

ADAPTIVE
FINITE-ELEMENTE-METHODEN FÜR
THERMOPLASTISCHE
KONTAKTPROBLEME

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES EINES
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
(DR. RER. NAT.)

DER FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK DER
TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DORTMUND

VORGELEGT VON

ULLRICH RALF FRIEDRICH-WILHELM HEUPEL

IM AUGUST 2020

DISSERTATION

Adaptive Finite-Elemente-Methoden für thermoplastische Kontaktprobleme

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

ERSTGUTACHTER: Prof. Dr. Andreas Rademacher

ZWEITGUTACHTER: Prof. Dr. Heribert Blum

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 29. Oktober 2020

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die durch Ihre Hilfe und Unterstützung das Entstehen dieser Arbeit möglich gemacht haben.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinem Betreuer Andreas Rademacher für seinen unermüdlichen Einsatz und seine Hilfsbereitschaft während des gesamten Prozesses der Promotion und darüber hinaus. Außerdem bedanke ich mich bei Herrn Heribert Blum und allen weiteren Mitgliedern des Lehrstuhls für Wissenschaftliches Rechnen für die fachlichen Diskussionen, anregenden Gespräche und angenehme Arbeitsatmosphäre. Nicht zuletzt geht mein Dank auch an meine Familie und Freunde, die während meines gesamten Studiums immer Verständnis gezeigt haben und für mich da waren.

Weiterhin danke ich dem Mercator Research Center Ruhr (MERCUR) für die finanzielle Unterstützung, die ich im Rahmen der Anschubförderung für das Projekt „Ort-Zeit-Finite-Elemente-Methoden für thermomechanisch gekoppelte Kontaktprobleme“ mit dem Förderkennzeichen „AN-2013-0060 “ erhalten habe.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Dynamisches Problem	13
2.1	Grundlagen	13
2.2	Starke Formulierung	15
2.3	Schwache Formulierung	20
2.4	Zeitschrittverfahren	22
2.5	Ortsdiskretisierung	23
2.6	Knotenweise Nebenbedingungen	27
2.7	Semiglattes Newton-Verfahren	29
2.8	Algebraische Darstellung	30
2.9	Statisches Kondensieren	38
2.10	Numerische Ergebnisse	46
3	DWR Fehlerschätzer	63
3.1	Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen	63
3.2	Auswertung und Lokalisierung der Residuen	78
3.3	Numerische Ergebnisse	82
4	Fazit und Ausblick	93

1 Einleitung

Die modernen Naturwissenschaften sowie die Industrie verlangen nach numerischen Simulationen von hochkomplexen Vorgängen. Die mathematische Modellierung der untersuchten Probleme wird häufig mit partiellen Differentialgleichungen durchgeführt. Im Allgemeinen ist es jedoch leider nicht möglich eine analytische Lösung zu finden. Deswegen kann das Finden einer näherungsweise Lösung mit numerischen Methoden unser Verständnis der Naturphänomene erweitern. Dadurch erhalten wir immer bessere Einsicht in die noch unerforschten Aspekte der Natur. Für viele industrielle Fertigungsverfahren besteht die Notwendigkeit das Verhalten von Werkstücken unter der Berücksichtigung einer großen Anzahl von verschiedenen physikalischen Effekten zu simulieren. Dabei gilt es die Kopplung und gegenseitigen Beeinflussungen der Effekte zu berücksichtigen. Ein Effekt, der bei einer Vielzahl von Anwendungen auftritt, ist der Kontakt. Zum Beispiel beim Massivumformen, Schleifen oder Bohren kommt es zum Kontakt zwischen Werkstück und Maschine. Dieser Kontakt induziert nicht nur die Verformung des Werkstückes, sondern es treten auch eine Reihe anderer Folgen auf. Eng mit dem Kontakt verbunden ist die Reibung zwischen Körper und Hindernis. Diese kann das freie Fließen von Material verlangsamen oder verhindern. Die Veränderung der Form ruft im Körper Verzerrungen und Spannungen hervor. Diese können elastischer oder plastischer Natur sein. Elastische Verzerrungen bilden sich, nachdem die hervorrufende Kraft verschwindet, wieder zurück. Im Gegensatz dazu bleiben plastische Verzerrungen weiterhin bestehen. Fast alle dieser Einflüsse erzeugen auch Wärme, die im Gegenzug wieder zu Verformungen führt oder die Reibeigenschaften des Körpers beeinflusst. Dieses Zusammenspiel von Phänomenen tritt aber nicht nur in Produktionsprozessen auf, sondern auch in der Natur. Bei der Plattentektonik kommt es unter enormen Kräften zum Kontakt zwischen den verschiedenen Platten und zu Verformungen und Spannungen in einem sehr großen Maßstab. Im Alltag kann so ein Verhalten beim Abrollen eines Autoreifens auf der Straße beobachtet werden. Wenn dieser Ablauf zur Verbesserung von Sicherheit oder Effizienz simuliert werden soll, müssen all diese Effekte in die Betrachtung mit einbezogen werden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines effizienten numerischen Lösungsverfahrens für dynamische, thermomechanisch gekoppelte, elastoplastische und reibungsbehaftete Kontaktprobleme mit einer adaptiven Finiten-Elemente-Methode (FEM). Es wird unter Verwendung von Mortar Elementen mit dem verbesserten kontaktstabilisierten Newmark-Verfahren und einem semiglatten Newton-Verfahren ein monolithisches Lösungsverfahren hergeleitet. Mit geschickter Wahl der Ansatz- und

1 Einleitung

Testräume im Rahmen der FEM werden die Unbekannten durch statische Kondensation auf Verschiebung und Wärme reduziert. Durch Reduktion der Anzahl der Unbekannten müssen deutlich kleiner Gleichungssysteme gelöst werden. Zur weiteren Verbesserung der Effizienz werden adaptive Methoden im Ort ausgenutzt. Die sogenannte h -Adaptivität wird durch die Verwendung eines Fehlerschätzers basierend auf der Methode der dual gewichteten Residuen (DWR) umgesetzt. Dafür wird eine allgemeine Form des DWR-Fehlerschätzers für Probleme mit nichtlinearen Komplementaritätsfunktionen (NCP-Funktionen) hergeleitet.

In Kapitel 2 wird das Lösungsverfahren für das dynamische, thermomechanisch gekoppelte, elastoplastische und reibungsbehaftete Kontaktproblem konstruiert. Hier wird die FEM mit Mortar Elementen für Einkörperkontakt verwendet. Die Methode wird seit ihrer Einführung in [9] häufig verwendet und viel untersucht. Angewendet wird sie für Kontaktprobleme [8, 67], reibungsbehaftete Kontaktprobleme [31, 43, 66, 82] sowie weitere Probleme, die auch thermomechanische, plastische oder andere Effekte modellieren [35, 38, 42, 59, 84]. Eine Übersicht über Entwicklungen der Methode und Anwendungen in der Strömungsmechanik findet sich in [57]. Außer der FEM mit Mortar Elementen werden auch andere Verfahren zur Lösung von Problemen in der Strukturmechanik verwendet. Im Penalty-Verfahren [49, 55] wird ein nicht physikalischer Strafterm eingeführt, der besondere Behandlung erfordert. Außerdem ergibt sich für die Steifigkeitsmatrix eine hohe Konditionszahl, die bei Verwendung von Mortar Elementen nicht auftritt. Eine Kombination des Penalty-Verfahrens mit Mortar Elementen ergibt das Augmented Lagrangian-Verfahren [34, 64, 81]. Bei der Verwendung des SQP-Verfahrens in [51, 75] muss in jeder Iteration eines Newton-Verfahrens ein Kontaktproblem gelöst werden. In [32] werden Finite Elemente höherer Ordnung mit einem semiglaten Newtonverfahren kombiniert. Für weitere Verfahren sei auf [33, 48, 91] verwiesen.

Zu Beginn wird in Kapitel 2.2 die starke Formulierung des betrachteten Problems vorgestellt. Zuerst wird die Gleichgewichtsbedingungen für Verschiebung und Wärme eingeführt. Sie beschreiben die Zusammenhänge zwischen Verschiebung und Spannung sowie die Wärmeverteilung im Körper, dessen Verhalten simuliert wird. Diese Zusammenhänge werden ausführlich in der Literatur beschrieben und untersucht [22, 58, 91] sowie [18, 89], da sie für fast alle Probleme der Festkörpermechanik von Bedeutung sind. In der Wärmeleitungsgleichung enthalten ist auch die Wärmegenerierung durch plastische Verformung. Grundlegend untersucht wurde die Menge der durch plastische Verzerrung freigesetzte Wärme von Taylor und Quinney in [10, 30, 85]. Es wurde festgestellt, dass ein Körper der plastischer Verzerrung unterliegt einen Teil der Energie in Wärme abgibt und der Rest der Energie in sogenannte „cold work“ fließt. Der Anteil der freigesetzten Wärme wurde für Metalle auf durchschnittlich 90% geschätzt. Neuere Forschungsergebnisse legen nahe, dass die Menge von durch plastische Verformung erzeugter Wärme stärker als angenommen von der bisher aufgetreten Plastifizierung, der Plastifizierungsrate und der Art der Last abhängt [52, 73]. In dieser Arbeit wird

die Betrachtung auf die in der Literatur häufig verwendete Rate von 0.9 beschränkt.

Im nächsten Abschnitt wird der reibungsbehaftete Kontakt vorgestellt. Durch Bewegung des Körpers oder Hindernisses kommt es zu Kontakt zwischen den beiden. Bei diesem Kontakt tritt Reibung auf, da die Oberflächen nicht glatt sind. Der Kontakt wird durch linearisierte Kontaktnebenbedingungen beschrieben. Dabei handelt es sich um Gleichungen und Ungleichung. Die Bedingungen sorgen dafür, dass der Körper und das Hindernis sich nicht durchdringen, dass nur Kontaktkräfte auftreten, wenn es zu Kontakt kommt, und diese in die richtige Richtung zeigen. Zuletzt wird durch die Persistenzbedingung sichergestellt, dass auch die Normalengeschwindigkeit verschwindet, wenn der Körper in Kontakt mit dem Hindernis ist. Diese Bedingung spielt eine wichtige Rolle für energieerhaltende Zeitdiskretisierungen [56]. Die Reibungsnebenbedingungen unterteilen den Bereich des möglichen Kontakts in einen gleitenden und einen haftenden Teil. Ein Punkt auf dem Kontaktrand beginnt zu gleiten, wenn die tangentielle Kraft die Reibgrenze überschreitet. Die Reibgrenze kann durch verschiedenen Reibgesetze beschrieben werden, von denen einige hier vorgestellt werden. Je nach Wahl des Reibgesetzes muss zwischen einfacher mathematischer Modellierung und guter Annäherung des realen Verhaltens abgewogen werden. Für tiefergehende Erläuterungen der Kontakt- und Reibungsbedingungen sei auf [27, 28, 43, 48, 91] verwiesen.

Für die schon in den Gleichgewichtsbedingungen auftretende plastische Verzerrung und die dazugehörige Verfestigung werden Bedingungen angegeben, die ähnlich zu denen der Reibung sind. Hier wird zur Unterteilung der Punkte im inneren die Fließgrenze verwendet. Diese gibt an, ab wann es zu plastischen Verzerrungen und Verfestigungen kommt. Im Gegensatz zu elastischen Verzerrungen bilden sich plastische Verzerrungen bei Entlastung nicht zurück, sondern bleiben dauerhaft bestehen. Durch die Verfestigung erhöht sich die Kraft, die für plastische Verzerrungen benötigt wird, in Abhängigkeit von der bisher aufgetretenen plastischen Verzerrung. Hier werden linear isotropische und kinematische Verfestigung betrachtet. Ausführliche Betrachtungen finden sich in [35, 37, 36].

Abschließend wird die starke Formulierung des Wärmeflusses [43, 45, 63] eingeführt. Dieser repräsentiert im Kontaktbereich den Wärmeaustausch zwischen Körper und Hindernis sowie die durch Reibung generierte Wärme.

In Abschnitt 2.3 wird die variationelle Formulierung des Problems angegeben. Diese basiert auf der Einführung von Lagrangemultiplikatoren für Kontakt, Reibung und Wärmefluss. Die Herleitung wird in vielen Büchern durchgeführt. Hier sei auf [37, 87] verwiesen.

Im Anschluss wird in Abschnitt 2.4 die Zeitdiskretisierung mit dem verbesserten kontaktstabilisierten Newmark-Verfahren [50] und dem Crank-Nicolson-Verfahren durchgeführt [23]. Zur Lösung von zeitabhängigen Kontaktproblemen werden häufig die in [61] vorgestellten Newmark-Verfahren verwendet. Diese erhalten zwar den Impuls, haben jedoch den Nachteil, dass sie zu Oszillationen im Bereich des Kontaktes führen und es zu nicht vorhersehbaren Veränderung des Gesamtenergie kommen kann [50]. Durch

1 Einleitung

Verbesserungen des Verfahrens bei der Energieerhaltung [47], dem Auftreten von Oszillationen [25] sowie der Einhaltung der Persistenzbedingung [50] ist ein energiedissipatives Verfahren entstanden, bei dem es nicht zu künstlichen Oszillationen kommt. Eine andere Methode für eine stabilen Zeitdiskretisierung ist die Massenmodifikation [35]. Dabei wird mit speziellen Quadraturformeln eine modifizierte Massenmatrix assembliert, deren Einträge auf dem Kontaktrand verschwinden. Für weitere Möglichkeiten zur Zeitdiskretisierung sei auf [26, 55] verwiesen.

In den Abschnitten 2.5 und 2.6 wird die Ortsdiskretisierung mit der Finiten-Elemente-Methode und Umformulierung der Nebenbedingungen in knotenweise Bedingungen durchgeführt. Dafür werden für die Lagrangemultiplikatoren duale Basisfunktionen verwendet. Diese wurden in [90] vorgestellt. Dadurch werden die Kopplungsmatrizen mit der Verschiebung und der Wärme zu Diagonalmatrizen und die Kontakt- und Reibungsbedingungen können zu knotenweisen Bedingungen umformuliert werden. Um die Nebenbedingungen für Plastizität in knotenweise Bedingungen umzuformen, werden stückweise konstante Ansatzfunktionen gewählt. Dargestellt werden diese für Kontakt, Reibung und Plastizität durch NCP-Funktionen [5, 21, 53, 81]. Beim Wärmefluss werden zur Umformung in knotenweise Bedingungen Lumpingtechniken eingesetzt [86].

Die schwache Form der Erhaltungsgleichungen und die nicht klassisch differenzierbaren Nebenbedingungen werden in Abschnitt 2.8 mit einem semiglatten Newtonverfahren aus Abschnitt 2.7 gelöst. Die entstehende monolithische Lösungsmethode ist äquivalent zu einer Aktiven-Mengen-Strategie [39]. Bei richtiger Wahl der Stabilitätskonstanten ergibt sich die Radial-Return-Verfahren [35, 80].

Als letzter Schritt werden in Abschnitt 2.9 alle Variablen bis auf Verschiebung und Wärme eliminiert. Dadurch verringert sich die Größe der linearen Gleichungssystem drastisch, aber es kommt auch zu Auffüllungen der Struktur. Die eliminierten Größen können durch einfach Matrix-Vektor-Multiplikationen in einem Postprocessing-Schritt bestimmt werden.

Zum Schluss wird das hergeleitete Verfahren in drei Beispielen auf Effektivität untersucht. Im ersten wird im dynamischen Fall die Energiebilanz des System betrachtet. Dabei wird die energisdissipative Eigenschaft des Verfahrens ersichtlich. In den beiden anderen Beispielen wird der statischen Fall des Problems als Ersatz für einen Zeitschritt betrachtet. Zuerst wird die Sensitivität des Verfahrens in Bezug auf die Stabilitätskonstanten aufgezeigt. Zuletzt wird an einem Beispiel mit analytischer Lösung gezeigt, dass das Verfahren auch mit biaktiven Mengen zurechtkommt.

Der zweite Teil der Arbeit in Kapitel 3 ist der Herleitung eines zielorientierten a posteriori Fehlerschätzers gewidmet. Bei der a posteriori Fehlerschätzung wird die diskrete Lösung selbst genutzt um ihre Genauigkeit zu begutachten. Mit den gewonnenen Erkenntnissen werden adaptive Methoden entwickelt die zur Verbesserung des Lösungsverfahrens eingesetzt werden. Bei uniformer Verfeinerung kann aufgrund von fehlender Regularität der Lösung nicht immer die volle Konvergenzordnung eines Verfahrens erreicht werden. Durch die Verwendung von Fehlerschätzern in adaptiven Me-

thoden kann die optimale Konvergenzrate wieder sichergestellt werden. Eine Möglichkeit der Fehlerschätzung ist die residuale Fehlerschätzung, bei der der gesamte Fehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung in einer Norm gemessen wird. Häufig wird hier die Energienorm verwendet. Diese Methode den Fehler zu schätzen wurde für eine große Menge an Problemen angewendet. Eine Klasse die viel betrachtet wird ist das Hindernisproblem [4, 16, 46], aber auch für das Signorini Problem [19, 54] existieren Schätzer. Auch für komplexere Probleme wie reibungsbhafteten Kontakt [51, 77] und elasto-plastischen Kontakt [78] wurden residuale Fehlerschätzer entwickelt. Ein residualler Fehlerschätzer für reibungsbehaftete elasto-plastische Mehrkörperkontaktprobleme mit Diskretisierungen höherer Ordnung findet sich in [32].

Bei der Anwendung von adaptiven Finite-Elemente-Methoden ist der Gesamtfehler in der Energienorm aber häufig nicht von besonders hohem Interesse. Vielmehr ist man an dem Fehler eines bestimmten Effektes oder in einem eingeschränkten Bereich des Gebiets interessiert. Man möchte zum Beispiel die Spannungen in einem Körper besonders genau modellieren, damit es nicht zu Materialversagen kommt oder die Kräfte im Kontaktbereich sind von besonderer Bedeutung. Eine Möglichkeit dies zu berücksichtigen ist die Fehlerschätzung mit der DWR-Methode [6, 7]. Bei der DWR-Methode kann der Fehler in einem fast beliebigem Zielfunktional abgeschätzt werden, mit dem man diese Gegebenheiten abbilden kann. Die Anwendung auf Probleme mit linearen Zielfunktionalen findet sich in [62, 64, 65]. Für Kontaktprobleme mit Variationsungleichungen wurden DWR-Fehlerschätzer in [12, 13, 14] entwickelt und in [83] dargestellt. DWR-Fehlerschätzer für das Signorini-Problem und nichtlineare Zielfunktionale wurden mit einem linearen dualen Problem in [76] hergeleitet und in [70] auf reibungsbehaftete Probleme erweitert. Die Arbeiten [32, 51] betrachten die Anwendung der DWR-Fehlerschätzung auf Mehrkörperkontaktprobleme.

In dieser Arbeit wird aufbauend auf den Ergebnissen aus [68, 69] ein statisches Problem betrachtet, dass durch eine allgemeine Semilinearform mit Nebenbedingungen in Form von NCP-Funktionen gegeben ist. Der Fehler soll in einem nichtlinearen Zielfunktional geschätzt werden. Dazu wird zusätzlich zum primalen Problem das duale Problem aufgestellt und beide werden mit der FEM diskretisiert. Die Systemmatrix des dualen Problems entspricht im Wesentlichen der transponierten Systemmatrix aus dem letzten semi-glaten Newtonschritt des primalen Problems. Mit den primalen und dualen Lösungen dieser beiden Probleme, lassen sich Fehleridentitäten für das Zielfunktional herleiten. Dabei werden die aktiven und inaktiven Mengen, die durch die NCP-Funktionen definiert werden, ausgenutzt. Dadurch geht sowohl die Verletzung der Nebenbedingungen als auch der Fehler in den aktiven und inaktiven Mengen additiv in die Fehleridentität ein. Diese Fehleridentitäten enthalten jedoch die analytischen Lösung, die im Allgemeinen nicht bekannt sind. Um einen auswertbaren Fehlerschätzer herzuleiten wird eine Patch-Interpolierende höherer Ordnung der diskreten Lösungen verwendet. Beim Fehlerschätzer werden die Restterme, die in der Fehleridentität zum Beispiel durch die Linearisierung aufkommen, vernachlässigt. Diese sind entweder von

1 Einleitung

höherer Ordnung im Fehler oder es ist durch numerische Untersuchungen zu vermuten, dass sie schneller gegen Null gehen als das primale und duale Residuum [68, 69]. Um eine adaptive Verfeinerung durchführen zu können müssen die Fehlerschätzer lokalisiert werden. Dabei werden die Beiträge einzelner Elemente der Triangulierung zum Fehlerschätzer bestimmt. Hier wird die Lokalisierung mit Filtertechniken nach [15] durchgeführt. Zur Verfeinerung kommt eine Optimal-Mesh-Strategy [71] zum Einsatz. Zum Abschluss werden die hergeleiteten Fehlerschätzer in einem adaptiven Verfahren an zwei numerischen Beispielen untersucht und ihre Effektivität gezeigt.

Die praktische Umsetzung der Ergebnisse dieser Arbeit wurden mit der Finite-Element-Software SOFAR [11] durchgeführt.

2 Dynamisches Problem

In diesem Kapitel wird ein Lösungsverfahren für das zeitabhängige elastoplastische reibungsbehaftete Kontaktproblem hergeleitet. Dafür werden zuerst in Abschnitt 2.1 die grundlegenden Begriffe und Räume eingeführt. Es werden die in der Arbeit verwendeten Definitionen und Eigenschaften von Sobolev- und Bochnerräumen vorgestellt. In Abschnitt 2.2 wird die starke Formulierung des Problems präsentiert. Es wird die zugrundeliegende Modellierung für Verschiebung, Wärme, Kontakt, Reibung, Verfestigung, plastische Verzerrung und Wärmefluss, sowie die gegenseitigen Abhängigkeiten vorgestellt. Aus der starken Formulierung wird in Abschnitt 2.3 die schwache Formulierung hergeleitet, die als Basis für die Zeit- und Ortsdiskretisierung in den Abschnitten 2.4 und 2.5 dient. Dabei wird für die Zeitdiskretisierung ein kontaktstabilisiertes Newmark-Verfahren vorgestellt und angewendet. Bei der Ortsdiskretisierung in der FEM werden endlichdimensionale Teilräume der Ansatzräume basierend auf konstanten und linearen Ansatzfunktionen sowie der Mortar-Basis verwendet. Aus der Diskretisierung entstehen für jeden Zeitschritt zwei nichtlineare und nichtglatte Gleichungssysteme. In Abschnitt 2.6 werden die Ungleichungsnebenbedingungen für Kontakt, Reibung, Plastizität und Wärmefluss in äquivalente knotenweise Gleichungsbedingungen umgeformt. Durch die Anwendung des semiglatten Newton-Verfahrens aus Abschnitt 2.7 wird in Abschnitt 2.8 für beide Gleichungssysteme eine Aktive-Mengen-Strategie formuliert. In Abschnitt 2.9 werden alle Unbekannten außer Verschiebung und Wärme durch statische Kondensation aus dem Gleichungssystem entfernt. Dadurch entstehen Gleichungssysteme, deren Größe deutlich reduziert ist. In den letzten drei Abschnitten werden numerische Untersuchungen des Lösungsverfahrens im dynamischen sowie statischen Fall durchgeführt. Die Algorithmen zur Behandlung der Reibung und Plastizität basieren auf [35, 43].

2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Funktionenräume eingeführt, die in den folgenden Problemstellungen verwendet werden. Weitere Ausführungen zu den Lebesgue- und Sobolevräumen sind zum Beispiel in [1, Kapitel 3], [48, Abschnitt 1.4] und [79, Abschnitt 3.3] zu finden. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ ein polygonal berandetes und beschränktes Gebiet. Der Raum $L^2(\Omega)$ ist der Raum der Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, deren Quadrate Lebesgue-integrierbar sind. Wir

2 Dynamisches Problem

identifizieren alle Funktionen einer Äquivalenzklasse $[v]$ mit ihrem Repräsentanten v . Mit dem Skalarprodukt

$$(v, w)_{0, \Omega} := \int_{\Omega} v(x) \cdot w(x) \, \mathbf{d}x,$$

wobei $v, w \in L^2(\Omega)$, ist der Raum $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum. Die induzierte Norm ist $\|v\|_{0, \Omega} := (v, v)^{1/2}$. Die Indizes entfallen, wenn es der Kontext zulässt. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ und $C_0^\infty(\Omega)$ der Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Dann ist $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$ die α -te schwache Ableitung von v , wenn gilt

$$(-1)^{|\alpha|} (D^\alpha v, \varphi) = (v, D^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Der Begriff ist wohldefiniert und stimmt für $v \in C^1(\Omega)$ mit der klassischen Ableitung überein. Der Sobolevraum $H^m(\Omega)$ ist der Raum aller Funktionen $v \in L^2(\Omega)$ für die gilt, dass $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$ für alle α mit $0 \leq |\alpha| \leq m$. Zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(v, w)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha v, D^\alpha w)$$

bildet auch $H^m(\Omega)$ einen Hilbertraum. Durch das Skalarprodukt wird die Norm $\|v\|_{m, \Omega} := (v, v)_m^{1/2}$ induziert. Außerdem sei $H_0^m(\Omega)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$. Der Dualraum zu $H_0^m(\Omega)$ ist der Raum $H^{-m}(\Omega)$. Die duale Paarung wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet.

Zur Behandlung von Randdaten werden Restriktionen auf den Rand benötigt. Die Existenz dieser Restriktionen wird durch den Spursatz garantiert. Dieser wird in [17, Abschnitt 2.3] und [48, Abschnitt 1.4] genauer behandelt. Sei Ω beschränkt mit stückweisem glattem Rand Γ und erfülle eine Kegelbedingung. Dann existiert ein beschränkter linearer Spuroperator

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma), \quad \|\gamma(u)\|_{0, \Gamma} \leq c \|u\|_{1, \Omega},$$

für den $\gamma(u) = u|_\Gamma$ für alle $u \in C^0(\bar{\Omega})$ gilt. Der Raum

$$H^1(\Omega, \Gamma_D) := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \gamma|_{\Gamma_D}(\varphi) = 0 \right\}$$

beinhaltet alle Funktionen mit Nullrandbedingungen auf Γ_D .

Im weiteren werden auch Sobolevräume mit rationalen Exponenten verwendet. Nach [48, Abschnitt 1.4] gilt: Für eine Teilmenge $G \subset \Omega$ mit Dimension d_G und einer rationalen Zahl $s := m + q$, wobei $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\|v\|_{s, G}^2 := \|v\|_{m, G}^2 + \int_G \int_G \sum_{|\alpha|=m} \frac{|D^\alpha(v(x) - v(s))|^2}{|x - s|^{d_G - 2q}} \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}s$$

die Slobodětskij-Norm. Der Raum $H^s(G)$ ist die Vervollständigung des Raumes $C^m(G)$ bezüglich dieser Norm. Den Ausführungen in [48, Abschnitt 5.3] folgend ist $\tilde{H}^{-1/2}(G)$ der Dualraum zu $H^{1/2}(G)$.

Für zeitabhängige Probleme müssen auch zeitabhängige Sobolevräume verwendet werden [29, Abschnitt 5.9]. Diese Bochnerräume bilden allgemein von einem reellen Intervall in einen Banachraum ab. Hier werden sie als Abbildung von einem Zeitintervall in einen Sobolevraum verwendet. Dafür sei $L^2(0, T; X)$ mit einem Banachraum X der Raum aller messbaren Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ mit endlicher Norm

$$\|u\|_{L^2(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

wobei $\|\cdot\|$ die zu X gehörige Norm ist. Außerdem ist $C(0, T; X)$ der Raum aller stetigen Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ mit der endlichen Norm

$$\|u\|_{C(0,T;X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Die zeitabhängige schwache Ableitung einer Funktion $u \in L^2(0, T; X)$ ist durch $\dot{u} \in L^2(0, T; X)$ gegeben, wenn

$$\int_0^T \dot{\varphi}(t)u(t) \, dt = - \int_0^T \varphi(t)\dot{u}(t) \, dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0, T])$$

gilt. Für glatte u stimmt sie mit der klassischen Ableitung überein.

Der Bochnerraum $H^m(0, T; X) := W^{m,2}(0, T; X)$ ist für $m \geq 0$ der Raum aller Funktionen $u \in L^2(0, T; X)$, für die alle k -ten schwachen Ableitungen mit $k \leq m$ wieder in $L^2(0, T; X)$ liegen. Das zeitabhängige Skalarprodukt ist

$$((u, v)) := \int_0^T (u(t), v(t)) \, dt,$$

wenn X ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) ist.

2.2 Starke Formulierung

In diesem Abschnitt wird die starke Formulierung des dynamischen, thermomechanisch gekoppelten, elastoplastischen und reibungsbehafteten Kontaktproblems eingeführt. Dazu werden nacheinander die Gleichgewichtsbedingungen für Verschiebung und Temperatur, die Bedingungen für Kontakt und Reibung, für Plastizität und Verfestigung sowie für den Wärmefluss formuliert.

2.2.1 Gleichgewichtsbedingungen

Für $d = 2, 3$ sei Ω ein Gebiet in \mathbb{R}^d . Dies ist der Körper dessen Verhalten simuliert werden soll. Betrachtet wird das Zeitintervall $I = [0, T]$, wobei $T > 0$ der Endzeitpunkt ist. Der Rand $\partial\Omega$ von Ω enthält die drei nichtüberlappenden offenen Teilmengen Γ_D , Γ_N und Γ_C , wobei Γ_C und Γ_D einen positiven Abstand haben. Siehe [48, Abschnitt 5.3] für ausführlichere Erläuterungen. Auf Γ_N und Γ_D sind Neumannranddaten $p_u : \Gamma_N \times I \rightarrow \mathbb{R}^d$ für die Verschiebung und $p_\theta : \Gamma_N \times I \rightarrow \mathbb{R}^d$ für die Temperatur bzw. Dirichletranddaten für Verschiebung $u_D : \Gamma_D \times I \rightarrow \mathbb{R}^d$ und Temperatur $\theta_D : \Gamma_D \times I \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben. Wenn keine Daten vorgegeben sind, können die Mengen leer sein. Die Menge Γ_C ist der Bereich, in dem es zu Kontakt und Reibung kommen kann.

Die anderen inneren Kräfte sind auf dem ganzen Gebiet definiert. Zum einen die Volumenkraft $f_u : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^d$, die äußere Kräfte modelliert, die auf den ganzen Körper wirken. Zum anderen die Funktion $f_\theta : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$, welche Wärmequellen und -senken modelliert.

Die Gleichgewichtsbedingungen für die Verschiebung $u : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^d$ und die Temperatur $\theta : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ lauten

$$\begin{aligned}
 \rho_u \ddot{u} - \operatorname{div}(\sigma + \sigma_\theta) &= f_u, & \text{in } \Omega \times I, \\
 \rho_\theta \rho_u \dot{\theta} - \operatorname{div} \kappa \nabla \theta - \bar{\gamma} \sigma \varepsilon^p &= f_\theta, & \text{in } \Omega \times I, \\
 \sigma &= C(\varepsilon - \varepsilon^p), & \text{in } \Omega \times I, \\
 u &= u_D, & \text{auf } \Gamma_D \times I, \\
 \theta &= \theta_D, & \text{auf } \Gamma_D \times I, \\
 \sigma_n &= p_u, & \text{auf } \Gamma_N \times I, \\
 \frac{\partial}{\partial n} \theta &= p_\theta, & \text{auf } \Gamma_N \times I, \\
 u(0) &= u_0, & \text{in } \Omega, \\
 \dot{u}(0) &= v_0, & \text{in } \Omega, \\
 \theta(0) &= \theta_0, & \text{in } \Omega.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Konstante ρ_u beschreibt die Dichte des Gebietes. Der Tensor $\sigma : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist der Cauchysche Spannungstensor mit linearisierter Verzerrung $\varepsilon := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ und dem Elastizitätstensor vierter Stufe C nach dem Hookeschen Gesetz. Der Verzerrungstensor zerfällt additiv in die elastische Verzerrung ε^{el} und die plastische Verzerrung ε^p . Die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit beschränken sich auf isotrope Medien. Im zweidimensionalen Fall wird der ebene Spannungszustand angenommen. Die durch die Temperatur entstehenden Spannungen werden durch den Tensor $\sigma_\theta := -\alpha_\theta(\theta - \theta_0) \operatorname{Id} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit dem thermischen Ausdehnungskoeffizient $\alpha_\theta > 0$ beschrieben. Die thermischen Zusammenhänge basieren auf der spezifischen Wärmekapazität ρ_θ , der thermischen Leitfähigkeit κ und dem Taylor-Quinney Koeffizient $\bar{\gamma}$. Der Taylor-

Quinney Koeffizient gibt an, wie viel Prozent der durch die plastische Verzerrung dissipierten Energie in Wärme umgewandelt wird. Die Neumannranddaten werden für die Oberflächenspannungen $\sigma_n := \sigma n$ mit dem äußeren Normalenvektor n vorgegeben. Die Startwerte für Verschiebung u_0 , Geschwindigkeit \dot{u}_0 sowie die Temperatur θ_0 beschreiben die Ausgangskonfiguration.

2.2.2 Kontakt und Reibung

Zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen müssen die Bedingungen für Kontakt und Reibung erfüllt werden. Dazu sei $\sigma_{nn} := n^T \sigma n$ der in Normalenrichtung zeigende Anteil der Kontaktspannungen und $\sigma_{nt} := n^T \sigma t$ der tangentielle Anteil. Dabei enthält die Matrix $t \in \mathbb{R}^{d \times (d-1)}$ die tangentialen Vektoren, die mit n eine Orthonormalbasis bilden. Sie ist nicht eindeutig festgelegt. Außerdem sei, mit dem Spuoperator γ , der normale Anteil einer Funktion durch $v_n := \gamma(v) \cdot n$ und der tangentielle Anteil durch $v_t := t^T \gamma(v)$ definiert. Weiterhin ist durch g die zeitunabhängige, normalisierte Abstandsfunktion definiert [48, Abschnitt 2.3].

Damit lauten die linearisierten Kontaktbedingungen

$$u_n \leq g, \quad -\sigma_{nn} \geq 0, \quad \sigma_{nn}(u_n - g_n) = 0, \quad \sigma_{nn} \dot{u}_n = 0 \quad \text{auf } \Gamma_C \times I. \quad (2.2)$$

Die erste Bedingung ist die Nichtdurchdringungsbedingung und stellt sicher, dass der Körper nicht in das Hindernis eindringt. Die zweite Bedingung sorgt dafür, dass die Kontaktkräfte nicht in das Hindernis hinein zeigen. Mit der dritten Bedingung tritt nur an Stellen, die Kontakt haben, auch eine Kontaktkraft auf. Durch die vierte Gleichung wird die Persistenzbedingung beschrieben, die bedeutet, dass die Normalenkomponente der Geschwindigkeit verschwinden muss, wenn es eine Kontaktkraft gibt.

Die Reibbedingungen hängen von dem gewählten Reibmodell ab, mit dem die echte Reibgrenze angenähert wird. Das einfachste Reibmodell ist das Reibgesetz nach Tresca [27]. Dabei wird die Reibgrenze als konstant angenommen. Mit $\sigma_S > 0$, wird es durch

$$S_T := \sigma_S$$

dargestellt. Für große Kontaktspannungen ist das Tresca-Reibgesetz gut geeignet. Im Falle kleiner Kontaktspannungen ist die Modellierung nach Tresca jedoch nicht gut geeignet, da hier ein proportionaler Zusammenhang zwischen Kontaktkraft und Reibgrenze besteht. Zur Behebung dieser Unzulänglichkeit wird die Reibgrenze von der Kontaktspannung abhängig gemacht. Beim Reibgesetz nach Coulomb wird von einem linearen Zusammenhang von Kontaktkraft und Reibgrenze ausgegangen [91, Abschnitt 5.2.3]. Die Reibgrenze nach Coulomb ist

$$S_C(|\sigma_{nn}|) = \mathcal{F}|\sigma_{nn}|$$

2 Dynamisches Problem

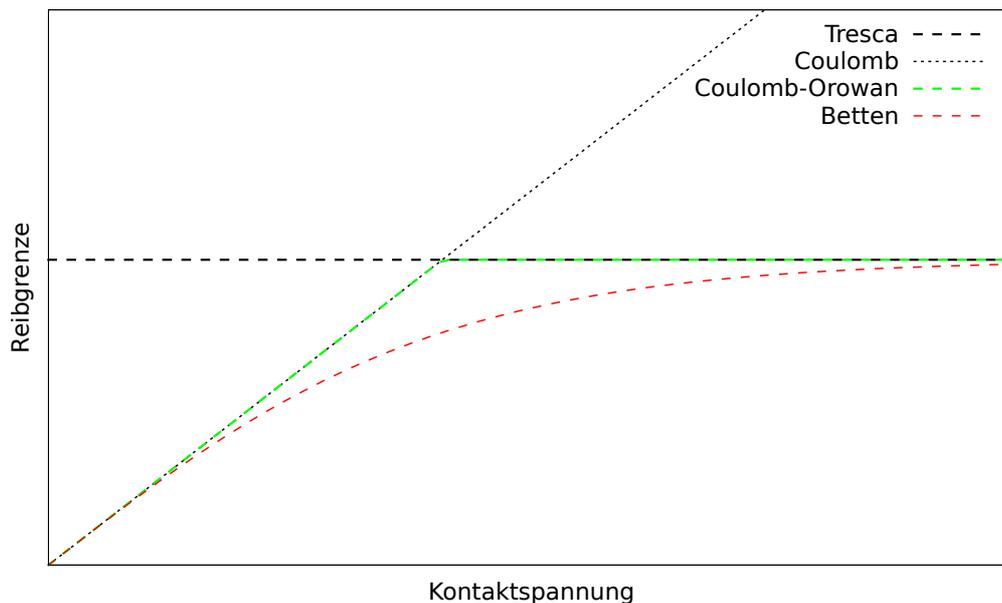


Abbildung 2.1: Beispielhafte Darstellung der Reibgesetze.

mit dem Reibkoeffizient $\mathcal{F} > 0$. Hierbei ist die Reibgrenze für große Kontaktspannungen jedoch unbegrenzt. In Wirklichkeit geht die Reibgrenze für größer werdende Kontaktspannungen asymptotisch gegen einen festen Wert. Das Reibmodell nach Coulomb-Orowan [91, Abschnitt 5.2.5]

$$S_O(|\sigma_{nn}|) = \min\{\sigma_S, \mathcal{F}|\sigma_{nn}|\}$$

kombiniert die Vorteile beider Modelle. Jedoch ist es nicht klassisch differenzierbar und modelliert den Übergang von kleinen zu großen Kontaktspannungen nicht gut. Durch das Reibgesetz nach Betten [41]

$$S_{CO}(|\sigma_{nn}|) = \sigma_S \sqrt[n]{\tanh\left(\frac{\mathcal{F}|\sigma_{nn}|}{\sigma_S}\right)^n},$$

mit $n \in \mathbb{N}$, kann der Übergang durch geeignete Wahl von n besser angenähert werden und die Reibgrenze S ist überall differenzierbar. Eine Übersicht der vorangegangenen Reibgesetze findet sich in Abbildung 2.1.

Es sind auch Abhängigkeiten von mehreren Parametern möglich. Eine Abhängigkeit von der Verschiebung kann unterschiedliche Bedingungen auf der Oberfläche des Körper darstellen und durch eine Abhängigkeit von der Temperatur können Veränderungen der Oberfläche durch Erhitzen simuliert werden. Mit einem allgemeinen Reibgesetz

$S := S(u, \sigma_{nn}, \theta)$ können die Reibbedingungen wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} \|\sigma_{nt}\| &\leq S, \\ \|\sigma_{nt}\| < S &\Rightarrow \dot{u}_t = 0, & \text{auf } \Gamma_C \times I \\ \|\sigma_{nt}\| = S &\Rightarrow \exists \zeta_c \in \mathbb{R} : \sigma_{nt} = \zeta_c^2 \dot{u}_t, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aus der ersten Ungleichung folgt, dass die Norm der tangentialen Kräfte nie größer als die Reibgrenze sein kann. Die anderen beiden Bedingungen unterteilen den Kontakttrand in zwei disjunkte Bereiche. Wenn die Norm der Kontaktkraft kleiner als die Reibgrenze ist, haftet der Körper am Hindernis und die tangentiale Geschwindigkeit verschwindet. Im anderen Fall gleitet der Körper und die tangentiale Kontaktkraft ist ein Vielfaches der tangentialen Geschwindigkeit.

2.2.3 Plastizität und Verfestigung

Die Bedingungen für Plastizität und Verfestigung sind denen für Reibung sehr ähnlich. Hier wird statt einer Reibgrenze S eine Fließgrenze $\bar{Y}(\beta) := a_0^{-1}(\sigma_0 + H\beta)$ und $\bar{Y} := \bar{Y}(\alpha)$ zur Unterscheidung benutzt. Diese Grenze hängt nur von der äquivalenten plastischen Verzerrung $\alpha : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ab. Die Grenzspannung $\sigma_0 > 0$ ist gegeben und stellt den Punkt dar, ab dem es, ohne Berücksichtigung von Verfestigungen, zu plastischen Verzerrungen kommen würde. Die Abhängigkeit der Fließgrenze von α wird durch den Koeffizienten für die lineare isotropische Verfestigung $H > 0$ bestimmt. Die kinematische Verfestigung mit dem Koeffizienten $K > 0$ geht über die relative deviatorische Spannung $\eta(\tau) := \text{dev } \sigma - a_0^{-2} K \tau : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ein. Zur Vereinfachung der Notation seien $\eta := \eta(\varepsilon^p)$. Der deviatorische Anteil eines Tensors wird durch $\text{dev } \sigma := \sigma - \frac{1}{d} \text{tr } \sigma \text{Id}$ bestimmt. Der Skalierungsfaktor $a_0^2 := \frac{d}{1-d}$ ermöglicht eine konsistente Notation für beide möglichen Raumdimensionen. Für die plastische Verzerrung wird von Mises-Plastizität angenommen. Dabei gilt $\varepsilon^p = \text{dev } \varepsilon^p$ und $\text{tr } \varepsilon^p = 0$. Dies spiegelt wieder, dass plastische Deformationen in Metallen kaum Volumenänderungen hervorrufen. Die Bedingungen für Plastizität und Verfestigung lauten damit

$$\begin{aligned} \|\eta\| &\leq \bar{Y}, \\ \|\eta\| < \bar{Y} &\Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0 \text{ und } \dot{\alpha} = 0, & \text{auf } \Omega \times I. \\ \|\eta\| = \bar{Y} &\Rightarrow \exists \zeta_{pl} \in \mathbb{R} : \dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} \zeta_{pl}^2 \frac{\eta}{\|\eta\|}, & \|\eta\| > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \text{ und } \dot{\alpha} = a_0^{-1} \zeta_{pl}^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die Norm der relativen deviatorischen Spannung kann nicht größer als die Fließgrenze werden. Wenn die Fließgrenze nicht erreicht wird, kommt es nicht zu plastischen Verzerrungen oder Verfestigungen. Sollte die Grenze erreicht werden, ist die Änderungsrate der plastischen Verzerrungen proportional zum normierten η und das Verhältnis dieser beiden bestimmt die Änderungsrate der Verfestigung.

2.2.4 Wärmefluss

Durch den Wärmefluss kann Wärme zwischen dem Körper und dem Hindernis ausgetauscht werden und es kann durch Reibung entstehende Wärme modelliert werden. Die Bedingung an den Wärmefluss ist

$$\frac{\partial}{\partial n}\theta = K_w|\sigma_{nt}\dot{u}_t| - \beta|\sigma_{nn}|(\theta - \theta_g), \quad \text{auf } \Gamma_C \times I. \quad (2.5)$$

Die beiden Konstanten $K_w > 0$ und $\beta > 0$ kontrollieren wie groß die Wärmegenerierung und die Leitfähigkeit sind. Der erste Term auf der rechten Seite steht für die aus Reibung entstehenden Wärme. Der andere Term sorgt dafür, dass es bei Kontakt von Körper und Hindernis einen Wärmefluss proportional zur Temperaturdifferenz der beiden gibt. Die Funktion θ_g ist die Temperatur des Hindernisses.

2.3 Schwache Formulierung

In diesem Kapitel wird die zur vorherigen starken Formulierung gehörige schwache Formulierung gegeben. Diese ermöglicht einen Ansatz zur numerischen Behandlung des Problems. Durch sie wird die schwache Lösung des betrachteten Problems definiert.

Im Folgenden werden die zulässigen Räume für die verschiedenen Komponenten der schwachen Lösung gegeben.

Die Verschiebung u wird in

$$V_u := \left\{ u \in L^2(I; H^1(\Omega)^d) \left| \begin{array}{l} \dot{u} \in L^2(I; H^1(\Omega)^d) \\ \ddot{u} \in L^2(I; H^{-1}(\Omega)^d) \\ \gamma(u(t)) = u_D \text{ für f.a. } t \in I \text{ auf } \Gamma_D \end{array} \right. \right\}$$

gesucht, dessen Elemente die Dirichlerandbedingungen erfüllen. Die zeitunabhängige Variante ist $\bar{V}_u := \{u \in H^1(\Omega)^d | \gamma(u) = u_D \text{ auf } \Gamma_D\}$.

Die Lagrangemultiplikatoren für Kontakt und Reibung müssen in den zulässigen Mengen

$$\begin{aligned} \Lambda_n &:= \{ \mu_n \in L^2(I; L^2(\Gamma_C)) | (\mu_n(t), \xi_n) \leq 0, \xi_n \in L^2(\Gamma_C), \xi_n \leq 0, \text{ für f.a. } t \in I \}, \\ \Lambda_t &:= \{ \mu_t \in L^2(I; L^2(\Gamma_C)^{d-1}) | (\mu_t(t), \xi_t) \leq (S, \|\xi_t\|), \xi_t \in L^2(\Gamma_C)^{d-1}, \text{ für f.a. } t \in I \}. \end{aligned}$$

liegen. Die dazugehörigen zeitunabhängigen Mengen sind

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_n &:= \{ \mu_n \in L^2(\Gamma_C) | (\mu_n, \xi_n) \leq 0, \xi_n \in L^2(\Gamma_C), \xi_n \leq 0 \}, \\ \bar{\Lambda}_t &:= \{ \mu_t \in L^2(\Gamma_C)^{d-1} | (\mu_t, \xi_t) \leq (S, \|\xi_t\|), \xi_t \in L^2(\Gamma_C)^{d-1} \}. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur klassischen Wahl der Räume für die Lagrangemultiplikatoren $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$, muss hier auf die vollen L^2 -Räume erweitert werden. Durch die Wärmegenerierung

müssen auch die Produkte von Lagrangemultiplikatoren mit normalen bzw. tangentialen Anteil der Verschiebung getestet und integriert werden können.

Für die Temperatur und den Wärmefluss werden die Lösungen in den Mengen

$$V_\theta := \left\{ \theta \in L^2(I; \bar{V}_\theta) \mid \dot{\theta} \in L^2(I; H^1(\Omega)), \gamma(\theta(t)) = \theta_D \text{ für f.a. } t \in I \text{ auf } \Gamma_D \right\},$$

$$\Lambda_\theta := L^2(I; L^2(\Gamma_C))$$

gesucht. Für die Wärme ist die zeitunabhängigen Menge durch $\bar{V}_\theta := \{ \theta \in H^1(\Omega) \mid \gamma(\theta) = \theta_D \text{ auf } \Gamma_D \}$ gegeben.

Bei der plastischen Verzerrung und den äquivalenten plastischen Spannungen muss dafür gesorgt werden, dass die Zulässigkeitsbedingungen eingehalten werden. Dazu sei

$$\bar{V}_{\varepsilon^p} := \{ (\xi, \tau) \in L^2(\Omega) \times M_{\varepsilon^p} \mid \|\eta(\tau)\| \leq \bar{Y}(\xi) \}$$

mit

$$M_{\varepsilon^p} := \{ \tau \in L^2(\Omega)^{d \times d} \mid \tau = \tau^T, \operatorname{tr} \tau = 0 \}.$$

Für die zeitabhängige Lösung ergibt sich damit die zulässige Menge

$$V_{\varepsilon^p} = \left\{ (\xi, \tau) \in L^2(I; L^2(\Omega) \times M_{\varepsilon^p}) \mid (\dot{\xi}, \dot{\tau}) \in L^2(I; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^{d \times d}), \right. \\ \left. \|\eta(\tau)(t)\| \leq \bar{Y}(\xi(t)), \text{ für f.a. } t \in I \right\}.$$

Die schwache Formulierung von Problem (2.1) mit den Nebenbedingungen (2.2 - 2.5) lautet dann:

Finde $u \in V_u$, $\theta \in V_\theta$, $(\alpha, \varepsilon^p) \in V_{\varepsilon^p}$, $\lambda_n \in \Lambda_n$, $\lambda_t \in \Lambda_t$ and $\lambda_\theta \in \Lambda_\theta$ mit den Anfangsbedingungen $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$ and $\theta(0) = \theta_0$ so, dass

$$\begin{aligned} & \rho_u \langle \ddot{u}, \varphi \rangle + (C\varepsilon(u), \varepsilon(\varphi)) + (\sigma_\theta(u), \varepsilon(\varphi)) \\ & - (C\varepsilon^p, \varepsilon(\varphi)) + (\lambda_n, \varphi_n)_{\Gamma_C} + (\lambda_t, \varphi_t)_{\Gamma_C} = (f_u, \varphi) + (p_u, \varphi)_{\Gamma_N} \\ & \rho_u \rho_\theta (\dot{\theta}, \psi) + (\kappa \nabla \theta, \nabla \psi) - \bar{\gamma}(\sigma(u) \dot{\varepsilon}^p, \psi) + (\lambda_\theta, \psi)_{\Gamma_C} = (f_\theta, \psi) + (p_\theta, \varphi)_{\Gamma_N} \quad (2.6) \\ & (\mu_n - \lambda_n(t), u_n(t) - g)_{\Gamma_C} + (\mu_t - \lambda_t(t), \dot{u}_t(t))_{\Gamma_C} \leq 0, \\ & (\lambda_\theta(t), \vartheta)_{\Gamma_C} - (K_w \lambda_t(t) \dot{u}_t(t) + \beta \lambda_n(t) (\theta(t) - \theta_g), \vartheta)_{\Gamma_C} = 0, \\ & (\tau - \eta(t), \dot{\varepsilon}^p(t)) - H(\dot{\alpha}(t), (\xi - \alpha(t))) \leq 0. \end{aligned}$$

für fast alle $t \in I$ und alle $(\varphi, \psi, \mu_n, \mu_t, \vartheta, (\xi, \tau)) \in H^1(\Omega, \Gamma_D)^d \times H^1(\Omega, \Gamma_D) \times \bar{\Lambda}_n \times \bar{\Lambda}_t \times L^2(\Gamma_C) \times \bar{V}_{\varepsilon^p}$ gilt. Die Existenz der Anfangswerte ist sichergestellt, da sich die schwache Lösung stetig fortsetzen lässt. Für $u \in V$ gilt, bis auf Änderungen auf einer Nullmenge, auch $u \in C(\bar{I}, \bar{V}_u)$, siehe [29, Abschnitt 7.2.1].

Im Allgemeinen ist die Existenz einer eindeutigen Lösung nicht klar. Im statischen reibungsbehafteten elastischen Fall ist das Problem bei Verwendung des Tresca Reibgesetzes eindeutig lösbar [74]. Für das Reibgesetz nach Coulomb kann, bei einem hinreichend kleinen Reibkoeffizient, die Existenz einer Lösung für verschiedene Gebiete Ω

2 Dynamisches Problem

bewiesen werden [40, 44, 60]. Für das dynamische Kontaktproblem ohne Reibung im viskoelastischen Fall wird in [2] die Existenz einer Lösung bewiesen. Eindeutigkeit und Wohlgestellttheit sind jedoch noch ungeklärt. Bei statischen reibungsbehafteten elastoplastischen Kontaktproblemen existiert eine eindeutige Lösung, wenn das Reibmodell nach Tresca verwendet wird [32, 88].

2.4 Zeitschrittverfahren

In diesem Abschnitt wird die Zeitdiskretisierung der variationellen Formulierung (2.6) durchgeführt. Das Zeitintervall $I := [0, T]$ wird in eine äquidistanten Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$$

in K Zeitschritte der Länge $k = T/K$ zerlegt. Die Funktionswerte einer Funktion v an der Stelle t_m werden mit v^m bezeichnet.

Zur Diskretisierung der Erhaltungsgleichung der Verschiebung in der Zeit wird ein verbessertes kontaktstabilisiertes Newmark-Verfahren angewendet [50]. Für die Erhaltungsgleichung der Wärme wird das Crank-Nicolson-Verfahren verwendet [23]. Die zeitdiskreten Startwerte $u^0 \in L^2(\Omega)^d$, $\dot{u}^0 \in L^2(\Omega)^d$, und $\theta^0 \in L^2(\Omega)$ sind die L^2 Projektionen der kontinuierlichen Startwerte. Beim Newmark-Verfahren wird in jedem Schritt zuerst ein Prädiktor für die Verschiebung bestimmt. Dazu muss im Zeitschritt $0 < m \leq K$ folgendes Problem gelöst werden: Finde $(u_{\text{pred}}^m, \lambda_{n,\text{pred}}^m) \in H^1(\Omega, \Gamma_D)^d \times \bar{\Lambda}_n$ so, dass

$$\begin{aligned} (u_{\text{pred}}^m, \varphi) + (\lambda_{n,\text{pred}}^m, \varphi_n) &= (u^{m-1} + k\dot{u}^{m-1}, \varphi), & \forall \varphi \in H^1(\Omega, \Gamma_D)^d, \\ (\mu_n - \lambda_{n,\text{pred}}^m, u_{n,\text{pred}}^m - g) &\leq 0, & \forall \mu_n \in \bar{\Lambda}_n. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Für den Hauptschritt in jedem Zeitschritt müssen $(u^m, \theta^m, \alpha^m, \varepsilon^{p,m}, \lambda_n^m, \lambda_t^m, \lambda_\theta^m) \in \bar{V}_u \times \bar{V}_\theta \times \bar{V}_{\varepsilon^p} \times \bar{\Lambda}_n \times \bar{\Lambda}_t \times L^2(\Gamma_C)$ gefunden werden mit

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{k^2} \rho_u(u^m, \varphi) + a^m(u^m, \theta^m, \varepsilon^{p,m}, \lambda_n^m, \lambda_t^m, \varphi) = \\
 & \quad \frac{4}{k^2} \rho_u(u_{\text{pred}}^m, \varphi) - a^m(u^{m-1}, \theta^{m-1}, \varepsilon^{p,m-1}, \lambda_n^{m-1}, \lambda_t^{m-1}, \varphi) \\
 & \quad + (f_u^m + f_u^{m-1}, \varphi) + (p_u^m + p_u^{m-1}, \varphi)_{\Gamma_N}, \\
 & \frac{2}{k} \rho_u \rho_\theta(\theta^m, \psi) + (\kappa \nabla \theta^m, \nabla \psi) + (\lambda_\theta^m, \psi)_{\Gamma_C} \\
 & - \frac{1}{k} \bar{\gamma}(\sigma(u^m)(\varepsilon^{p,m} - \varepsilon^{p,m-1}), \psi) - \frac{1}{k} \bar{\gamma}(\sigma(u^{m-1})\varepsilon^{p,m}, \psi) = \\
 & \quad \frac{2}{k} \rho_u \rho_\theta(\theta^{m-1}, \psi) - (\kappa \nabla \theta^{m-1}, \nabla \psi) - (\lambda_\theta^{m-1}, \psi)_{\Gamma_C} \\
 & \quad + (f_\theta^m + f_\theta^{m-1}, \psi) + (p_\theta^m + p_\theta^{m-1}, \psi)_{\Gamma_N} - \frac{1}{k} \bar{\gamma}(\sigma(u^{m-1})\varepsilon^{p,m-1}, \psi), \\
 & (\mu_n - \lambda_n^m, u_n^m - g)_{\Gamma_C} + (\mu_t - \lambda_t^m, \frac{1}{k}(u_t^m - u_t^{m-1}))_{\Gamma_C} \leq 0, \\
 & (\lambda_\theta^m, \vartheta)_{\Gamma_C} - (K_w \lambda_t^m \frac{1}{k}(u_t^m - u_t^{m-1}) + \beta \lambda_n^m(\theta^m - \theta_g), \vartheta)_{\Gamma_C} = 0, \\
 & (\tau - \eta^m, \frac{1}{k}(\varepsilon^{p,m} - \varepsilon^{p,m-1})) - H(\frac{1}{k}(\alpha^m - \alpha^{m-1}), (\xi - \alpha^m)) \leq 0,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

für alle $(\varphi, \psi, \mu_n, \mu_t, \vartheta, (\xi, \tau)) \in H^1(\Omega, \Gamma_D)^d \times H^1(\Omega, \Gamma_D) \times \bar{\Lambda}_n \times \bar{\Lambda}_t \times L^2(\Gamma_C) \times \bar{V}_{\varepsilon^p}$, wobei

$$\begin{aligned}
 & a^m(u^m, \theta^m, \varepsilon^{p,m}, \lambda_n^m, \lambda_t^m, \varphi) := \\
 & (C\varepsilon(u^m) + \sigma_\theta(\theta^m), \varepsilon(\varphi)) - (C\varepsilon^{p,m}, \varepsilon(\varphi)) + (\lambda_n^m, \varphi_n)_{\Gamma_C} + (\lambda_t^m, \varphi_t)_{\Gamma_C}.
 \end{aligned}$$

Danach wird die neue Geschwindigkeit als L^2 -Projektion

$$(\dot{u}^m, \varphi) = \frac{1}{k}(2u^m - u_{\text{pred}}^m - u^{m-1}, \varphi), \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega),$$

berechnet.

2.5 Ortsdiskretisierung

Das zeitdiskrete Problem wird nun mit der FEM durch Wahl von endlichdimensionalen Teilräumen für die Ansatz- und Testräume in ein volldiskretes Problem überführt. Dazu sei \mathbb{T}_h eine zulässige, quasi-uniforme und zeitunabhängige Triangulierung aus Quadraten bzw. Hexaedern von Ω [17, Abschnitt 2.5]. Für ein Element $\mathcal{T} \in \mathbb{T}_h$ ist $h_{\mathcal{T}}$ der Durchmesser. Für das Netz \mathbb{T}_h ist

$$h := \max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}_h} h_{\mathcal{T}}$$

2 Dynamisches Problem

die Netzweite. Die Gesamtmenge aller Knoten wird mit \mathbf{P} bezeichnet. Die Knoten auf dem Kontaktrand Γ_C sind in der Menge \mathbf{P}_C und die Knoten, die nicht auf dem Kontaktrand liegen, sind in $\mathbf{N} = \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_C$. Die Diskretisierung der Verschiebung und der Temperatur wird mit bi-/trilineare Ansatzfunktionen durchgeführt. Der Raum $\mathbb{Q}_1(\mathcal{T})$ ist der von den bi-/trilinearen Basisfunktionen aufgespannte Raum auf einem Element \mathcal{T} und mit $i_h v$ wird die lineare Interpolierende bezeichnet. Die Finiten-Elemente Ansatzräume sind damit

$$\begin{aligned} V_{u,h} &:= \{u_h \in H^1(\Omega)^d \mid u_h|_{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}_1(\mathcal{T})^d, \forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}_h, u_h|_{\Gamma_D} = i_h u_D\}, \\ V_{\theta,h} &:= \{\theta_h \in H^1(\Omega) \mid \theta_h|_{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}_1(\mathcal{T}), \forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}_h, \theta_h|_{\Gamma_D} = i_h \theta_D\}. \end{aligned}$$

Die diskreten Testräume werden als

$$\begin{aligned} V_{u,h,0} &:= \{u_h \in H^1(\Omega)^d \mid u_h|_{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}_1(\mathcal{T})^d, \forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}_h, u_h|_{\Gamma_D} = 0\}, \\ V_{\theta,h,0} &:= \{\theta_h \in H^1(\Omega) \mid \theta_h|_{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}_1(\mathcal{T}), \forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}_h, \theta_h|_{\Gamma_D} = 0\} \end{aligned}$$

definiert, damit sie die Nullrandbedingungen erfüllen. Für die Verfestigung und plastische Verzerrung wird ein stückweise konstanter Ansatz gemacht. Der endlichdimensionalen Unterraum von M_{ε^p} ist

$$M_{\varepsilon^p,h} := \{\tau \in M_{\varepsilon^p} \mid \tau|_{\mathcal{T}} \in \mathbb{Q}_0(\mathcal{T})^{d \times d}, \forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}_h\},$$

wobei $\mathbb{Q}_0(\mathcal{T})$ der Raum der konstanten Funktionen auf \mathcal{T} ist. Sei χ_p die Basisfunktion für ein Element $\mathcal{T}_p \in \mathbb{T}_h$ und

$$\overline{\varepsilon(u_h)}_p := \frac{\int_{\mathcal{T}_p} \varepsilon(u_h) \, \mathbf{d}x}{\int_{\mathcal{T}_p} 1 \, \mathbf{d}x}$$

der Mittelwerte von $\varepsilon(u_h)$ auf dem Element. Die diskreten Approximation der plastischen Variablen sind

$$\alpha_h^p := \sum_{\mathcal{T}_p \in \mathbb{T}_h} \alpha_p \chi_p \quad \text{und} \quad \varepsilon_h^p := \sum_{\mathcal{T}_p \in \mathbb{T}_h} \varepsilon_p^p \chi_p$$

und die diskrete Approximation der relativen deviatorischen Spannung η ist

$$\eta_h := \sum_{\mathcal{T}_p \in \mathbb{T}_h} \left(2 \operatorname{dev}(\overline{\varepsilon(u_h)}_p) - (2\mu + a_0^{-2} K) \varepsilon_p^p \right) \chi_p.$$

Die diskrete zulässige Menge für Verfestigung und plastische Verzerrung ist somit

$$V_{\varepsilon^p,h} := \{(\xi_h, \tau_h) \in \mathbb{Q}_0(\mathcal{T}) \times M_{\varepsilon^p,h} \mid \|\eta_h\| \leq \bar{Y}\}.$$

Die Lagrangemultiplikatoren für Kontakt λ_n , Reibung λ_t und Wärmefluss λ_θ werden mit Mortar-Basisfunktionen diskretisiert [43]. Die Mortarbasisfunktionen zeichnen sich dadurch aus, dass sie zu den Ansatzfunktionen von Verschiebung und Temperatur biorthogonal sind. Jedoch sind sie nicht in nur einem Freiheitsgrad von Null verschieden. Für $d = 2$ ist der Kontaktrand eine eindimensionale Menge. In diesem Fall haben die Basisfunktionen der Verschiebung auf dem Referenzelement $[-1, 1]$ die Form

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1(\xi) &:= \frac{1}{2}(1 - \xi), \\ \bar{\phi}_2(\xi) &:= \frac{1}{2}(\xi - 1).\end{aligned}$$

Die dazu gehörenden Mortar-Basisfunktionen sind

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_1(\xi) &:= \frac{1}{2}(1 - 3\xi) = 2\bar{\phi}_1(\xi) - \bar{\phi}_2(\xi), \\ \bar{\psi}_2(\xi) &:= \frac{1}{2}(1 + 3\xi) = 2\bar{\phi}_2(\xi) - \bar{\phi}_1(\xi).\end{aligned}$$

Für dieses Paar aus Basisfunktionen ist die Biorthogonalitätseigenschaft

$$\int_{-1}^1 \bar{\phi}_i \bar{\psi}_j \, \mathbf{d}x = \delta_{ij} \int_{-1}^1 \bar{\phi}_i \, \mathbf{d}x, \quad i, j = 1, 2$$

erfüllt. Durch die Transformation vom Referenzelement auf ein beliebiges Element des Kontaktrandes bleibt diese Eigenschaft erhalten [43]. Für den dreidimensionalen Fall lassen sich analoge Basisfunktionen definieren.

Durch die Mortarbasisfunktionen werde die Ansatzräume für die Lagrangemultiplikatoren

$$\begin{aligned}M_h^n &:= \text{span}\{\psi_{pn}\}_{p \in \mathbf{P}_C} \subset L^2(\Gamma_C), \\ M_h^t &:= \text{span}\{\psi_{pt}\}_{p \in \mathbf{P}_C} \subset L^2(\Gamma_C)^2, \\ M_h^\theta &:= \text{span}\{\psi_{p\theta}\}_{p \in \mathbf{P}_C} \subset L^2(\Gamma_C)\end{aligned}$$

aufgespannt. Definiere die diskreten Spurräume

$$\begin{aligned}W_{h,-}^n &:= \left\{ \mu_n \in H_-^{1/2}(\Gamma_C) \mid \forall \mathcal{E} \in \Gamma_C : \mu_{n|\mathcal{E}} \in \mathbb{Q}_1(\mathcal{E}) \right\}, \\ W_h^t &:= \left\{ \mu_t \in H^{1/2}(\Gamma_C)^2 \mid \forall \mathcal{E} \in \Gamma_C : \mu_{n|\mathcal{E}} \in \mathbb{Q}_1(\mathcal{E})^2 \right\}\end{aligned}$$

mit dem Raum der linearen Funktionen auf einer Kante $\mathbb{Q}_1(\mathcal{E})$. Die restringierten Ansatzräume für Kontakt und Reibung lauten

$$\begin{aligned}\Lambda_{n,h} &:= \left\{ \mu_{nh} \in M_h^n \mid \forall v_{nh} \in W_{h,-}^n : \langle \mu_{nh}, v_{nh} \rangle \leq 0 \right\}, \\ \Lambda_{t,h} &:= \left\{ \mu_{th} \in M_h^t \mid \forall v_{th} \in W_h^t : \langle \mu_{th}, v_{th} \rangle \leq \langle S, \|v_{th}\|_h \rangle \right\}.\end{aligned}$$

2 Dynamisches Problem

mit der netzabhängigen Norm $\|v_{th}\|_h := \sum_{p \in \mathbf{P}_C} \|v_{pt}\|_{\phi_{pt,1}}$. Dabei ist $\phi_{pt,1}$ die erste Komponente der Basisfunktionen von W_h^t und $v_{pt} \in \mathbb{R}^2$ der zum Knoten gehörende Koeffizient. Eine wichtige Eigenschaft für die diskreten Ansatzräume bei gemischten Problemen ist die inf-sup Stabilität. Sie wird benutzt um Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu beweisen. Die hier gewählte Kombination aus Ansatzräumen ist inf-sup stabil [43, Abschnitt 3.1.1].

In der diskreten Version des Zeitschrittverfahrens aus dem vorhergehenden Abschnitt werden zuerst die Startwerte der Verschiebungsvariable u_h^0 und \dot{u}_h^0 als Projektionen auf V_h und die Startwerte der Wärme θ_h^0 als Projektion auf V_h^θ bestimmt. Für die diskreten Formulierungen des Prädiktor- und Hauptschrittes werden jetzt die diskreten Ansatzräume verwendet. Der Prädiktorschritt lautet: Finde $(u_{h,\text{pred}}^m, \lambda_{n,\text{pred}}^m) \in V_{u,h} \times \Lambda_{n,h}$

$$\begin{aligned} (u_{h,\text{pred}}^m, \varphi_h) + (\lambda_{nh,\text{pred}}^m, \varphi_{nh}) &= (u_h^{m-1} + k\dot{u}_h^{m-1}, \varphi_h) & \forall \varphi_h \in V_{u,h,0} \\ (\mu_{nh} - \lambda_{nh,\text{pred}}^m, u_{hn,\text{pred}}^m - g) &\leq 0 & \forall \mu_{nh} \in \Lambda_{n,h} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die diskrete Formulierung des Hauptschrittes ist: Finde $(u_h^m, \theta_h^m, \alpha_h^m, \varepsilon_h^{p,m}, \lambda_{nh}^m, \lambda_{th}^m, \lambda_{\theta h}^m) \in V_{u,h} \times V_{\theta,h} \times V_{\varepsilon^p,h} \times \Lambda_{n,h} \times \Lambda_{t,h} \times M_h^\theta$ mit

$$\begin{aligned} &\frac{4}{k^2} \rho(u_h^m, \varphi_h) + a^m(u_h^m, \theta_h^m, \varepsilon_h^{p,m}, \lambda_{nh}^m, \lambda_{th}^m, \varphi_h) = \\ &\quad \frac{4}{k^2} \rho(u_{h,\text{pred}}^m, \varphi_h) - a^m(u_h^{m-1}, \theta_h^{m-1}, \varepsilon_h^{p,m-1}, \lambda_{nh}^{m-1}, \lambda_{th}^{m-1}, \varphi_h) \\ &\quad + (f_u^m + f_u^{m-1}, \varphi_h) + (p_u^m + p_u^{m-1}, \varphi_h)_{\Gamma_N}, \\ &\frac{2}{k} \rho_u \rho_\theta(\theta_h^m, \psi_h) + (\kappa \nabla \theta_h^m, \nabla \psi_h) + (\lambda_{\theta h}^m, \psi_h)_{\Gamma_C} \\ &- \frac{1}{k} \bar{\gamma}(\sigma(u_h^m)(\varepsilon_h^{p,m} - \varepsilon_h^{p,m-1}), \psi_h) - \frac{1}{k} \bar{\gamma}(\sigma(u_h^{m-1})\varepsilon_h^{p,m}, \psi_h) = \\ &\quad \frac{2}{k} \rho_u \rho_\theta(\theta_h^{m-1}, \psi_h) - (\kappa \nabla \theta_h^{m-1}, \nabla \psi_h) - (\lambda_{\theta h}^{m-1}, \psi_h)_{\Gamma_C} \\ &\quad + (f_\theta^m + f_\theta^{m-1}, \psi_h) + (p_\theta^m + p_\theta^{m-1}, \psi_h)_{\Gamma_N} - \frac{1}{k} \bar{\gamma}(\sigma(u_h^{m-1})\varepsilon_h^{p,m-1}, \psi_h), \\ &(\mu_{nh} - \lambda_{nh}^m, u_{hn}^m - g)_{\Gamma_C} + (\mu_{th} - \lambda_{th}^m, \frac{1}{k}(u_{ht}^m - u_{ht}^{m-1}))_{\Gamma_C} \leq 0 \\ &(\lambda_{\theta h}^m, \vartheta_h)_{\Gamma_C} - (K_w \lambda_{th}^m \frac{1}{k}(u_{ht}^m - u_{ht}^{m-1}) + \beta \lambda_{nh}^m(\theta_h^m - \theta_g), \vartheta_h)_{\Gamma_C} = 0 \\ &(\tau_h - \eta_h^m, \frac{1}{k}(\varepsilon_h^{p,m} - \varepsilon_h^{p,m-1})) - H(\frac{1}{k}(\alpha_h^m - \alpha_h^{m-1}), (\xi_h - \alpha_h^m)) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

für alle $(\varphi_h, \psi_h, \mu_{nh}, \mu_{th}, \vartheta_h, (\xi_h, \tau_h)) \in V_{u,h,0} \times V_{\theta,h,0} \times \Lambda_{n,h} \times \Lambda_{t,h} \times M_h^\theta \times V_{\varepsilon^p,h}$. Im Nachfolgenden wird auf den Exponenten m zur Kennzeichnung des aktuellen Zeitschrittes verzichtet und mit $\star^m := \frac{1}{k}(\star - \star^{m-1})$ wird die diskrete zeitliche Veränderung einer Funktion bezeichnet.

2.6 Knotenweise Nebenbedingungen

Die Nebenbedingungen für Kontakt, Reibung und Plastizität können durch Ausnutzung der Mortarbasis als knotenweise Bedingungen dargestellt werden. Für Kontakt und Reibung werden die Ansatzräume so umformuliert, dass sie nur von den Koeffizienten abhängen.

Satz 1. *Es gilt*

$$W_{h,-}^n = \left\{ v_{hn} = \sum_{p \in \mathbf{P}_C} v_{np} \phi_{np} \in W_h^n \mid v_{np} \leq 0, \forall p \in \mathbf{P}_C \right\}.$$

Außerdem gilt

$$\Lambda_{n,h} = \left\{ \mu_{nh} = \sum_{p \in \mathbf{P}_C} \mu_{np} \psi_{np} \in M_h^n \mid \mu_{np} \geq 0, \forall p \in \mathbf{P}_C \right\},$$

$$\Lambda_{t,h} = \left\{ \mu_{th} = \sum_{p \in \mathbf{P}_C} \mu_{tp} \psi_{tp} \in M_h^t \mid \|\mu_{tp}\| \leq S, \forall p \in \mathbf{P}_C \right\}.$$

Beweis. Der Beweis findet sich in [43, Lemma 2.3]. □

Mit den knotenweisen Formulierungen für die Ansatzräume wird nun die Biorthogonalität ausgenutzt um Kontakt und Reibungsbedingungen herzuleiten, die nur von den Koeffizienten abhängen.

Satz 2. *Für jeden Punkt $p \in \mathbf{P}_C$ sind die Kontakt und Reibungsnebenbedingungen aus der diskrete Formulierung (2.10) äquivalent zu*

$$u_{pn} \leq g_p, \quad \lambda_{np} \geq 0, \quad \lambda_{np}(u_{pn} - g_p) = 0 \quad (2.11)$$

und

$$\begin{aligned} \|\lambda_{tp}\| &\leq S, \\ \|\lambda_{tp}\| < S &\Rightarrow \dot{u}_{pt} = 0, \\ \|\lambda_{tp}\| = S &\Rightarrow \exists \zeta_c \in \mathbb{R} : \lambda_{tp} = \zeta_c^2 \dot{u}_{pt}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dabei ist die skalierte Abstandsfunktion definiert durch

$$D_p := \int_{\Gamma_C} \phi_p \, \mathbf{d}s > 0, \quad g_p := \frac{1}{D_p}(g, \psi_{np}).$$

Beweis. Der Beweis findet sich in [43, Lemma 2.6]. □

2 Dynamisches Problem

Für die Verfestigung und plastische Verzerrung ergibt sich die Möglichkeit zur elementweisen Darstellung aus der Wahl der konstanten Basisfunktionen. Jede Basisfunktion ist nur auf einem einzigen Element von Null verschieden und die Integrale können durch Multiplikation mit der Elementgröße ersetzt werden.

Satz 3. Für jedes Element $\mathcal{T}_p \in \mathbb{T}_h$ werden die Nebenbedingung und die plastischen Variablen aus (2.10) elementweise geschrieben als

$$\begin{aligned} \|\eta_p\| &\leq \bar{Y}_p, \\ \|\eta_p\| < \bar{Y}_p &\Rightarrow \Delta\varepsilon_p^p = 0 \text{ und } \Delta\alpha_p = 0, \\ \|\eta_p\| = \bar{Y}_p &\Rightarrow \exists \zeta_{pl} \in \mathbb{R} : \Delta\varepsilon_p^p = \begin{cases} \zeta_{pl}^2 \frac{\eta_p}{\|\eta_p\|}, & \|\eta_p\| > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \text{ und } \Delta\alpha_p = a_0^{-1} \zeta_{pl}^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dabei ist $\Delta\star = (\star^m - \star^{m-1})$ und ζ_{pl} wurde mit der Zeitschrittweite skaliert. Außerdem wurde eine Anpassung der Fließgrenze zu $\bar{Y}_p = a_0^{-1}(\sigma_0 + H\alpha_p + H \max(0, \Delta\alpha_p))$ vorgenommen, da beim iterativen Lösen $\Delta\alpha_p$ negativ und damit nicht zulässig werden kann.

Die knotenweisen Gleichungs- und Ungleichungsbedingungen aus den Sätzen 2 und 3 werden in reine Gleichungsbedingungen mit NCP-Funktionen umformuliert. Dadurch kann ein Löser für Erhaltungsgleichungen und die Nebenbedingungen verwendet werden und es ist keine besondere Berücksichtigung von Ungleichungsbedingungen notwendig.

Satz 4. Die diskrete punktweisen Kontakt- und Reibungsbedingungen (2.11 - 2.12) sind äquivalent zu den Gleichungsbedingungen

$$C_n(u_{pn}, \lambda_{nps}) := \lambda_{nps} - \max\{0, \lambda_{nps}^{tr}\} = 0, \quad (2.14)$$

$$C_t(u_p, \theta_p, \lambda_{nps}, \lambda_{tps}) := \max\{S_p, \|\lambda_{tps}^{tr}\|\} \lambda_{tps} - S_p \lambda_{tps}^{tr} = 0 \quad (2.15)$$

für alle $p \in \mathbf{P}_C$, mit $\lambda_{nps}^{tr} := \lambda_{nps} + c_n(u_{pn} - g_p)$ und $\lambda_{tps}^{tr} := \lambda_{tps} + c_t \dot{u}_{pt}$. Hierbei werden skalierte Werte $\lambda_{nps} := D_p \lambda_{np}$, $\lambda_{tps} := D_p \lambda_{tp}$ und $S_p := D_p S$ für die Lagrangemultiplikatoren und die Reibgrenze verwendet um bessere numerische Konvergenzraten zu erreichen. Die diskreten elementweisen Plastizitätsbedingungen (2.13) sind äquivalent zu

$$D_n(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p) := \max\{0, \|\eta_p^{tr}\| - \bar{Y}_p\} - c_p a_0 \Delta\alpha_p = 0, \quad (2.16)$$

$$D_t(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p) := \eta_p - \min\left\{1, \frac{\bar{Y}_p}{\|\eta_p^{tr}\|}\right\} \eta_p^{tr} = 0 \quad (2.17)$$

für alle $\mathcal{T}_p \in \mathbb{T}_h$ mit $\eta_p^{tr} := \eta_p + c_p \Delta\varepsilon_p^p$, $c_p > 0$.

Beweis. Für den Beweis sei auf [43, Satz 4.1 und 5.1] und [35, Lemma 2.5] verwiesen. \square

Zuletzt wird die diskrete Gleichung für den Wärmefluss in eine punktweise Bedingung überführt. Dazu wird auf die Kopplungsterme mit Verschiebung und Kontaktkraft eine Lumping-Technik angewendet [86, Kapitel 15]. Es ergibt sich die Bedingung

$$E(u_{pt}, \theta_p, \lambda_{pns}, \lambda_{pts}, \lambda_{p\theta}) := D_{p\theta} \lambda_{p\theta} + K_w \lambda_{pts} \frac{1}{k} (u_{pt} - u_{pt}^{m-1}) - \beta \lambda_{pns} (\theta_p - \theta_g) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{I}^c \quad (2.18)$$

mit $D_{p\theta} := \int_{\Gamma_C} \psi_p$, $p \in \mathbf{P}_C$. Das Integral mit Wärmefluss und Temperatur wurde exakt integriert, führt aber durch die Biorthogonalität auf den knotenweisen Ausdruck. Für das zweite Integral wurde als Näherung die Trapezregel genommen. Dadurch werden die bi-/linearen Testfunktionen nur in Knoten ausgewertet, wodurch immer nur der Einfluss eines Knotens nicht verschwindet. Daraus ergibt sich dann sofort die knotenweise Bedingung. Die Beträge entfallen, da die enthaltenen Produkte niemals negativ werden können.

2.7 Semiglattes Newton-Verfahren

Die im vorherigen Abschnitt eingeführten Gleichungsbedingungen für Kontakt, Reibung und Plastizität sind nicht klassisch differenzierbar, aber fast überall differenzierbar. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt ein semiglattes Newton-Verfahren [43, Abschnitt 4.1] eingeführt, das auf Gleichungen mit fast überall differenzierbaren Funktionen angewendet werden kann. Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, eine lokal Lipschitz-stetige und damit eine fast überall differenzierbare Funktion [79, Theorem 3.2]. Mit der Menge X_F der Punkte, in denen F differenzierbar ist, bezeichnet

$$\partial F(x) := \text{conv} \left\{ \lim_{x_i \rightarrow x, x_i \in X_F} \nabla F(x_i) \right\}$$

die Menge der verallgemeinerten Gradienten von F in x . Dabei ist „conv“ die konvexe Hülle. Das semiglattes Newton-Verfahren kann nun zur Lösung der Gleichung $F(x) = 0$ verwendet werden. Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$ als Startpunkt des Algorithmus. In Schritt $k = 1, 2, 3, \dots$ wird das Inkrement $\delta x^k \in \mathbb{R}^n$ aus der Beziehung

$$0 \in F(x^{k-1}) + \partial F(x^{k-1}) \delta x^k$$

bestimmt. Die nächste Iterierte ergibt sich dann aus $x^{k+1} = x^k + \delta x^k$. Zur konkreten numerischen Berechnung muss ein Repräsentant $V^k \in \partial F(x^{k-1})$ gewählt werden. Damit wird aus der Mengenbeziehung die Gleichung

$$0 = F(x^{k-1}) + V^k \delta x^k.$$

2 Dynamisches Problem

Für die Anwendung auf die hier betrachteten NCP-Funktionen werden insbesondere die verallgemeinerten Ableitung der Maximums- und Minimumsfunktion benötigt. Für $F_{\max} = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ und $F_{\min} = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ mit differenzierbaren $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ werden die Repräsentanten

$$D_{F_{\max}} = \begin{cases} \partial_x f_1(x), & f_1(x) \geq f_2(x), \\ \partial_x f_2(x), & f_1(x) < f_2(x), \end{cases}$$

$$D_{F_{\min}} = \begin{cases} \partial_x f_1(x), & f_1(x) \leq f_2(x), \\ \partial_x f_2(x), & f_1(x) > f_2(x) \end{cases}$$

gewählt. Die Wahl der Ableitung im Gleichheitsfall $f_1(x) = f_2(x)$ ist für die Konvergenzrate des Verfahrens unerheblich.

2.8 Algebraische Darstellung

Jetzt wird das semiglatte Newton-Verfahren aus dem vorherigen Abschnitt auf den Hauptschritt des zeit- und ortsdiskreten Problems angewandt. Es muss jedoch nur für die NCP-Funktionen für Kontakt und Reibung sowie Plastizität benutzt werden. Die Erhaltungsgleichung für die Verschiebung ist schon linear in allen Argumenten. Bei den Gleichung für Wärme und Wärmefluss reicht auch ein Standard Newton-Verfahren, weil beide differenzierbar sind.

Im Nachfolgenden wird für die Plastizität eine lokal modifizierte NCP-Funktion

$$D_t^s(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p) := \left(\max \{ \|\eta_p^{tr}\|, \bar{Y}_p \} \right)^s D_t(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p)$$

mit $s \geq 0$ benutzt, um den Konvergenzradius des semiglaten Newton-Verfahrens zu vergrößern [35, Abschnitt 4.1].

Betrachtet man die max Funktion in den NCP-Funktionen für Kontakt und Reibung, kann man eine Fallunterscheidung machen und die Knoten des Kontaktrandes in die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n &:= \{p \in \mathbf{P}_C \mid \lambda_{pns}^{tr} < 0\}, \\ \mathcal{A}_n &:= \{p \in \mathbf{P}_C \mid \lambda_{pns}^{tr} \geq 0\}, \\ \mathcal{I}_t &:= \{p \in \mathbf{P}_C \mid \lambda_{pts}^{tr} < S_p\}, \\ \mathcal{A}_t &:= \{p \in \mathbf{P}_C \mid \lambda_{pts}^{tr} \geq S_p\} \end{aligned}$$

unterteilen. Die Mengen \mathcal{I}_n und \mathcal{A}_n teilen den Kontaktrand in die Knoten, die keinen Kontakt zum Hindernis haben und jene bei denen es zum Kontakt kommt. Bezüglich der Reibung zerlegen \mathcal{I}_t und \mathcal{A}_t den Kontaktrand in Knoten die haften oder gleiten.

Genauso werden die Elemente im Inneren durch die min und max Funktion der NCP-Funktion für Plastizität in die Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\alpha &:= \{p \in \mathbb{T}_h \mid \Delta\alpha_p < 0\}, \\ \mathcal{A}_\alpha &:= \{p \in \mathbb{T}_h \mid \Delta\alpha_p \geq 0\}, \\ \mathcal{I}_{pl} &:= \{p \in \mathbb{T}_h \mid \|\eta_p^{tr}\| \leq \bar{Y}_p\}, \\ \mathcal{A}_{pl} &:= \{p \in \mathbb{T}_h \mid \|\eta_p^{tr}\| > \bar{Y}_p\}\end{aligned}$$

unterteilt. Hier plastifizieren alle Knoten in \mathcal{A}_{pl} , wohingegen die Knoten in \mathcal{I}_{pl} sich elastisch verhalten. Die Mengen \mathcal{A}_α und \mathcal{I}_α werden nur zur Auswertung der NCP-Funktion genutzt. Im Falle der Konvergenz des Newton-Verfahrens enthält \mathcal{A}_{pl} alle Elemente und \mathcal{I}_{pl} konvergiert gegen die leere Menge. Durch die Unterscheidung der Knoten in aktive und inaktive Knoten kann das Verfahren als eine Aktive-Mengen-Strategie charakterisiert werden.

Zur Durchführung des semiglatten Newton-Verfahrens werden die folgenden Ableitungen der NCP-Funktionen benötigt. Im Folgenden wird von einer hinreichend glatten Reibgrenze S ausgegangen. Die Ableitung für Kontakt und Reibung sind

$$\begin{aligned}(\delta_{u_{pn}} C_n)(\delta u_{pn}) &= \begin{cases} 0, & p \in \mathcal{I}_n, \\ -c_n \delta u_{pn}, & p \in \mathcal{A}_n, \end{cases} \\ (\delta_{\lambda_{pns}} C_n)(\lambda_{pns}) &= \begin{cases} \delta \lambda_{pns}, & p \in \mathcal{I}_n, \\ 0, & p \in \mathcal{A}_n, \end{cases} \\ (\delta_{u_p} C_t)(\delta u_p) &= \begin{cases} -S_p \delta u_{pt} - \frac{c_t}{k} (\delta_{u_p} S_p)(\delta u_p) \lambda_{pts}^{tr}, & p \in \mathcal{I}_t, \\ \left(\frac{c_t}{k} \frac{\lambda_{pts}(\lambda_{pts}^{tr})^T}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} - S_p \right) \delta u_{pt} - \frac{c_t}{k} (\delta_{u_p} S_p)(\delta u_p) \lambda_{pts}^{tr}, & p \in \mathcal{A}_t, \end{cases} \\ (\delta_{\theta_p} C_t)(\delta \theta_p) &= \begin{cases} -c_t (\delta_{\theta_p} S_p)(\delta \theta_p) \dot{u}_{pt}, & p \in \mathcal{I}_t, \\ -(\delta_{\theta_p} S_p)(\delta \theta_p) \lambda_{pts}^{tr}, & p \in \mathcal{A}_t, \end{cases} \\ (\delta_{\lambda_{pns}} C_t)(\delta \lambda_{pns}) &= \begin{cases} -c_t (\delta_{\lambda_{pns}} S_p)(\delta \lambda_{pns}) \dot{u}_{pt}, & p \in \mathcal{I}_t, \\ -(\delta_{\lambda_{pns}} S_p)(\delta \lambda_{pns}) \lambda_{pts}^{tr}, & p \in \mathcal{A}_t, \end{cases} \\ (\delta_{\lambda_{pts}} C_t)(\delta \lambda_{pts}) &= \begin{cases} 0, & p \in \mathcal{I}_t, \\ \left(\|\lambda_{pts}^{tr}\| + \frac{\lambda_{pts}(\lambda_{pts}^{tr})^T}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} - S_p \right) \delta \lambda_{pts}, & p \in \mathcal{A}_t. \end{cases}\end{aligned}$$

2 Dynamisches Problem

Für aktive Knoten $p \in \mathcal{A}_t$ führt das semiglatte Newton-Verfahren auf die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c_t}{k} \frac{\lambda_{pts}(\lambda_{pts}^{tr})^T}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} - S_p \right) \delta u_{pt} - \frac{c_t}{k} (\delta_{u_p} S_p) (\delta u_p) \lambda_{pts}^{tr} - (\delta_{\theta_p} S_p) (\delta \theta_p) \lambda_{pts}^{tr} \\ & - (\delta_{\lambda_{pns}} S_p) (\delta \lambda_{pns}) \lambda_{pts}^{tr} + \left(\|\lambda_{pts}^{tr}\| + \frac{\lambda_{pts}(\lambda_{pts}^{tr})^T}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} - S_p \right) \delta \lambda_{pts} \\ & = -\|\lambda_{pts}^{tr}\| \lambda_{pts}^{tr} + S_p \lambda_{pts}^{tr}. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} e_p &:= \frac{S_p}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|}, \\ F_p &:= \frac{\lambda_{pts}(\lambda_{pts}^{tr})^T}{S_p \|\lambda_{pts}^{tr}\|}, \\ M_p &:= e_p (\text{Id}_{d-1} - F_p) \end{aligned}$$

und durch Umdrehen des Vorzeichens ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{c_t}{k} \left(M_p t_p + \frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{u_p} S_p)^T \right) \delta u_p + \frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{\theta_p} S_p) \delta \theta_p \\ & + \frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{\lambda_{pns}} S_p) \delta \lambda_{pns} - (\text{Id}_{d-1} - M_p) \delta \lambda_{pts} \\ & = -M_p \lambda_{pts}^{tr}. \end{aligned}$$

Beim statischen Kondensieren muss die Matrix $(\text{Id}_{d-1} - M_p)$ invertiert werden. Im Laufe der Newton-Iteration kann jedoch nicht in jedem Schritt sichergestellt werden, dass die Matrix regulär ist. Im Konvergenzfall ist die Matrix invertierbar. Um die Matrix in jedem Schritt invertierbar zu machen und die Robustheit des semiglatte Newton-Verfahrens zu erhöhen wird eine Modifikation der Matrix vorgenommen [43, Abschnitt 5.1.1]. Die Matrix F_p wird durch die skalierte Matrix

$$\tilde{F}_p := \frac{\lambda_{pts}(\lambda_{pts}^{tr})^T}{\max\{S_p, \|\lambda_{pts}\|\} \|\lambda_{pts}^{tr}\|}$$

ersetzt. Dadurch wird auch M_p durch $\tilde{M}_p := e_p (\text{Id}_{d-1} - \tilde{F}_p)$ ersetzt. Außerdem wird durch die Definitionen

$$\begin{aligned} \alpha_p &:= \frac{\lambda_{pts}^T(\lambda_{pts}^{tr})}{\max\{\|\lambda_{pts}\|, \|\lambda_{pts}^{tr}\|\}}, \\ d_p &:= \min \left\{ \frac{\|\lambda_{pts}\|}{S_p}, 1 \right\}, \\ \beta_p &:= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha_p d_p}, & \alpha_p < 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

ein Skalierungsfaktor $\beta_p > 0$ eingeführt, mit dem die Matrix $\text{Id}_{d-1} - \tilde{M}_p$ zu $\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p$ modifiziert wird. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{c_t}{k} \left(\tilde{L}_p t_p + \left(\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p \right)^{-1} \frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{u_p} S_p)^T \right) \delta u_p - \delta \lambda_{pts} \\ & + \left(\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p \right)^{-1} \left(\frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{\theta_p} S_p) \delta \theta_p + \frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{\lambda_{pns}} S_p) \delta \lambda_{pns} \right) \\ & = - \left(\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p \right)^{-1} \tilde{M}_p \lambda_{tps}^{tr}. \end{aligned}$$

mit $\tilde{L}_p := \left(\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p \right)^{-1} - \text{Id}_{d-1}$. Im Konvergenzfall konvergieren die modifizierten Matrizen gegen die ursprünglichen. Sei nun $p \in \mathbf{P}_C$ ein beliebiger Knoten. Für $S_p > 0$ müssen bei der obigen Betrachtung keine gesonderten Maßnahmen ergriffen werden. Im Falle $S_p = 0$, was bei nicht Tresca-Reibgesetzen auftreten kann, müssen wir dafür sorgen, dass $p \in \mathcal{A}_t$ liegt. Für $\|\lambda_{pts}^{tr}\| > 0$ ist dies automatisch erfüllt, aber im Falle $\|\lambda_{pts}^{tr}\| = 0$ muss $p \in \mathcal{A}_t$ gesetzt werden. Unabhängig von $\|\lambda_{pts}^{tr}\|$ wird in beiden Fälle $\tilde{M}_p = 0$ gewählt. Zusätzlich muss $\frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} = 0$ gewählt, falls $\|\lambda_{pts}^{tr}\| = 0$ gilt. Damit ergibt sich die Gleichung $\delta \lambda_{pts} = 0$. Dies ist die erwartete, da λ_{pts} und u_{pt} in diesem Fall schon eine Lösung von $C_t(u_p, \theta_p, \lambda_{nps}, \lambda_{tps}) = 0$ sind. Für die algebraische Darstellung werden die Matrizen $\mathbf{C}_{\lambda_t u}$, $\mathbf{C}_{\lambda_t \theta}$, $\mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n}$ und $\mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_t}$ definiert, welche für alle $p \in \mathbf{P}_C$ folgende Untermatrizen haben:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{\lambda_t u})_p & := \begin{cases} -S_p t_p - \frac{c_t}{k} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{u_p} S_p)^T, & p \in \mathcal{I}_t, \\ \frac{c_t}{k} \left(\tilde{L}_p t_p + \left(\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p \right)^{-1} \frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{u_p} S_p)^T \right), & p \in \mathcal{A}_t, \end{cases} \\ (\mathbf{C}_{\lambda_t \theta})_p & := \begin{cases} -c_t \dot{u}_{pt} (\nabla_{\theta_p} S_p), & p \in \mathcal{I}_t, \\ \left(\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p \right)^{-1} \frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{\theta_p} S_p), & p \in \mathcal{A}_t, \end{cases} \\ (\mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n})_p & := \begin{cases} -c_t \dot{u}_{pt} (\nabla_{\lambda_{nps}} S_p), & p \in \mathcal{I}_t, \\ \left(\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p \right)^{-1} \frac{1}{\|\lambda_{pts}^{tr}\|} \lambda_{pts}^{tr} (\nabla_{\lambda_{nps}} S_p), & p \in \mathcal{A}_t, \end{cases} \\ (\mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_t})_p & := \begin{cases} -c_t \dot{u}_{pt} (\nabla_{\lambda_{pns}} S_p), & p \in \mathcal{I}_t, \\ -\text{Id}_{d-1}, & p \in \mathcal{A}_t. \end{cases} \end{aligned}$$

Für die rechte Seite wird der Vektor \mathcal{F}_{λ_t} mit den Untervektoren

$$(\mathcal{F}_{\lambda_t})_p := \begin{cases} S_p c_t \dot{u}_{pt}, & p \in \mathcal{I}_t, \\ - \left(\text{Id}_{d-1} - \beta_p \tilde{M}_p \right)^{-1} \tilde{M}_p \lambda_{tps}^{tr}, & p \in \mathcal{A}_t \end{cases}$$

2 Dynamisches Problem

gebildet.

Für Verfestigung und plastische Verzerrung ergeben sich die Ableitungen

$$(\delta_u D_n)(\delta u) = \begin{cases} 0, & p \in \mathcal{I}_{pl}, \\ 2\mu \frac{\eta_p^{tr}}{\|\eta_p^{tr}\|} : R_p^{\text{dev}}(\delta u), & p \in \mathcal{A}_{pl}, \end{cases}$$

$$(\delta_{\alpha_p} D_n)(\delta \alpha_p) = \begin{cases} -c^p a_0 \delta \alpha_p, & p \in \mathcal{I}_\alpha \cup (\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{I}_{pl}), \\ -(a_0^{-1} H + c^p a_0) \delta \alpha_p, & p \in \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_{pl}, \end{cases}$$

$$(\delta_{\varepsilon_p^p} D_n)(\delta \varepsilon_p^p) = \begin{cases} 0, & p \in \mathcal{I}_{pl}, \\ -(2\mu + a_0^{-2} K - c^p) \frac{\eta_p^{tr}}{\|\eta_p^{tr}\|} : \delta \varepsilon_p^p, & p \in \mathcal{A}_{pl}, \end{cases}$$

$$(\delta_u D_t^s)(\delta u) = \begin{cases} 0, & p \in \mathcal{I}_{pl}, \\ \|\eta_p^{tr}\|^s 2\mu \left[\eta_p^s \otimes \frac{\eta_p^{tr}}{\|\eta_p^{tr}\|} + \left(1 - \frac{\bar{Y}_p}{\|\eta_p^{tr}\|}\right) \text{Id} \right] R_p^{\text{dev}}(\delta u), & p \in \mathcal{A}_{pl}, \end{cases}$$

$$(\delta_{\alpha_p} D_t^s)(\delta \alpha_p) = \begin{cases} 0, & p \in \mathcal{I}_\alpha, \\ (\bar{Y}_p)^s \frac{-c^p s H}{a_0 \bar{Y}_p} \Delta \varepsilon_p^p \delta \alpha_p, & p \in \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{I}_{pl}, \\ -\|\eta_p^{tr}\|^s \frac{H}{a_0} \frac{\eta_p^{tr}}{\|\eta_p^{tr}\|} \delta \alpha_p, & p \in \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_{pl}, \end{cases}$$

$$(\delta_{\varepsilon_p^p} D_t^s)(\delta \varepsilon_p^p) = \begin{cases} -(\bar{Y}_p)^s c^p \delta \varepsilon_p^p, & p \in \mathcal{I}_{pl}, \\ -\|\eta_p^{tr}\|^s \left[\mathcal{K} \eta_p^s \otimes \frac{\eta_p^{tr}}{\|\eta_p^{tr}\|} + \omega_p \text{Id} \right] \delta \varepsilon_p^p, & p \in \mathcal{A}_{pl} \end{cases}$$

mit den Abkürzungen

$$R_p^{\text{dev}}(u_h) := \text{dev} \left(\overline{\varepsilon(u_h)_p} \right), \text{ für } p \in \mathbb{T}_h,$$

$$\mathcal{K} := c^p \left(\omega_p + (2\mu + a_0^{-2} K - c^p) \eta_p^s : \frac{\eta_p^{tr}}{\|\eta_p^{tr}\|} \right)^{-1},$$

$$\omega_p := (2\mu + a_0^{-2} K - c^p) \left(1 - \frac{\bar{Y}_p}{\|\eta_p^{tr}\|} \right) + c^p,$$

$$\eta_p^s := \left((1-s) \frac{\bar{Y}_p}{\|\eta_p^{tr}\|} \frac{\eta_p^{tr}}{\|\eta_p^{tr}\|} + s \alpha_p \frac{\eta_p}{\|\eta_p^{tr}\|} \right).$$

Zuletzt sind für alle $p \in \mathbf{P}_C$ die Ableitungen der Funktion E für den Wärmefluss gegeben durch

$$\begin{aligned} (\delta_{u_{pt}} E)(\delta u_{pt}) &= \frac{1}{k} K_w \lambda_{pts} \delta u_{pt}, \\ (\delta_{\theta_p} E)(\delta \theta_p) &= -\beta \lambda_{pns} \delta \theta_p, \\ (\delta_{\lambda_{pns}} E)(\delta \lambda_{pns}) &= -\beta (\theta_p - \theta_g) \delta \lambda_{pns}, \\ (\delta_{\lambda_{pts}} E)(\delta \lambda_{pts}) &= K_w \frac{1}{k} (u_{pt} - u_{pt}^{m-1}) \delta \lambda_{pts}, \\ (\delta_{\lambda_{p\theta}} E)(\delta \lambda_{p\theta}) &= \delta \lambda_{p\theta}. \end{aligned}$$

Das sich aus dem Hauptschritt des Newmark-Verfahrens ergebene Gleichungssystem für jeden Newton-Schritt ist

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{w} \\ \delta \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_\lambda \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Dabei ist

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} A_{uu} & A_{u\theta} \\ A_{\theta u} & A_{\theta\theta} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} k^2 K_u + M_u & A_{u\theta} \\ A_{\theta u} & \frac{1}{2} k K_\theta + M_\theta \end{pmatrix}$$

eine zwei mal zwei Blockmatrix. Sie besteht aus den Steifigkeitsmatrizen für Verschiebung $(K_u)_{pq} := (C\varepsilon(\varphi_p), \varepsilon(\varphi_q))$ und Temperatur $(K_\theta)_{pq} := (\nabla(\psi_p), \nabla(\psi_q))$, deren Massematrizen $(M_u)_{pq} := \rho_u(\varphi_p, \varphi_q)$ und $(M_\theta)_{pq} := \rho_u \rho_\theta(\psi_p, \psi_q)$ sowie den beiden Kopplungsmatrizen $(A_{u\theta})_{pq} := (\sigma_\theta(\psi_q), \varepsilon(\varphi_p))$ und $(A_{\theta u})_{pq} := -\frac{1}{2} \bar{\gamma} (C\varepsilon(\varphi_q)(\varepsilon_h^p - \varepsilon_h^{p,m-1}), \psi_p)$. Durch die Matrix \mathbf{A} werden die zu bestimmenden Newton-Updates $\delta \mathbf{w} = (\delta \bar{u}, \delta \bar{\theta})^T$ aneinander gekoppelt, wobei $\bar{x} = (\star_p)_p$ die Vektoren der Knotenwerte darstellt.

In der zweiten Matrix der ersten Zeile

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & B_{u\varepsilon^p, \mathbf{N}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{u\varepsilon^p, \mathbf{P}_C} & B_{u\lambda_n, \mathbf{P}_C} & B_{u\lambda_t, \mathbf{P}_C} & 0 \\ 0 & B_{\theta\varepsilon^p, \mathbf{N}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{\theta\varepsilon^p, \mathbf{P}_C} & 0 & 0 & B_{\theta\lambda_\theta, \mathbf{P}_C} \end{pmatrix}$$

beziehen sich die ersten beiden Zeilen auf die Verschiebung. Hier wird zwischen Knoten auf dem Kontaktrand \mathbf{P}_C und denen in \mathbf{N} , die nicht auf dem Kontaktrand liegen, unterschieden, da auf dem Kontaktrand auch die Lagrangemultiplikatoren einen Einfluss auf die Erhaltungsgleichung haben. Ebenso ist es in den Zeilen drei und vier bezüglich der Wärme und dem Beitrag des Wärmeflusses. Diese Matrix koppelt die Verschiebung und die Temperatur an die entsprechenden Unbekannten in $\delta \mathbf{y} := (\delta \bar{\alpha}, \delta \bar{\varepsilon}^p, \delta \bar{\lambda}_n, \delta \bar{\lambda}_t, \delta \bar{\lambda}_\theta)^T$. Für Verschiebung und plastische Verzerrung geschieht das durch $(B_{u\varepsilon^p})_{pq} = (C\varepsilon(\tau_p), \varphi_q)$. Aufgrund der Biorthogonalität der Mortar-Ansatzfunktionen können die Matrizen für die Kopplung zu den Lagrangemultiplikatoren

2 Dynamisches Problem

$(B_{u\lambda_\star})_{pq} = (\mu_{\star p}, \varphi_{q\star})$, $\star \in n, t$ und $(B_{\theta\lambda_\theta})_{pq} = (\mu_{\theta p}, \psi_q)$ als Diagonalmatrizen dargestellt werden. Die Kopplungsmatrix für Temperatur und plastische Verzerrung, die sich aus dem Newton-Verfahren ergibt, ist

$$(B_{\theta\varepsilon^p})_{pq} := \bar{\gamma} \left[-\frac{1}{2}(C\varepsilon(u_h)\tau_p, \psi_q) + (C\varepsilon_h^p\tau_p, \psi_q) - \frac{1}{2}(C\tau_p\varepsilon_h^{p,m-1}, \psi_q) - \frac{1}{2}(C(\varepsilon(u_h^{m-1}) - \varepsilon_h^{p,m-1})\tau_p, \psi_q) \right].$$

Die erste Spalte dieser Untermatrix ist eine reine Nullspalte, da die Verfestigung auf die Erhaltungsgleichungen für Verschiebung und Temperatur keinen direkten Einfluss hat, sondern nur in der NCP-Funktion der Plastizität vorkommt.

Die rechte Seite der Erhaltungsgleichungen $\mathbf{F}_y := (\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_\theta)^T$ enthält

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{u,\mathbf{N}} &:= \left(\rho_u(u_{h,\text{pred}}^m, \varphi_p) - \frac{1}{4}k^2(C\varepsilon(u_h^{m-1}) + \sigma_\theta(\theta_h^{m-1}), \varepsilon(\varphi_p)) \right. \\ &\quad + \frac{1}{4}k^2(C\varepsilon_h^{p,m-1}, \varepsilon(\varphi_p)) + \frac{1}{4}k^2(f_u^m + f_u^{m-1}, \varphi_p) + \frac{1}{4}k^2(p_u^m + p_u^{m-1}, \varphi_p)_{\Gamma_N} \\ &\quad \left. - \rho_u(u_h^m, \varphi_p) - \frac{1}{4}k^2(C\varepsilon(u_h^m) + \sigma_\theta(\theta_h^m), \varepsilon(\varphi_p)) + \frac{1}{4}k^2(C\varepsilon_h^{p,m}, \varepsilon(\varphi_p)) \right)_{p \in \mathbf{N}} \\ \mathcal{F}_{u,\mathbf{P}_C} &:= \left((\mathcal{F}_{u,\mathbf{N}})_p - \frac{1}{4}k^2((\lambda_{nh}^{m-1}, \varphi_{pn})_{\Gamma_N}, -(\lambda_{th}^{m-1}, \varphi_{pt})_{\Gamma_N})^T \right. \\ &\quad \left. - ((\lambda_{nh}^m, \varphi_{pn})_{\Gamma_N}, -(\lambda_{th}^m, \varphi_{pt})_{\Gamma_N})^T \right)_{p \in \mathbf{P}_C} \\ \mathcal{F}_{\theta,\mathbf{N}} &:= \left(\rho_u \rho_\theta(\theta_h^{m-1}, \psi_p) - \frac{1}{2}k\kappa(\nabla\theta_h^{m-1}, \nabla\psi_p) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2}k(f_\theta^m + f_\theta^{m-1}, \psi_p) + \frac{1}{2}k(p_\theta^m + p_\theta^{m-1}, \psi_p)_{\Gamma_N} \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{\gamma}(\sigma(u_h^{m-1})\varepsilon_h^{p,m-1}, \psi_p) - \rho_u \rho_\theta(\theta_h^m, \psi_p) + \frac{1}{2}k\kappa(\nabla\theta_h^m, \nabla\psi_p) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\sigma(u_h^m)(\varepsilon_h^{p,m} - \varepsilon_h^{p,m-1}), \psi_p) + \frac{1}{2}(\sigma(u_h^{m-1})\varepsilon_h^{p,m}, \psi_p) \right)_{p \in \mathbf{N}} \\ \mathcal{F}_{\theta,\mathbf{P}_C} &:= \left((\mathcal{F}_{\theta,\mathbf{N}})_p - \frac{1}{2}k(\lambda_{\theta h}^{m-1}, \psi_p)_{\Gamma_C} - \frac{1}{2}k(\lambda_{\theta h}^m, \psi_p)_{\Gamma_C} \right)_{p \in \mathbf{P}_C} \end{aligned}$$

für die inneren Knoten und die Kontaktknoten der Verschiebung und Temperatur.

Die Untermatrizen \mathbf{C} und \mathbf{D} in der zweiten Zeile bestehen aus dem Anteil der Richtungsableitungen der NCP-Funktionen die auf den entsprechenden Teil des Newton-Updates wirken. Die Blockmatrix \mathbf{C} , die für die Kopplung von Verschiebung und Tem-

peratur mit den restlichen Größen steht, wird zusammengesetzt als

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\alpha u} & 0 \\ \mathbf{C}_{\varepsilon^p u} & 0 \\ \mathbf{C}_{\lambda_n u} & 0 \\ \mathbf{C}_{\lambda_t u} & \mathbf{C}_{\lambda_t \theta} \\ \mathbf{C}_{\lambda_\theta u} & \mathbf{C}_{\lambda_\theta \theta} \end{pmatrix}.$$

Hier treten mehrere Nullblöcke auf, da die Temperatur nur indirekt Einfluss auf Verfestigung und Kontaktkraft hat. Die Untermatrizen, die nicht verschwinden, bestehen aus den Blöcken

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{\alpha u})_p &:= (\delta_u D_n(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p)) && \forall p \in \mathbb{I}, \\ (\mathbf{C}_{\varepsilon^p u})_p &:= (\delta_u D_t^s(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p)) && \forall p \in \mathbb{I}, \\ (\mathbf{C}_{\lambda_n u})_p &:= (\delta_{u_p} C_n(u_{pn}, \lambda_{nps})) && \forall p \in \mathbf{P}_C, \\ (\mathbf{C}_{\lambda_\theta \star})_p &:= (\delta_{\star_p} E(u_{pt}, \theta_p, \lambda_{pns}, \lambda_{pts}, \lambda_{p\theta})) && \star \in \{u, \theta\}, \quad \forall p \in \mathbf{P}_C. \end{aligned}$$

Bei den Lagrangemultiplikatoren spiegelt die Struktur der Matrix \mathbf{D} wider, dass die Effekte der Plastizität auf der einen Seite und die Lagrangemultiplikatoren für Kontaktkraft, Reibkraft und Wärmefluss auf der anderen Seite nur über die Erhaltungsgleichungen zusammenhängen. Untereinander bestehen in beiden Gruppen aber auch direkte Abhängigkeiten. Die Matrix hat die Form

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\alpha\alpha} & \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{\varepsilon^p\alpha} & \mathbf{D}_{\varepsilon^p\varepsilon^p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{\lambda_n\lambda_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n} & \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n} & \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t} & \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_\theta} \end{pmatrix}$$

wobei die Untermatrizen folgende Blöcke enthalten:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{\alpha\star})_p &:= (\delta_{\star_p} D_n(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p)) && \star \in \{\alpha, \varepsilon^p\}, \quad \forall p \in \mathbb{I}, \\ (\mathbf{D}_{\varepsilon^p\star})_p &:= (\delta_{\star_p} D_t^s(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p)) && \star \in \{\alpha, \varepsilon^p\}, \quad \forall p \in \mathbb{I}, \\ (\mathbf{D}_{\lambda_n\lambda_n})_p &:= (\delta_{\lambda_{np}} C_n(u_{pn}, \lambda_{nps})) && \forall p \in \mathbf{P}_C, \\ (\mathbf{D}_{\lambda_\theta\star})_p &:= (\delta_{\star_p} E(u_{pt}, \theta_p, \lambda_{pns}, \lambda_{pts}, \lambda_{p\theta})) && \star \in \{\lambda_n, \lambda_t, \lambda_\theta\}, \quad \forall p \in \mathbf{P}_C. \end{aligned}$$

Der zweite Block \mathbf{F}_λ der rechten Seite \mathcal{F} enthält die negativen Werte der entsprechenden NCP-Funktion aus dem vorherigen Newton-Schritt

$$\mathbf{F}_\lambda := \begin{pmatrix} \mathcal{F}_\alpha \\ \mathcal{F}_{\varepsilon^p} \\ \mathcal{F}_{\lambda_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_t} \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta} \end{pmatrix}$$

2 Dynamisches Problem

mit den Bestandteilen

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_\alpha)_p &:= -D_n(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p) & \forall p \in \mathbb{I}, \\
(\mathcal{F}_{\varepsilon^p})_p &:= -D_t^s(u_h, \alpha_p, \varepsilon_p^p) & \forall p \in \mathbb{I}, \\
(\mathcal{F}_{\lambda_n})_p &:= -C_n(u_{pn}, \lambda_{nps}) & \forall p \in \mathbf{P}_C, \\
(\mathcal{F}_{\lambda_\theta})_p &:= -E(u_{pt}, \theta_p, \lambda_{pns}, \lambda_{pts}, \lambda_{p\theta}) & \forall p \in \mathbf{P}_C.
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem für den Prädiktorschritt kann auf ähnliche Weise aufgebaut werden. Es enthält jedoch nur den Prädiktor der Verschiebung und der Kontaktkraft.

2.9 Statisches Kondensieren

Die Größe des Gleichungssystem, das in jedem Newtonschritt gelöst werden muss, kann durch statisches kondensieren drastisch verringert werden. In diesem Kapitel werden die Lagrangemultiplikatoren für Kontakt, Reibung und Wärmefluss eliminiert. Durch die aus der Biorthogonalität der Mortar-Basisfunktionen entstehenden Diagonalstruktur können die Kopplungsmatrizen ohne großen Aufwand invertiert werden. Außerdem werden die Verfestigung und plastische Verzerrung eliminiert. Dazu können die entsprechenden Ableitungen der NCP-Funktion invertiert werden. Nach dem Lösen des kondensierten System werden die kondensierten Größen in einem Postprocessing Schritt sukzessive aus der Verschiebung und der Temperatur bestimmt. Die statische Kondensation wird hier nur für das Gleichungssystem des Hauptschrittes dargestellt. Für den Prädiktorschritt lässt sich der Lagrangemultiplikator für Kontakt analog aus dem Gleichungssystem entfernen.

2.9.1 Kontakt und Reibung

Zuerst werden die Lagrangemultiplikatoren λ_n und λ_t ähnlich zur Behandlung in [43] kondensiert. Durch Umstellung der Erhaltungsgleichung für die Verschiebung können die Newton-Updates der Lagrangemultiplikatoren durch

$$\begin{aligned}
\delta \bar{\lambda}_n &= (NB_{u\lambda_n, \mathbf{P}_C})^{-1} N (F_u - A_{uu, \mathbf{P}_C} \delta \bar{u} - A_{u\theta, \mathbf{P}_C} \delta \bar{\theta} - B_{u\varepsilon^p, \mathbf{P}_C} \delta \bar{\varepsilon}^p), \\
\delta \bar{\lambda}_t &= (TB_{u\lambda_t, \mathbf{P}_C})^{-1} T (F_u - A_{uu, \mathbf{P}_C} \delta \bar{u} - A_{u\theta, \mathbf{P}_C} \delta \bar{\theta} - B_{u\varepsilon^p, \mathbf{P}_C} \delta \bar{\varepsilon}^p).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

berechnet werden. Die Matrizen N und T enthalten in den Zeilen jeweils die normalen bzw. tangential Vektoren für den entsprechenden Knoten.

Um das reduzierte System zu erhalten muss die dritte Zeile in \mathbf{C} und \mathbf{D} in die Knoten für inaktiven \mathcal{I}_n und aktiven Kontakt \mathcal{A}_n unterteilt werden. Die Zeilen für inaktiven Kontakt sowie die Zeilen für die normalen Komponenten mit aktivem Kontakt können

in \mathbf{A} und \mathbf{B} vernachlässigt werden, wenn $\delta\lambda_n$ durch

$$(\delta\lambda_n^r)_p := \begin{cases} (\mathbf{D}_{\lambda_n\lambda_n}^{-1} F_{\lambda_n})_p, & p \in \mathcal{I}_n, \\ (D^{r,\lambda_n} (F_u - A_{uu,\mathcal{A}_n} \bar{u} - A_{u\theta,\mathcal{A}_n} \bar{\theta} - B_{u\varepsilon^p,\mathcal{A}_n} \bar{\varepsilon}^p))_p, & p \in \mathcal{A}_n \end{cases}$$

im Rest des Systems ersetzt wird. Dabei ist $D^{r,\lambda_n} := (NB_{u\lambda_n,\mathcal{A}_n})^{-1}N$. Die zweite Zeile von \mathbf{B} muss auch aufgeteilt werden. Es wird sowohl in die normale und tangential Richtung unterteilt, sowie in die Knoten mit inaktivem bzw. aktivem Kontakt.

$$\begin{pmatrix} 0 & N_{\mathcal{I}_n} B_{u\varepsilon^p,\mathcal{I}_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{\mathcal{I}_n} B_{u\varepsilon^p,\mathcal{I}_n} & T_{\mathcal{I}_n} B_{u\lambda_t,\mathcal{I}_n} & 0 \\ 0 & T_{\mathcal{A}_n} B_{u\varepsilon^p,\mathcal{A}_n} & T_{\mathcal{A}_n} B_{u\lambda_t,\mathcal{A}_n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Der normalen Anteil für aktive Knoten wurde durch die aktiven Knoten aus der dritte Reihe von \mathbf{D} ersetzt. Genauso wird auch in Matrix \mathbf{A} vorgegangen:

$$\begin{pmatrix} A_{uu,\mathbf{N}} & A_{u\theta,\mathbf{N}} \\ N_{\mathcal{I}_n} A_{uu,\mathcal{I}_n} & N_{\mathcal{I}_n} A_{u\theta,\mathcal{I}_n} \\ \mathbf{C}_{\lambda_n u,\mathcal{A}_n} & 0 \\ T_{\mathcal{I}_n} A_{uu,\mathcal{I}_n} & T_{\mathcal{I}_n} A_{u\theta,\mathcal{I}_n} \\ T_{\mathcal{A}_n} A_{uu,\mathcal{A}_n} & T_{\mathcal{A}_n} A_{u\theta,\mathcal{A}_n} \end{pmatrix}.$$

Für die Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{D} werden die korrespondierenden Anteile aus der Ersetzung des Kontaktes in die entsprechenden Untermatrizen addiert. Das führt bei \mathbf{C} zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\alpha u} & 0 \\ \mathbf{C}_{\varepsilon^p u} & 0 \\ \mathbf{C}_{\lambda_t u,\mathcal{I}_n} & \mathbf{C}_{\lambda_t \theta,\mathcal{I}_n} \\ \mathbf{C}_{\lambda_t u,\mathcal{A}_n} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} A_{uu,\mathcal{A}_n} & \mathbf{C}_{\lambda_t \theta,\mathcal{A}_n} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} A_{u\theta,\mathcal{A}_n} \\ \mathbf{C}_{\lambda \theta u,\mathcal{I}_n} & \mathbf{C}_{\lambda \theta \theta,\mathcal{I}_n} \\ \mathbf{C}_{\lambda \theta u,\mathcal{A}_n} - \mathbf{D}_{\lambda \theta \lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} A_{uu,\mathcal{A}_n} & \mathbf{C}_{\lambda \theta \theta,\mathcal{A}_n} - \mathbf{D}_{\lambda \theta \lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} A_{u\theta,\mathcal{A}_n} \end{pmatrix}$$

und für \mathbf{D} ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\alpha\alpha} & \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p} & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_{\varepsilon^p\alpha} & \mathbf{D}_{\varepsilon^p\varepsilon^p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_t,\mathcal{I}_n} & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} B_{u\varepsilon^p,\mathcal{A}_n} & \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_t,\mathcal{A}_n} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda_t,\mathcal{I}_n} & \mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda\theta,\mathcal{I}_n} \\ 0 & -\mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} B_{u\varepsilon^p,\mathcal{A}_n} & \mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda_t,\mathcal{A}_n} & \mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda\theta,\mathcal{A}_n} \end{pmatrix}.$$

2 Dynamisches Problem

Auch die rechte Seite wird bzgl. der Kontaktknoten aufgeteilt und erhält die Anteile, die durch das Kondensieren entstehen. Die neuen rechten Seite sind

$$\mathcal{F}_y = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{u,\mathbf{N}} \\ N_{\mathcal{I}_n} \mathcal{F}_{u,\mathcal{I}_n} - B_{u\lambda_n,\mathcal{I}_n} \mathbf{D}_{\lambda_n\lambda_n}^{-1} F_{\lambda_n,\mathcal{I}_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_n,\mathcal{A}_n} \\ T_{\mathcal{I}_n} \mathcal{F}_{u,\mathcal{I}_n} \\ T_{\mathcal{A}_n} \mathcal{F}_{u,\mathcal{A}_n} \\ \mathcal{F}_\theta \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{F}_\lambda := \begin{pmatrix} \mathcal{F}_\alpha \\ \mathcal{F}_{\varepsilon^p} \\ \mathcal{F}_{\lambda_t,\mathcal{I}_n} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,\mathcal{I}_n} \mathbf{D}_{\lambda_n\lambda_n}^{-1} F_{\lambda_n,\mathcal{I}_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_t,\mathcal{A}_n} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} F_{u,\mathcal{A}_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,\mathcal{I}_n} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,\mathcal{I}_n} \mathbf{D}_{\lambda_n\lambda_n}^{-1} F_{\lambda_n,\mathcal{I}_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,\mathcal{A}_n} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} F_{u,\mathcal{A}_n} \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt wird nun die Reibkraft eliminiert. Dazu werden die Kontaktknoten in vier Mengen nach inaktivem und aktivem Kontakt sowie inaktiver und aktiver Reibung unterteilt.

	\mathcal{I}_t	\mathcal{A}_t
\mathcal{I}_n	S_1	S_2
\mathcal{A}_n	S_3	S_4

Die Mengen S_1 und S_2 enthalten haftenden bzw. gleitenden Knoten, die nicht in Kontakt sind. In den Mengen S_3 und S_4 sind die haftende bzw. gleitende Knoten enthalten, bei denen aktiver Kontakt besteht. Ein Knoten kann nur in der Menge S_1 sein, wenn die Reibgrenze nicht davon abhängt, ob Kontakt besteht. Dies ist in der Regel nur für das Tresca-Reibgesetz der Fall.

Um die Reibkräfte zu eliminieren wird nun der Term

$$(\delta\lambda_t^r)_p := \begin{cases} (D^{r,\lambda_t} (F_u - A_{uu,\mathbf{P}_C} \delta\bar{u} - A_{u\theta,\mathbf{P}_C} \delta\bar{\theta} - B_{u\varepsilon^p,\mathbf{P}_C} \delta\varepsilon^{\bar{p}}))_p, & p \in \mathcal{I}_t, \\ (\mathcal{F}_{\lambda_t,\mathcal{I}_n} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,\mathcal{I}_n} \mathcal{F}_{\lambda_n,\mathcal{I}_n} - \mathbf{C}_{\lambda_t u,\mathcal{I}_n} \delta\bar{u}_{\mathcal{I}_n} - \mathbf{C}_{\lambda_t\theta,\mathcal{I}_n} \delta\bar{\theta}_{\mathcal{I}_n})_p, & p \in S_2, \\ (\mathcal{F}_{\lambda_t,\mathcal{A}_n} - \mathbf{C}_{\lambda_t u,\mathcal{A}_n} \delta\bar{u}_{\mathcal{A}_n} - \mathbf{C}_{\lambda_t\theta,\mathcal{A}_n} \delta\bar{\theta}_{\mathcal{A}_n} \\ + \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,\mathcal{A}_n} D_{\mathcal{A}_n}^{r,\lambda_n} (-F_{u,\mathcal{A}_n} + A_{uu,\mathcal{A}_n} \delta\bar{u}_{\mathcal{A}_n} + A_{u\theta,\mathcal{A}_n} \delta\bar{\theta}_{\mathcal{A}_n} \\ + B_{u\varepsilon^p,\mathcal{A}_n} \delta\varepsilon^{\bar{p}}_{\mathcal{A}_n}))_p, & p \in S_4 \end{cases}$$

für den Teil $\delta\lambda_t$ des Newton-Updates eingesetzt, wobei $D^{r,\lambda_t} := (TB_{u\lambda_t,\mathbf{P}_C})^{-1}T$.

In der ersten Zeile von **A** wird die Zeile, die für die haftenden Knoten steht durch die entsprechenden Zeile aus **C** ersetzt:

$$\left(\begin{array}{cc} A_{uu,\mathbf{N}} & A_{u\theta,\mathbf{N}} \\ N_{\mathcal{I}_n} A_{uu,\mathcal{I}_n} & N_{\mathcal{I}_n} A_{u\theta,\mathcal{I}_n} \\ C_{\lambda_n u, \mathcal{A}_n} & 0 \\ C_{\lambda_t u, S_1} & C_{\lambda_t \theta, S_1} \\ T_{S_2} A_{uu, S_2} - T_{S_2} B_{u\lambda_t, S_2} C_{\lambda_t u, S_2} & T_{S_2} A_{u\theta, S_2} - T_{S_2} B_{u\lambda_t, S_2} C_{\lambda_t \theta, S_2} \\ C_{\lambda_t u, S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} A_{uu, S_3} & C_{\lambda_t \theta, S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} A_{u\theta, S_3} \\ T_{S_4} A_{uu, S_4} + \tilde{A}_{uu, S_4} & T_{S_4} A_{u\theta, S_4} + \tilde{A}_{u\theta, S_4} \end{array} \right)$$

mit $\tilde{A}_{u\star, S_4} := T_{S_2} B_{u\lambda_t, S_4} (\mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_4} D_{S_4}^{r, \lambda_n} A_{u\star, S_4} - \mathbf{C}_{\lambda_t \star, S_4})$ wobei $\star \in \{u, \theta\}$.

Genauso wird die zweite Zeile aus **B** durch die Zeile aus **D** ersetzt. Die zweite Zeile von **B** wird zu

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & N_{\mathcal{I}_n} B_{u\epsilon^p, \mathcal{I}_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{S_2} B_{u\epsilon^p, S_2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} B_{u\epsilon^p, S_3} & 0 \\ 0 & T_{S_4} B_{u\epsilon^p, S_4} + \tilde{B}_{u\epsilon^p, S_4} & 0 \end{array} \right)$$

mit $\tilde{B}_{u\epsilon^p, S_4} := T_{S_2} B_{u\lambda_t, S_4} \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_4} D_{S_4}^{r, \lambda_n} B_{u\epsilon^p, S_4}$.

Die Matrix **C** nimmt mit den zusammengefassten Matrizen

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_{\theta \star}, S_3} := \left(\mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} + \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_t, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_t} \right) A_{u\star, S_3},$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_{\theta \star}, S_4} := \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_t, S_4} (\mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_4} D_{S_4}^{r, \lambda_n} A_{u\star, S_4} - \mathbf{C}_{\lambda_t \star, S_4}) - \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_n, S_4} D_{S_4}^{r, \lambda_n} A_{u\star, S_4}$$

für $\star \in \{u, \theta\}$ die Form

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{C}_{\alpha u} & 0 \\ \mathbf{C}_{\epsilon^p u} & 0 \\ \mathbf{C}_{\lambda_{\theta} u, S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_t, S_1} D_{S_1}^{r, \lambda_t} A_{uu, S_1} & \mathbf{C}_{\lambda_{\theta} \theta, S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_t, S_1} D_{S_1}^{r, \lambda_t} A_{u\theta, S_1} \\ \mathbf{C}_{\lambda_{\theta} u, S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_t, S_2} C_{\lambda_t u, S_2} & \mathbf{C}_{\lambda_{\theta} \theta, S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_t, S_2} C_{\lambda_t \theta, S_2} \\ \mathbf{C}_{\lambda_{\theta} u, S_3} - \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_{\theta} u, S_3} & \mathbf{C}_{\lambda_{\theta} u, S_3} - \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_{\theta} \theta, S_3} \\ \mathbf{C}_{\lambda_{\theta} u, S_4} + \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_{\theta} u, S_4} & \mathbf{C}_{\lambda_{\theta} \theta, S_4} + \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_{\theta} \theta, S_4} \end{array} \right)$$

an. In der Matrix **D** führt die Ersetzung des Newton-Updates zur Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{D}_{\alpha\alpha} & \mathbf{D}_{\alpha\epsilon^p} & 0 \\ \mathbf{D}_{\epsilon^p\alpha} & \mathbf{D}_{\epsilon^p\epsilon^p} & 0 \\ 0 & -\mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_t, S_1} D_{S_1}^{r, \lambda_t} B_{u\epsilon^p, S_1} & \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_{\theta}, S_1} \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_{\theta}, S_2} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda_{\theta} \alpha, S_3} & \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda_{\theta} \epsilon^p, S_3} & \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_{\theta}, S_3} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda_{\theta} \alpha, S_4} & \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda_{\theta} \epsilon^p, S_4} & \mathbf{D}_{\lambda_{\theta} \lambda_{\theta}, S_4} \end{array} \right)$$

2 Dynamisches Problem

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}}_{\lambda\theta\star,S_3} &:= -\left(\mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda_n,S_3}D_{S_3}^{r,\lambda_n} + \mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda_t,S_3}D_{S_1}^{r,\lambda_t}\right)B_{u\star,S_3}, \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda\theta\star,S_4} &:= (\mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda_t,S_3}\mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda\theta\lambda_n,S_4})D_{S_4}^{r,\lambda_n}B_{u\star,S_4}\end{aligned}$$

für $\star \in \{\alpha, \varepsilon\}$. Nach statischer Kondensation der Kontaktkraft und Reibkraft besteht die rechte Seite \mathcal{F} aus den beiden Komponenten

$$\mathcal{F}_y = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{u,\mathbf{N}} \\ N_{\mathcal{I}_n}\mathcal{F}_{u,\mathcal{I}_n} - B_{u\lambda_n,\mathcal{I}_n}\mathcal{F}_{\lambda_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_n,A_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_t,S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_1}\mathcal{F}_{\lambda_n,S_1} \\ T_{S_2}\mathcal{F}_{u,S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_t,S_2}(\mathcal{F}_{\lambda_t,S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_2}\mathcal{F}_{\lambda_n,S_2}) \\ \mathcal{F}_{\lambda_t,S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_3}D_{S_3}^{r,\lambda_n}\mathcal{F}_{u,S_3} \\ T_{S_4}\mathcal{F}_{u,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_t,S_4}(\mathcal{F}_{\lambda_t,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_4}D_{S_4}^{r,\lambda_n}\mathcal{F}_{u,S_4}) \\ \mathcal{F}_\theta \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{F}_\lambda := \begin{pmatrix} \mathcal{F}_\alpha \\ \mathcal{F}_{\varepsilon^p} \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,S_1}\mathcal{F}_{\lambda_n} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_1}D_{S_1}^{r,\lambda_t}\mathcal{F}_{u,S_1} \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,S_2}\mathcal{F}_{\lambda_n,S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_2}(\mathcal{F}_{\lambda_t,S_2} + \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_2}\mathcal{F}_{\lambda_n,S_2}) \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,S_3}D_{S_3}^{r,\lambda_n}\mathcal{F}_{u,S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_3}D_{S_3}^{r,\lambda_t}\mathcal{F}_{u,S_3} \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,S_4}D_{S_4}^{r,\lambda_n}\mathcal{F}_{u,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_4}(\mathcal{F}_{\lambda_t,S_4} + \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_4}D_{S_4}^{r,\lambda_n}\mathcal{F}_{u,S_4}) \end{pmatrix}.$$

2.9.2 Verfestigung und plastische Verzerrung

Im Gegensatz zu Kontakt und Reibung, wo aufeinanderfolgendes Eliminieren möglich war, müssen Verfestigung und plastische Verzerrung in einem Schritt eliminiert werden. Es ist nicht möglich dies aufzuteilen, da die Kopplung zwischen den beiden nicht in Diagonalmatrizen ausgedrückt werden kann. Es werden wieder vier Mengen eingeführt, in die jedes Element bezüglich inaktiver und aktiver Verfestigung, sowie inaktiver und aktiver plastischen Verzerrung einsortiert wird.

$$\begin{array}{c|c|c} & \mathcal{I}_{pl} & \mathcal{A}_{pl} \\ \hline \mathcal{I}_\alpha & P_1 & P_2 \\ \hline \mathcal{A}_\alpha & P_3 & P_4 \end{array}.$$

Um die Elimination durchzuführen muss die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\alpha\alpha}^I & \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p}^I \\ \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p}^I & \mathbf{D}_{\varepsilon^p\varepsilon^p}^I \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\alpha\alpha} & \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p} \\ \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p} & \mathbf{D}_{\varepsilon^p\varepsilon^p} \end{pmatrix}^{-1}$$

bestimmt werden. Betrachtet man die zu jedem Element gehörenden Blöcke dieser Matrizen als eine Matrix ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\alpha\alpha}^I & \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p}^I \\ \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p}^I & \mathbf{D}_{\varepsilon^p\varepsilon^p}^I \end{pmatrix}_p = \begin{cases} -\frac{1}{c^p} \begin{pmatrix} a_0^{-1} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}, & p \in P_1, \\ -\begin{pmatrix} \frac{1}{c^p a_0} & -\frac{\kappa}{c^p a_0 \zeta_p^s} \hat{\eta}_p^{tr} \text{Id} \\ 0 & \frac{1}{\omega_p} \left(\text{Id} - \frac{\kappa}{\zeta_p^s} \tilde{\eta}^s \otimes \hat{\eta}^{tr} \right) \end{pmatrix}, & p \in P_2, \\ -\frac{1}{c^p} \begin{pmatrix} a_0^{-1} & 0 \\ -\frac{Hs}{a_0^2 \bar{V}_p} \Delta \varepsilon_p^p & \text{Id} \end{pmatrix}, & p \in P_3, \\ -\begin{pmatrix} \frac{\kappa H + (a_0^2 c_p + H) \zeta_p^s}{(c_p + a_0^{-2} H)^2 a_0^3 \zeta_p^s} & -\frac{\kappa}{a_0 (c_p + a_0^{-2} H) \zeta_p^s} \hat{\eta}_p^{tr} \text{Id} \\ \frac{H}{(a_0^2 c_p + H) \omega_p} \left(\frac{\kappa}{\zeta_p^s} \tilde{\eta}^s - \hat{\eta}^{tr} \right) & \frac{1}{\omega_p} \left(\text{Id} - \frac{\kappa}{\zeta_p^s} \tilde{\eta}^s \otimes \hat{\eta}^{tr} \right) \end{pmatrix}, & p \in P_4 \end{cases}$$

mit $\zeta_p^s = \omega_p + \kappa \tilde{\eta}_p^s : \hat{\eta}_p^{tr}$, $\hat{\eta}_p^{tr} := \frac{\eta_p^{tr}}{\|\eta_p^{tr}\|}$ und

$$\tilde{\eta}_p^s := \begin{cases} \eta_p^s, & p \in \mathcal{I}_\alpha, \\ \eta_p^s - \frac{H}{c_p a_0^2 + H} \hat{\eta}^{tr}, & p \in \mathcal{A}_\alpha. \end{cases}$$

Die Existenz dieser invertierten Matrizen kann durch Voraussetzungen an die Stabilitätskonstanten s und c^p in Abhängigkeit von den Materialparametern sichergestellt werden [35, Abschnitt 4.1.1].

Mit diesen Matrizen ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die Newton-Updates zu

$$\begin{aligned} \delta\alpha^r &:= \mathbf{D}_{\alpha\alpha}^I (\mathcal{F}_\alpha - \mathbf{C}_{\alpha u} \delta u) + \mathbf{D}_{\alpha\varepsilon^p}^I (\mathcal{F}_{\varepsilon^p} - \mathbf{C}_{\varepsilon^p u} \delta u) \\ \delta(\varepsilon^p)^r &:= \mathbf{D}_{\varepsilon^p\alpha}^I (\mathcal{F}_\alpha - \mathbf{C}_{\alpha u} \delta u) + \mathbf{D}_{\varepsilon^p\varepsilon^p}^I (\mathcal{F}_{\varepsilon^p} - \mathbf{C}_{\varepsilon^p u} \delta u) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nach dem Streichen der Spalten und Zeilen, die zur Verfestigung und plastischen Verzerrung gehören, müssen $\delta\alpha$ und $\delta\varepsilon^p$ durch $\delta\alpha^r$ und $\delta(\varepsilon^p)^r$ ersetzt werden.

In der ersten Reihe von \mathbf{A} ergibt sich damit

$$\begin{pmatrix} A_{uu,\mathbf{N}} - \bar{A}_{uu,\mathbf{N}} & A_{u\theta,\mathbf{N}} \\ N_{\mathcal{I}_n} A_{uu,\mathcal{I}_n} - N_{\mathcal{I}_n} \bar{A}_{uu,\mathcal{I}_n} & N_{\mathcal{I}_n} A_{u\theta,\mathcal{I}_n} \\ C_{\lambda_n u, \mathcal{A}_n} & 0 \\ C_{\lambda_t u, S_1} & C_{\lambda_t \theta, S_1} \\ T_{S_2} A_{uu, S_2} - T_{S_2} B_{u\lambda_t, S_2} C_{\lambda_t u, S_2} - \bar{A}_{uu, S_2} & T_{S_2} A_{u\theta, S_2} - T_{S_2} B_{u\lambda_t, S_2} C_{\lambda_t \theta, S_2} \\ C_{\lambda_t u, S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} A_{uu, S_3} + \bar{A}_{uu, S_3} & C_{\lambda_t \theta, S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} A_{u\theta, S_3} \\ T_{S_4} A_{uu, S_4} + \tilde{A}_{uu, S_4} - \bar{A}_{uu, S_4} & T_{S_4} A_{u\theta, S_4} + \tilde{A}_{u\theta, S_4} \end{pmatrix}$$

2 Dynamisches Problem

mit

$$\begin{aligned}\bar{A}_{uu,\star} &:= B_{u\varepsilon^p,\star} G_{\varepsilon^p,\star}, & \star \in \{\mathbf{N}, \mathcal{I}_n\}, \\ \bar{A}_{uu,S_2} &:= T_{S_2} B_{u\varepsilon^p,S_2} G_{\varepsilon^p,S_2}, \\ \bar{A}_{uu,S_3} &:= \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r,\lambda_n} B_{u\varepsilon^p,S_3} G_{\varepsilon^p,S_2}, \\ \bar{A}_{uu,S_4} &:= \left(T_{S_4} B_{u\varepsilon^p,S_4} + \tilde{B}_{u\varepsilon^p,S_4} \right) G_{\varepsilon^p,S_4},\end{aligned}$$

wobei $G_{\varepsilon^p} = \mathbf{D}_{\varepsilon^p \alpha}^I \mathbf{C}_{\alpha u} + \mathbf{D}_{\varepsilon^p \varepsilon^p}^I \mathbf{C}_{\varepsilon^p u}$ benutzt wird.

Die zweite Reihe von \mathbf{A} wird zu

$$\left(A_{\theta u} - B_{\theta \varepsilon^p} G_{\varepsilon^p} \quad A_{\theta \theta} \right).$$

Die Matrix \mathbf{B} wird auf die Kopplung zwischen der Temperatur θ und dem Wärmefluss λ_θ für Knoten auf dem Kontaktrand in der Form

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_{\theta \lambda_\theta, \mathbf{P}_C} \end{pmatrix}$$

reduziert. In der Matrix \mathbf{C} entfallen die ersten beiden Zeilen und die verbleibenden Zeilen sind

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{u,S_1}^{\lambda_\theta} & \mathbf{C}_{\theta,S_1}^{\lambda_\theta} \\ \mathbf{C}_{u,S_2}^{\lambda_\theta} & \mathbf{C}_{\theta,S_2}^{\lambda_\theta} \\ \mathbf{C}_{u,S_3}^{\lambda_\theta} & \mathbf{C}_{\theta,S_3}^{\lambda_\theta} \\ \mathbf{C}_{u,S_4}^{\lambda_\theta} & \mathbf{C}_{\theta,S_4}^{\lambda_\theta} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\lambda_\theta u, S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_t, S_1} D_{S_1}^{r,\lambda_t} A_{uu, S_1} + \bar{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta u, S_1} & \mathbf{C}_{\lambda_\theta \theta, S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_t, S_1} D_{S_1}^{r,\lambda_t} A_{u\theta, S_1} \\ \mathbf{C}_{\lambda_\theta u, S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_t, S_2} \mathbf{C}_{\lambda_t u, S_2} & \mathbf{C}_{\lambda_\theta \theta, S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_t, S_2} \mathbf{C}_{\lambda_t \theta, S_2} \\ \mathbf{C}_{\lambda_\theta u, S_3} - \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta u, S_3} - \bar{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta u, S_3} & \mathbf{C}_{\lambda_\theta \theta, S_3} - \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta \theta, S_3} \\ \mathbf{C}_{\lambda_\theta u, S_4} + \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta u, S_4} - \bar{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta u, S_4} & \mathbf{C}_{\lambda_\theta \theta, S_4} + \tilde{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta \theta, S_4} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta u, S_1} &:= \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_t, S_1} D_{S_1}^{r,\lambda_t} B_{u\varepsilon^p, S_1} G_{\varepsilon^p, S_1}, \\ \bar{\mathbf{C}}_{\lambda_\theta u, S_i} &:= \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda_\theta \alpha, S_i} G_{\alpha, S_i} + \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda_\theta \varepsilon^p, S_i} G_{\varepsilon^p, S_i}, & i = 3, 4.\end{aligned}$$

In der Matrix \mathbf{D} bleibt nur die Massematrix des Wärmeflusses für alle Knoten des Kontaktrandes bestehen. Sie nimmt somit die Form

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_\theta, S_1} \\ \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_\theta, S_2} \\ \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_\theta, S_3} \\ \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_\theta, S_4} \end{pmatrix}.$$

an. Für die rechte Seite \mathcal{F}_y ergibt sich nach diesem Schritt

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{F}_{u,\mathbf{N}} - \bar{\mathcal{F}}_{y,\mathbf{N}} \\ N_{\mathcal{I}_n} \mathcal{F}_{u,\mathcal{I}_n} - B_{u\lambda_n,\mathcal{I}_n} \mathcal{F}_{\lambda_n} - \bar{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}_n} - N_{\mathcal{I}_n} \bar{\mathcal{F}}_{y,\mathcal{I}_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_n,\mathcal{A}_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_t,S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_1} \mathcal{F}_{\lambda_n,S_1} \\ T_{S_2} \mathcal{F}_{u,S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_t,S_2} (\mathcal{F}_{\lambda_t,S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_2} \mathcal{F}_{\lambda_n,S_2}) - \bar{\mathcal{F}}_{y,S_2} \\ \mathcal{F}_{\lambda_t,S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_3} D_{S_3}^{r,\lambda_n} \mathcal{F}_{u,S_3} + \bar{\mathcal{F}}_{y,S_3} \\ T_{S_4} \mathcal{F}_{u,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_t,S_4} (\mathcal{F}_{\lambda_t,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_4} D_{S_4}^{r,\lambda_n} \mathcal{F}_{u,S_4}) - \bar{\mathcal{F}}_{y,S_4} \\ \mathcal{F}_\theta - B_{\theta\varepsilon^p} K_{\varepsilon^p} \end{array} \right).$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_{y,\star} &:= B_{u\varepsilon^p,\star} K_{\varepsilon^p,\star}, & \star &\in \{\mathbf{N}, \mathcal{I}_n\} \\ \bar{\mathcal{F}}_{y,S_2} &:= T_{S_2} B_{u\varepsilon^p,S_2} K_{\varepsilon^p,S_2}, \\ \bar{\mathcal{F}}_{y,S_3} &:= \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_3} D_{S_3}^{r,\lambda_n} B_{u\varepsilon^p,S_3} K_{\varepsilon^p,S_2}, \\ \bar{\mathcal{F}}_{y,S_4} &:= \left(T_{S_4} B_{u\varepsilon^p,S_4} + \tilde{B}_{u\varepsilon^p,S_4} \right) K_{\varepsilon^p,S_4} \end{aligned}$$

und $K_\star := \mathbf{D}_{\star\alpha}^I \mathcal{F}_\alpha + \mathbf{D}_{\star\varepsilon^p}^I \mathcal{F}_{\varepsilon^p}$.

Im zweiten Teil \mathbf{F}_λ bleiben wie in den Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{D} nur die Anteile für den Wärmefluss bestehen:

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{F}_{S_1}^{\lambda_\theta} \\ \mathcal{F}_{S_2}^{\lambda_\theta} \\ \mathcal{F}_{S_3}^{\lambda_\theta} \\ \mathcal{F}_{S_4}^{\lambda_\theta} \end{array} \right) := \left(\begin{array}{c} \mathcal{F}_{\lambda_\theta,S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,S_1} \mathcal{F}_{\lambda_n} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_1} D_{S_1}^{r,\lambda_t} \mathcal{F}_{u,S_1} + \bar{\mathcal{F}}_{\lambda,S_1} \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,S_2} \mathcal{F}_{\lambda_n,S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_2} (\mathcal{F}_{\lambda_t,S_2} + \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_2} \mathcal{F}_{\lambda_n,S_2}) \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,S_3} D_{S_3}^{r,\lambda_n} \mathcal{F}_{u,S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_3} D_{S_3}^{r,\lambda_t} \mathcal{F}_{u,S_3} - \bar{\mathcal{F}}_{\lambda,S_3} \\ \mathcal{F}_{\lambda_\theta,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_n,S_4} D_{S_4}^{r,\lambda_n} \mathcal{F}_{u,S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_4} (\mathcal{F}_{\lambda_t,S_4} + \mathbf{D}_{\lambda_t\lambda_n,S_4} D_{S_4}^{r,\lambda_n} \mathcal{F}_{u,S_4}) - \bar{\mathcal{F}}_{\lambda,S_4} \end{array} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_{\lambda,S_1} &:= \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_t,S_1} D_{S_1}^{r,\lambda_t} B_{u\varepsilon^p,S_1} K_{\varepsilon^p,S_1}, \\ \bar{\mathcal{F}}_{\lambda,S_i} &:= \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda_\theta\alpha,S_i} K_{\alpha,S_i} + \tilde{\mathbf{D}}_{\lambda_\theta\varepsilon^p,S_i} K_{\varepsilon^p,S_i}, & i &= 3, 4. \end{aligned}$$

2.9.3 Wärmefluss

Nach dem Eliminieren des Wärmeflusses durch Eliminierung der Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{D} , sowie dem zweiten Teil der rechten Seite \mathcal{F}_λ und dem Ersetzen von $\delta\lambda_\theta$ in den übrigen Gleichungen durch

$$\delta\lambda_\theta^r := \mathbf{D}_{\lambda_\theta\lambda_\theta}^{-1} \left(\bar{\mathcal{F}}^{\lambda_\theta} - \mathbf{C}_u^{\lambda_\theta} \delta u - \mathbf{C}_\theta^{\lambda_\theta} \delta\theta \right) \quad (2.22)$$

2 Dynamisches Problem

bleibt noch ein Gleichungssystem bestehen, dass nur das Newton-Update für die Verschiebung δu und für die Temperatur $\delta\theta$ als Unbekannte enthält. Insgesamt ergibt sich die Matrix \mathbf{A} zu

$$\begin{pmatrix} A_{uu,\mathbf{N}} - \bar{A}_{uu,\mathbf{N}} & A_{u\theta,\mathbf{N}} \\ N_{\mathcal{I}_n} A_{uu,\mathcal{I}_n} - N_{\mathcal{I}_n} \bar{A}_{uu,\mathcal{I}_n} & N_{\mathcal{I}_n} A_{u\theta,\mathcal{I}_n} \\ C_{\lambda_n u, \mathcal{A}_n} & 0 \\ C_{\lambda_t u, S_1} & C_{\lambda_t \theta, S_1} \\ T_{S_2} A_{uu, S_2} - T_{S_2} B_{u\lambda_t, S_2} C_{\lambda_t u, S_2} - \bar{A}_{uu, S_2} & T_{S_2} A_{u\theta, S_2} - T_{S_2} B_{u\lambda_t, S_2} C_{\lambda_t \theta, S_2} \\ C_{\lambda_t u, S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} A_{uu, S_3} + \bar{A}_{uu, S_3} & C_{\lambda_t \theta, S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} A_{u\theta, S_3} \\ T_{S_4} A_{uu, S_4} + \bar{A}_{uu, S_4} - \bar{A}_{uu, S_4} & T_{S_4} A_{u\theta, S_4} + \bar{A}_{u\theta, S_4} \\ A_{\theta u, \mathbf{N}} - B_{\theta \varepsilon^p, \mathbf{N}} G_{\varepsilon^p, \mathbf{N}} & A_{\theta \theta, \mathbf{N}} \\ A_{\theta u, \mathbf{P}_C} - B_{\theta \varepsilon^p, \mathbf{P}_C} G_{\varepsilon^p, \mathbf{P}_C} - \hat{A}_{\theta u, \mathbf{P}_C} & A_{\theta \theta, \mathbf{P}_C} - \hat{A}_{\theta \theta, \mathbf{P}_C} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

mit $\hat{A}_{\theta \star, \mathbf{P}_C} := B_{\theta \lambda_\theta, \mathbf{P}_C} \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_\theta, \mathbf{P}_C}^{-1} \mathbf{C}_{\star}^{\lambda_\theta, \mathbf{P}_C}$ für $\star \in \{u, \theta\}$.

Die vollständig reduzierte rechte Seite \mathcal{F} nimmt die Form

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{u, \mathbf{N}} - \bar{\mathcal{F}}_{y, \mathbf{N}} \\ N_{\mathcal{I}_n} \mathcal{F}_{u, \mathcal{I}_n} - B_{u\lambda_n, \mathcal{I}_n} \mathcal{F}_{\lambda_n} - \bar{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}_n} - N_{\mathcal{I}_n} \bar{\mathcal{F}}_{y, \mathcal{I}_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_n, \mathcal{A}_n} \\ \mathcal{F}_{\lambda_t, S_1} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_1} \mathcal{F}_{\lambda_n, S_1} \\ T_{S_2} \mathcal{F}_{u, S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_t, S_2} (\mathcal{F}_{\lambda_t, S_2} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_2} \mathcal{F}_{\lambda_n, S_2}) - \bar{\mathcal{F}}_{y, S_2} \\ \mathcal{F}_{\lambda_t, S_3} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_3} D_{S_3}^{r, \lambda_n} \mathcal{F}_{u, S_3} + \bar{\mathcal{F}}_{y, S_3} \\ T_{S_4} \mathcal{F}_{u, S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_t, S_4} (\mathcal{F}_{\lambda_t, S_4} - \mathbf{D}_{\lambda_t \lambda_n, S_4} D_{S_4}^{r, \lambda_n} \mathcal{F}_{u, S_4}) - \bar{\mathcal{F}}_{y, S_4} \\ \bar{\mathcal{F}}_{\theta, \mathbf{N}} - B_{\theta \varepsilon^p, \mathbf{N}} K_{\varepsilon^p, \mathbf{N}} \\ \mathcal{F}_{\theta, \mathbf{P}_C} - B_{\theta \varepsilon^p, \mathbf{P}_C} K_{\varepsilon^p, \mathbf{P}_C} - B_{\theta \lambda_\theta, \mathbf{P}_C} \mathbf{D}_{\lambda_\theta \lambda_\theta, \mathbf{P}_C}^{-1} \mathcal{F}^{\lambda_\theta} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

an. Um nun alle Teile des Newton-Updates zu bestimmen wird mit \mathbf{A} aus (2.23) und \mathcal{F} aus (2.24) das reduzierte Gleichungssystem $\mathbf{A} \delta \mathbf{w} = \mathcal{F}$ gelöst. Dies wird mit dem UMFPACK-Löser durchgeführt [24]. Danach können aus $\delta \bar{u}$ und $\delta \bar{\theta}$ sukzessive die restlichen Newton-Updates aus den Gleichungen (2.22), (2.21) und (2.20) bestimmt werden.

2.10 Numerische Ergebnisse

Im folgenden Beispiel wird die Energiebilanz des dynamischen zweidimensionalen reibungsbehafteten Kontaktproblems mit Plastizität betrachtet. Das Gebiet ist $\Omega = (-4, -1) \times (-6, -1)$ mit den Rändern $\Gamma_D = \emptyset$ und $\Gamma_C = -1 \times (-6, -1)$ und das Zeitintervall ist $I = [0, 0.45]$. Das Hindernis ist durch die Funktion $\psi(x_2) := -0.00625(x_2^2 + 5x_2 + 6.25)$ parametrisiert. Die Materialparameter sind $E = 900$, $\nu = 0.33$, $\rho = 1$, $\rho_\theta = 1$, $\kappa = 1$, $\alpha_\theta = 1 \times 10^{-5}$, $\gamma_{TQ} = 0.9$, $k_w = 0.5$, $\beta = 0.2$, $\sigma_0 = 100$, $K = 100$,

$H = 200$. Es wird Coulomb-Reibung mit Reibungskoeffizienten $\mathcal{F} = 0.05$ verwendet. Die Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = (10, 5)^T$. Anfangsverschiebung und -temperatur wurden auf Null gesetzt.

In Abbildung 2.2 ist die Bewegung und plastische Verzerrung des Körpers in ausgewählten Zeitschritten dargestellt. Bevor der Körper mit dem Hindernis in Kontakt tritt bewegt er sich konstant mit der Anfangsgeschwindigkeit auf das Hindernis zu. Bei $t = 0.1335$ kommt es zum ersten Kontakt mit dem Hindernis und der Körper beginnt sich an das Hindernis anzuschmiegen. Dabei steigt die Kontaktkraft, so dass an einigen Knoten Haftreibung auftritt. In den Teilen, in denen es zu Kontakt kommt, aber die Knoten nicht haften entsteht Wärme. Diese verteilt sich, wie in Abbildung 2.3 zu sehen ist, zum einen im Körper und zum anderen wird sie in das Hindernis abgegeben. Nicht zu erkennen ist die Ausdehnung des Körpers aufgrund der Wärme, da sie im Verhältnis zu den restlichen Deformationen sehr klein ist. Die plastischen Verzerrungen, die in den Abbildungen dargestellt sind, breiten sich von der Mitte des Kontaktrandes in den Körper hinein aus. Auch an den Rändern des Kontaktrandes steigen die Spannungen, so dass es zu plastischer Verzerrung kommt.

In Abbildung 2.4 - 2.6 sind die Lagrangemultiplikatoren λ_n und λ_t sowie der Wärmefluss am Kontaktrand λ_θ dargestellt. Die Werte wurden nach Position auf dem 1D Kontaktrand und ihrem Zeitpunkt geplottet. Bei Abbildung 2.4 sieht man, dass die Kontaktkraft ungefähr in der Mitte des Kontaktrandes, am Punkt des ersten Kontakts beginnt zu steigen, bis sie fast überall die gleiche Höhe erreicht. Am oberen Ende des Randes treten größeren Kräfte auf, da dieser in der Bewegungsrichtung des Körper liegt. Im Gegensatz dazu sind die Kräfte am unteren Rand zu Beginn kleiner. Die Kräfte nehmen dann wieder ab, wenn der Körper sich beginnt vom Hindernis abzulösen. Wenn der Kontakt endet verschwinden die Kontaktkräfte und es tritt auch kein zweiter Kontakt auf. Knotenweise gilt $\lambda_n \geq 0$, da jedoch Mortar-Basisfunktionen verwendet werden kann λ_n auch negativ werden, wenn die Werte in zwei benachbarten Knoten stark genug voneinander abweichen. Man erkennt, dass die Lagrangemultiplikatoren nicht oszillieren, sondern durch die Stabilisierung des Zeitschrittverfahren stabil sind. Die Reibkraft λ_t in Abbildung 2.5 zeigt, dass im oberen Bereich Haftung auftritt und es im unteren Bereich zu Gleitreibung kommt. Die hohen Ausschläge in den Übergängen treten wegen der Diskretisierung mit einer Mortar-Basis auf. Sie entstehen, wie die negativen Werte in λ_n durch einen großen Unterschied in den Werten zweier benachbarter Knoten. Zu den Reibkräften passt auch der Wärmefluss in Abbildung 2.6. Im oberen Bereich haftet der Körper am Hindernis und es fließt nur Wärme vom Körper ins Hindernis. Am unteren Rand kommt es zu Wärmeentwicklung aus der Reibung und dadurch wird der Wärmefluss aus dem Körper ausgeglichen. Im Lauf der Zeit wird der gleitenden Bereich größer und damit auch der Bereich, in dem Wärme entsteht. Bevor der Körper das Hindernis berührt und nachdem er sich wieder löst, fließt keine Wärme vom Körper ab und es entsteht auch keine durch Reibung.

Der Verlauf der schon erwähnten Energieumwandlungen und -abflüsse kann Abbil-

2 Dynamisches Problem

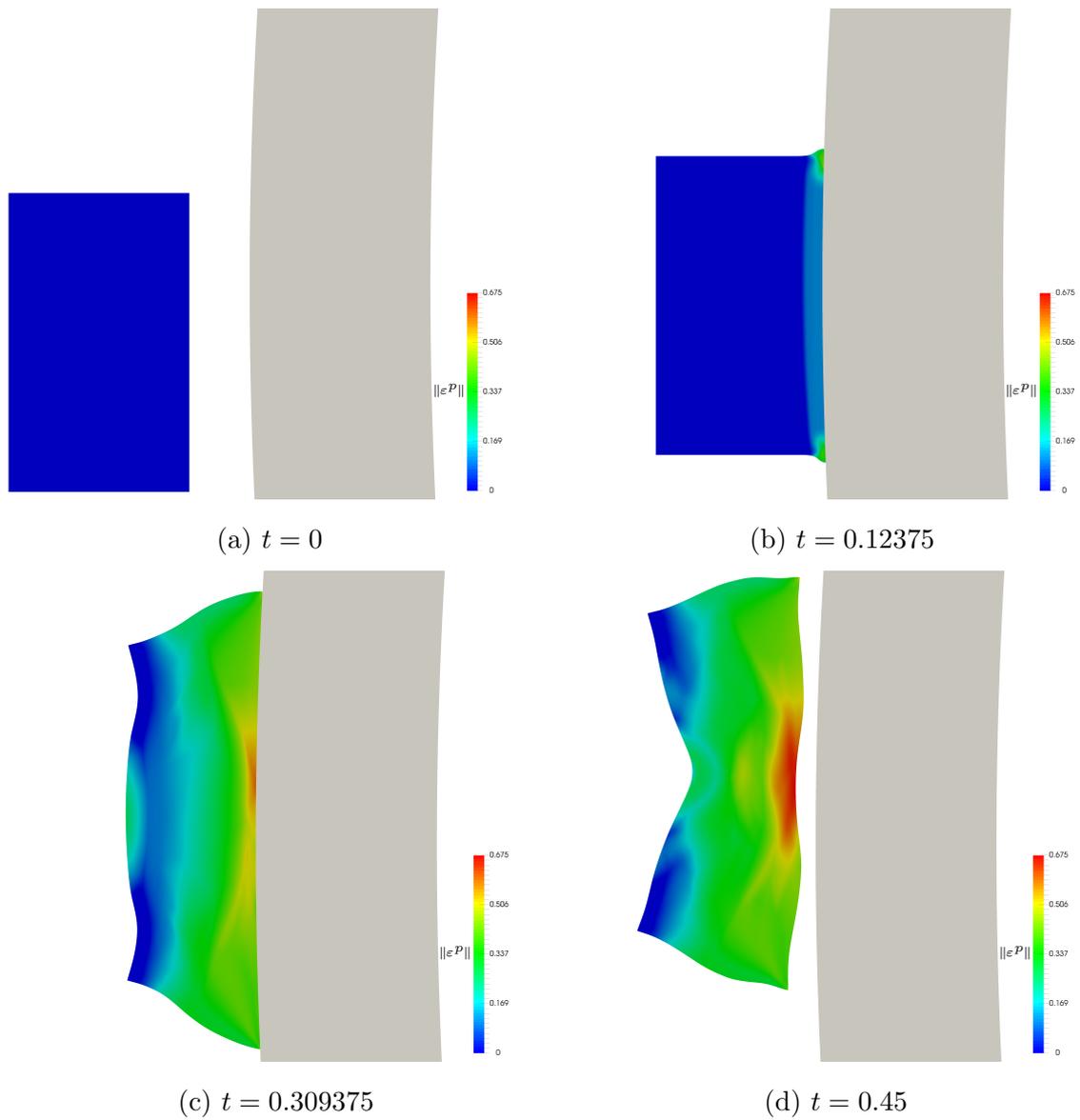


Abbildung 2.2: Verschiebung und plastische Verzerrung in ausgewählten Zeitschritten.

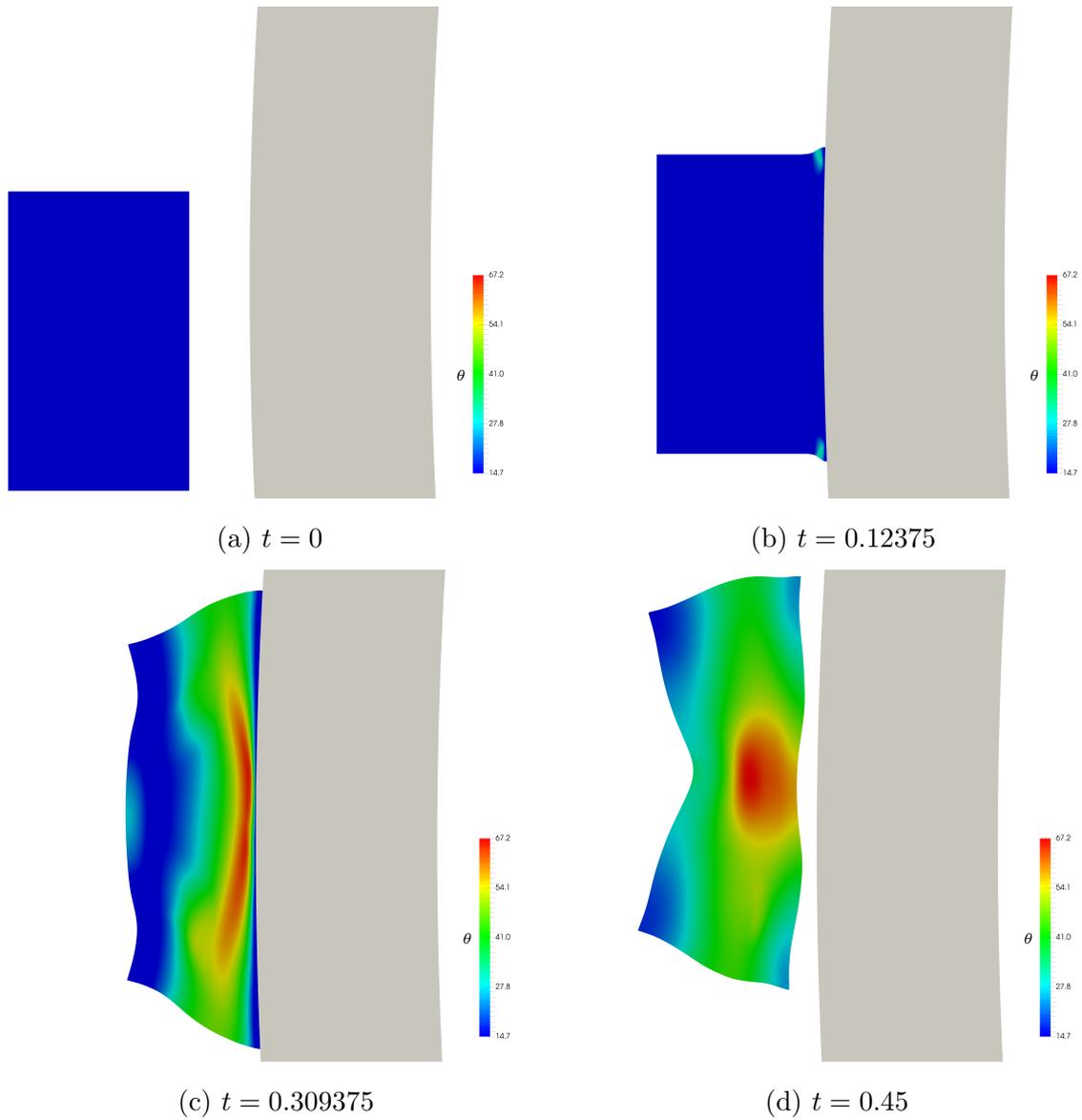


Abbildung 2.3: Verschiebung und Temperatur in ausgewählten Zeitschritten.

2 Dynamisches Problem

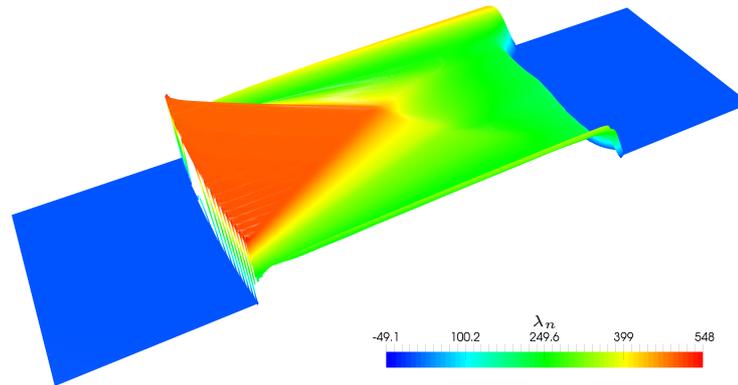


Abbildung 2.4: Kontaktkräfte λ_n

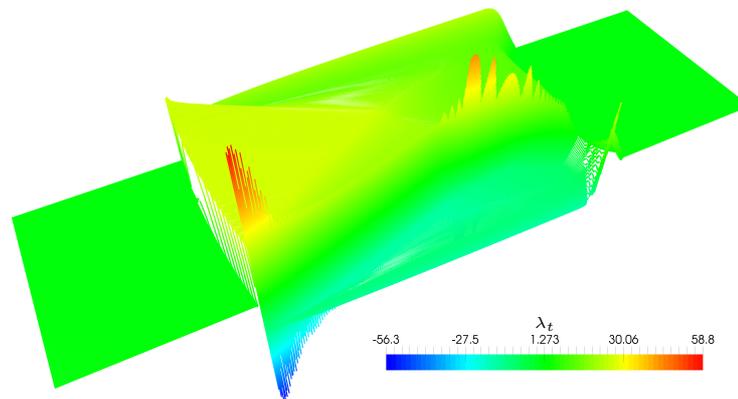


Abbildung 2.5: Reibkräfte λ_t

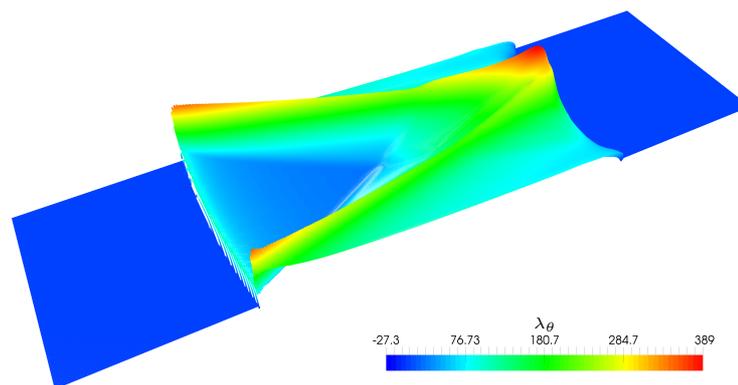


Abbildung 2.6: Wärmefluss λ_θ

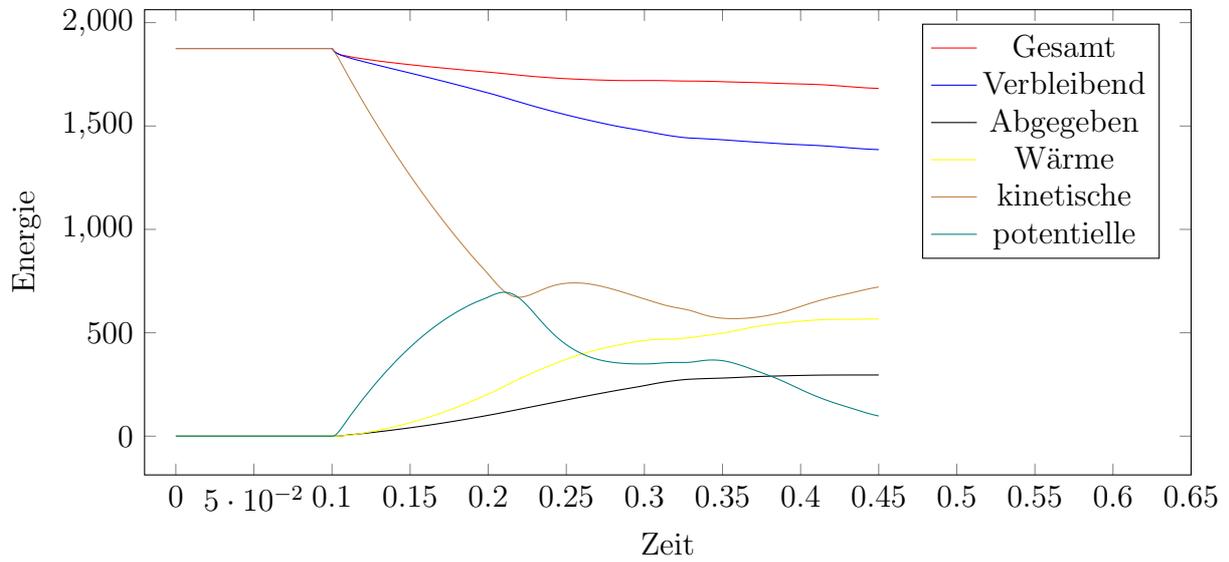


Abbildung 2.7: Energieverlauf

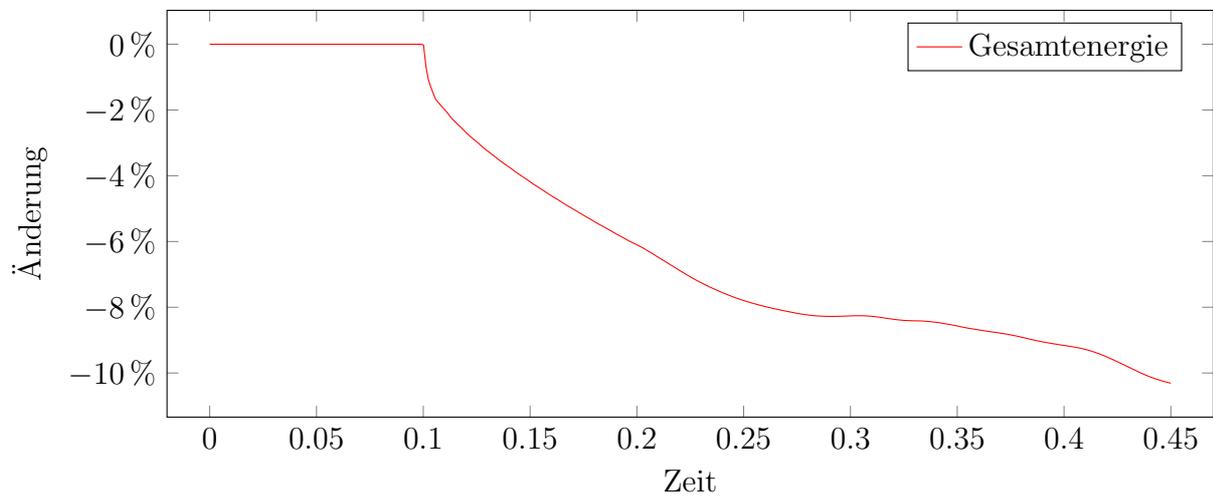


Abbildung 2.8: Relative Energieänderung seit Beginn

2 Dynamisches Problem

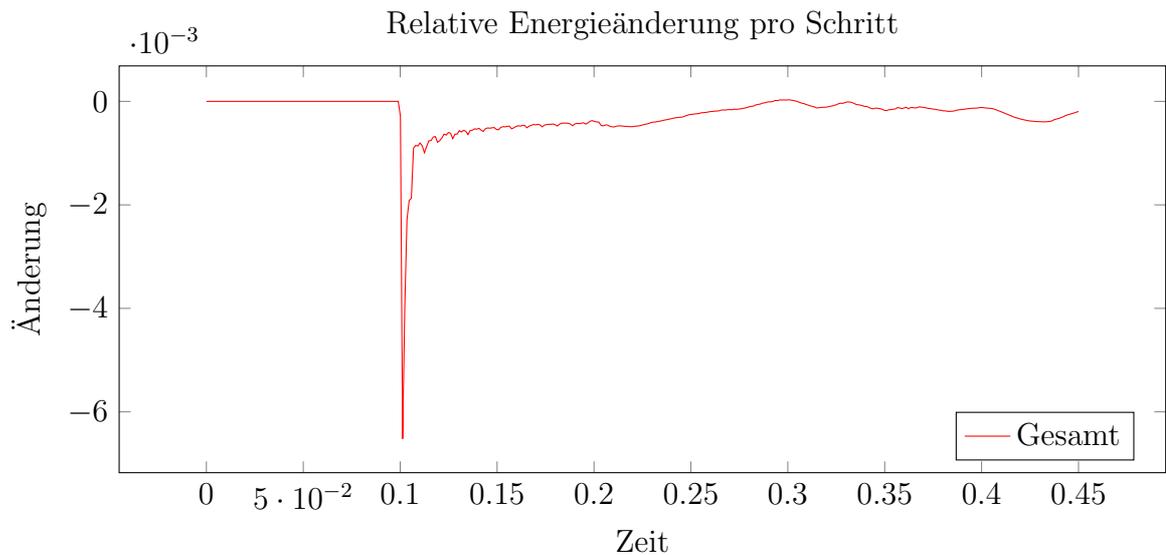


Abbildung 2.9: Dynamisches Beispiel

dung 2.7 entnommen werden. Zu Beginn gibt es nur kinetische Energie durch die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers. Sobald der Körper mit dem Hindernis in Kontakt tritt wird diese in andere Energiearten umgewandelt. Durch elastische Verformungen entsteht potentielle Energie. Wenn es zu plastischen Verformungen kommt wird ein Teil der Energie in Wärme umgewandelt und ein anderer Teil geht verloren. Außerdem wird durch die Reibung kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Von dieser bleibt ein Teil im Körper und der Rest wird über den Kontaktrand an das Hindernis abgegeben. Der Graph „Gesamt“ beschreibt die gesamte Energie, die noch im System ist. Aus physikalischer Sicht sollte diese konstant bleiben. Jedoch nimmt sie durch numerische Verluste ab. Die Energie, die sich noch im Körper befindet, kann am Graphen „Verbleibend“, abgelesen werden. Hierbei handelt es sich um jene Energie, die nicht ins Hindernis geflossen ist und nicht durch numerische Fehler verloren gegangen ist. Auf anderem Wege kann der Körper keine Energie abgeben. Der Gesamtenergieverlust durch numerische Effekte ist in Abbildung 2.8 über das Zeitintervall dargestellt. Der größte Verlust tritt beim ersten Kontakt mit dem Hindernis auf. Nachdem sich der Körper vom Hindernis löst sinkt die Verlustrate wieder ab.

2.10.1 Keil

In diesem und im nachfolgenden Abschnitt werden numerische Untersuchungen am statischen Problem durchgeführt. Die statische Version wird durch Vernachlässigung der Geschwindigkeit- und Trägheitsterme hergeleitet. Diese Vereinfachung wird durchgeführt um den Aufwand der Untersuchungen zu reduzieren. Die Betrachtung des stati-

schen Problems entspricht der Analyse eines einzelnen Zeitschrittes. Im ersten Beispiel wird ein Körper $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet, in den ein Keil, parametrisiert durch

$$\psi(x_2) := \begin{cases} 1.007 - 0.02|x_2|, & |x_2| \leq 0.4, \\ 2.0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gepresst wird. Am Dirichletrand $\Gamma_D = \{-1\} \times [-1, 1]$ werden sowohl für die Verschiebung als auch für die Temperatur Nullrandbedingungen gefordert. Der Kontakt zwischen Körper und Keil kann nur auf dem Kontaktrand $\Gamma_C = \{1\} \times [-1, 1]$ stattfinden. In der Ausgangskonfiguration überlappen sich Körper und Keil. Die Materialparameter sind in Tabelle 2.1 aufgelistet. Die Reibung wird nach dem Reibgesetz von Coulomb modelliert. Die Konstanten im Lösungsverfahren werden als $c_n = 1$, $c_t = 1000$ und $c^p = 10,000$ gewählt.

E	ν	\mathcal{F}	κ	α_θ	γ_{TQ}	k_w	β	σ_0	K	H
$7 \cdot 10^4$	0.34	0.19	0.235	$23.1 \cdot 10^{-6}$	0.9	0.5	0.2	200	100	200

Tabelle 2.1: Materialparameter

Wie in Abbildung 2.10 zu erkennen verformt der Keil den Körper und dringt in ihn ein, aber es kommt nicht auf der ganzen Frontfläche des Keils zu Kontakt. An der Spitze des Keils entstehen die meisten plastischen Verformungen und die größte hieraus generierte Wärme. Der aktive Kontaktbereich ist auch der Bereich, in dem die Lagrangemultiplikatoren nicht verschwinden. In Abbildung 2.11 bis 2.13 sind Ausschnitte der Lagrangemultiplikatoren um den aktiven Kontaktbereich herum dargestellt. In den nicht abgebildeten Bereichen verschwinden sie. Es sind sowohl die Darstellungen in der Mortarbasis als auch die linearen Interpolierenden abgebildet. Bei der nicht stetigen Darstellung in der Mortarbasis sind die Einflüsse der Knoten auf ihre Nachbarn deutlich zu erkennen. Dadurch kommt es zu starken Ausschlägen, wenn die Lagrangemultiplikatoren ihre Werte schnell ändern. Dies ist besonders bei der Reibkraft zu beobachten. Hier kommt es in der Mitte des Kontaktrandes zu Vorzeichenwechseln. Die Knoten werden durch das Zusammenspiel aus Kontakt, Ausdehnung und plastische Verformung in andere Richtungen gezogen als ihre Nachbarn. Die Kontaktkraft in Abbildung 2.11 hat in der Mitte des Kontaktrandes eine Singularität. In der Nähe der Ränder des aktiven Kontaktrandes kommt es zu einem kleinen Anstieg der Kontaktkraft. Hier ist auch die plastische Verzerrung groß und durch die gestiegene Kontaktkraft entstehen zu hohe Reibkräfte. Auch im Wärmefluss in Abbildung 2.13 spiegelt sich dieses Verhalten wieder. Insgesamt ist der Wärmefluss positiv, was bedeutet, dass Wärme aus dem Körper in das Hindernis fließt. Die Menge hängt von der Höhe der Kontaktkraft, dem Temperaturunterschied zwischen Körper und Hindernis sowie der Reibkraft ab.

In Abbildung 2.14 ist der Residuenverlauf des Newton-Verfahrens dargestellt. Hier erkennt man das typische Verhalten für Aktive-Mengen-Strategien. Die quadratische

2 Dynamisches Problem

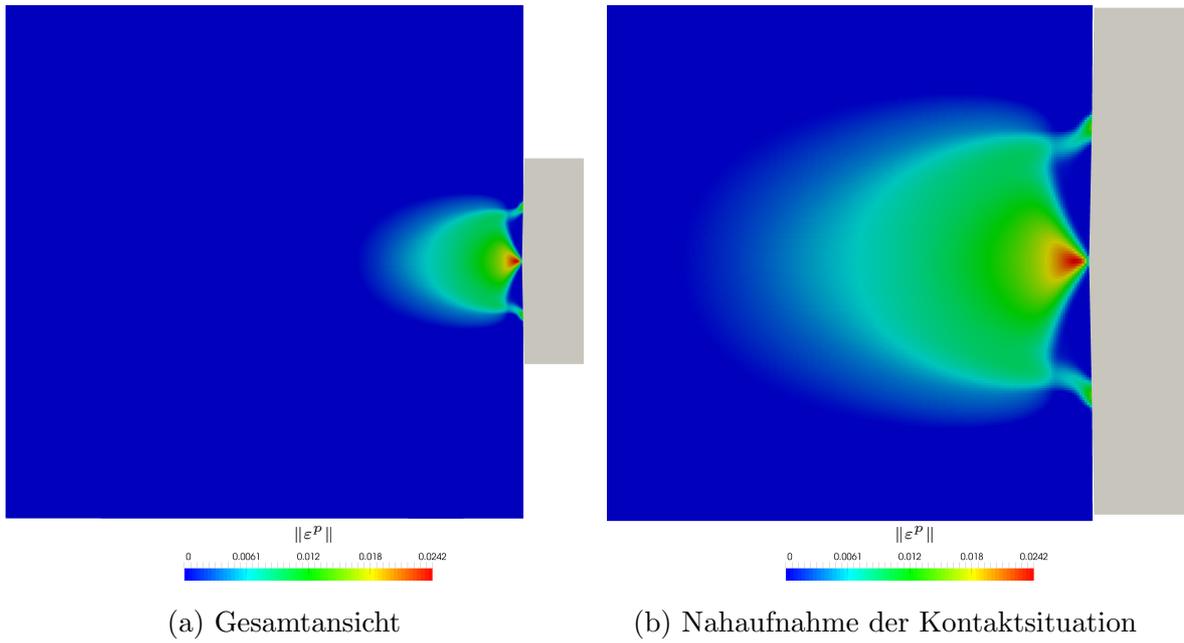


Abbildung 2.10: Körper und Hindernis. Dargestellt ist die Verschiebung des Körpers und die plastischen Verzerrungen mit $M_\Omega = 262,144$ Zellen.

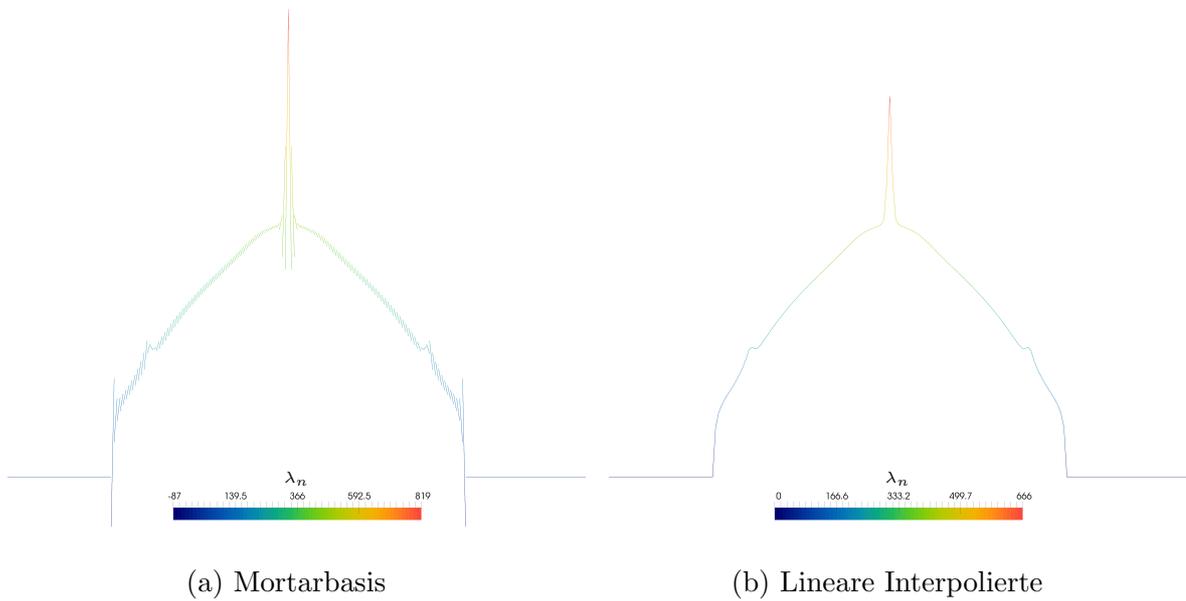


Abbildung 2.11: Kontaktkraft in Mortarbasis und linear interpoliert.

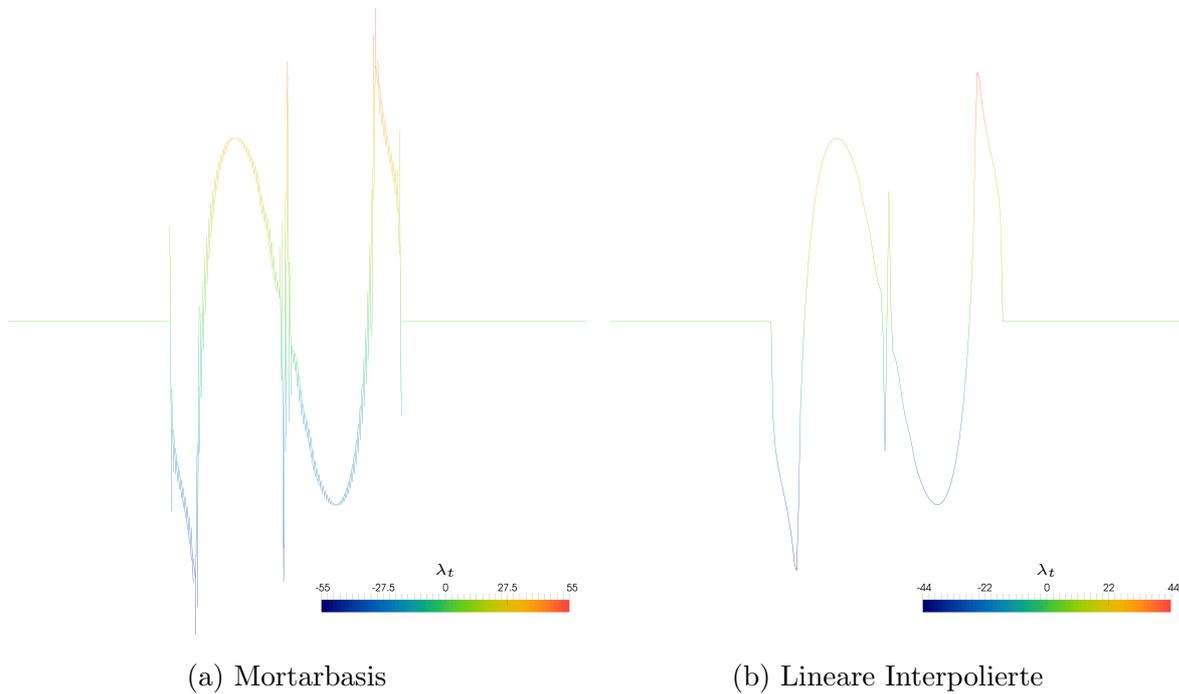


Abbildung 2.12: Reibkraft in Mortarbasis und linear interpoliert.

Konvergenz des Newtonverfahrens tritt erst ab Schritt 12 ein, wenn die aktiven und inaktiven Mengen aller Effekte gefunden sind. Das Residuum der Wärme ist bis dahin schon sehr klein, weswegen die quadratische Konvergenz bis zur Rechengenauigkeit nicht mehr voll einsetzen kann. Es ist aber zu erkennen, dass das Residuum ab Schritt 12 schneller abnimmt. Die Residuen für Verschiebung und Kontakt sind nicht dargestellt, da sie von Anfang an kleiner als die Toleranz sind. Die einfache Kontaktsituation wird vom Algorithmus sofort mit nur einem kleinen Fehler aufgelöst. Dies ist auch in Abbildung 2.15 zu erkennen. Bei den aktiven Mengen für Kontakt und Reibung wechseln nur wenige Knoten zwischen den einzelnen Newtonschritten. Jedoch ist bei der Reibung das Residuum noch groß, da die Werte für die Reibung stärker von den restlichen Werten beeinflusst werden als es bei der NCP für Kontakt der Fall ist.

Die Wahl der Stabilitätskonstanten c_n , c_t und c^p sowie des Parameters s hat einen starken Einfluss auf die Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit. In Tabelle 2.2 erkennt man, dass bei ungeschickter Wahl von c^p , c_t und s die Anzahl der Newtonschritte stark steigt oder das Verfahren gar nicht mehr konvergiert. Es lässt sich auch beobachten, dass die Auswirkungen von nicht gut gewählten Konstanten mit steigender Verfeinerung zunimmt. Die Wahl von c_n spielt in diesem Beispiel keine Rolle, da die Kontaktsituation nicht kompliziert ist und schnell aufgelöst wird. Die zusätzlichen Schritte werden beim Finden der aktiven und inaktiven Mengen benötigt. Sobald diese gefunden sind, konvergiert das Newtonverfahren quadratisch.

2 Dynamisches Problem

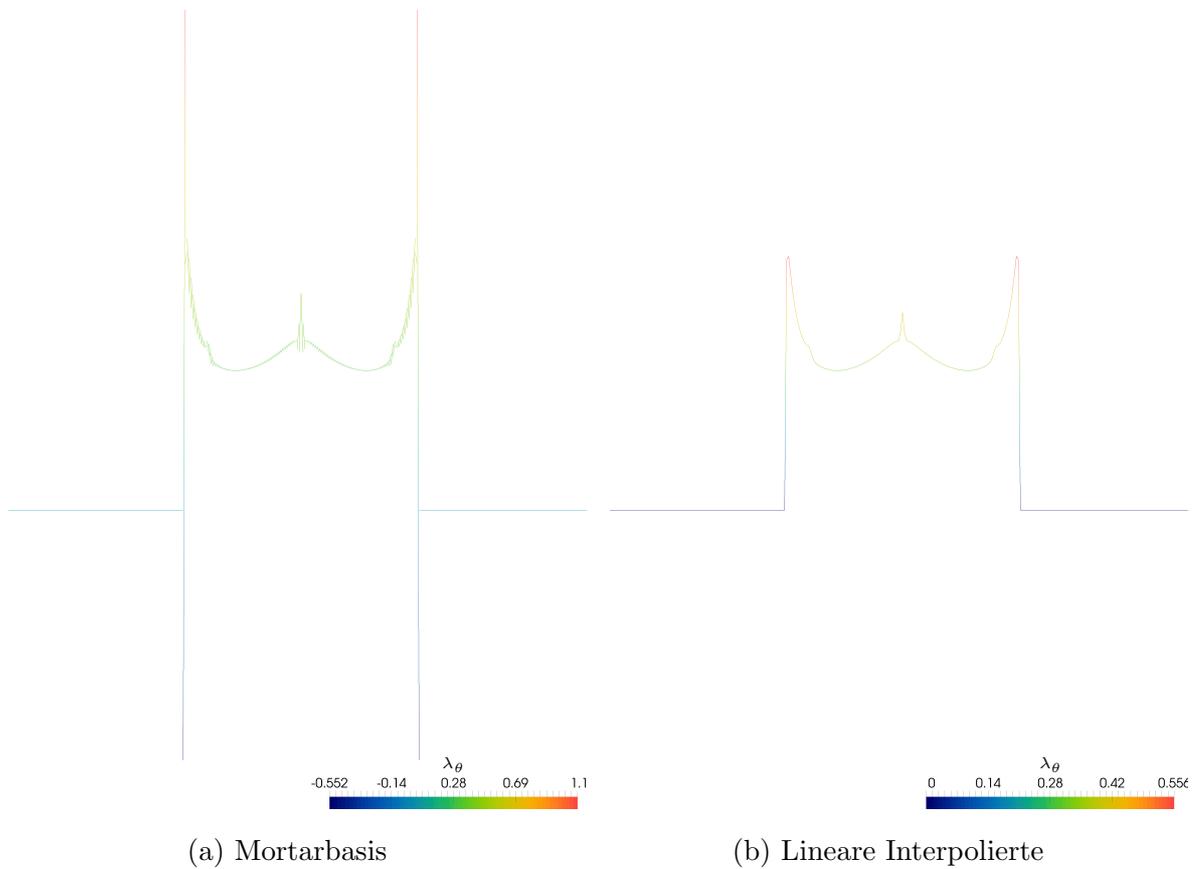


Abbildung 2.13: Wärmefluss in Mortarbasis und linear interpoliert.

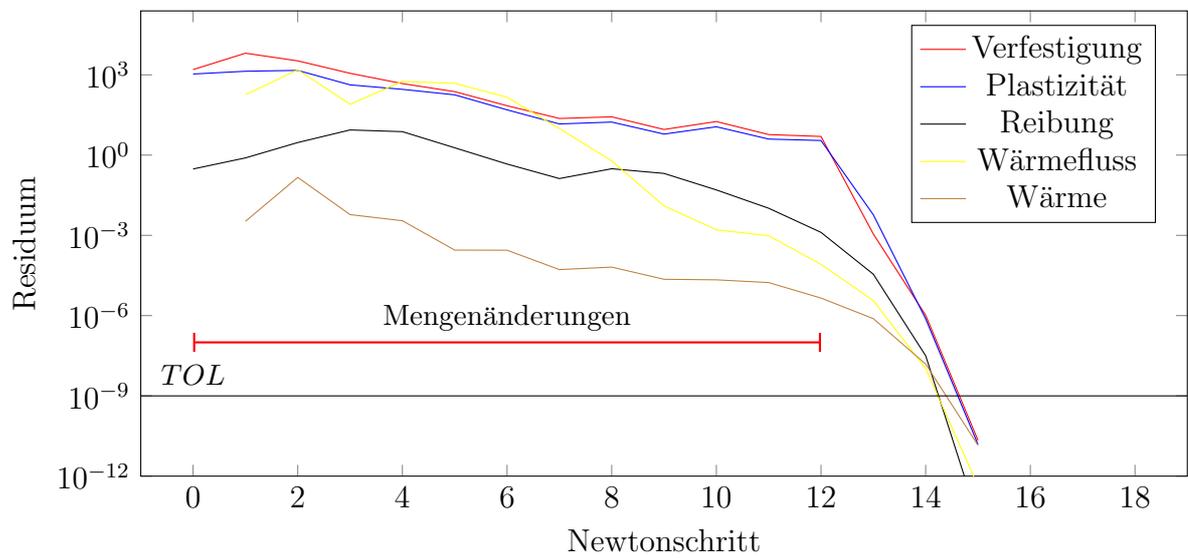


Abbildung 2.14: Residuenverlauf des Newtonverfahrens mit $M_\Omega = 262144$.

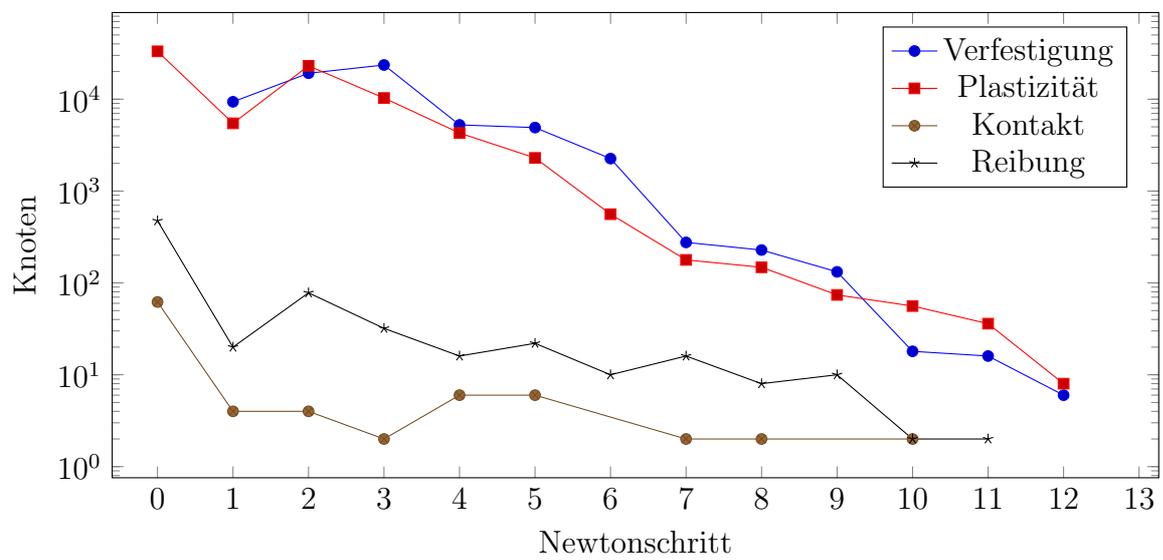


Abbildung 2.15: Anzahl der Freiheitsgrade, die pro Schritt zwischen den aktiven und inaktiven Mengen wechseln. Wenn kein Punkt eingezeichnet ist, haben die Mengen sich nicht verändert.

2 Dynamisches Problem

$M_\Omega \backslash c_t$	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
4096	–	20	20	16	15	14	11	13	–	18	–
16384	24	24	21	18	17	11	11	10	10	11	12
65536	–	–	21	25	19	16	11	–	–	–	–
262144	–	24	22	23	22	15	13	13	–	–	–

$M_\Omega \backslash c^p$	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
4096	25	–	18	16	16	11	–	9	10	11	13
16384	–	–	–	–	–	12	10	10	10	12	16
65536	–	–	–	–	–	12	10	12	–	–	17
262144	–	–	–	–	–	13	13	11	13	14	18

$M_\Omega \backslash s$	0	0.15	0.3	0.45	0.6	0.75	0.9	1.05	1.2	1.35	1.5	1.65	1.8
4096	–	10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
16384	–	–	10	18	10	11	11	–	11	20	12	11	–
65536	–	–	–	10	11	11	–	15	–	–	–	–	–
262144	–	–	–	–	–	13	11	11	–	–	–	–	–

Tabelle 2.2: Anzahl der Newtonschritte in Abhängigkeit von den Stabilitätskonstanten und Verfeinerungen. Es wurde nur die angegebene Konstante variiert. Die anderen wurden als $c_n = 1$, $c_t = 10^5$, $c^p = 10^4$ bzw. $s = 0.75$ gewählt. Wenn nach 30 Schritten die Toleranz $TOL = 10^{-9}$ nicht unterschritten wurde, ist ein „–“ eingetragen.

2.10.2 Biaktive Mengen

Im zweiten Beispiel wird der Einfluss von biaktiven Mengen auf das Lösungsverfahren untersucht. Dafür wird ein Beispiel mit analytischer Lösung betrachtet [69]. Dabei ist $\Omega = (-3, 0) \times (-1, 1)$ das zugrundeliegende Gebiet und der mögliche Kontaktrand ist $\Gamma_C = 0 \times [-1, 1]$. Modelliert wird der reibungsbehaftete Kontakt und die Temperatur. Es wird das Reibgesetz nach Tresca mit $S = 0.1$ verwendet. Wie in Tabelle 2.3 zu sehen, ist die Grenze für plastische Verformungen hoch gewählt, damit keine plastischen Verformungen auftreten. Bis auf Wärmetransport zwischen Hindernis und Körper sind alle anderen Effekte durch entsprechende Wahl der Parameter ausgeschaltet. Die analytische Lösung der Verschiebung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $u = (u_1, u_2)^T$ lautet

$$u_1(x) = \begin{cases} -(x_1 + 3)^2 \left(x_2 - \frac{x_1^2}{18} - \frac{1}{2}\right)^4 \left(x_2 + \frac{x_1^2}{18} + \frac{1}{2}\right)^4, & |x_2| \leq \frac{x_1^2}{18} + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} \frac{24}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi(x_1+3)}{3}\right) \left[\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^3 \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^4 \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^3 \right], & |x_2| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die analytische Lösung der Wärme $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\theta(x) = -u_1(x)$. Für die Volumenkräfte werden $f_u = -\operatorname{div}(\sigma(u))$ und $f_\theta = -\operatorname{div}(\kappa \nabla \theta)$ gewählt. Es werden zwei verschiedene Hindernisse betrachtet. Die beiden Parametrisierungen $g_1(x_2) := u_1(0, x_2)$ und

$$g_2(x_2) = \begin{cases} u_1(x_2), & |x_2| \leq \frac{1}{2}, \\ 9(x_2 - \frac{1}{2})^2(x_2 + \frac{1}{2})^2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

Das erste Hindernis ist so konstruiert, dass es an den Rändern des Kontaktrandes zu großen biaktiven Mengen für den Kontakt kommt. Beim zweiten Hindernis wird durch die von der Lösung abweichende Parametrisierung dafür gesorgt, dass es in diesen Bereichen nicht zu Kontakt kommt. Die analytische Lösung ist aber in beiden Fällen die gleiche.

E	ν	s	κ	α_θ	γ_{TQ}	k_w	β	σ_0	K	H
10	0.3	0.1	1	0	0	0	0.2	10^6	100	200

Tabelle 2.3: Materialparameter

In Abbildung 2.17 sind die unstetigen Lagrangemultiplikatoren in der Mortarbasis dargestellt. Die Lagrangemultiplikatoren unterscheiden sich nicht zwischen den beiden Fällen. Bei der Kontaktkraft λ_n in Abbildung 2.17a kommt es am Übergang von aktivem zu inaktivem Kontakt auf beiden Seiten des Hindernisses zu negativen Werten, obwohl es nur positive Kontaktkräfte gibt. Dieser Effekt kommt durch die Mortarbasis zustande. Dadurch, dass die Knotenwerte in Knoten ohne Kontakt null sind, bekommt

2 Dynamisches Problem

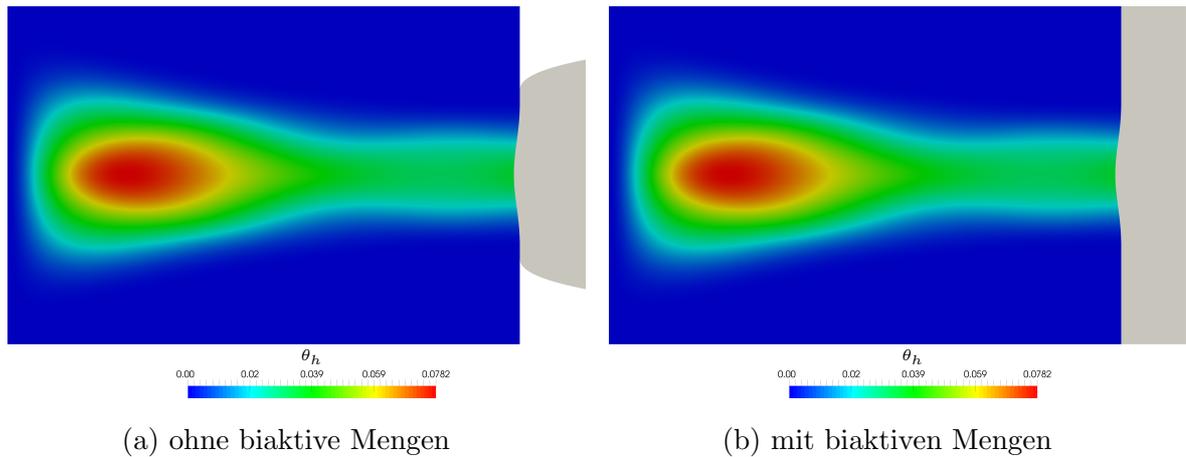
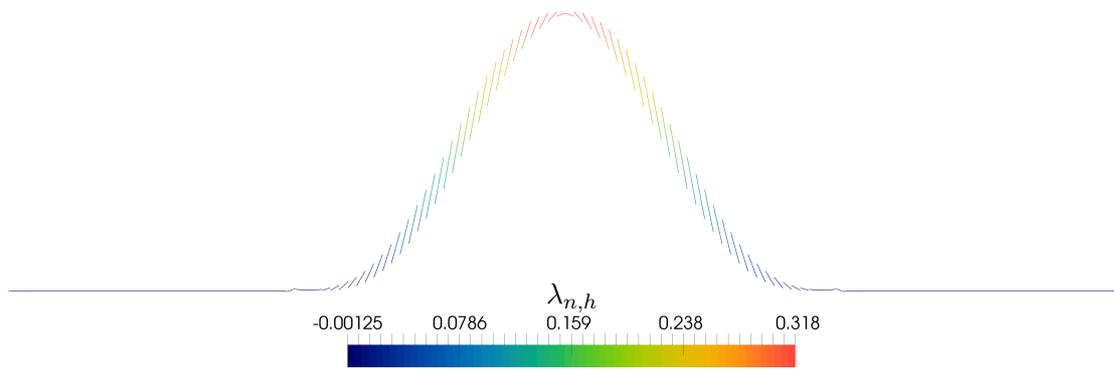


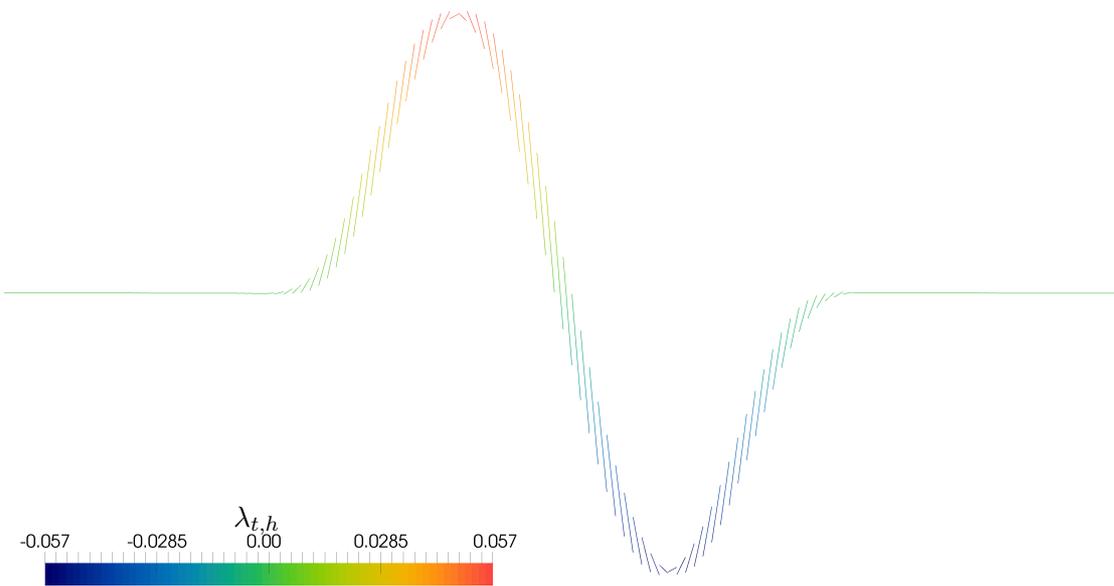
Abbildung 2.16: Körper und Hindernis mit $M_\Omega = 1,048,576$ Zellen. Dargestellt ist die Temperatur θ_h auf dem deformierten Gebiet.

der Knoten am Rand des aktiven Kontaktrandes nur den negativen Anteil der Basisfunktion des Nachbarknotens, der eine positive Kontaktkraft hat. Beim Wärmefluss ist der gleiche Effekt zu beobachten.

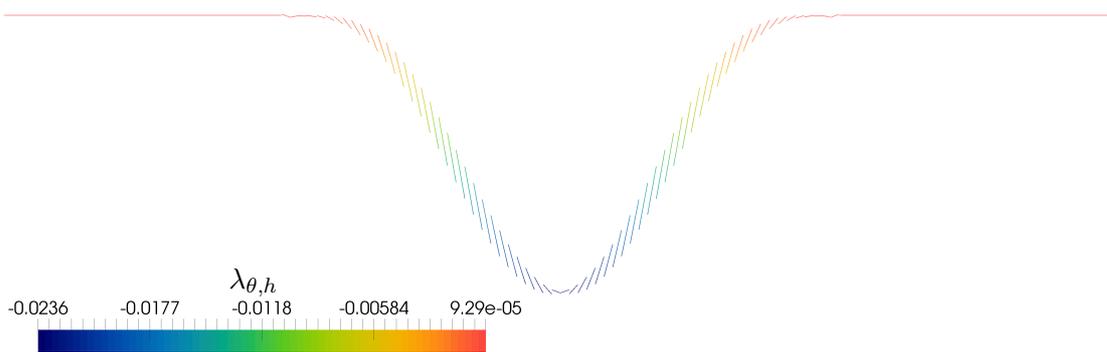
Biaktive Mengen sind eine Herausforderung an den Lösungsalgorithmus. Bei den hier auftretenden biaktiven Mengen für den Kontakt, ist die Schwierigkeit, dass der Körper in Kontakt mit dem Hindernis ist, es jedoch keine Kontaktkraft gibt. Dadurch gilt $\lambda_n + (u_n - g) \approx 0$, weswegen ein solcher Knoten schon durch kleine Störungen oder numerische Fehler seine zugehörige Menge wechseln kann. Dies führt dazu, dass in der Regel deutlich mehr Newtonschritte gebraucht werden, bis die aktiven und inaktiven Mengen genau genug aufgelöst sind, so dass das Residuum klein wird. Der hier vorgestellte Algorithmus benötigt bei 1,048,576 Zellen für den biaktiven Fall sechs Schritte im Vergleich zu zwei Schritten im nicht biaktiven Fall. Beim biaktiven Beispiel fällt auf, dass auch im letzten Schritt des Newtonverfahrens noch Knoten zwischen inaktiver und aktiver Menge bzgl. Kontakt wechseln. In den falsch charakterisierten Knoten sind jedoch die auftretenden Kräfte und damit auch der Fehler in der NCP Funktion sehr klein, wodurch das Residuum trotzdem die Toleranz $TOL = 10^{-9}$ unterschreitet.



(a) Kontaktkraft



(b) Reibkraft



(c) Wärmefluss

Abbildung 2.17: Lagrangemultiplikatoren im biaktiven und nicht biaktiven Fall mit $M_{\Omega} = 16,348$ Zellen.

3 DWR Fehlerschätzer

In diesem Kapitel wird ein zielorientierter Fehlerschätzer für Variationsungleichungen hergeleitet, deren Nebenbedingungen durch NCP-Funktionen dargestellt werden können. In Abschnitt 3.1 werden das primale Problem und die Anforderungen an die NCP-Funktionen und die diskrete Lösung formuliert. Danach werden die kontinuierliche und die diskrete Form des dualen Problems vorgestellt. Auf dieser Grundlage werden zwei Fehleridentitäten mit dem primalen und dem dualen Residuum hergeleitet. Aus diesen Fehleridentitäten werden wiederum ein primaler und ein primal-dualer Fehlerschätzer bestimmt. Im nächsten Schritt wird eine numerisch auswertbare Form des Fehlerschätzer bestimmt und die adaptive Verfeinerungsmethode diskutiert. Abschließend wird die Anwendung auf konkreten Probleme betrachtet. In den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 wird die Genauigkeit des a posteriori Fehlerschätzers und die Effizienz des adaptiven Algorithmus untersucht.

3.1 Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen

In diesem Abschnitt wird ein DWR Fehlerschätzer für Probleme mit Gleichungsnebenbedingungen einer bestimmten Form hergeleitet. Der Abschnitt orientiert sich an [68, 69] und verallgemeinert deren Ergebnisse auf allgemeine NCP-Funktionen. Sei $a(u)(v)$ eine Semilinearform mit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $b_i(\lambda_i, v)$ Bilinearformen auf $\Lambda_i \times V$, $i = 1, \dots, m$. Weiter sei durch $l(v)$ eine Linearform auf V gegeben. Die mit Testfunktionen multiplizierten NCP Funktionen sind Semilinearformen von der Art

$$\begin{aligned} C_i &: W \times \Lambda_i \rightarrow \mathbb{R}, \\ C_i(w)(\mu_i) &:= (\mu_i, f_i(w) + \max\{0, g_i(w)\} + \min\{0, p_i(w)\})_{G_i} \end{aligned} \quad (3.1)$$

mit $f_i, g_i, p_i : W \rightarrow L^2(G_i)$ dreimal Fréchet-differenzierbar, $w = (u, \lambda) \in W := V \times \Lambda$, $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda := \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_m$ und $\mu_i \in \Lambda_i$ für $i = 1, \dots, m$. Die Verknüpfung $(\cdot, \cdot)_{G_i}$ bezeichnet ein L^2 -Skalarprodukt auf einer Menge G_i . Mit der Semilinearform

$$A(w)(\varphi) := a(u)(v) + b(\lambda, v) - l(v) + C(w)(\mu),$$

und

$$b(\lambda, v) := \sum_{i=1}^m b_i(\lambda_i, v), \quad C(w)(\mu) := \sum_{i=1}^m C_i(w)(\mu_i),$$

3 DWR Fehlerschätzer

sowie $\varphi := (v, \mu) \in W$ und $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \Lambda$ lautet das nichtlineare Problem: Finde $w \in W$ mit

$$A(w)(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in W. \quad (3.2)$$

Annahme 1. Die diskrete Lösung $w_h := (u_h, \lambda_{1,h}, \dots, \lambda_{m,h})$ ist ein Element des endlichdimensionalen Unterraums $W_h := V_h \times \Lambda_{1,h} \times \dots \times \Lambda_{m,h} \subset V \times L^2(G_1) \dots \times L^2(G_m)$. Sie erfüllt

$$a(u_h)(v_h) + \sum_{i=1}^m b_i(\lambda_{i,h}, v_h) = l(v_h) \quad (3.3)$$

für alle $v_h \in V_h$. Die NCP-Nebenbedingungen müssen für die diskrete Lösung nicht erfüllt sein. D.h. es kann

$$C_i(w_h)(\mu_{i,h}) \neq 0$$

für $i = 1, \dots, m$ gelten.

Sei ein einmal Fréchet-differenzierbares Zielfunktional $J : W \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Das duale Problem lautet dann: Finde $z = (y, \xi_1, \dots, \xi_m) \in W$

$$\begin{aligned} a'(u)(v, y) + \sum_{i=1}^m d_u^i(\xi_i, v) &= J'_u(w)(v), \\ b_j(\mu_j, y) + \sum_{i=1}^m d_{\lambda_j}^i(\xi_i, \mu_j) &= J'_{\lambda_j}(w)(\mu_j), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in W$ mit den Bilinearformen

$$\begin{aligned} d_u^i &: \Lambda_i \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ d_u^i(\xi_i, v) &= (\xi_i, f'_{i,u}(w)(v) + \chi_i^{\max}(w)g'_{i,u}(w)(v) + \chi_i^{\min}(w)p'_{i,u}(w)(v)), \\ d_{\lambda_j}^i &: \Lambda_i \times \Lambda_j \rightarrow \mathbb{R} \\ d_{\lambda_j}^i(\xi_i, \mu_j) &= (\xi_i, f'_{i,\lambda_j}(w)(\mu_j) + \chi_i^{\max}(w)g'_{i,\lambda_j}(w)(\mu_j) + \chi_i^{\min}(w)p'_{i,\lambda_j}(w)(\mu_j)). \end{aligned}$$

Hierbei sind

$$\chi_i^{\max}(\varphi) := \begin{cases} 0, & g_i(\varphi) < 0, \\ 1, & g_i(\varphi) \geq 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \chi_i^{\min}(\varphi) := \begin{cases} 0, & p_i(\varphi) > 0, \\ 1, & p_i(\varphi) \leq 0, \end{cases}$$

Indikatorfunktionen für alle $\varphi \in W$. Die NCP-Funktionen können mit $\varphi \in W$ umgeformt werden zu

$$C_i(\varphi)(\mu_i) = (\mu_i, f_i(\varphi) + \chi_i^{\max}(\varphi)g_i(\varphi) + \chi_i^{\min}(\varphi)p_i(\varphi)), \quad i = 1, \dots, m.$$

3.1 Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen

Das diskrete duale Problem lautet: Finde $z_h := (y_h, \xi_{1,h}, \dots, \xi_{m,h}) \in W_h$ so, dass

$$\begin{aligned} a'(u_h)(v_h, y_h) + \sum_{i=1}^m d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, v_h) &= J'_u(w_h)(v_h), \\ b_j(\mu_{j,h}, y_h) + \sum_{i=1}^m d_{\lambda_j,h}^i(\xi_{i,h}, \mu_{j,h}) &= J'_{\lambda_j,h}(w_h)(\mu_{j,h}), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

für alle $\varphi_h = (v_h, \mu_{1,h}, \dots, \mu_{m,h}) \in W_h$ mit den Bilinearformen

$$\begin{aligned} d_{u,h}^i &: \Lambda_{i,h} \times V \rightarrow \mathbb{R}, \\ d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, v) &= (\xi_{i,h}, f'_{i,u}(w_h)(v) + \chi_i^{\max}(w_h)g'_{i,u}(w_h)(v) + \chi_i^{\min}(w_h)p'_{i,u}(w_h)(v)), \\ d_{\lambda_j,h}^i &: \Lambda_{i,h} \times \Lambda_j \rightarrow \mathbb{R}, \\ d_{\lambda_j,h}^i(\xi_{i,h}, \mu_j) &= (\xi_{i,h}, f'_{i,\lambda_j}(w_h)(\mu_j) + \chi_i^{\max}(w_h)g'_{i,\lambda_j}(w_h)(\mu_j) + \chi_i^{\min}(w_h)p'_{i,\lambda_j}(w_h)(\mu_j)), \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, m$. Um eine Differenzierbarkeit für die NCP-Funktionen zu erhalten definiere Gewichtsfunktionen als Auswertung der Indikatorfunktionen in der kontinuierlichen Lösung w bzw. der diskreten Lösung w_h , d.h.

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_i^{\max} &:= \chi_i^{\max}(w), & \hat{\chi}_i^{\min} &:= \chi_i^{\min}(w) \\ \hat{\chi}_{i,h}^{\max} &:= \chi_i^{\max}(w_h), & \hat{\chi}_{i,h}^{\min} &:= \chi_i^{\min}(w_h), \end{aligned} \tag{3.4}$$

für $i = 1, \dots, m$. Definiere damit die Fréchet-differenzierbaren Semilinearformen

$$\begin{aligned} D_i &: V \times \Lambda_i \rightarrow \mathbb{R}, \\ D_i(w)(\mu_i) &:= (\mu_i, f_i(w) + \hat{\chi}_i^{\max}g_i(w) + \hat{\chi}_i^{\min}p_i(w)), \\ D_{i,h} &: V_h \times \Lambda_i \rightarrow \mathbb{R}, \\ D_{i,h}(w_h)(\mu_i) &:= (\mu_i, f_i(w_h) + \hat{\chi}_{i,h}^{\max}g_i(w_h) + \hat{\chi}_{i,h}^{\min}p_i(w_h)), \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, m$. Im kontinuierlichen Fall lautet die Ableitung

$$\begin{aligned} D'_i(w)(\delta w, \mu_i) &= D'_{i,u}(w)(\delta u, \mu_i) + \sum_{j=1}^m D'_{i,\lambda_j}(w)(\delta \lambda_j, \mu_i) \\ &= (\mu_i, f'_{i,u}(w)(\delta u) + \hat{\chi}_i^{\max}g'_{i,u}(w)(\delta u) + \hat{\chi}_i^{\min}p'_{i,u}(w)(\delta u)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left(\mu_i, f'_{i,\lambda_j}(w)(\delta \lambda_j) + \hat{\chi}_i^{\max}g'_{i,\lambda_j}(w)(\delta \lambda_j) + \hat{\chi}_i^{\min}p'_{i,\lambda_j}(w)(\delta \lambda_j) \right) \\ &= d_{i,u}^i(\mu_i, \delta u) + \sum_{j=1}^m d_{i,\lambda_j}^i(\mu_i, \delta \lambda_j). \end{aligned} \tag{3.5}$$

3 DWR Fehlerschätzer

Analog gilt im diskreten Fall

$$D'_{i,h}(w_h)(\delta w_h, \mu_{i,h}) = d_{u,h}^i(\mu_{i,h}, \delta u_h) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j,h}^i(\mu_{i,h}, \delta \lambda_{j,h}). \quad (3.6)$$

Lemma 5. Für die kontinuierliche Lösung w von (3.2) gilt

$$D_i(w)(\mu_i) = C_i(w)(\mu_i),$$

für alle $\mu_i \in \Lambda_i$, $i = 1, \dots, m$. Für die diskrete Lösung w_h aus Annahme 1 gilt

$$D_{i,h}(w_h)(\mu_i) = C_i(w_h)(\mu_i)$$

für alle $\mu_i \in \Lambda_i$, $i = 1, \dots, m$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der Definition der Gewichtsfunktionen (3.4). \square

Lemma 6. Für $i = 1, \dots, m$ gilt

$$d_u^i(\xi_i, e_u) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j}^i(\xi_i, e_{\lambda_j}) = -C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - C_i(w_h)(\xi_i) + \mathcal{R}_{A,i}^{(2)} + \mathcal{R}_{C,i}^{(2)},$$

mit $e_{\xi_i} := \xi_i - \xi_{i,h}$. Dabei beschreibt

$$\mathcal{R}_{A,i}^{(2)} := - \left(\xi_i, e_{\chi_i^{\max}} g_i(w_h) + e_{\chi_i^{\min}} p_i(w_h) \right)$$

den Fehler, der durch die Linearisierung des Problems entlang der aktiven und inaktiven Mengen entsteht, mit den Indikatorfehlern $e_{\chi_i^{\max}} = \chi_i^{\max}(w) - \chi_i^{\max}(w_h)$ und $e_{\chi_i^{\min}} = \chi_i^{\min}(w) - \chi_i^{\min}(w_h)$. Der Term

$$\mathcal{R}_{C,i}^{(2)} := \int_0^1 D_i''(w_h + se_w)(e_w, e_w, \xi_i) s \, ds \quad (3.7)$$

entsteht durch den Fehler in der Quadratur der modifizierten NCP-Funktionen.

Beweis. Mit dem Hauptsatz der Integralrechnung, der Rechteckregel mit Restterm und $e_w := w - w_h$ gilt

$$D_i(w)(\xi_i) - D_i(w_h)(\xi_i) = \int_0^1 D_i'(w_h + se_w)(e_w, \xi_i) \, ds = D_i'(w)(e_w, \xi_i) - \mathcal{R}_{C,i}^{(2)}.$$

Aus Gleichung (3.5) folgt dann

$$d_u^i(\xi_i, e_u) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j}^i(\xi_i, e_{\lambda_j}) = D_i'(w)(e_w, \xi_i) = D_i(w)(\xi_i) - D_i(w_h)(\xi_i) + \mathcal{R}_{C,i}^{(2)}. \quad (3.8)$$

3.1 Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen

Mit Ergänzung von $D_{i,h}(w_h)(\xi_i)$, Lemma 5 und Ergänzung von $C_i(w_h)(\xi_{i,h})$ gilt

$$\begin{aligned}
& - D_i(w_h)(\xi_i) \\
&= - D_i(w_h)(\xi_i) + D_{i,h}(w_h)(\xi_i) - D_{i,h}(w_h)(\xi_i) \\
&= - (\xi_i, f_i(w_h) + \hat{\chi}_i^{\max} g_i(w_h) + \hat{\chi}_i^{\min} p_i(w_h)) \\
&\quad + (\xi_i, f_i(w_h) + \hat{\chi}_{i,h}^{\max} g_i(w_h) + \hat{\chi}_{i,h}^{\min} p_i(w_h)) \\
&\quad - C_i(w_h)(\xi_i) \\
&= - \left(\xi_i, e_{\chi_i^{\max}} g_i(w_h) + e_{\chi_i^{\min}} p_i(w_h) \right) \\
&\quad - C_i(w_h)(\xi_i) \\
&= - C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + \mathcal{R}_{A,i}^{(2)} \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Damit folgt aus Gleichung (3.8) und wegen $D_i(w)(\xi_i) = C_i(w)(\xi_i) = 0$ die Behauptung. \square

Im folgenden Satz wird eine Fehleridentität für das primale Residuum hergeleitet.

Satz 7. *Sei das Zielfunktional J zweimal richtungsdifferenzierbar mit $J'' : W \rightarrow \mathcal{L}(W, W^*)$. Dann gilt unter Annahme 1, dass*

$$J(w) - J(w_h) = \rho(w_h)(e_z) - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + \mathcal{R}_J^{(2)} + \mathcal{R}_A^{(2)} + \mathcal{R}_C^{(2)} + \mathcal{R}_a^{(2)},$$

mit dem dualen Fehler $e_z = z - z_h$ und dem primalen Residuum

$$\rho(w_h)(\varphi) := -A(w_h)(\varphi).$$

Die Restterme sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_J^{(2)} &:= - \int_0^1 J''(w_h + se_w)(e_w, e_w) s \, ds, \\
\mathcal{R}_a^{(2)} &:= \int_0^1 a''(u_h + se_u)(e_u, e_u, y) s \, ds, \\
\mathcal{R}_A^{(2)} &:= \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{A,i}^{(2)}, \\
\mathcal{R}_C^{(2)} &:= \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{C,i}^{(2)},
\end{aligned}$$

mit $e_u := u - u_h$.

3 DWR Fehlerschätzer

Beweis. Durch die Rechteckregel mit Restterm ergibt sich

$$\begin{aligned} J(w) - J(w_h) &= \int_0^1 J'(w_h + se_w)(e_w) ds = J'(w)(e_w) + \mathcal{R}_J^{(2)} \\ &= J'_u(w)(e_u) + \sum_{j=0}^m J'_{\lambda_j}(w)(e_{\lambda_j}) + \mathcal{R}_J^{(2)}. \end{aligned}$$

Mit dem dualen Problem gilt

$$\begin{aligned} J'_u(w)(e_u) + \sum_{i=1}^m J'_{\lambda_i}(w)(e_{\lambda_i}) &= a'(u)(e_u, y) + \sum_{i=1}^m d_u^i(\xi_i, e_u) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \left\{ b_j(e_{\lambda_j}, y) + \sum_{i=1}^m d_{\lambda_j}^i(\xi_i, e_{\lambda_j}) \right\}. \end{aligned}$$

Aus der Anwendung der Rechteckregel mit Restterm auf a folgt

$$a'(u)(e_u, y) + \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y) = a(u)(y) - a(u_h)(y) + \mathcal{R}_a^{(2)} + \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y)$$

Da u Lösung und $y \in V$ ist, ergibt sich deswegen mit Annahme 1 die Gleichung

$$a'(u)(e_u, y) + \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y) = l(e_y) - a(u_h)(e_y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_{j,h}, e_y) + \mathcal{R}_a^{(2)}$$

Mit Lemma 6 folgt insgesamt

$$\begin{aligned} &J(w) - J(w_h) \\ &= J'_u(w)(e_u) + \sum_{j=1}^m J'_{\lambda_j}(w)(e_{\lambda_j}) + \mathcal{R}_J^{(2)} \\ &= l(e_y) - a(u_h, e_y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_{j,h}, e_y) - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(e_{\xi_i}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + \mathcal{R}_A^{(2)} + \mathcal{R}_J^{(2)} + \mathcal{R}_C^{(2)} + \mathcal{R}_a^{(2)} \\ &= \rho(w_h)(z - z_h) - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + \mathcal{R}_J^{(2)} + \mathcal{R}_A^{(2)} + \mathcal{R}_C^{(2)} + \mathcal{R}_a^{(2)} \end{aligned}$$

Dies entspricht der Behauptung. □

3.1 Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen

Mit dem folgenden Lemma lässt sich eine Fehleridentität mit dem primalen und dualen Residuum zeigen.

Lemma 8. Für $i = 1, \dots, m$ gilt

$$\begin{aligned} & d_u^i(\xi_i, e_u) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j}^i(\xi_i, e_{\lambda_j}) + d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, e_u) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j,h}^i(\xi_{i,h}, e_{\lambda_j}) \\ &= -C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + 2\mathcal{R}_{A,i}^{(2)} + 2\mathcal{R}_{C,i}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{D,i}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,1,i}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,2,i}^{(3)}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{C,i}^{(3)} &:= \frac{1}{2} \int_0^1 D_i'''(w_h + se_w)(e_w, e_w, e_w, \xi_i) s(s-1) ds, \\ \mathcal{R}_{A,1,i}^{(3)} &:= -\frac{1}{2} (D_i'(w_h)(e_w, \xi_{i,h}) - D_{i,h}'(w_h)(e_w, \xi_{i,h})), \\ \mathcal{R}_{A,2,i}^{(3)} &:= \frac{1}{2} (D_i(w_h)(e_{\xi_i}) - D_{i,h}(w_h)(e_{\xi_i})), \\ \mathcal{R}_{D,i}^{(3)} &:= \frac{1}{2} \int_0^1 D_i''(w_h + se_w)(e_w, e_w, e_{\xi_i}) s ds. \end{aligned}$$

Beweis. Mit (3.9), $D_i(w)(\xi_i) = 0$ und der Trapezregel gilt, dass

$$\begin{aligned} & -2C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + 2\mathcal{R}_{A,i}^{(2)} \\ &= 2(D_i(w)(\xi_i) - D_i(w_h)(\xi_i)) \\ &= 2 \int_0^1 D_i'(w_h + se_w)(e_w, \xi_i) ds \\ &= D_i'(w)(e_w, \xi_i) + D_i'(w_h)(e_w, \xi_i) - 2\mathcal{R}_{C,i}^{(3)} \\ &= d_u^i(\xi_i, e_u) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j}^i(\xi_i, e_{\lambda_j}) + D_i'(w_h)(e_w, \xi_i) - 2\mathcal{R}_{C,i}^{(3)} \end{aligned}$$

Es gilt mit Einfügen von $D_i'(w_h)(e_w, \xi_i)$ und $D_{i,h}'(w_h)(e_w, \xi_{i,h})$, dass

$$\begin{aligned} & D_i'(w_h)(e_w, \xi_i) \\ &= D_i'(w_h)(e_w, e_{\xi_i}) + D_i'(w_h)(e_w, \xi_{i,h}) \\ &= D_i'(w_h)(e_w, e_{\xi_i}) + D_i'(w_h)(e_w, \xi_{i,h}) - D_{i,h}'(w_h)(e_w, \xi_{i,h}) + D_{i,h}'(w_h)(e_w, \xi_{i,h}) \\ &= D_i'(w_h)(e_w, e_{\xi_i}) - 2\mathcal{R}_{A,1,i}^{(3)} + d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, e_u) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j,h}^i(\xi_{i,h}, e_{\lambda_j}) \end{aligned}$$

3 DWR Fehlerschätzer

Mit Ausnutzung der Rechteckregel, $D_i(w)(e_{\xi_i}) = 0$, Einfügen von $D_{i,h}(w_h)(e_{\xi_i})$ und der Gleichheit $D_{i,h}(w_h)(e_{\xi_i}) = C_i(w_h)(e_{\xi_i})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& D'_i(w_h)(e_w, e_{\xi_i}) \\
&= \int_0^1 D'_i(w_h + se_w)(e_w, e_{\xi_i}) ds - 2\mathcal{R}_{D,i}^{(3)} \\
&= D_i(w)(e_{\xi_i}) - D_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2\mathcal{R}_{D,i}^{(3)} \\
&= -D_i(w_h)(e_{\xi_i}) + D_{i,h}(w_h)(e_{\xi_i}) - D_{i,h}(w_h)(e_{\xi_i}) - 2\mathcal{R}_{D,i}^{(3)} \\
&= -D_i(w_h)(e_{\xi_i}) + D_{i,h}(w_h)(e_{\xi_i}) - C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2\mathcal{R}_{D,i}^{(3)} \\
&= -C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2\mathcal{R}_{A,2,i}^{(3)} - 2\mathcal{R}_{D,i}^{(3)}
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
& d_u^i(\xi_i, e_u) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j}^i(\xi_i, e_{\lambda_j}) + d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, e_u) + \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j,h}^i(\xi_{i,h}, e_{\lambda_j}) \\
&= -2C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + 2\mathcal{R}_{A,i}^{(2)} - D'_i(w_h)(e_w, \xi_i) + 2\mathcal{R}_{C,i}^{(3)} \\
&\quad + D'_i(w_h)(e_w, \xi_i) - D'_i(w_h)(e_w, e_{\xi_i}) + 2\mathcal{R}_{A,1,i}^{(3)} \\
&= -2C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + 2\mathcal{R}_{A,i}^{(2)} + 2\mathcal{R}_{C,i}^{(3)} \\
&\quad + C_i(w_h)(e_{\xi_i}) + 2\mathcal{R}_{A,2,i}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{D,i}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,1,i}^{(3)} \\
&= -C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + 2\mathcal{R}_{A,i}^{(2)} + 2\mathcal{R}_{C,i}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{D,i}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,1,i}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,2,i}^{(3)}
\end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung. □

Mit dem primalen und dualen Residuum kombiniert erhält man folgende Fehleridentität.

Satz 9. *Sei das Zielfunktional J dreimal richtungsdifferenzierbar mit $J''' : W \rightarrow \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(W, W^*))$. Dann gilt unter Annahme 1, dass*

$$J(w) - J(w_h) = \frac{1}{2}\rho(w_h)(e_z) + \frac{1}{2}\rho^*(w_h, z_h)(e_w) - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + \mathcal{R}^{(3)}$$

mit dem dualen Residuum

$$\begin{aligned}
\rho^*(w_h, z_h)(\varphi) &:= J'(w_h)(\varphi) - a'(u_h)(v, y_h) - \sum_{i=1}^m b_i(\mu_i, y_h) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, v) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_{\lambda_j,h}^i(\xi_{i,h}, \mu_j).
\end{aligned}$$

3.1 Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen

Der Restterm ist gegeben durch $\mathcal{R}^{(3)} := \mathcal{R}_A^{(2)} + \mathcal{R}_J^{(3)} + \mathcal{R}_a^{(3)} + \mathcal{R}_C^{(3)} + \mathcal{R}_{A,1}^{(3)} + \mathcal{R}_{A,2}^{(3)} + \mathcal{R}_D^{(3)}$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_J^{(3)} &:= \frac{1}{2} \int_0^1 J'''(w_h + se_w)(e_w, e_w, e_w) s(s-1) ds, \\ \mathcal{R}_a^{(3)} &:= -\frac{1}{2} \int_0^1 \{a'''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_u, z_h + se_y) \\ &\quad + a''(u_h + se_u)(e_u, e_u, e_y)\} s(s-1) ds, \\ \mathcal{R}_C^{(3)} &:= \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{C,i}^{(3)}, \\ \mathcal{R}_{A,1}^{(3)} &:= \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{A,1,i}^{(3)}, \\ \mathcal{R}_{A,2}^{(3)} &:= \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{A,2,i}^{(3)}, \\ \mathcal{R}_D^{(3)} &:= \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_{D,i}^{(3)}.\end{aligned}$$

Beweis. Definiere die Semilinearform

$$L(x) := \mathcal{L}(w, z) := J(w) - a(u)(y) + l(y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_j, y).$$

Dann gilt wegen $L(x) = J(w)$ und $L(x_h) = J(w_h)$ und der Trapezregel, dass

$$\begin{aligned}J(w) - J(w_h) &= L(x) - L(x_h) \\ &= \int_0^1 L'(x_h + se_x)(e_x) ds \\ &= \frac{1}{2} [L'(x_h)(e_x) + L'(x)(e_x)] + \mathcal{R}_J^{(3)} + \mathcal{R}_a^{(3)} \\ &= \frac{1}{2} \left[J'(w_h)(e_w) - a'(u_h)(e_u, y_h) - \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y_h) \right. \\ &\quad \left. - a(u_h)(e_y) + l(e_y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_{j,h}, e_y) \right. \\ &\quad \left. + J'(w)(e_w) - a'(u)(e_u, y) - \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y) \right. \\ &\quad \left. - a(u)(e_y) + l(e_y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_j, e_y) \right] + \mathcal{R}_J^{(3)} + \mathcal{R}_a^{(3)}\end{aligned}$$

3 DWR Fehlerschätzer

Mit der Definition des dualen Problems und Lemma 8 gilt

$$\begin{aligned}
& J'(w)(e_w) - a'(u)(e_u, y) - \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y) + l(e_y) - a(u_h)(e_y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_{j,h}, e_y) \\
&= J'_u(w)(e_u) + \sum_{j=1}^m J'_{\lambda_j}(w)(e_{\lambda_j}) - a'(u)(e_u, y) - \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y) \\
&\quad + l(e_y) - a(u_h)(e_y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_{j,h}, e_y) \\
&= a'(u)(e_u, y) + \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y) + \sum_{i=1}^m d_u^i(\xi_i, e_u) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m d_{\lambda_j}^i(\xi_i, e_{\lambda_j}) \\
&\quad - a'(u)(e_u, y) - \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y) + l(e_y) - a(u_h)(e_y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_{j,h}, e_y) \\
&= l(e_y) - a(u_h)(e_y) - \sum_{j=1}^m b_j(\lambda_{j,h}, e_y) - \sum_{i=1}^m d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, e_u) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_{\lambda_{j,h}}^i(\xi_{i,h}, e_{\lambda_j}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(e_{\xi_i}) - 2 \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + 2\mathcal{R}_A^{(2)} + 2\mathcal{R}_C^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,1}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,2}^{(3)} + 2\mathcal{R}_D^{(3)} \\
&= \rho(w_h)(e_z) - \sum_{i=1}^m d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, e_u) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_{\lambda_{j,h}}^i(\xi_{i,h}, e_{\lambda_j}) \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + 2\mathcal{R}_A^{(2)} + 2\mathcal{R}_C^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,1}^{(3)} + 2\mathcal{R}_{A,2}^{(3)} + 2\mathcal{R}_D^{(3)} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Da w Lösung des kontinuierlichen Problems ist folgt mit (3.10), Annahme 1 und dem dualen Residuum insgesamt

$$\begin{aligned}
& J(w) - J(w_h) \\
&= \frac{1}{2} \rho(w_h)(e_z) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m d_{u,h}^i(\xi_{i,h}, e_u) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_{\lambda_{j,h}}^i(\xi_{i,h}, e_{\lambda_j}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + \frac{1}{2} J'(w_h)(e_w) - \frac{1}{2} a'(u_h)(e_u, y_h) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m b_j(e_{\lambda_j}, y_h) \\
&\quad + \mathcal{R}_A^{(2)} + \mathcal{R}_C^{(3)} + \mathcal{R}_{A,1}^{(3)} + \mathcal{R}_{A,2}^{(3)} + \mathcal{R}_D^{(3)} + \mathcal{R}_J^{(3)} + \mathcal{R}_a^{(3)} \\
&= \frac{1}{2} \rho(w_h)(e_z) + \frac{1}{2} \rho^*(w_h, z_h)(e_w) - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) + \mathcal{R}^{(3)}
\end{aligned}$$

Hiermit folgt die Behauptung. □

3.1 Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen

Bemerkung 1. Der Fehlerterm $\mathcal{R}_J^{(3)}$ ist nur abhängig vom Zielfunktional. Für lineare oder quadratische Funktionale verschwindet er. Sonst ist er vernachlässigbar, wenn die dritte Ableitung von J beschränkt ist, da er von dritter Ordnung im Fehler ist. Die Fehlerterme $\mathcal{R}_{A,1}^{(3)}$ und $\mathcal{R}_{A,2}^{(3)}$ messen den Fehler, der bei der Approximation der aktiven Mengen gemacht wird. Sie verschwinden, wenn die aktiven und inaktiven Mengen exakt aufgelöst werden. Der Quadraturfehler fließt durch den Term $\mathcal{R}_C^{(3)}$ ein. Für NCP-Funktionen, die aus linearen Funktionen f , g und p bestehen, fällt dieser Fehler weg. Dies ist z.B. der Fall bei Kontakt. Im allgemeinen sind der Quadraturfehler und der Fehlerterm $\mathcal{R}_D^{(3)}$ von dritter Ordnung im Fehler und können, wenn sie beschränkt sind, vernachlässigt werden. Aufgrund der Semilinearität entsteht der Restterm $\mathcal{R}_a^{(3)}$, der für beschränkte Ableitungen auch von dritter Ordnung im Fehler ist. Für Bilinearformen verschwindet der Term.

Im Folgenden werden die Resultate aus Satz 7 und Satz 9 auf verschiedene Problemstellungen angewandt.

Beispiel 1. Bei reibungsbehaftetem Kontakt mit Plastizität und Wärme wird die Semilinearform

$$a(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = (C\varepsilon(u), \varepsilon(v)) + (\sigma_\theta(\theta), \varepsilon(v)) + (\kappa\nabla\theta, \nabla\psi)$$

mit $\mathbf{u} = (u, \theta)$ und $\mathbf{v} = (v, \psi)$ verwendet. Außerdem seien $w = (u, \theta, \lambda_n, \lambda_t, \alpha, \varepsilon^p, \lambda_\theta)$ und $\varphi = (v, \psi, \mu_n, \mu_t, \mu_\alpha, \mu_{\varepsilon^p}, \mu_\theta)$. Die Kopplung der Nebenbedingungen erfolgt durch

$$\begin{aligned} b_n(\lambda_n, v) &:= (\lambda_n, v_n), \\ b_t(\lambda_t, v) &:= (\lambda_t, v_t), \\ b_\alpha(\alpha, v) &:= 0, \\ b_{\varepsilon^p}(\varepsilon^p, v) &:= -(C\varepsilon^p, \varepsilon(v)), \\ b_\theta(\lambda_\theta, \psi) &:= (\lambda_\theta, \psi), \\ b_p(\lambda_p, \psi) &:= (\lambda_p, \psi). \end{aligned}$$

Die Kontakt- und Reibungsnebenbedingungen werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} C_n(w)(\mu_n) &:= (\lambda_n - \max\{0, \lambda_n + u_n - g\}, \mu_n)_{0, \Gamma_C}, \\ &= (\lambda_n + \min\{0, -(\lambda_n + u_n - g)\}, \mu_n), \\ C_t(w)(\mu_t) &:= (\max\{S(\lambda_n), \|\lambda_t^{tr}\|\} \lambda_t - S(\lambda_n) \lambda_t^{tr}, \mu_t)_{0, \Gamma_C} \\ &= (-S(\lambda_n) u_t + \max\{0, (\|\lambda_t^{tr}\| - S(\lambda_n)) \lambda_t\}, \mu_t), \end{aligned}$$

3 DWR Fehlerschätzer

mit $\lambda_t^{tr} := \lambda_t + u_t$ sichergestellt. Für die Plastizität gelten die Bedingungen

$$\begin{aligned} C_\alpha(w)(\mu_\alpha) &:= (\max\{0, \|\eta^{tr}\| - Y(\alpha)\} - a_0\alpha, \mu_\alpha) \\ &= (-a_0\alpha + \max\{0, \|\eta^{tr}\| - Y(\alpha)\}, \mu_\alpha), \\ C_{\varepsilon^p}(w)(\mu_{\varepsilon^p}) &:= \left(\eta - \min\left\{1, \frac{Y(\alpha)}{\|\eta^{tr}\|}\right\}, \mu_{\varepsilon^p} \right) \\ &= \left(\eta - 1 + \max\left\{0, -\left(\frac{Y(\alpha)}{\|\eta^{tr}\|} + 1\right)\right\}, \mu_{\varepsilon^p} \right). \end{aligned}$$

Hierbei sind $\eta^{tr} := \eta + \varepsilon^p$ und $Y(\alpha) := a_0^{-1}(\sigma_0 + H\alpha)$. Außerdem muss die Nebenbedingungen für den Wärmefluss

$$C_\theta(w)(\mu_\theta) := (\lambda_\theta - K_\omega \lambda_t u_t + \beta \lambda_n (\theta - \theta_g), \mu_\theta) = 0$$

berücksichtigt werden. Für die Wärmeentstehung im Inneren wird die Nebenbedingung

$$C_p(w)(\mu_p) := (\lambda_p - \bar{\gamma} \sigma(u) \varepsilon^p, \mu_p)$$

benutzt.

Werden die Bezeichnungen so gewählt, dass sie in die allgemeine Form der NCP Funktion (3.1) passen so ergibt sich

$$\begin{aligned} f_n(w) &:= \lambda_n, \\ p_n(w) &:= -(\lambda_n + u_n - g), \\ f_t(w) &:= -S(\lambda_n)u_t, \\ g_t(w) &:= (\|\lambda_t^{tr}\| - S(\lambda_n))\lambda_t, \\ f_\alpha(w) &:= -a_0\alpha, \\ g_\alpha(w) &:= \|\eta^{tr}\| - Y(\alpha), \\ f_{\varepsilon^p}(w) &:= \eta - 1, \\ g_{\varepsilon^p}(w) &:= -\left(\frac{Y(\alpha)}{\|\eta^{tr}\|} + 1\right) \\ f_\theta(w) &:= \lambda_\theta - K_\omega \lambda_t u_t + \beta \lambda_n (\theta - \theta_g), \\ f_p(w) &:= \lambda_p - \bar{\gamma} \sigma(u) \varepsilon^p. \end{aligned}$$

3.1 Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen

Die Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}
f'_{n,\lambda_n}(w)(\mu_n) &= \mu_n, \\
p'_{n,u}(w)(v) &= -v_n, \\
p'_{n,\lambda_n}(w)(\mu_n) &= -\mu_n, \\
f'_{t,u}(w)(v) &= -S(\lambda_n)v_t, \\
f'_{t,\lambda_n}(w)(\mu_n) &= -S'(\lambda_n)(\mu_n)u_t, \\
g'_{t,u}(w)(v) &= \frac{(\lambda_t^{tr}, v_t)}{\|\lambda_t^{tr}\|} \lambda_t, \\
g'_{t,\lambda_n}(w)(\mu_n) &= -S'(\lambda_n)(\mu_n)\lambda_t, \\
g'_{t,\lambda_t}(w)(\mu_t) &= (\|\lambda_t^{tr}\| - S(\lambda_n))\mu_t + \frac{(\lambda_t^{tr}, \mu_t)}{\|\lambda_t^{tr}\|} \lambda_t, \\
f'_{\alpha,\alpha}(w)(\mu_\alpha) &= -a_0\mu_\alpha, \\
g'_{\alpha,u}(w)(v) &= \frac{(\eta^{tr}, 2\mu \operatorname{dev}(\varepsilon(v)))}{\|\eta^{tr}\|}, \\
g'_{\alpha,\alpha}(w)(\mu_\alpha) &= -Y'_\alpha(\alpha)(\mu_\alpha), \\
g'_{\alpha,\varepsilon^p}(w)(\mu_{\varepsilon^p}) &= \frac{(\eta^{tr}, -(2\mu + a_0^{-2}K - 1)\mu_{\varepsilon^p})}{\|\eta^{tr}\|}, \\
f'_{\varepsilon^p,u}(w)(v) &= 2\mu \operatorname{dev}(\varepsilon(v)), \\
f'_{\varepsilon^p,\varepsilon^p}(w)(\mu_{\varepsilon^p}) &= -(2\mu + a_0^{-2}K - 1)\mu_{\varepsilon^p}, \\
g'_{\varepsilon^p,u}(w)(v) &= -Y(\alpha) \frac{(\eta^{tr}, 2\mu \operatorname{dev}(\varepsilon(v)))}{\|\eta^{tr}\|^3}, \\
g'_{\varepsilon^p,\alpha}(w)(\mu_\alpha) &= -\frac{Y'_\alpha(\alpha)(\mu_\alpha)}{\|\eta^{tr}\|}, \\
g'_{\varepsilon^p,\varepsilon^p}(w)(\mu_{\varepsilon^p}) &= -Y(\alpha) \frac{(\eta^{tr}, -(2\mu + a_0^{-2}K - 1)\mu_{\varepsilon^p})}{\|\eta^{tr}\|^3}, \\
f'_{\theta,u}(w)(v) &= -K_\omega \lambda_t v_t, \\
f'_{\theta,\theta}(w)(\psi) &= \beta \lambda_n \psi, \\
f'_{\theta,\lambda_n}(w)(\mu_n) &= \beta \mu_n (\theta - \theta_g), \\
f'_{\theta,\lambda_t}(w)(\mu_t) &= -K_\omega \mu_t u_t, \\
f'_{\theta,\lambda_\theta}(w)(\mu_\theta) &= \mu_\theta,
\end{aligned}$$

mit $Y'_\alpha(\alpha)(\mu_\alpha) = a_0^{-1}H\mu_\alpha$. Die benötigten Indikatorfunktionen sind:

$$\chi_n^{\min}(\varphi) := \begin{cases} 0, & p_n(\varphi) < 0, \\ 1, & p_n(\varphi) \geq 0, \end{cases}$$

3 DWR Fehlerschätzer

$$\begin{aligned}\chi_t^{max}(\varphi) &:= \begin{cases} 0, & g_t(\varphi) < 0, \\ 1, & g_t(\varphi) \geq 0, \end{cases} \\ \chi_\alpha^{max}(\varphi) &:= \begin{cases} 0, & g_\alpha(\varphi) < 0, \\ 1, & g_\alpha(\varphi) \geq 0, \end{cases} \\ \chi_{\varepsilon^p}^{max}(\varphi) &:= \begin{cases} 0, & g_{\varepsilon^p}(\varphi) < 0, \\ 1, & g_{\varepsilon^p}(\varphi) \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Für die Fehlerterme ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{A,n}^{(2)} &= (\xi_n, e_{\chi_n^{min}}(\lambda_{n,h} + u_{h,n} - g))_{0,\Gamma_C}, \\ \mathcal{R}_{A,t}^{(2)} &= - (e_{\chi_t^{max}}(\|\lambda_{t,h}^{tr}\| - S(\lambda_{n,h}))\lambda_{t,h}, \xi_t), \\ \mathcal{R}_{A,\alpha}^{(2)} &= - (e_{\chi_\alpha^{max}}\|\eta_h^{tr}\| - Y(\alpha_h), \xi_\alpha), \\ \mathcal{R}_{A,\varepsilon^p}^{(2)} &= \left(e_{\chi_{\varepsilon^p}^{max}} \left(\frac{Y(\alpha_h)}{\|\eta_h^{tr}\|} + 1 \right), \xi_{\varepsilon^p} \right), \\ \mathcal{R}_{A,1,n}^{(3)} &= - \frac{1}{2} (\chi_n^{min}(-e_{u_n} + (-e_{\lambda_n})) - \chi_{n,h}^{min}(-e_{u_n} + (-e_{\lambda_n})), \xi_{n,h}) \\ &= \frac{1}{2} (e_{\chi_n^{min}}(e_{u_n} + e_{\lambda_n}), \xi_{n,h}), \\ \mathcal{R}_{A,1,t}^{(3)} &= - \frac{1}{2} (e_{\chi_t^{max}}(f'_{t,u}(w_h)(e_u) + f'_{t,\lambda_n}(w_h)(e_{\lambda_n}) + g'_{t,u}(w_h)(e_u) \\ &\quad + g'_{t,\lambda_n}(w_h)(e_{\lambda_n}) + g'_{t,\lambda_t}(w_h)(e_{\lambda_t})), \xi_{t,h}), \\ \mathcal{R}_{A,1,\alpha}^{(3)} &= - \frac{1}{2} (e_{\chi_\alpha^{max}}(f'_{\alpha,\alpha}(w_h)(e_\alpha) + g'_{\alpha,u}(w_h)(e_u) + g'_{\alpha,\alpha}(w_h)(e_\alpha) \\ &\quad + g'_{\alpha,\varepsilon^p}(w_h)(e_{\varepsilon^p})), \xi_{\alpha,h}), \\ \mathcal{R}_{A,1,\varepsilon^p}^{(3)} &= - \frac{1}{2} (e_{\chi_{\varepsilon^p}^{max}}(f'_{\varepsilon^p,u}(w_h)(e_u) + f'_{\varepsilon^p,\varepsilon^p}(w_h)(e_{\varepsilon^p}) + g'_{\varepsilon^p,u}(w_h)(e_u) \\ &\quad + g'_{\varepsilon^p,\alpha}(w_h)(e_\alpha) + g'_{\varepsilon^p,\varepsilon^p}(w_h)(e_{\varepsilon^p})), \xi_{\varepsilon^p,h}), \\ \mathcal{R}_{A,2,n}^{(3)} &= \frac{1}{2} (e_{\chi_n^{min}}(-(\lambda_{n,h} + u_{h,n} - g)), e_{\xi_n}), \\ \mathcal{R}_{A,2,t}^{(3)} &= \frac{1}{2} (e_{\chi_t^{max}}((\|\lambda_{t,h}^{tr}\| - S(\lambda_{n,h}))\lambda_{t,h}), e_{\xi_t}), \\ \mathcal{R}_{A,2,\alpha}^{(3)} &= \frac{1}{2} (e_{\chi_\alpha^{max}}(\|\eta_h^{tr}\| - Y(\alpha_h)), e_{\xi_\alpha}), \\ \mathcal{R}_{A,2,\varepsilon^p}^{(3)} &= - \frac{1}{2} \left(e_{\chi_{\varepsilon^p}^{max}} \left(\frac{Y(\alpha_h)}{\|\eta_h^{tr}\|} + 1 \right), e_{\xi_{\varepsilon^p}} \right).\end{aligned}$$

Für den Wärmefluss sind $\mathcal{R}_{A,\theta}^{(2)} = \mathcal{R}_{A,1,\theta}^{(3)} = \mathcal{R}_{A,2,\theta}^{(3)} = \mathcal{R}_{C,\theta}^{(3)} = \mathcal{R}_{D,\theta}^{(3)} = 0$.

3.1 Allgemeiner Ansatz für NCP basierte Problemstellungen

Da die NCP-Funktion für Kontakt nur aus den linearen Funktionen f_n und p_n besteht, lässt sich ihr Anteil am Fehler zu

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{A,n}^{(2)} + \mathcal{R}_{A,1,n}^{(3)} + \mathcal{R}_{A,2,n}^{(3)} \\ &= (e_{\chi_n^{min}}(\lambda_{n,h} + u_{h,n} - g), \xi_n)_{0,\Gamma_C} \\ &+ \frac{1}{2} (e_{\chi_n^{min}}(e_{u_n} + e_{\lambda_n}), \xi_{n,h}) \\ &+ \frac{1}{2} (e_{\chi_n^{min}}(-(\lambda_{n,h} + u_{h,n} - g)), e_{\xi_n}) \\ &= \frac{1}{2} (e_{\chi_n^{min}}(\lambda_{n,h} + u_{h,n} - g), \xi_n)_{0,\Gamma_C} + \frac{1}{2} (e_{\chi_n^{min}}(\lambda_n + u_n - g), \xi_{n,h}) \end{aligned}$$

zusammenfassen. Die anderen NCP-Funktionen bestehen aus nichtlinearen Funktionen und lassen sich deswegen nicht weiter vereinfachen. Die hier angegebenen Fehlerschätzer stimmen für Kontakt und Reibung mit den bereits bekannten aus [69] bzw. [32] überein.

Die duale Lösung ist $z = (y, \zeta, \xi_n, \xi_t, \xi_\alpha, \xi_{\varepsilon^p}, \xi_\theta)$ und $\mathbf{y} = (y, \zeta)$ mit dem dualen Problem bestehend aus

$$\begin{aligned} d_u^n(\xi_n, v) &:= (-\chi_n^{min} v_n, \xi_n), \\ d_u^t(\xi_t, v) &:= \left(-S(\lambda_n) v_t + \chi_t^{max} \frac{(\lambda_t^{tr}, v_t)}{\|\lambda_t^{tr}\|} \lambda_t, \xi_t \right) \\ d_u^\alpha(\xi_\alpha, v) &:= \left(\frac{(\eta^{tr}, 2\mu \operatorname{dev}(\varepsilon(v)))}{\|\eta^{tr}\|}, \xi_\alpha \right) \\ d_u^{\varepsilon^p}(\xi_{\varepsilon^p}, v) &:= \left(2\mu \operatorname{dev}(\varepsilon(v)) - \chi_{\varepsilon^p}^{max} Y(\alpha) \frac{(\eta^{tr}, 2\mu \operatorname{dev}(\varepsilon(v)))}{\|\eta^{tr}\|^3}, \xi_{\varepsilon^p} \right) \\ d_{\lambda_n}^n(\xi_n, \mu_n) &:= (\mu_n - \chi_n^{min} \mu_n, \xi_n) \\ d_{\lambda_n}^t(\xi_t, \mu_n) &:= (-S'(\lambda_n)(\mu_n) u_t - \chi_t^{max} S'(\lambda_n)(\mu_n) \lambda_t, \xi_t) \\ d_{\lambda_t}^t(\xi_t, \mu_t) &:= \left(\chi_t^{max} (\|\lambda_t^{tr}\| - S(\lambda_n)) \mu_t + \frac{(\lambda_t^{tr}, \mu_t)}{\|\lambda_t^{tr}\|} \lambda_t, \xi_t \right) \\ d_\alpha^\alpha(\xi_\alpha, \mu_\alpha) &:= (-a_0 \mu_\alpha - \chi_\alpha^{max} Y'_\alpha(\alpha)(\mu_\alpha), \xi_\alpha) \\ d_\alpha^{\varepsilon^p}(\xi_{\varepsilon^p}, \mu_\alpha) &:= \left(-\chi_{\varepsilon^p}^{max} \frac{Y'_\alpha(\alpha)(\mu_\alpha)}{\|\eta^{tr}\|}, \xi_{\varepsilon^p} \right) \\ d_{\varepsilon^p}^\alpha(\xi_\alpha, \mu_{\varepsilon^p}) &:= \left(\chi_\alpha^{max} \frac{(\eta^{tr}, -(2\mu + a_0^{-2} K - 1) \mu_{\varepsilon^p})}{\|\eta^{tr}\|}, \xi_\alpha \right) \\ d_{\varepsilon^p}^{\varepsilon^p}(\xi_{\varepsilon^p}, \mu_{\varepsilon^p}) &:= \left(-(2\mu + a_0^{-2} K - 1) \mu_{\varepsilon^p} - \chi_{\varepsilon^p}^{max} Y(\alpha) \frac{(\eta^{tr}, -(2\mu + a_0^{-2} K - 1) \mu_{\varepsilon^p})}{\|\eta^{tr}\|^3}, \xi_{\varepsilon^p} \right), \\ d_u^\theta(\xi_\theta, v) &:= (-K_\omega \lambda_t v_t, \xi_\theta), \\ d_\theta^\theta(\xi_\theta, \psi) &:= (\beta \lambda_n \psi, \xi_\theta), \end{aligned}$$

3 DWR Fehlerschätzer

$$\begin{aligned} d_{\lambda_n}^\theta(\xi_\theta, \mu_n) &:= (\beta\mu_n(\theta - \theta_g), \xi_\theta), \\ d_{\lambda_t}^\theta(\xi_\theta, \mu_t) &:= (-K_\omega\mu_t u_t, \xi_\theta), \\ d_{\lambda_\theta}^\theta(\xi_\theta, \mu_\theta) &:= (\mu_\theta, \xi_\theta), \end{aligned}$$

und der Ableitung der Semilinearform

$$\begin{aligned} a'(\mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{y}) &= (C\varepsilon(v), \varepsilon(y)) + (\sigma_\theta(\psi), \varepsilon(y)) + (\kappa\nabla\psi, \nabla\zeta) \\ a''(\mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

3.2 Auswertung und Lokalisierung der Residuen

Im primalen und dualen Residuum sind die kontinuierlichen Lösungen des primalen und dualen Problems w und z enthalten. Diese sind im Allgemeinen nicht bekannt. Zur Auswertung der Residuen müssen sie deswegen approximiert werden. Dies wird hier durch Interpolation der diskreten Lösungen w_h und z_h mit Polynomen höherer Ordnung gemacht.

Zur Bestimmung der Approximationen wird auf eine Patchstruktur der adaptiv verfeinerten Netze zurückgegriffen. Unter der Patchstruktur eines Netzes versteht man, dass immer eine Menge gleich großer Zellen, die sich einen Knoten teilen, zu einer größeren zusammengefasst werden können, vgl. Abbildung 3.1. Um dies sicherzustellen muss die Verfeinerungsstrategie angepasst werden. Wenn eine Zelle verfeinert wird, müssen auch alle Zellen verfeinert werden, die zu ihrem Patch gehören. Im Falle von Quadraten bedeutet das, dass immer vier Zellen gleichzeitig verfeinert werden, und für Hexaedern müssen immer acht verfeinert werden.

Sei i_{2h} der patchweise Interpolationsoperator, dessen genaue Form von der gewählten Diskretisierung abhängt. Dann sind, mit den Interpolationsfehlern $I(w_h) = i_{2h}(w_h) - w_h$ und $I(z_h) = i_{2h}(z_h) - z_h$ für die primale bzw. duale Lösung,

$$\eta_p := \rho(w_h)(I(z_h)) - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) \quad (3.11)$$

der primale Fehlerschätzer und

$$\eta_{pd} := \frac{1}{2}\rho(w_h)(I(z_h)) + \frac{1}{2}\rho^*(w_h, z_h)(I(w_h)) - \sum_{i=1}^m C_i(w_h)(\xi_{i,h}) \quad (3.12)$$

der primal-duale Fehlerschätzer.

Beispiel 2. Für die Verschiebung u und Temperatur θ werden patchweise d -quadratische Interpolierende i_{2u} und $i_{2\theta}$ verwendet. Für die Verfestigung α und plastische Verzerung ε^p werden d -lineare Interpolationen verwendet. Diese werden bezeichnet durch

3.2 Auswertung und Lokalisierung der Residuen

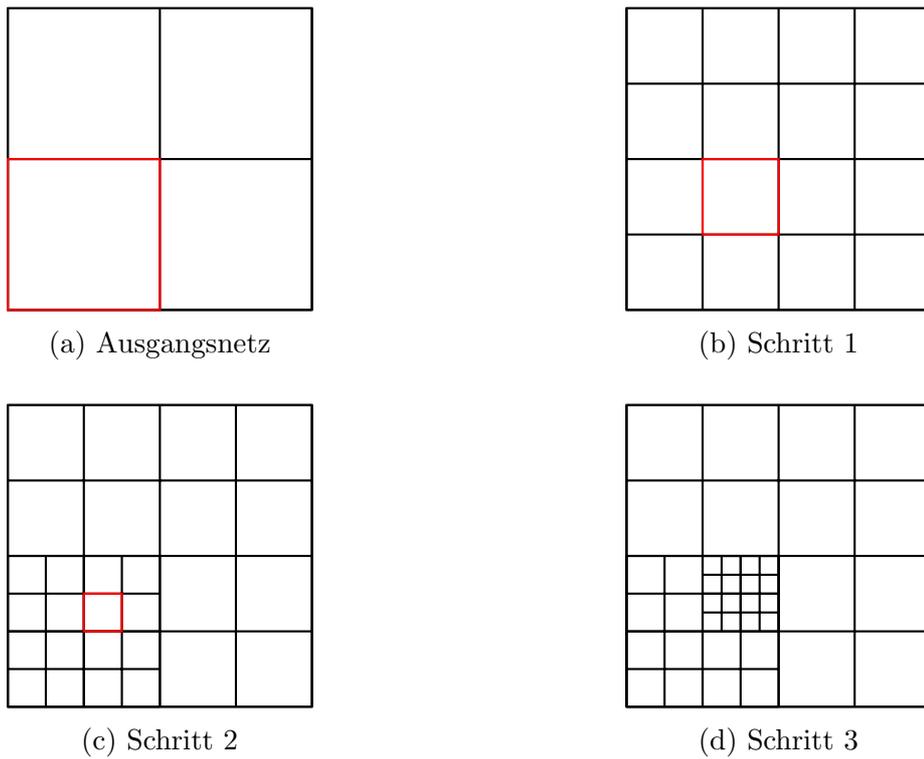


Abbildung 3.1: Drei Verfeinerungsschritte mit Erhalt der Patchstruktur. Die rot umrandeten Zellen wurden im jeweiligen Schritt zur Verfeinerung markiert. Alle anderen Zellen des Patches müssen mitverfeinert werden.

3 DWR Fehlerschätzer

$i_1\alpha$ und $i_1\varepsilon^p$. Die Knotenwerte werden als Mittelwerte der angrenzenden Elemente bestimmt. Eine eindimensionale Veranschaulichung findet sich in Abb. 3.2.

Die Interpolation der Lagrangemultiplikatoren für Kontakt λ_n , Reibung λ_t und Temperatur λ_θ wird mit $(d-1)$ -linearen Funktionen durchgeführt. Bezeichnet werden sie mit $i_{1,m}\lambda_n$, $i_{1,m}\lambda_t$ und $i_{1,m}\lambda_\theta$. Zu Bestimmung dieser Interpolierenden müssen keine neuen Knotenwerte bestimmt werden. Die Knotenwerte für die Interpolierenden können direkt von den Lagrangemultiplikatoren übernommen werden. Sie werden dann nur mit linearen Basisfunktionen, statt mit Mortar-Basisfunktionen gepaart. Die Vorgehensweise ist in Abb. 3.3 dargestellt.

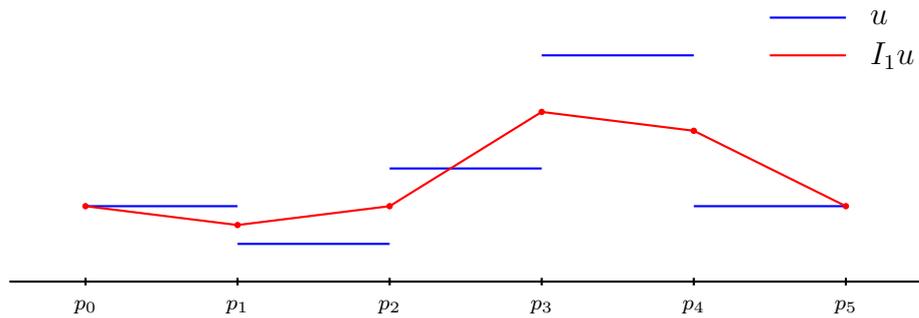


Abbildung 3.2: Lineare Interpolierende einer stückweise konstanten Funktion

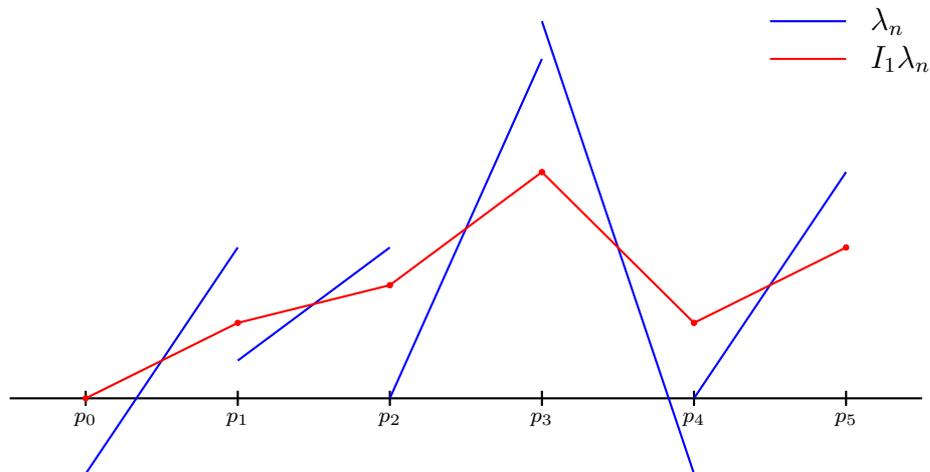


Abbildung 3.3: Lineare Interpolierende einer Mortar-Funktion

Die bis jetzt hergeleiteten Fehlerschätzer sind Schätzungen des globalen Fehlers. Dies gibt eine Auskunft über die Güte der diskreten Lösung, kann jedoch nicht zur effizienten Verbesserung des Fehler genutzt werden. Zur Nutzung des Fehlerschätzers in einem h-adaptiven Algorithmus müssen die Anteile einzelner Zellen am Gesamtfehler

3.2 Auswertung und Lokalisierung der Residuen

bestimmt werden. Ein erstes intuitive Vorgehen zur Lokalisierung ist die elementweise Auswertung des Fehlerschätzers. Bei dieser direkten Methode kommt es im Allgemeinen zu starken Oszillationen der Residuen und damit zur starken Überschätzung des Fehlers [20]. Um diese Effekte zu verhindern, können verschiedene Verfahren und Techniken angewandt werden. Die erste Möglichkeit ist die zellweise partielle Integration [3]. Dabei werden die Ableitungen, die auf die Testfunktionen wirken, durch zellweise partielle Integration wieder auf das andere Argument übertragen. Dadurch entstehen Sprungterme entlang der Elementkanten. Basierend auf der variationellen Formulierung des Problems kann auch eine Zerlegung der Eins zur Lokalisierung genutzt werden [72]. Diese Methode benötigt keine Auswertung der starken Residuen und erzeugt auch keine Sprungterme. Die Zerlegung der Eins kann mit standard linearen Lagrange-Basisfunktionen konstruiert werden. Mit diesen modifizierten Testfunktionen müssen dann nur die rechte Seite und die Residuen ausgewertet werden. Eine Patchstruktur ist nicht unbedingt notwendig. Für die Bestimmung der Gewichte wird sie in der Regel trotzdem benötigt, da es eine der effizientesten Methoden ist. Die Lokalisierung erzeugt knotenbasierte Fehlerindikatoren, die danach auf die Elemente geschiftet werden müssen. In dieser Arbeit werden zur Lokalisierung Filtertechniken verwendet [15]. Diese Filtertechniken verhindern die starke Oszillationen, die bei der direkten Methode auftreten können. Die Anwendung des Filteroperator setzt die Patchstruktur des Netzes voraus, die jedoch wegen der Approximation der kontinuierlichen Lösung mit Polynomen höherer Ordnung bereits vorhanden ist. Der Vorteil der Filtertechniken ist, dass die Residuen nur mit der standard Basis und einer Basis höherer Ordnung ausgewertet werden müssen. Anschließend werden aus ihnen und dem gefilterten Koeffizientenvektor der Gewichte die Fehlerindikatoren bestimmt. Dies sind Methoden, die in vielen Finite-Elemente-Programmen vorhanden sind. Die berechneten Fehlerindikatoren sind knotenbezogen. Durch Summation der Fehlerindikatoren jedes Knotens in einem Patch-Element wird der Fehlerschätzer auf die Elemente übertragen. Mit diesen Elementindikatoren kann dann das Patchnetz verfeinert werden. Die Verfeinerung wird mit der Optimal-Mesh-Strategy durchgeführt [71]. Auf Vergrößerung von Elementen, die nur einen kleinen Anteil am Fehler haben, wird verzichtet. Basierend auf der Konvergenzrate der Diskretisierung wird der erwartete Fehler auf dem neuen Netz geschätzt. Basierend auf dieser Schätzung multipliziert mit einer Gewichtsfunktion, die von der voraussichtlichen Anzahl von Zellen im verfeinerten Netz abhängt, wird die optimale Anzahl an zu verfeinernden Zellen bestimmt. Wenn der Fehler in allen Elementen gleichverteilt ist, führt die Optimal-Mesh Strategie globale Verfeinerungen durch. Bei einfacheren Strategien wie der Fixed-Fraction Strategie ist das nicht der Fall.

3.3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden numerische Beispiele für die im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten DWR-Fehlerschätzer betrachtet. Zuerst wird ein Beispiel mit analytischer Lösung untersucht um die Effizienz des Fehlerschätzers für Kontakt mit Reibung zu überprüfen. Als zweites wird der Fehlerschätzer im elasto-plastischen Fall untersucht. Dafür wird ein L-Gebiet mit Eckensingularität verwendet. Hier ist keine analytische Lösung bekannt, jedoch wird ein Referenzwert des Zielfunktional für die Bewertung der Genauigkeit des Fehlerschätzers durch Extrapolation bestimmt. Als Maß für die Genauigkeit des Fehlerschätzer dient der Effektivitätsindex. Er ist für ein Zielfunktional J und einen Fehlerschätzer η durch

$$I_{\text{eff}}(J, \eta) := \frac{J(w) - J(w_h)}{\eta} \quad (3.13)$$

gegeben. Je näher der Effektivitätsindex an der Eins ist, desto besser wird der echte Fehler durch den Fehlerschätzer abgeschätzt. Wenn $I_{\text{eff}}(J, \eta) > 1$ gilt, wird der Fehler unterschätzt und bei $I_{\text{eff}}(J, \eta) < 1$ überschätzt.

3.3.1 Analytischer reibungsbehafteter Kontakt

Im ersten Beispiel wird wieder das Beispiel mit analytischer Lösung aus Abschnitt 2.10.2 betrachtet. Jedoch wird es auf reibungsbehafteten Kontakt mit Tresca Reibung beschränkt. Das Gebiet ist $\Omega = (-3, 0) \times (-1, 1)$ mit Kontaktrand $\Gamma_C = 0 \times [-1, 1]$. Die analytische Lösung für die Verschiebung $u = (u_1, u_2)^T$ entspricht derjenigen aus dem vorausgegangenen Beispiel bei gleicher äußerer Kraft f_u . Für das Hindernis wird die Parametrisierung g_2 ohne biaktive Mengen gewählt. Mit dem Zielfunktional

$$J_1(w) := \int_{\Omega} -\text{div}(\sigma(y))u \, dx + \int_{\Gamma_C} \xi_n \lambda_n + \xi_t \lambda_t \, do \quad (3.14)$$

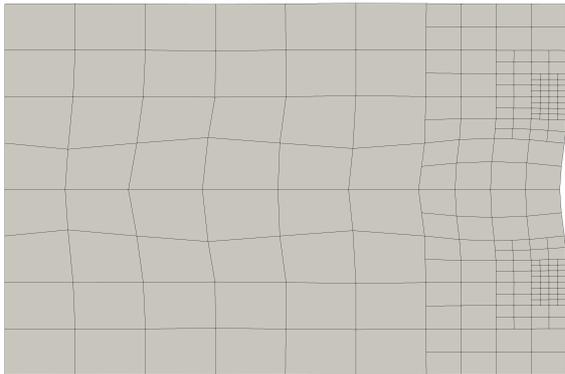
ist die duale Lösung $y = (y_1, y_1)^T$ gegeben durch

$$y_1(x_1, x_2) = 0.1x_1^2(x_1 + 3)^2(x_2 + 1)^2(x_2 - 1)^2. \quad (3.15)$$

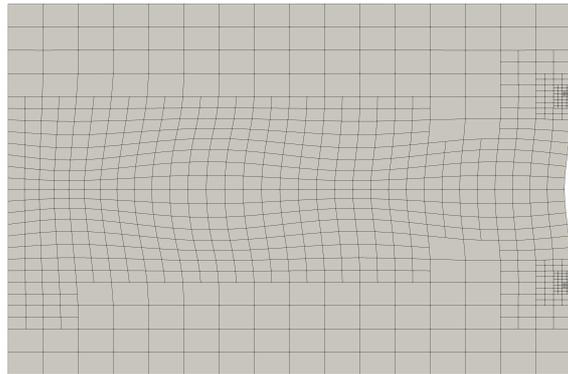
Die analytischen Lösungen der dualen Lagrangemultiplikatoren sind

$$\xi_n(x_2) := 1000 \begin{cases} (x_2 - 0.5)(x_2 - 1), & x_2 > 0.5, \\ (x_2 + 0.5)(x_2 + 1), & x_2 < -0.5, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.16)$$

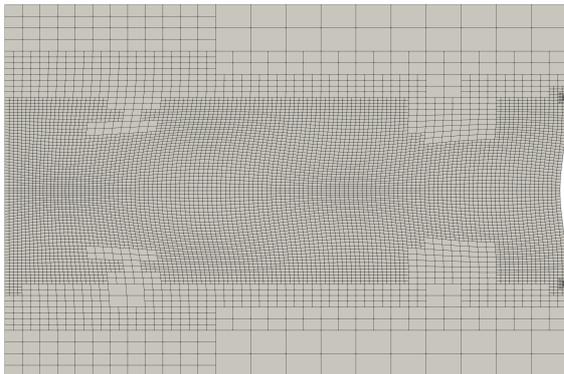
und $\xi_t = -2\xi_n$.



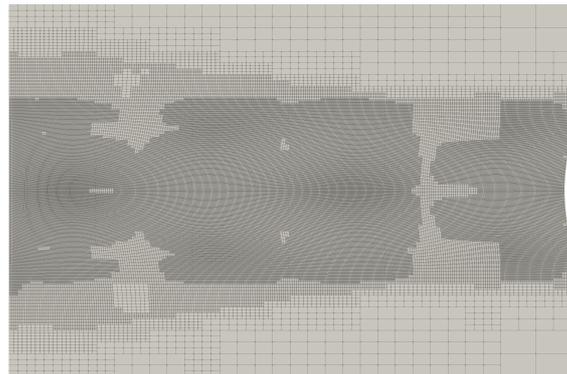
(a) Schritt 4 mit $M_\Omega = 208$



(b) Schritt 6 mit $M_\Omega = 772$



(c) Schritt 8 mit $M_\Omega = 8584$



(d) Schritt 10 mit $M_\Omega = 123556$

Abbildung 3.4: Vernetzung des Gebietes Ω in ausgewählten Schritten des adaptiven Algorithmus.

3 DWR Fehlerschätzer

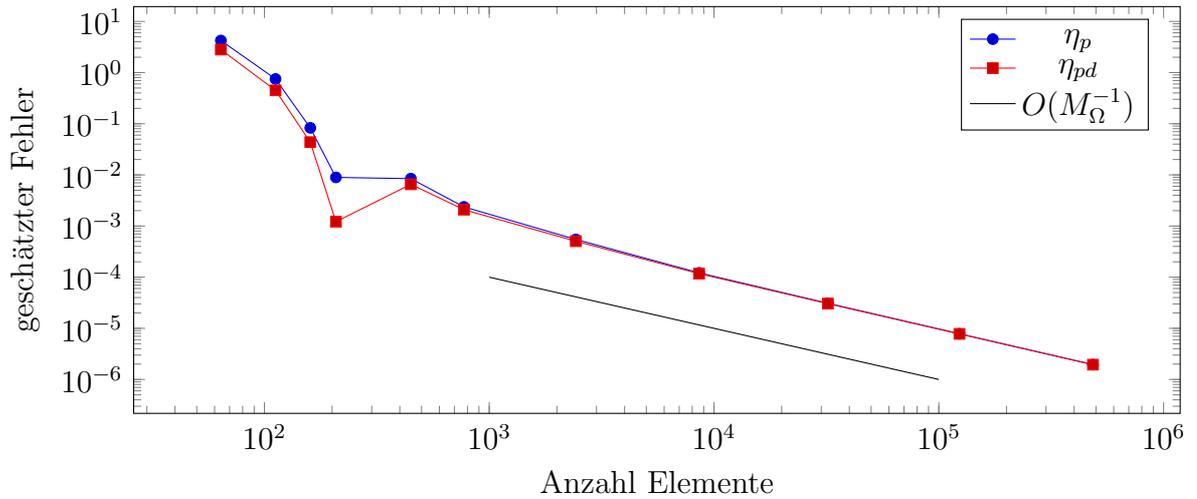


Abbildung 3.5: Geschätzter Fehler durch den primalen sowie primal-dualen Fehlerschätzer bei reibungsbehaftetem Kontakt mit adaptiver Verfeinerung.

In Abbildung 3.4 sind verschiedene Schritte der entstehenden adaptiven Vernetzung dargestellt. Die Übergänge von aktivem zu inaktivem Kontakt am Kontaktrand werden als erstes verfeinert. Dort entsteht der Fehler aus den Verletzungen der Kontaktbedingungen. Im weiteren Verlauf wird auch das Innere des Gebietes verfeinert, wenn die Fehler, die aus den Termen des Kräftegleichgewichts stammen, verkleinert werden müssen.

Die in Abbildung 3.6 dargestellten Effektivitätsindizes des primalen und primal-dualen Fehlerschätzers sind nah an Eins und somit eine gute Näherung für den Fehler. Die Güte wird auch dadurch bestätigt, dass die Fehlerschätzer und der Fehler die optimale Konvergenzrate $O(\Omega_M^{-1})$, wie in den Abbildungen 3.5 und 3.7 zu erkennen ist, erreichen. Insgesamt benötigt der adaptive Algorithmus weniger Elemente für den gleichen Fehler wie mit uniformer Verfeinerung. Jedoch ist der Unterschied nicht sehr groß, da der Fehler über große Teile von Ω verteilt ist und somit auch der adaptive Algorithmus großflächig verfeinern muss.

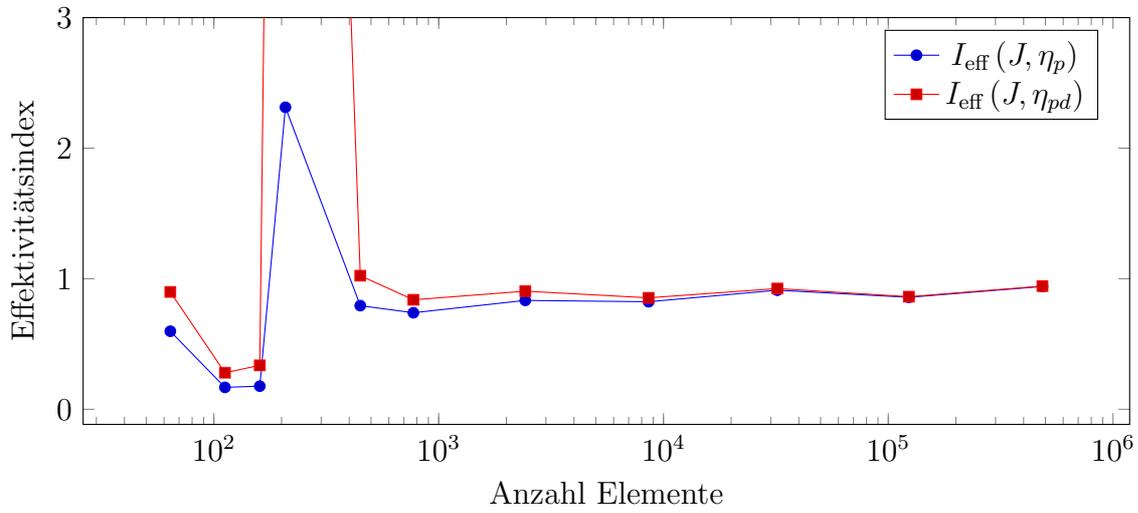


Abbildung 3.6: Effektivitätsindex des primalen und primal-dualen Fehlerschätzers bei reibungsbehaftetem Kontakt mit adaptiver Verfeinerung.

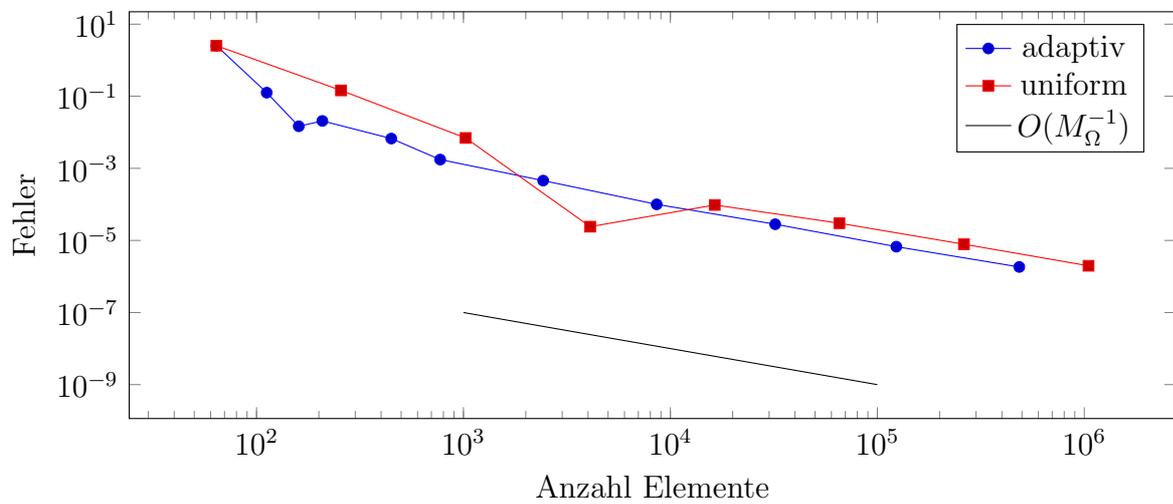


Abbildung 3.7: Fehler für das Zielfunktional J_1 bei adaptiver und uniformer Verfeinerungen bei reibungsbehaftetem Kontakt.

3.3.2 L-Gebiet

Zur Anwendung des Fehlerschätzers auf den elastoplastischen Fall wird das L-Gebiet $\Omega = (-0.5, 0.5)^2 \setminus (0, 0.5)^2$ verwendet. Das Gebiet wird mit homogenen Dirichletranddaten auf $\Gamma_D := (-0.5, 0) \times 0.5$ festgehalten. Als äußere Kraft liegt nur die Neumannkraft $f_N = -1.25$ auf dem Neumannrand $\Gamma_N := (-0.5, 0.5) \times (-0.5)$ und keine Volumenkraft vor. Die zur Modellierung der Elasto-Plastizität benötigten Parameter sind das Elastizitätsmodul $E := 2500$, die Querkontraktionszahl $\nu = 0.25$, die Fließgrenze $\sigma_0 = 1.25$ und der Parameter für isotropische Verfestigung $H = 100$. Die kinematische Verfestigung wird nicht berücksichtigt. Das Zielfunktional ist

$$J_2(u) = \int_{\Omega} \omega(x) u^T u \, \mathbf{d}x \quad (3.17)$$

mit der Abschneidefunktion $\omega(x) = 0.5 (\tanh(20(0.5 - |x - (-0.3, -0.3)^T|)) + 1)$. Dadurch wird näherungsweise die quadrierte Verschiebung über das Gebiet des Kreises $B_{0.5}((-0.3, -0.3)^T)$ integriert. Für das Zielfunktional ergibt sich durch Extrapolation der Zielfunktionalwerte der Referenzwert $J_2^*(u_h) = 4.227562683487862 \times 10^{-5}$.

In Abbildung 3.9 sind die vom adaptiven Algorithmus auf Basis des primal-dualen Fehlerschätzers η_{pd} erzeugten Netze abgebildet. Die Verfeinerungen konzentrieren sich auf die Bereiche, in denen es zu plastischer Verfestigung und starker plastischer Verzerrung kommt. Besonders der Bereich in der oberen Hälfte, in dem plastifizierende und nicht plastifizierende Zellen nebeneinander liegen, wird stark verfeinert. Den Bereich der aktiven Plastizität und die Höhe der plastische Verzerrungen sind in Abbildung 3.8 dargestellt. Außerdem werden wie erwartet die Eckensingularität des L-Gebiets und die Bereiche in der Nähe des Randes des Dirichletrandes stark verfeinert.

In diesem Beispiel unterschätzt der primale Fehlerschätzer im Gegensatz zum primal-dualen Fehlerschätzer den Fehler stark, siehe Abbildung 3.10. Dadurch ist der Effektivitätsindex des primalen Fehlerschätzers in Abbildung 3.11 deutlicher größer, als der des primal-dualen. Auch beim primal-dualen Fehlerschätzer ist der Effektivitätsindex größer als eins. Der Fehler wird jedoch nur leicht überschätzt. Insgesamt wird die optimale Konvergenzrate $O(\Omega_M^{-1})$, wie in Abbildung 3.12 zu sehen, erreicht.

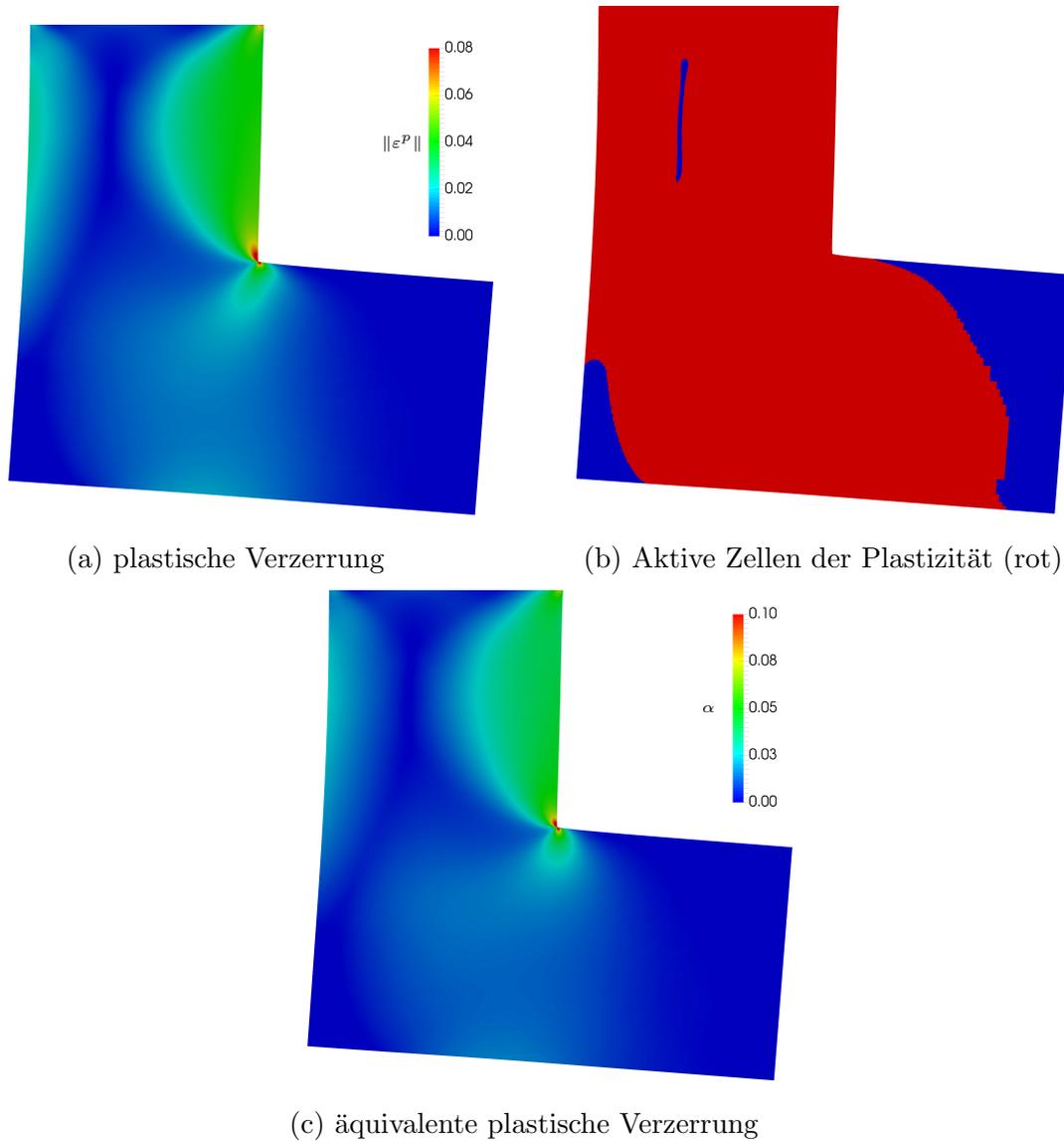
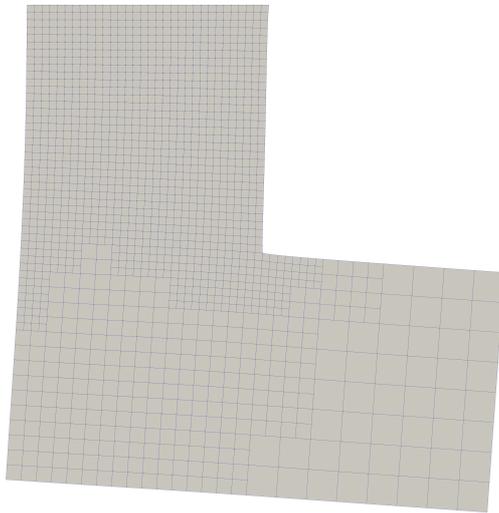
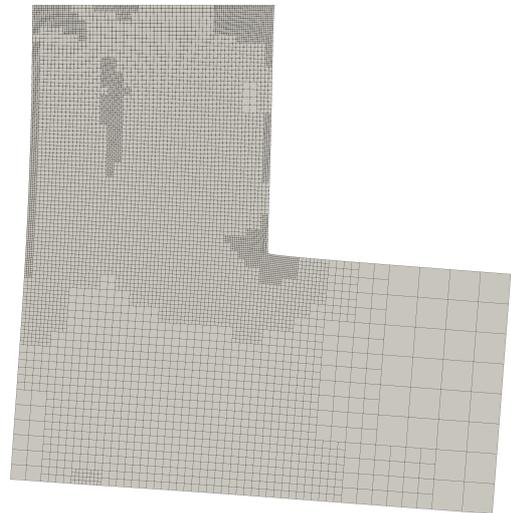


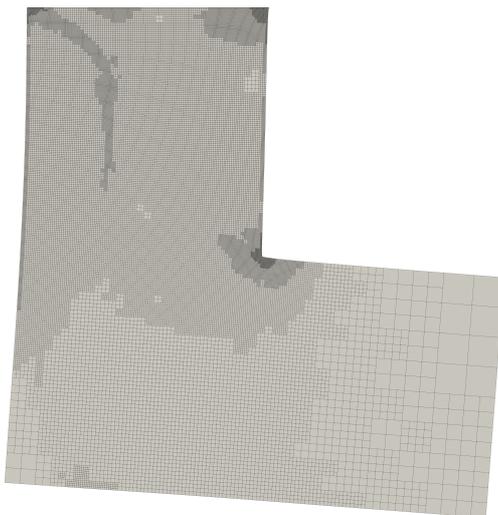
Abbildung 3.8: Plastische Verzerrung ε^p , äquivalente plastische Verzerrung α und plastifizierende Zellen auf dem verschobenen L-Gebiet im neunten Schritt des adaptive Algorithmus mit $M_\Omega = 162456$ Elementen.



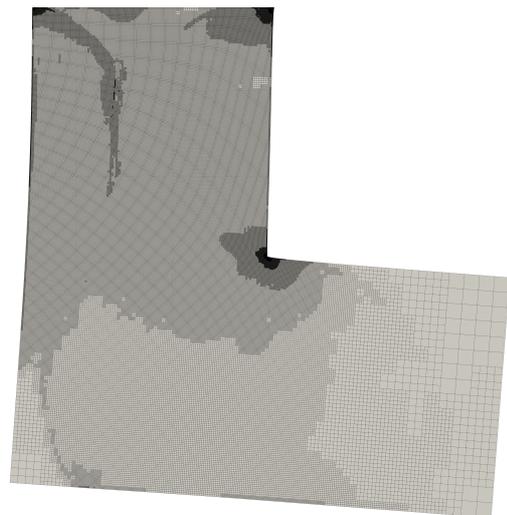
(a) Schritt 3 mit $M_{\Omega} = 1572$



(b) Schritt 5 mit $M_{\Omega} = 8868$



(c) Schritt 7 mit $M_{\Omega} = 37548$



(d) Schritt 9 mit $M_{\Omega} = 162456$

Abbildung 3.9: Vernetzung des L-Gebietes Ω in ausgewählten Schritten des adaptiven Algorithmus.

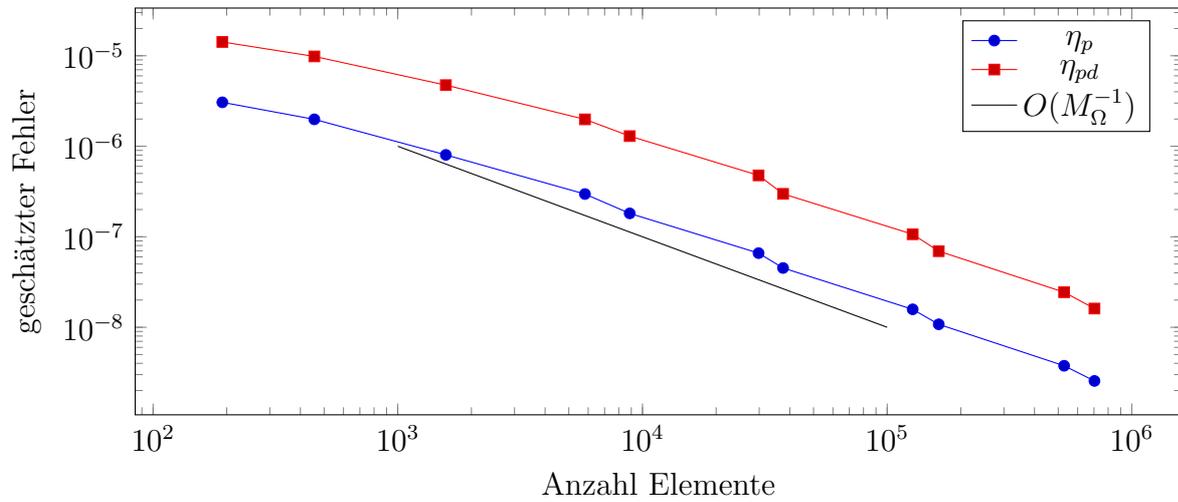


Abbildung 3.10: Geschätzter Fehler durch den primalen sowie primal-dualen Fehlerschätzer für Plastizität mit adaptiver Verfeinerung.

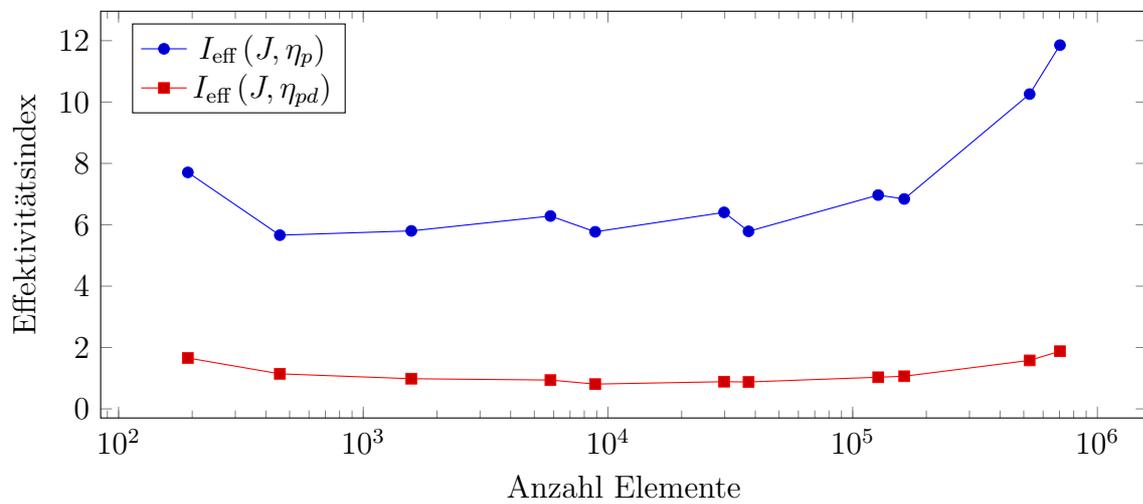


Abbildung 3.11: Effektivitätsindex des primal-dualen Fehlerschätzers für Plastizität mit adaptiver Verfeinerung.

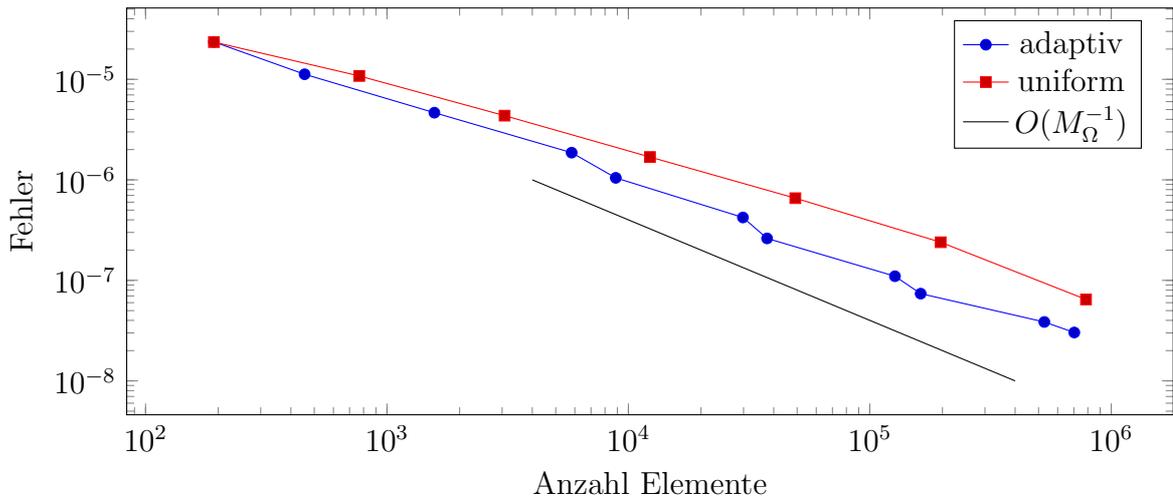


Abbildung 3.12: Fehler für das Zielfunktional J_2 bei adaptiver und uniformer Verfeinerung für Plastizität.

3.3.3 Keil

In diesem letzten Beispiel wird der reibungsfreie Kontakt mit Plastizität bei geringer Regularität betrachtet. Dazu wird das Beispiel aus Abschnitt 2.10.1 wieder aufgegriffen, bei dem der Lagrangemultiplikator für Kontakt nicht in $L^2(\Gamma_C)$ ist. Es werden die gleichen Parameter verwendet. Das Zielfunktional ist

$$J_3(u) = \int_{\Omega} \omega(x) u^T u \, dx \quad (3.18)$$

mit der Abschneidefunktion $\omega(x) = 0.5 (\tanh(20(0.15 - |x - (0, 0)^T|)) + 1)$. Dadurch wird näherungsweise die quadrierte Verschiebung über den Halbkreis $B_{0.15}((0, 0)^T) \cap \Omega$ integriert. Für das Zielfunktional ergibt sich durch Extrapolation der Zielfunktionalwerte der Referenzwert $J_2^*(u_h) = 9.607008394542856 \times 10^{-4}$. Um den numerischen Fehler durch Lösen des dualen Gleichungssystems zu reduzieren muss mit $c_n = 10^7$ die Stabilitätskonstante groß gewählt werden. Sonst kommt es in der dualen Systemmatrix zu Einträgen mit stark unterschiedlichen Größenordnungen, wodurch der duale Lagrangemultiplikator für Kontakt nicht mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden kann. In den Abbildungen 3.13 sind die geschätzten Fehler der Fehlerschätzer und in Abbildung 3.15 sind die echten Fehler für adaptive und uniforme Verfeinerung dargestellt. Man kann erkennen, dass durch die adaptive Verfeinerung die optimale Konvergenzrate wiederhergestellt werden kann. Die Effektivitätsindizes in Abbildung 3.14 sind nicht optimal, liegen aber in einem akzeptablen Bereich. In Abbildung 3.16 sind beispielhaft zwei Netze aus dem adaptiven Algorithmus dargestellt. Die Verfeinerungen treten hauptsächlich im Bereich der Polstelle des Lagrangemultiplikators und den

Rändern des aktiven Kontaktrandes auf. Außerdem werden, wie erwartet, die Ränder des Dirichletrandes und die Bereiche, in denen es zu plastischen Verzerrungen kommt, verfeinert.

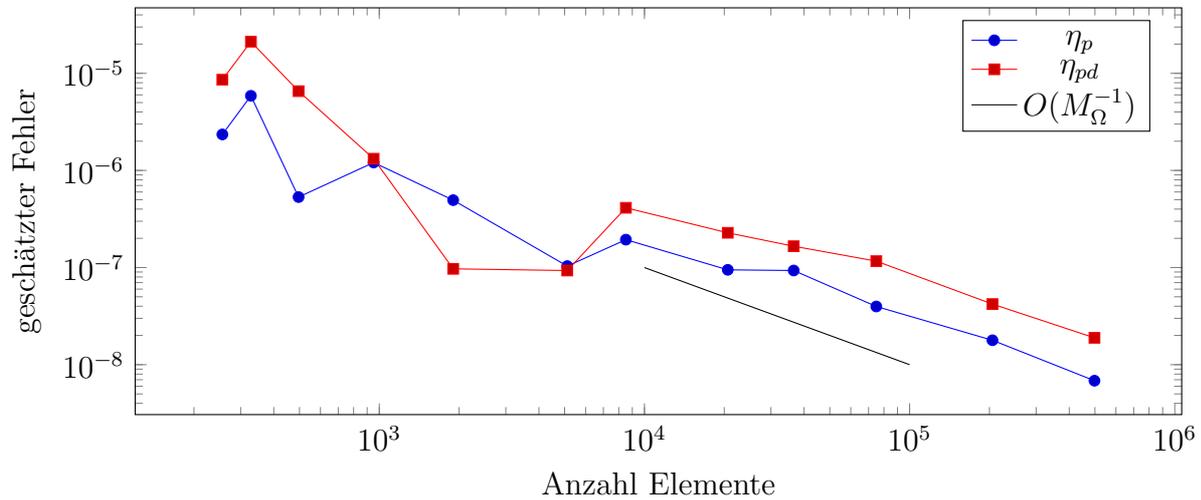


Abbildung 3.13: Geschätzter Fehler durch den primalen sowie primal-dualen Fehlerschätzer für Kontakt und Plastizität mit adaptiver Verfeinerung.

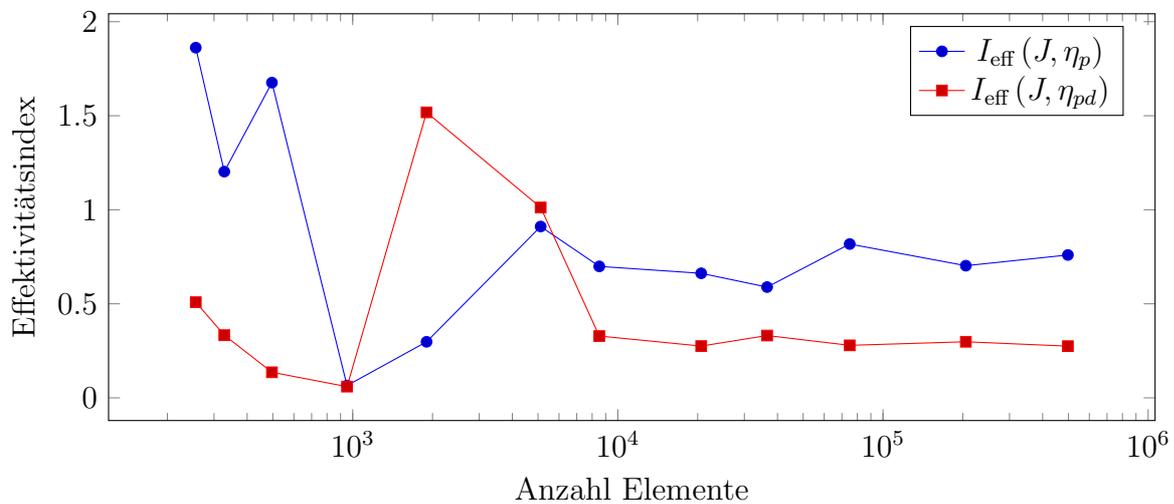


Abbildung 3.14: Effektivitätsindizes der primalen und primal-dualen Fehlerschätzer für Kontakt und Plastizität mit adaptiver Verfeinerung.

3 DWR Fehlerschätzer

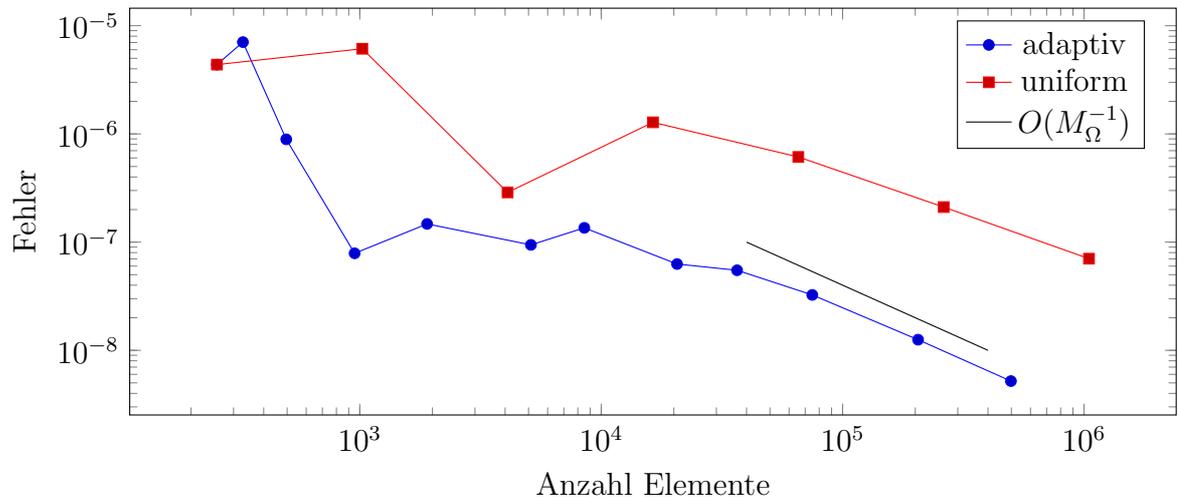
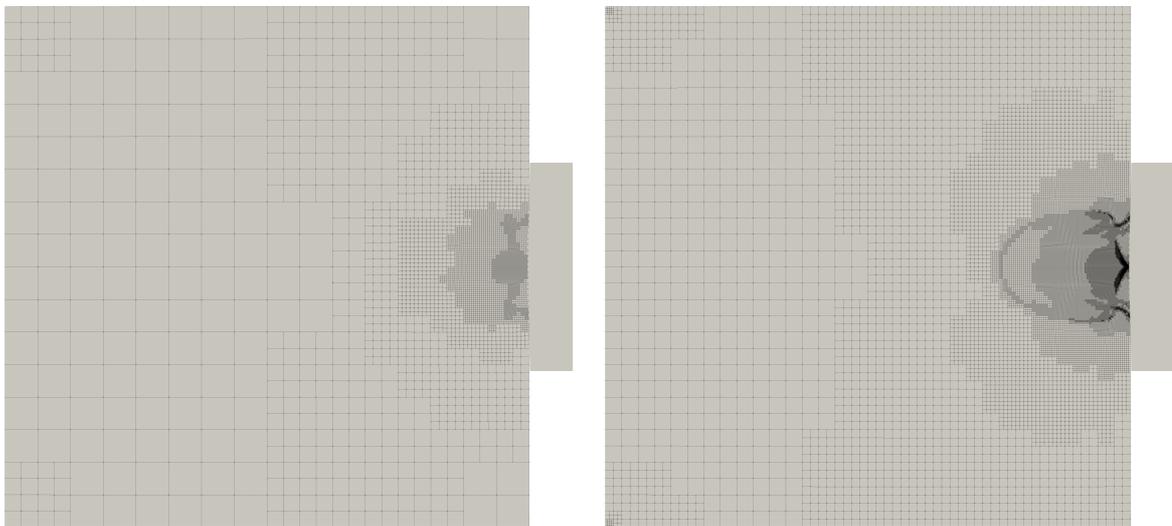


Abbildung 3.15: Fehler für das Zielfunktional J_3 bei adaptiver und uniformer Verfeinerung für Kontakt und Plastizität.



(a) Schritt 6 mit $M_\Omega = 5116$

(b) Schritt 9 mit $M_\Omega = 38087$

Abbildung 3.16: Vernetzung des Gebietes Ω in ausgewählten Schritten des adaptiven Algorithmus.

4 Fazit und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde, basierend auf der Finiten-Elemente-Methode, ein numerisches Verfahren zur Lösung von dynamischen, thermomechanisch gekoppelten, elastoplastischen und reibungsbehafteten Kontaktproblemen entwickelt. Bei diesen Problemen wurden die Kontaktbedingungen und Verzerrungen linearisiert, jedoch wurde für die plastische Verzerrung sowohl kinematische als auch isotropische Verfestigung berücksichtigt. Für die Reibgrenze wurden allgemeine Reibgesetze zugelassen, die von allen modellierten Größen abhängig sein können. Das Problem wurde durch eine gemischte Finite-Elemente-Methode mit Lagrangemultiplikatoren behandelt. Um die numerisch dissipierte Energie klein zu halten, wurde für die Zeitdiskretisierung ein kontaktstabilisiertes Newmark-Verfahren verwendet. Dies wurde gewählt, da es Oszillationen im Kontaktbereich verhindert und energiedissipativ ist. Zur Diskretisierung im Ort wurde ein Finite-Elemente-Ansatz basierend auf Mortar-Basisfunktionen für die Lagrangemultiplikatoren angewendet. Durch verschiedene Methoden wurden die Nebenbedingungen in knoten-/elementweise Bedingungen überführt. Daraus konnte mit NCP-Funktionen und einem semiglatten Newtonverfahren insgesamt eine aktive Mengen Strategie in jedem Zeitschritt hergeleitet werden. Mit statischem Kondensieren konnte die Größe der zu lösenden Gleichungssysteme stark verringert werden, so dass nur lineare Gleichungssysteme in Verschiebung und Wärme gelöst werden müssen. In den numerischen Beispielen wurden verschiedene Aspekte des entwickelten Lösungsverfahrens betrachtet. Dabei wurde die Energiebilanz aufgestellt, bei der zwar ein kleiner Anteil der Energie durch numerische Effekte verloren geht, aber sonst keine unphysikalischen Energieänderungen auftreten. Außerdem wurden für den statischen Fall Parameterstudien durchgeführt und das für Aktive-Mengen-Strategien typische Konvergenzverhalten untersucht. Es wurde auch die effiziente Anwendbarkeit bei biaktiven Mengen demonstriert.

Im zweiten Teil wurde ein zielorientierter a-posteriori DWR-Fehlerschätzer für eine allgemeine Problemstellungen mit NCP-Funktionen konstruiert. Im Rahmen der DWR-Methode wurden Fehleridentitäten für möglicherweise nichtlineare Zielfunktionale, die Abhängigkeiten von allen vorhandenen Größen aufweisen können, bestimmt. In diesen Fehleridentitäten kommen jedoch die unbekanntes analytischen Lösungen vor. Mithilfe von patchweisen Interpolierenden konnten diese ersetzt und numerisch auswertbare Fehlerschätzer abgeleitet werden. Damit wurde ein h-adaptives Verfahren realisiert. In den numerischen Beispielen konnte die Genauigkeit der Fehlerschätzer und die Effizienz des adaptiven Algorithmus für verschiedene statische Probleme belegt werden. Im Ge-

4 Fazit und Ausblick

gensatz zu uniformen Verfeinerungen wurde die optimale Konvergenzgeschwindigkeit erreicht.

Um das Lösungsverfahren für eine größere Gruppe von Problemen anwendbar zu machen, bietet sich die Betrachtung nichtlinearer Materialgesetze an. Mit dem Wärmefluss, den NCP-Funktionen und der Kopplung von Wärme und plastischer Verzerung werden schon nichtlineare Terme durch ein Newtonverfahren behandelt. Auch eine Erweiterung auf Mehrkörperkontaktprobleme, wie in [32], oder um weitere physikalische Effekte und Kopplungen ist möglich. Diese sind auch schon durch die entwickelten DWR-Fehlerschätzer abgedeckt, wenn sie durch zulässige NCP-Funktionen dargestellt werden können. Die Adaptivität kann auch noch auf die Zeit ausgedehnt werden. Dadurch kann die unter Umständen rechenintensive Bearbeitung vieler Zeitschritte reduziert werden. Ein weiterer Aspekt, der adaptiv behandelt werden kann ist das Reibmodell. Hier könnte in Abhängigkeit des Fehlers für verschiedene Bereiche auf unterschiedlich komplexe Reibgesetze zurückgegriffen werden [69]. Bei der Ortsdiskretisierung wurde nur eine Triangulierung für alle Größen verwendet. Dies könnte mit zwei unterschiedlichen Netzen für Verschiebung und Wärme ersetzt werden. Hierbei kann dann in Kombination mit der h -Adaptivität die Verfeinerung besser an die beiden Effekte angepasst werden. Es muss nur der effiziente und zuverlässige Transfer von Variablen zwischen den verschiedenen Netzen gelöst werden. Für die Restterme des DWR-Fehlerschätzers gibt es bis jetzt nur numerische Untersuchungen, die zeigen, dass sie von höherer Ordnung sind. Eine rigorose mathematische Analyse ist hier noch nicht erfolgt [69].

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS, R. A. ; FOURNIER, J. J. F.: *Pure and Applied Mathematics*. Bd. 140: *Sobolev spaces*. 2. Auflage. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003
- [2] AHN, J. ; STEWART, D.: Dynamic frictionless contact in linear viscoelasticity. In: *IMA J. Numer. Anal.* 29 (2009), S. 43–71
- [3] AINSWORTH, M. ; ODEN, J. T.: *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Bd. 37. John Wiley & Sons, New York, 2000
- [4] AINSWORTH, M. ; ODEN, J. T. ; LEE, C. Y.: Local a posteriori error estimators for variational inequalities. In: *Numer. Methods for Partial Differ. Equ.* 9 (1993), Nr. 1, S. 23–33
- [5] ALART, P. ; CURNIER, A.: A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 92 (1991), Nr. 3, S. 353–375
- [6] BANGERTH, W. ; RANNACHER, R.: *Adaptive finite element methods for differential equations*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2003 (Lectures in Mathematics ETH Zürich)
- [7] BECKER, R. ; RANNACHER, R.: An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. In: *Acta Numer.* 10 (2001), S. 1–102
- [8] BELGACEM, F. B. ; HILD, P. ; LABORDE, P.: Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact. In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 9 (1999), Nr. 2, S. 287–303
- [9] BERNARDI, C. ; MADAY, Y. ; PATERA, A. T.: Domain Decomposition by the Mortar Element Method. In: KAPER, H. G. (Hrsg.) ; GARBEY, M. (Hrsg.) ; PIEPER, G. W. (Hrsg.): *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*. Springer Netherlands, 1993, S. 269–286
- [10] BEVER, M. B. ; HOLT, D. L. ; TITCHENER, A. L.: The stored energy of cold work. In: *Prog. Mater. Sci.* 17 (1973), S. 5–177

- [11] BLUM, H. ; KLEEMANN, H. ; RADEMACHER, A. ; SCHRÖDER, A. ; WIEDEMANN, S.: *SOFAR: Scientific Object oriented Finite element library for Application and Research*. <http://www.mathematik.tu-dortmund.de/lisx/cms/de/research/software/SOFAR.html>, Zuletzt abgerufen am 19.08.2020,
- [12] BLUM, H. ; SCHRÖDER, A. ; SUTTMEIER, F.-T.: A posteriori estimates for FE-solutions of variational inequalities. In: BREZZI, F. (Hrsg.) ; BUFFA, A. (Hrsg.) ; CORSARO, S. (Hrsg.) ; MURLI, A. (Hrsg.): *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, Springer Milan, 2003, S. 669–680
- [13] BLUM, H. ; SUTTMEIER, F.-T.: An adaptive finite element discretisation for a simplified Signorini problem. In: *CALCOLO* 37 (2000), Nr. 2, S. 65–77
- [14] BLUM, H. ; SUTTMEIER, F.-T.: Weighted Error Estimates for Finite Element Solutions of Variational Inequalities. In: *Computing* 65 (2000), Nr. 2, S. 119–134
- [15] BRAACK, M. ; ERN, A.: A Posteriori Control of Modeling Errors and Discretization Errors. In: *Multiscale Model. Sim.* 1 (2003), Nr. 2, S. 221–238
- [16] BRAESS, D.: A posteriori error estimators for obstacle problems - another look. In: *Numer. Math.* 101 (2005), Nr. 3, S. 415–421
- [17] BRAESS, D.: *Finite Elemente*. 5. Auflage. Springer Spektrum, Berlin, 2013
- [18] CARLSON, D. E.: Linear Thermoelasticity. In: TRUESDELL, C. (Hrsg.): *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity: Linear and Nonlinear Theories of Rods, Plates, and Shells*. Springer Berlin Heidelberg, 1973, S. 297–345
- [19] CARSTENSEN, C. ; SCHERF, O. ; WRIGGERS, P.: Adaptive finite elements for elastic bodies in contact. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 20 (1999), Nr. 5, S. 1605–1626
- [20] CARSTENSEN, C. ; VERFÜRTH, R.: Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 36 (1999), Nr. 5, S. 1571–1587
- [21] CHRISTENSEN, P. W.: A semi-smooth Newton method for elasto-plastic contact problems. In: *Int. J. Solids Struct.* 39 (2002), Nr. 8, S. 2323–2341
- [22] CIARLET, P. G.: *Mathematical Elasticity: Volume I: three-dimensional elasticity*. North-Holland, Amsterdam, 1988
- [23] CRANK, J. ; NICHOLSON, P.: A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of heat-conductive type. In: *Proc. Camb. Phil. Soc.* 43 (1947), S. 50–67

- [24] DAVIS, T. A.: *UMFPACK: unsymmetric multifrontal sparse LU factorization package*. <http://faculty.cse.tamu.edu/davis/suitesparse.html>, July 2020
- [25] DEUFLHARD, P. ; KRAUSE, R. ; ERTEL, S.: A contact-stabilized Newmark method for dynamical contact problems. In: *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 73 (2008), Nr. 9, S. 1274–1290
- [26] DOYEN, D. ; ERN, A. ; PIPERNO, S.: Time-integration schemes for the finite element dynamic Signorini problem. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 33 (2011), Nr. 1, S. 223–249
- [27] DUVAUT, G. ; LIONS, J.-L.: *Inequalities in mechanics and physics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976
- [28] ECK, C. ; JARUSEK, J. ; KRBEK, M.: *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*. CRC Press, Boca Raton, 2005
- [29] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, 1998 (Graduate Studies in Mathematics, V. 19)
- [30] FARREN, W. S. ; TAYLOR, G. I.: The heat developed during plastic extension of metals. In: *Proc. Roy. Soc. A* 107 (1925), Nr. 743, S. 422–451
- [31] FISCHER, K. A. ; WRIGGERS, P.: Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 195 (2006), Nr. 37-40, S. 5020–5036
- [32] FROHNE, H.: *Finite Elemente Methoden höherer Ordnung für reibungsbehaftete, elasto-plastische Mehrkörperkontaktproblem - Fehlerkontrolle, adaptive Methoden und effiziente Lösungsverfahren*, Technische Universität Dortmund, Diss., 2018
- [33] GLOWINSKI, R.: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer Berlin Heidelberg, 2013 (Scientific Computation)
- [34] GLOWINSKI, R. ; LE TALLEC, P.: *Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*. SIAM, Philadelphia, 1989
- [35] HAGER, C.: *Robust numerical algorithms for dynamic frictional contact problems with different time and space scales*, Universität Stuttgart, Diss., 2010
- [36] HAN, W. ; REDDY, B. D.: Computational Plasticity: The Variational Basis And Numerical Analysis. In: *Comput. Mech. Adv.* 2 (1995), S. 283–400
- [37] HAN, W. ; REDDY, B. D.: *Plasticity: Mathematical Theory and Numerical Analysis*. Springer New York, 1999

- [38] HESCH, C. ; GIL, A. ; ARRANZ CARREÑO, A. ; BONET, J. ; BETSCH, P.: A mortar approach for Fluid-Structure interaction problems: Immersed strategies for deformable and rigid bodies. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 278 (2014), S. 853–882
- [39] HINTERMÜLLER, M. ; ITO, K. ; KUNISCH, K.: The Primal-Dual Active Set Strategy as a Semismooth Newton Method. In: *SIAM J. Optim.* 13 (2002), S. 865–888
- [40] HLAVÁČEK, I. ; HASLINGER, J. ; NEČAS, J. ; LOVIŠEK, J.: *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Springer-Verlag New York, 1988 (Applied Mathematical Sciences 66)
- [41] HORWATITSCH, D.: *Entwicklung eines Reibmodells für hohe Temperaturen und hohe Umformgrade*, Universität Kassel, Diss., 2012
- [42] HÜEBER, S. ; WOHLMUTH, B. I.: Thermo-mechanical contact problems on non-matching meshes. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 198 (2009), Nr. 15–16, S. 1338–1350
- [43] HÜEBER, S.: *Discretization techniques and efficient algorithms for contact problems*, Universität Stuttgart, Diss., 2008
- [44] JARUŠEK, J.: Contact problems with bounded friction. Coercive case. In: *Czech. Math. J.* 33 (1983), Nr. 2, S. 237–261
- [45] JOHANSSON, L. ; KLARBRING, A.: Thermoelastic frictional contact problems: Modelling, finite element approximation and numerical realization. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 105 (1993), Nr. 2, S. 181–210
- [46] JOHNSON, C.: Adaptive finite element methods for the obstacle problem. In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2 (1992), Nr. 4, S. 483–487
- [47] KANE, C. ; REPETTO, E. A. ; ORTIZ, M. ; MARSDEN, J. E.: Finite element analysis of nonsmooth contact. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 180 (1999), Nr. 1-2, S. 1–26
- [48] KIKUCHI, N. ; ODEN, J. T.: *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM, Philadelphia, 1988
- [49] KIKUCHI, N. ; SONG, Y. J.: Penalty/finite-element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity. In: *Q. Appl. Math.* 39 (1981), Nr. 1, S. 1–22
- [50] KLAPPROTH, C.: *Adaptive Numerical Integration of Dynamical Contact Problems*, Freie Universität Berlin, Diss., 2010

- [51] KLEEMANN, H.: *Adaptive FEM für Mehrkörperkontaktprobleme*, Technische Universität Dortmund, Diss., 2011
- [52] KNYSH, P. ; KORKOLIS, Y. P.: Determination of the fraction of plastic work converted into heat in metals. In: *Mech. Mater.* 86 (2015), S. 71–80
- [53] KOZIARA, T. ; BIĆANIĆ, N.: Semismooth Newton method for frictional contact between pseudo-rigid bodies. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 197 (2008), Nr. 33-40, S. 2763–2777
- [54] KRAUSE, R. ; VEESER, A. ; WALLOTH, M.: An efficient and reliable residual-type a posteriori error estimator for the Signorini problem. In: *Numer. Math.* 130 (2015), Nr. 1, S. 151–197
- [55] LAURSEN, T. A.: *Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 2013
- [56] LAURSEN, T. A. ; CHAWLA, V.: Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. In: *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 40 (1997), Nr. 5, S. 863–886
- [57] LAURSEN, T. A. ; PUSO, M. A. ; SANDERS, J.: Mortar contact formulations for deformable–deformable contact: past contributions and new extensions for enriched and embedded interface formulations. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 205 (2012), S. 3–15
- [58] LE TALLEC, P.: Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity. In: *Handb. Numer. Anal.* 3 (1994), S. 465–622
- [59] MATEI, A. ; SITZMANN, S. ; WILLNER, K. ; WOHLMUTH, B.: A mixed variational formulation for a class of contact problems in viscoelasticity. In: *Appl. Anal.* 97 (2018), Nr. 8, S. 1340–1356
- [60] NECAS, J. ; JARUSEK, J. ; HASLINGER, J.: On the solution of variational inequality to the Signorini problem with small friction. In: *Boll. Unione Mat. Ital., V. Ser., B* 17 (1980), S. 796–811
- [61] NEWMARK, N. M.: A method of computation for structural dynamics. In: *Journal of the engineering mechanics division* 85 (1959), Nr. 3, S. 67–94
- [62] NOCHETTO, R. ; VEESER, A. ; VERANI, M.: A safeguarded dual weighted residual method. In: *IMA J. Numer. Anal.* 29 (2009), S. 126–140

- [63] OANCEA, V. G. ; LAURSEN, T. A.: A finite element formulation of thermomechanical rate-dependent frictional sliding. In: *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 40 (1997), Nr. 23, S. 4275–4311
- [64] PARASCHIVOIU, M. ; PERAIRE, J. ; PATERA, A. T.: A posteriori finite element bounds for linear-functional outputs of elliptic partial differential equations. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 150 (1997), Nr. 1, S. 289–312
- [65] PRUDHOMME, S. ; ODEN, J. T.: On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 176 (1999), Nr. 1, S. 313–331
- [66] PUSO, M. A. ; LAURSEN, T. A.: A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193 (2004), Nr. 45-47, S. 4891–4913
- [67] PUSO, M. A. ; LAURSEN, T. A. ; SOLBERG, J.: A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 197 (2008), Nr. 6-8, S. 555–566
- [68] RADEMACHER, A.: NCP Function-Based Dual Weighted Residual Error Estimators for Signorini’s Problem. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 38 (2016), Nr. 3, S. A1743–A1769
- [69] RADEMACHER, A.: Mesh and model adaptivity for frictional contact problems. In: *Numer. Math.* 142 (2019), Nr. 3, S. 465–523
- [70] RADEMACHER, A. ; SCHRÖDER, A.: Dual Weighted Residual Error Control for Frictional Contact Problems. In: *Comput. Methods Appl. Math.* 15 (2015), S. 391–413
- [71] RICHTER, T.: *Parallel multigrid method for adaptive finite elements with application to 3D flow problems*, Uni Heidelberg, Diss., 2005
- [72] RICHTER, T. ; WICK, T.: Variational localizations of the dual weighted residual estimator. In: *J. Comput. Appl. Math.* 279 (2015), S. 192–208
- [73] RITTEL, D. ; ZHANG, L. ; OSOVSKI, S.: The dependence of the Taylor–Quinney coefficient on the dynamic loading mode. In: *J. Mech. Phys. Solids* 107 (2017), S. 96–114
- [74] SCHRÖDER, A.: *Fehlerkontrollierte adaptive h- und hp-Finite-Elemente-Methoden für Kontaktprobleme mit Anwendungen in der Fertigungstechnik*, Technische Universität Dortmund, Diss., 2005

- [75] SCHRÖDER, A. ; BLUM, H. ; RADEMACHER, A. ; KLEEMANN, H.: Mixed FEM of higher order for contact problems with friction. In: *Int. J. Numer. Anal. Mod.* 8 (2011), Nr. 2, S. 302–323
- [76] SCHRÖDER, A. ; RADEMACHER, A.: Goal-oriented error control in adaptive mixed FEM for Signorini’s Problem. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 200 (2011), Nr. 1-4, S. 345–355
- [77] SCHRÖDER, A.: A posteriori error estimates of higher-order finite elements for frictional contact problems. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 249–252 (2012), S. 151–157
- [78] SCHRÖDER, A. ; WIEDEMANN, S.: Error estimates in elastoplasticity using a mixed method. In: *Appl. Numer. Math.* 61 (2011), S. 1031–1045
- [79] SCHWEIZER, B.: *Partielle Differentialgleichungen*. Springer Spektrum, 2013
- [80] SIMO, J. C. ; HUGHES, T. J. R.: *Computational Inelasticity*. Springer New York, 2006
- [81] SIMO, J. C. ; LAURSEN, T. A.: An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. In: *Comput. Struct.* 42 (1992), Nr. 1, S. 97–116
- [82] SITZMANN, S. ; WILLNER, K. ; WOHLMUTH, B. I.: A dual Lagrange method for contact problems with regularized frictional contact conditions: Modelling micro slip. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 285 (2015), S. 468–487
- [83] SUTTMEIER, F.-T.: *Numerical Solution of Variational Inequalities by Adaptive Finite Element*. Vieweg + Teubner, 2008 (Advances in numerical mathematics)
- [84] TAL, Y. ; HAGER, B.: Dynamic mortar finite element method for modeling of shear rupture on frictional rough surfaces. In: *Comput. Mech.* 61 (2018), Nr. 6, S. 699–716
- [85] TAYLOR, G. I. ; QUINNEY, H.: The Latent Energy Remaining in a Metal after Cold Working. In: *Proc. Roy. Soc. A* 143 (1934), Nr. 849, S. 307–326
- [86] THOMEE, V.: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. 2. Auflage. Springer, 2006 (Springer Series in Computational Mathematics)
- [87] TRÉMOLIÈRES, R. ; LIONS, J.-L. ; GLOWINSKI, R.: *Numerical Analysis of Variational Inequalities*. North Holland, 1981
- [88] WIEDEMANN, S.: *Adaptive finite elements for a contact problem in elastoplasticity with Lagrange techniques*, Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II, Diss., 2013

Literaturverzeichnis

- [89] WILLNER, K.: *Kontinuums- und Kontaktmechanik: Synthetische und analytische Darstellung*. Springer Berlin Heidelberg, 2012
- [90] WOHLMUTH, B.: A Mortar Finite Element Method Using Dual Spaces For The Lagrange Multiplier. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 38 (2000), S. 989–1012
- [91] WRIGGERS, P.: *Computational Contact Mechanics*. 2. Auflage. Springer, Berlin Heidelberg, 2006