nottingham: Shell Centre.