

Das Einheitenkonzept als Komponente des Längenkonzepts

Die Notwendigkeit der Förderung der Entwicklung von Größenkonzepten ist unumstritten. Unter „Konzept“ wird hier eine gesamte kognitive Struktur verstanden, die entsprechende mentale Bilder, Attribute und Prozesse umfasst (Tall & Vinner, 1981). Ein Konzept bezeichnet nicht ein kohärentes Ganzes, sondern besteht aus Teilkonzepten oder Komponenten (Rittel-Johnson et al., 2001; Zöllner, 2020). Das Längenkonzept setzt sich aus unterschiedlichen Komponenten zusammen, zwischen denen Zusammenhänge bestehen (Zöllner, 2020). In der Grafik werden Komponenten des Längenkonzepts dargestellt. Das Einheitenkonzept, das im Zentrum dieses Beitrags steht, nimmt eine wichtige Rolle unter den Komponenten des Längenkonzepts ein. Die Verbindungslinien zwischen dem Einheitenkonzept und anderen Komponenten verweisen auf Zusammenhänge.

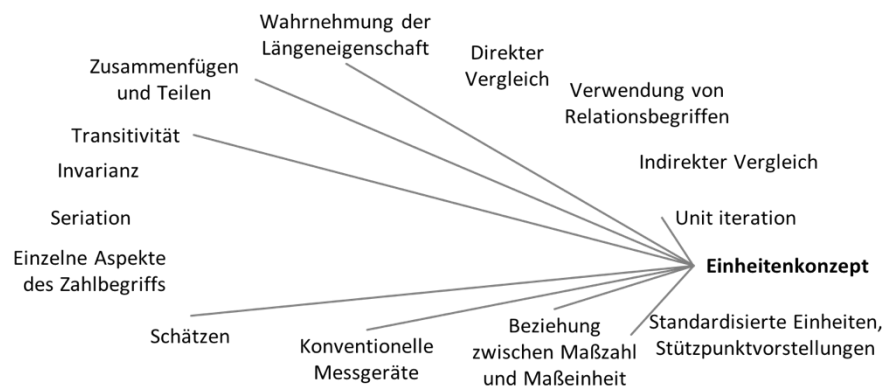


Abb.: Das Einheitenkonzept als Teil des Längenkonzepts

Längeneinheiten in der mathematikdidaktischen Forschung

Obwohl der Umgang mit Einheiten beim Vergleichen und Messen von Längen wesentlich ist, finden sich kaum empirische Studien, welche den Fokus explizit auf das Einheitenkonzept legen. Vielmehr wird der Umgang mit Längeneinheiten in anderen Zusammenhängen untersucht. Im Folgenden werden einige wichtige Ergebnisse dieser Studien zusammengefasst. Sie beschreiben auch einige der Zusammenhänge, die zwischen dem Einheitenkonzept und anderen Komponenten des Längenkonzepts bestehen, die in der Grafik durch Verbindungslinien dargestellt sind.

Die Einteilung einer Länge in Einheiten mit Hilfe mehrerer Einheitsrepräsentanten (*Unit iteration*) gelingt bereits den meisten Kindern der 1. Klasse (Carpenter, 1971). Mit Hilfe eines einzelnen Einheitsrepräsentanten ist die Mehrheit der Kinder dazu erst in der vierten Klasse in der Lage (Kamii &

Clark, 1997). Ob die Kinder jedoch auch ein konzeptuelles Verständnis haben, dass durch das Anlegen der Einheitsrepräsentanten eine Einteilung der Gesamtlänge in gleich lange Teillängen, also in Einheiten erfolgt, wurde nicht untersucht. Dass die Länge eines Objekts als Summe von Teillängen dargestellt werden kann, wissen Schulanfänger*innen nach Hiebert (1984). Es kann also davon ausgegangen werden, dass sie eine entsprechende Länge auch als Summe von Einheiten erkennen (*Zusammenfügen und Teilen*).

Kinder der 1. und 2. Klasse beurteilen Maßangaben allein aufgrund der Maßzahl ohne die Maßeinheit zu berücksichtigen (Carpenter & Lewis, 1976) (*Beziehung zwischen Maßzahl und Maßeinheit*). Vielen gelingt es jedoch bereits vorherzusagen, wie sich das Messergebnis verändert, wenn Einheitsrepräsentanten einer anderen Länge zum Messen verwendet werden (ebd.). Den Kindern wurde ein Streifen vorgelegt, der mit vier längeren Einheitsrepräsentanten ausgelegt war. Dann wurden sie nach ihrer Einschätzung befragt, wie viele kürzere Einheitsrepräsentanten benötigt werden um die Länge des Gegenstands abzubilden. 35 von 51 Kindern erkannten, dass eine größere Anzahl von kürzeren Einheitsrepräsentanten benötigt wird. Es besteht also ein Unterschied zwischen dem Berücksichtigen der Maßeinheit bei einer Längenangabe und der Erkenntnis, dass eine höhere Anzahl an kleineren Einheiten benötigt wird, um eine Länge abzubilden.

Kinder nutzen zum Messen und Vergleichen bevorzugt *konventionelle Messgeräte* (Nunes et al., 1993), allerdings häufig auf rein funktional-mechanische Weise (Boulton-Lewis et al., 1996). Häufig zählen sie beim Ermitteln einer Länge auf der Skala eines Messgeräts die Markierungen und nicht die Längeneinheiten (Bragg & Outhred, 2001). Selbst die meisten 9- bis 13-Jährigen lesen eine Skala, auf welcher jeweils zwei Einheiten durch eine Markierung abgetrennt sind, nicht richtig ab (Hiebert, 1981). Das deutet darauf hin, dass Kinder zwar auf prozeduraler Ebene messen können, jedoch noch kein konzeptuelles Verständnis für den Messprozess und damit die Bedeutung von Einheiten haben. Nunes et al. (1993) stellen andererseits fest, dass 63% der von ihnen untersuchten 6- bis 8-Jährigen mit einem zerbrochenen Lineal, dessen erster Skalenpunkt 4 ist, richtig messen. Das bedeutet, dass diese Kinder die Skala nicht einfach ablesen; sie zählen die Einheiten auf dem zerbrochenen Lineal oder ermitteln das Messergebnis durch einen Rechenprozess.

Nührenbörger (2002) konnte zeigen, dass Zweitklässler*innen bereits vor der unterrichtlichen Behandlung der Längen konkrete Vorstellungen von einem Meter und einem Zentimeter besitzen (*Standardisierte Einheiten, Stützpunktvorstellungen*). Sie nutzen beim Aufzeigen ein „internal measurement tool“, d.h. die Vorstellung von einem Zentimeter auf einem Lineal.

Diese Auswahl an Erkenntnissen aus empirischen Studien zeigt, wie vielfältig Einheiten im Kontext des Messens und Vergleichens von Längen genutzt werden, so dass auch bezüglich der Einheiten von einem Konzept gesprochen werden kann, das unterschiedliche Komponenten und Prozesse umfasst (Tall & Vinner, 1981).

Ergebnisse einer empirischen Studie

In einer umfassenden empirischen Studie zu kindlichen Längenkonzepten (Zöllner, 2020) werden die Vorgehensweisen von 40 Kindern im Alter von vier bis sechs Jahren in Mess- und Vergleichssituationen analysiert. Über verschiedene Aufgaben hinweg wird der Einsatz von Einheiten analysiert, um Rückschlüsse auf die Einheitenkonzepte zu gewinnen. Im Folgenden werden diesbezüglich die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst.

Fast alle Kinder nutzen in mindestens einer Anforderungssituation Einheiten (33 von 40 Kindern). Es kann jedoch nicht davon ausgegangen werden, dass Kinder, die in einzelnen Situationen Einheiten nutzen, auch tatsächlich über ein umfassendes konzeptuelles Verständnis der Einheit, also ein Einheitenkonzept verfügen. Die meisten Kinder nutzen nicht in jeder passenden Situation Einheiten. Das bedeutet auch, dass das Nutzen von Einheiten von der Anforderungssituation abhängig ist.

In der klassischen didaktischen Stufenfolge nimmt das Messen oder Vergleichen mit Hilfe willkürlicher Einheitsrepräsentanten eine wichtige Stellung ein. Jedoch kann aus dem erfolgreichen Vorgehen in diesen Anforderungssituationen nicht auf ein Einheitenkonzept der Kinder geschlossen werden. In der hier beschriebenen Untersuchung legt mehr als die Hälfte der Kinder (24 von 40) in einer Vergleichssituation die zu vergleichenden Linien mit willkürlichen Einheiten aus. Jedoch führen lediglich 17 Kinder den indirekten Vergleich auf diese Weise erfolgreich durch. Selbst diese Kinder nutzen nicht in jeder weiteren passenden Anforderungssituation Einheiten.

Es gibt auch 4- bis 6-Jährige (5 von 40), die in jeder analysierten Aufgabe Einheiten nutzen. Rittle-Johnson et al. (2001, S. 346) beschreiben, dass prozedurales Wissen an spezifische Problemtypen gebunden und nicht generalisierbar ist. Da diese Kinder in verschiedenen Situationen Einheiten zur Lösung der Aufgabe einsetzen, kann also davon ausgegangen werden, dass sie bereits ein Einheitenkonzept entwickelt haben.

Wenn Kinder in einer Aufgabe keine Einheiten nutzen, kann nicht zwingend auf ein fehlendes Einheitenkonzept geschlossen werden. Es gibt Anforderungssituationen, in welchen die Vorgehensweise der Kinder darauf schließen lässt, dass ein konzeptuelles Verständnis über Einheiten genutzt wird,

jedoch fehlt den Kindern prozedurales Wissen, um eine Länge in gleich lange Teillängen also in Einheiten zu teilen.

Fazit

Bereits im Elementarbereich entwickeln Kinder erste Einsichten in den Umgang mit Einheiten. Das Einheitenkonzept ist jedoch ein komplexes Konzept, das sehr unterschiedlich im Kontext des Messens und Vergleichens von Längen genutzt wird. Der Komplexität des Einheitenkonzepts kann nur durch ein vielfältiges Angebot an unterschiedlichen Anforderungssituationen und Bearbeitungsmöglichkeiten Rechnung getragen werden.

Literatur

- Boulton-Lewis, G. M., Wilss, L. A. & Mutch, S. L. (1996). An analysis of young children's strategies and use of devices for length measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, (15), 329–347.
- Bragg, P. & Outhred, L. (2001). So that's what a centimetre looks like: Students' understanding of linear units. In M. V. D. Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *PME 25* 2-209 – 2-216. Utrecht: PME.
- Carpenter, T. P. (1971). The role of equivalence and order relations in the development and coordination of the concepts of unit size and number of units in selected conservation type measurement problems. *Technical Report No. 178*, Madison: University of Wisconsin.
- Carpenter, T. P. & Lewis, R. (1976). The development of the concept of a standard unit of measure in young children. *J. for Research in Mathematics Education*, 7(1), 53–58.
- Hiebert, J. (1981). Results and implications from national assessment. *Arithmetic Teacher*, 26 (6), 38–43.
- Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts? *Arithmetic Teacher*, 31 (7), 19–24.
- Kamii, C. & Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, (3), 116–121.
- Nunes, T., Light, P. & Mason, J. (1993). Tools for Thought: The measurement of Length and area. *Learning and Instruction*, (3), 39–54.
- Nührenbörger, M. (2002). *Denk- und Lernwege von Kindern beim Messen von Längen. Theoretische Grundlegung und Fallstudien kindlicher Längenkonzepte im Laufe des 2. Schuljahres*. Hildesheim: Franzbecker.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93 (2), 346–362.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151–169.
- Zöllner, J. (2020). *Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.