

MAXIMUM CYCLE PACKING

Obere Schranken an Kreispackungszahlen
in speziellen polyhedralen Graphen

Wintersemester 2019/2020

Dissertation am
Lehrstuhl für Operations Research und Wirtschaftsinformatik
an der Fakultät Wirtschaftswissenschaften
der Technischen Universität Dortmund

Verfasser: Dipl.- Wirt.- Math. Stefan Stehling

Matrikel-Nr.: 122620

Erstgutachter: Prof. Dr. Peter Recht

Zweitgutachterin: JProf. Dr. Anja Fischer

Eingereicht im Oktober 2019

Umgearbeitet eingereicht im Januar 2021

Veröffentlichung als Dissertation

in der Fakultät Wirtschaftswissenschaften der TU Dortmund

Ort: Universitätsbibliothek der TU Dortmund, Dortmund

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Motivation und Einordnung	1
1.2	Aufbau	10
2	Grundlagen	12
2.1	Graphen und Kreispackungen	12
2.2	Planare Graphen und deren Eigenschaften	17
2.3	Polyeder, Schlegeldiagramme und polyhedrale Graphen	21
3	Obere Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in polyhedralen Graphen $\mathcal{P}[n, m]$	29
3.1	Obere Schranken an $\nu(G)$ in $\mathcal{P}[n, m]$	30
3.2	Obere Schranken an $\nu'(G)$ in $\mathcal{P}[n, m]$	35
3.3	Polyhedrale Graphen mit $\nu(G) > \alpha(G^*)$	48
4	Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in Halin-Graphen	55
4.1	Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in Halin-Graphen $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m$ und \mathcal{HF}_f	60
4.2	Obere Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in Halin-Graphen $\mathcal{H}[n, m]$	66
5	Schranken an $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen	70
5.1	Obere Schranken an $\nu(G)$ mit $G \in \mathcal{F}_n$ für $n \geq 72$	79
5.2	Zusammenhang von $\alpha(G^*)$ und $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen	100
5.3	Obere Schranken an $\nu(G)$ mit $G \in \mathcal{F}_n$ und $n \leq 70$	135
5.4	Fulleren-Graphen mit “geringer“ maximaler Kreispackungszahl	139
6	Resultate und Fazit	153

A Anhang	156
A.1 Polyhedrale Graphen	156
A.2 Halin-Graphen aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m$, und \mathcal{HF}_f	160
A.3 Obere Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in $G \in \mathcal{H}[n, m]$	163
A.4 Fulleren-Graphen mit $n \leq 70$	165
A.5 Übersichtstabellen zum Beweis von Satz 5.6	170
 Literaturverzeichnis	 174

Abbildungsverzeichnis

1.1	Knoten- und kantendisjunkte Kreispackung	2
1.2	Koordinationspolyeder	6
1.3	Polyhedrale Graphen	7
2.1	Skizze zur Definition von homöomorph	14
2.2	Dualgraph	21
2.3	Die fünf platonischen Körper	24
2.4	Erzeugung eines Würfelstumpfes	25
3.1	Polyhedrale Graphen mit $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ aus Satz 3.1	31
3.2	Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ in Satz 3.1	32
3.3	Polyhedrale Graphen $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ aus Lemma 3.3	36
3.4	Polyhedrale Graphen $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ aus Lemma 3.4	39
3.5	Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ in Lemma 3.4.	40
3.6	Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ in Satz 3.2.	43
3.7	Polyhedraler Graph $G'_{[10,21]}$ mit $\nu'(G) = 7$	45
3.8	Polyhedraler Graph mit $\nu(G) = \alpha(G^*) + 1$	48
3.9	Polyhedraler Graph G_1 mit $\nu(G) = 15$ und $\alpha(G^*) = 14$	49
4.1	Beispiele zu Halin-Graphen	55
5.1	Sechseckige Ringstruktur des Benzols	71
5.2	Schematische Darstellung des Buckyballs	71
5.3	Schlegel-Diagramm-Darstellung des C_{60}	74
5.4	Schematische Darstellung eines Fulleren-Patches $P(C)$ in G_{20}	78
5.5	Zusammenhangskomponenten in Lemma 5.1	81
5.6	Teilgraph eines Fulleren-Graphen mit $ Z(F^5) \cap Z(G) = 11$	86

5.7	Zwei Teilgraphen eines Fulleren-Graphen mit $ Z(F^5) \cap Z(G) = 12$. . .	87
5.8	Leapfrog-Transformation	89
5.9	Endo-Kroto- und Stone-Wales-Transformation	91
5.10	Fulleren-Graphen $G_i, i \in \{24, 26, \dots, 34\}$	93
5.11	Teilgraphen von G'_n	94
5.12	Teilgraphen von $G_{\frac{n}{3}}, G_{\frac{n}{3}}^l$, und $G_n^{s,w}$	97
5.13	Einfache Endo-Kroto-Transformation angewendet auf $G_{n-2}^{s,w}$	98
5.14	Fulleren-Graph-Transformation auf G_{n+4} mit $\nu(G_{n+4}) \geq \nu(G^l)$	98
5.15	Maximale Kreispackung in G_{20} mit einem Kreis der Länge zehn . . .	101
5.16	Darstellung des Falls $ E(F) \cap E(C) = 2$ und $E(F) \cap E(C)$ nicht zusammenhängend.	104
5.17	Fulleren-Graphen G_{34}	106
5.18	Teilgraphen des Patches $P(C)$	107
5.19	Ausschnitt eines Patches $\mathcal{P}(C)$ mit Facetten $F_j \in F^I(C)$	112
5.20	Sequenzen in $(\vartheta(C^*))$	113
5.21	Sequenzen in $(\vartheta(C^*))$	114
5.22	Sequenzen in $(\vartheta(C^*))$ und $(\vartheta(C^{*,A}))$	117
5.23	Sequenz $(2, 1)$ bzw. $(1, 1, 1)$ in $(\vartheta(C^*))$	119
5.24	Sequenz $(0, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$	122
5.25	Sequenz $(2, 1)$ in $(\vartheta(C^*))$	126
5.26	Sequenz der Länge k_i des Typs $(1, 1, \dots, 1, 1)$	131
5.27	Sequenz der Länge k_i des Typs $(2, 0, \dots, 2, 0)$	132
5.28	Umordnung von Kreisen in $(\vartheta(C^*))$	134
5.29	Polyedrale Graphen mit $\nu(G) = \lceil \frac{f}{4} \rceil$	139
5.30	Darstellung von G_0	141
5.31	Fulleren-Graphen mit geringem $\nu(G)$	142
5.32	Darstellung von G_0	147
5.33	Fulleren-Graphen mit geringem $\nu(G)$	149
A.1	Spezielle Halin-Graphen	161

Tabellenverzeichnis

2.1	$\nu(G)$ und $\nu'(G)$ für plat. und arch. Körper	26
3.1	Obere Schranken an $\nu(G)$ für polyhedrale Graphen $G \in \mathcal{P}[n, m]$. . .	34
3.2	Obere Schranken an $\nu'(G)$ für polyhedrale Graphen $G \in \mathcal{P}[n, m]$. . .	47
4.1	Halin-Graphen aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m, \mathcal{HF}_f$, die die unteren Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ mit Gleichheit erfüllen	63
4.2	Halin-Graphen aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m, \mathcal{HF}_f$, die die oberen Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ mit Gleichheit erfüllen	65
4.3	Halin-Graphen aus $\mathcal{H}[n, m]$ mit $\nu(G) = \min \{ \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor, 2n - m - 1 \}$ und $\nu'(G) = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$	68
5.1	Anzahlen an nicht-isomorphen Fulleren-Graphen	74
5.2	Anzahl an Fulleren-Graphen mit $\nu(G) \leq 13$ und $n \leq 70$	138
A.1	Übersicht zu Fall $f_5(C^I) = 5$ und k_i ist eine ungerade Zahl aus Satz 5.6.	171
A.2	Übersicht zu Fall $f_5(C^I) = 6$ und k_i ist eine ungerade Zahl aus Satz 5.6.	171
A.3	Übersicht zu Fall $f_5(C^I) = 6$ und k_i ist eine gerade Zahl aus Satz 5.6.	172
A.4	Übersicht aller betrachteten Fälle zum Beweis von Satz 5.6.	173

1 Einführung

Das einleitende Kapitel soll die Aufgabenstellung des Themas *Maximum Cycle Packing - Obere Schranken an Kreispackungszahlen in speziellen polyhedralen Graphen* kompakt motivieren und in den Rahmen des Operations Research einordnen ohne dabei explizit und formal graphentheoretische Konzepte im Detail zu erläutern und Definitionen anzuführen. Dazu werden ausgehend von der Relevanz von graphentheoretischen Konzepten und Kennzahlen ein Maximum Cycle Packing und die zugehörigen Kennzahlen beschrieben und über die bestehenden Anwendungsgebiete motiviert. Ferner wird auf die Bedeutung der Graphenklasse der polyhedralen Graphen sowie die Betrachtung von Halin- und Fulleren-Graphen als Unterklassen polyhedraler Graphen eingegangen.

1.1 Motivation und Einordnung

In vielen Bereichen des Operations Research wie beispielsweise der Optimierung von Produktionsflüssen [1], [59], der Planung von Netzwerken [34] wie beispielsweise Infrastruktur, Telekommunikations- oder Energieverteil-Netzwerke sowie der Tourenplanung [42], [49], [53] sind graphentheoretische Konzepte bei der Modellierung von Optimierungsproblemen von grundlegender Bedeutung.

Ein weites Forschungsinteresse liegt in der Bestimmung graphentheoretischer Kennzahlen, die ökonomische Aspekte beschreiben und einordnen. Sehr bekannte Beispiele sind die sog. Unabhängigkeitszahl sowie die sog. Färbungszahl von Graphen, um bspw. Sendefrequenzen von verschiedenen Rundfunksendern bzw. Mobilfunkmasten so in einem Gebiet zu verteilen, dass diese sich nicht gegenseitig stören und gleichzeitig eine gute Serviceversorgung der Nutzer gewährleisten (vgl. [18]).

Zwei weitere in dieser Arbeit speziell behandelte Kennzahlen sind durch die sog. Kreispackungszahlen eines Graphen gegeben. Hierbei beschreiben $\nu(G)$ die maximale Anzahl an knotendisjunkten Kreisen bzw. $\nu'(G)$ die maximale Anzahl an kantendisjunkten Kreisen eines Graphen G . Innerhalb von Abbildung 1.1 werden drei Graphen und jeweils mindestens eine knoten- bzw. kantendisjunkte Kreispackung gezeigt.

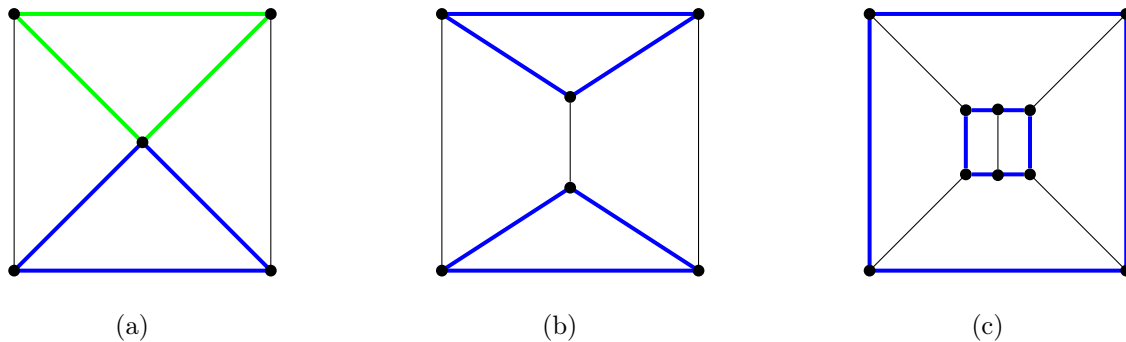


Abbildung 1.1: Beispielhafte Darstellung von drei Graphen zur Visualisierung von knoten- und kantendisjunkten Kreispackungen. Bemerke, in (a) ist eine knotendisjunkte Kreispackung sowohl durch den grün bzw. blau dargestellten Kreis gegeben. In (b) und (c) ist eine knotendisjunkte Kreispackung durch die zwei blau dargestellten Kreise gegeben. Die grün und blau skizzierten Kreise in (a) und die zwei blau dargestellten Kreise in (b) und (c) sind kantendisjunkt.

Da offensichtlich jede knotendisjunkte Kreispackung auch immer kantendisjunkt ist, gilt

$$\nu(G) \leq \nu'(G).$$

Nach Abbildung 1.1(a) ist offenbar nicht jede kantendisjunkte Kreispackung (hier gegeben durch sowohl den grün als auch blau gekennzeichneten Kreis) auch knotendisjunkt. Dieser Zusammenhang gilt allerdings in (b) und (c). Dies liegt daran, dass die in (b) und (c) dargestellten Graphen kubisch sind, d.h. das sämtliche Knoten den Knotengrad von drei besitzen.

Bezeichnet n die Ordnung von einem Graphen G , d.h. die Anzahl an Knoten in G und m die Größe von G , d.h. die Anzahl an Kanten in G , dann kann mit

$$\nu(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \quad \text{und} \quad \nu'(G) \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor$$

jeweils eine obere Schranke für sog. schlichte, ungerichtete Graphen G angegeben werden. Das liegt daran, dass jeder Kreis in G mindestens die Länge 3 besitzt. Die Beispiele in Abbildung 1.1 zeigen, dass die so abgeleitete obere Schranke an $\nu(G)$ in den Graphen aus (a) und (b) aber nicht in (c) mit Gleichheit angenommen wird. Zudem wird die obere Schranke an $\nu'(G)$ für den in (a) dargestellten Graphen angenommen, nicht aber in den Graphen aus (b) und (c).

Anwendungsbeispiele, die die praktische Relevanz der Kreispackungszahlen bzw. der maximalen Kreispackungen zeigen, bilden u.a. das Genom Rearrangement [4] und Sorting by Reversals [13] in der Biologie sowie die Ausgestaltung optischer Netzwerke [3], [19] oder die Rundgangsplanung [58].

- Beim Genom Rearrangement und Sorting by Reversals wird der Verwandtschaftsgrad zweier Spezies über den Abstand ihrer Gensequenzen gemessen. In diesem Zusammenhang sei Abstand als minimal notwendige Anzahl an Reversals (Gensequenzumkehrungen) verstanden, um die eine Gensequenz in die andere zu überführen. In [13] wurde die Bestimmung des Abstands der gegebenen Gensequenzen auf das Auffinden einer Kreispackungszahl in einem speziell gewählten sog. Euler-Graphen zurückgeführt.
- Optische Netzwerke sind Faserkabelnetze, deren Datenübertragung auf Lichtwellenkanälen unterschiedlicher Wellenlänge basiert. Innerhalb des optischen Netzwerks sollen Datensätze ausgehend von einer Quelle (einem Knoten innerhalb des Netzwerks) zu einer Senke (einem anderen Knoten des Netzwerks) übertragen werden. Da das Übertragen einzelner Daten über einzelne Lichtwellenkanäle sich häufig als ineffizient bzgl. der Auslastung der maximalen Bandbreite der Lichtwellenkanäle erweist, wird die Datenübertragung im Netzwerk durch eine geeignete Bündelung von Datenpaketen, dem sog. traffic grooming, auf speziellen Intervallen effizient realisiert. Dazu werden innerhalb der Netzwerkgestaltung sog. Light-Paths festgelegt, die es ermöglichen, dass im Netzwerk jeder zu übertragende Datensatz ausgehend von seiner Quelle über eine Folge von Light-Paths zu seiner Senke übermittelt wird. Da mit Anzahl der Light-Paths innerhalb eines Netzwerks auch die Kosten ansteigen, leitet sich die Frage nach der Minimierung der Light-Paths unter Berücksichtigung

der zu übertragenden Datensätze ab, dem sog. Light-Path-Minimization Problem. Für den Spezialfall des Light-Path-Minimization Problems mit Halb-Wellenlängen Volumen, also einem konstanten Datensatzvolumen mit halbiertem Bandbreite, kann die minimale Anzahl an benötigten Light-Paths über die Anzahl an zu versendenden Datensätzen abzüglich der Kreispackungszahl für kantendisjunkte Kreise in einem konstruierten Nachfrage-Graphen abgeleitet werden. Der Nachfrage-Graph besteht hierbei aus den Knoten des Netzwerks und Kanten gegeben durch die Quellen und Senken der zu übertragenden Datensätze ([3], [19]).

- Ein spezielles Postbotenproblem bzw. Rundgangsproblem ist durch das sog. Spontaneous Postman Problem gegeben. Dieses Problem ist dadurch charakterisiert, dass die Reihenfolge der Tour, die der Postbote wählt bzw. der Rundgang, den ein Kunde nutzt, a priori unbekannt ist. Der Postbote bzw. Kunde entscheidet an jeder Straßenkreuzung spontan, welchen der noch nicht durchschrittenen Straßen er als nächstes nutzen wird und beendet seine Tour an einer Kreuzung, an der keine noch nicht durchschrittene Straße mehr vorliegt. Daraus abgeleitet ergeben sich u.a. die folgenden drei Fragestellungen:

- (i) Wie muss ein Rundgang bzw. Postbotendistrikt konzipiert sein, um es einem sich nach einer solchen Strategie verhaltenden Postboten bzw. Kunden zu ermöglichen, den gesamten Distrikt bzw. Rundgang zu durchschreiten und am Ende der Tour wieder am Startort auszukommen?
- (ii) Was ist ein möglichst großes Teilgebiet - ein Gebiet maximal in der Anzahl an Straßen - eines gegebenen Straßennetzes, das durch einen Postboten, der nach obiger Strategie handelt und am Ende seiner Tour wieder am Startort auskommen möchte, abgedeckt werden kann?
- (iii) Wie kann ein gegebenes Straßennetz in s Distrikte aufgeteilt werden, so dass s Postboten, die nach obiger Strategie handeln und in s unterschiedlichen Standorten ihre Tour starten und wieder beenden möchten, das gegebene Straßennetz vollständig abdecken, also jede Straße des Straßennetzes mindestens durch einen der Postboten durchlaufen wird?

Die Fragestellungen (ii) und (iii) lassen sich auf das Auffinden einer maximalen

Kreispackung in speziell gewählten sog. Euler-Graphen zurückführen. Dabei können die Rundgänge bzw. die Postbotendistrikte durch planare Graphen modelliert werden.

Eine detaillierte Übersicht zu den drei an dieser Stelle skizzierten Anwendungsgebieten der maximalen Kreispackungen ist in [64] aufgelistet.

Im Allgemeinen ist die Bestimmung einer maximalen Kreispackung sowie der zugehörigen Kreispackungszahl ein NP-schweres Problem [14]. Demnach werden Heuristiken zur Annäherung der Kennzahlen herangezogen bzw. spezielle Struktureigenschaften der betrachteten Graphen gefordert, um exakte Resultate für bzw. gute Schranken an die Kreispackungszahlen anzugeben. Hierbei kann die Forderung weiterer Struktureigenschaften an einen Graphen genutzt werden, um auch Zusammenhänge zwischen Kreispackungszahlen in Graphen mit diesen Struktureigenschaften und weiteren Kennzahlen abzuleiten, die für Graphen ohne diese Struktureigenschaften nicht zwangsläufig gelten. Beispielsweise wird in [39] ein Zusammenhang von $\nu(G)$ und der sog. zyklomatischen Zahl in sog. Kaktusgraphen beschrieben. Zudem kann so ggf. auch die Ableitung bestmöglicher oberer Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ erfolgen, die für Graphen ohne diese Struktureigenschaften nicht zwangsläufig gelten (vgl. [60] und [65]). Dies wird u.a. in Kapitel 2 und Kapitel 3 für polyhedrale Graphen, in Kapitel 4 für Halin-Graphen und in Kapitel 5 für Fulleren-Graphen erfolgen.

Bevor innerhalb des folgenden Abschnittes der weitere Aufbau dieser Arbeit skizziert wird, sei vorab kurz die Relevanz der innerhalb dieser Arbeit betrachteten speziellen polyhedralen Graphen verdeutlicht und es sei auf ein Anwendungsgebiet in der Chemie eingegangen. Zudem wird motiviert, weshalb die Herleitung oberer Schranken an die konten- bzw. kantendisjunkte Kreispackungszahl für diese Graphen von Forschungsinteresse ist.

Ein großes Anwendungsgebiet sog. polyhedraler Graphen liegt in der Modellierung anorganischer Strukturen in der Chemie. Hier werden die sog. Koordinationspolyeder und die Koordinationszahl von Molekülen genutzt, um die Größenverhältnisse der Atome des Moleküls und die Bindungskräfte innerhalb der kristallinen Struktur zu charakterisieren (vgl. [50]). Koordinationspolyeder sind daher Modelle, die die

Umgebung eines Atoms darstellen. Die Koordinationszahl entspricht der Anzahl an benachbarten Atomen bzw. Ecken des konvexen Koordinationspolyeders und das Koordinationspolyeder den gedanklich durch Linien verbundenen Mittelpunkte der benachbarten Atome. Als ein Beispiel sei Natriumchlorid angeführt. Dazu ist in Abbildung 1.2 eine sog. Elementarzelle des Natriumchlorids visualisiert.

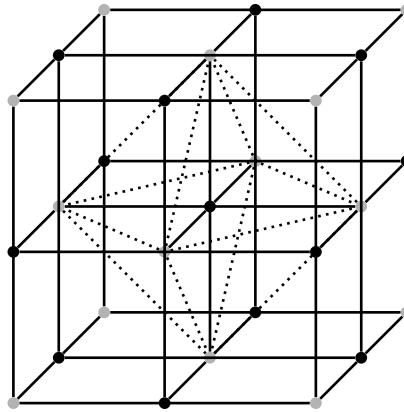
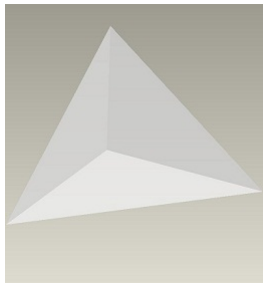


Abbildung 1.2: Beispielhafte strukturelle Darstellung von Natriumchlorid $NaCl$. Bemerke, die grau gekennzeichneten Knoten entsprechen Na -Atomen und die schwarz gekennzeichneten Knoten Cl -Atomen. Die gestrichelt gekennzeichneten Kanten entsprechen den Kanten des oktaedrischen Koordinationspolyeders des sich im Zentrum befindenden Cl -Atoms.

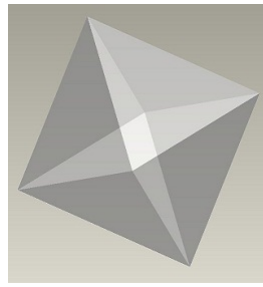
Beispiele zu weiteren Koordinationspolyedern sind in [50] gegeben und veranschaulicht. Es sei bemerkt, dass Koordinationspolyeder häufig ein hohes Maß an Symmetrie aufweisen und konvexe Polyeder als Modelle dienen, an denen beispielsweise Material- und Symmetrieeigenschaften chemischer Strukturen visualisiert werden können.

Die durch stereographische Projektion konvexer Polyeder in eine Ebene charakterisierten Graphen werden als sog. polyhedrale Graphen bezeichnet. Hierzu seien beispielhaft in Abbildung 1.3 ausgehend von drei Polyedern, die jeweils zugehörigen polyhedralen Graphen dargestellt. So wird in (d) der polyhedrale Graph zugehörig zum Tetraeder (3-dimensional in (a) dargestellt) veranschaulicht. Selbiges gilt für die polyhedralen Graphen (in (e), (f)) des Oktaeders (in (b)) sowie Dodekaeders (in (c)). Bemerke, in (e) wird also der polyhedrale Graph zugehörig zum 3-dimensionalen Oktaeder (dem Koordinationspolyeder von Natriumchlorid $NaCl$) skizziert.

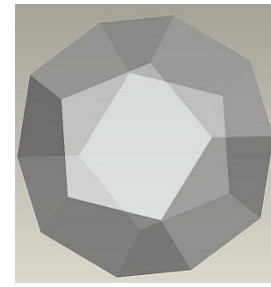
Zu polyhedralen Graphen sei angeführt, dass eine allgemeine Formel für die Anzahl



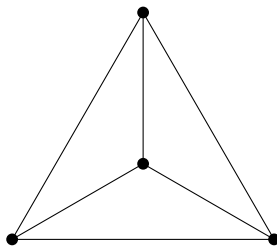
(a) Tetraeder



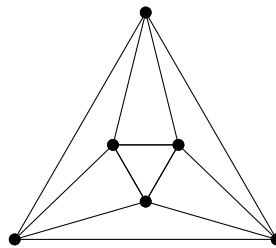
(b) Oktaeder



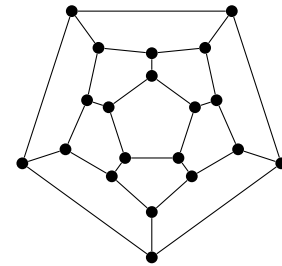
(c) Dodekaeder



(d) Tetraedergraph



(e) Oktaedergraph



(f) Dodekaedergraph

Abbildung 1.3: Beispielhafte Darstellung von drei Polyedern sowie den zugehörigen polyhedralen Graphen. Der in (d) dargestellte polyhedrale Graph (innerhalb dieser Abbildung verkürzt als Tetraedergraph bezeichnet) zugehörig zum in (a) 3-dimensional dargestellten Tetraeder. Der in (e) dargestellte polyhedrale Graph (innerhalb dieser Abbildung verkürzt als Oktaedergraph bezeichnet) zugehörig zum in (b) 3-dimensional dargestellten Oktaeder. Der in (f) dargestellte polyhedrale Graph (innerhalb dieser Abbildung verkürzt als Dodekaedergraph bezeichnet) zugehörig zum in (c) 3-dimensional dargestellten Dodekaeder.

der nicht-isomorphen polyhedralen Graphen mit fest gewählter Ordnung, Größe bzw. sog. Anzahl an Gebieten unbekannt ist. Für polyhedrale Graphen mit geringer Größe (kleiner 22) sind die Anzahlen an nicht-isomorphen Graphen in den Arbeiten von Duijvestijn [24] und Federico [25] angegeben. Für polyhedrale Graphen der Größe 22 ist die Anzahl an nicht-isomorphen polyhedralen Graphen gleich 485.704. Für die Größe 26 ist die Anzahl 67.017.765 eine untere Schranke für die Anzahl an nicht-isomorphen polyhedralen Graphen.

Dieses Wachstum an nicht-isomorphen polyhedralen Graphen geringer Größe zeigt, dass schon die exakte algorithmische Bestimmung der Anzahlen an nicht-isomorphen polyhedralen Graphen nur für geringe Größe bzw. Ordnung realisierbar ist. Betracht-

tet man nun eine spezielle Graphenklasse polyhedraler Graphen bspw. mit fester Ordnung bzw. Größe, so stellt sich die Frage, ob eine obere bzw. auch untere Schranke an die knoten- bzw. kantendisjunkte Kreispackungszahl eines beliebig gewählten Graphen innerhalb dieser Graphenklasse angegeben werden kann.

Genau dies erfolgt in [60] und [65]. Hier werden erstmalig bestmögliche obere und untere Schranken an die knoten- und kantendisjunkte Kreispackungszahl in speziell gewählten polyhedralen Graphen beschrieben und eine Konstruktionssystematik von Graphen G vorgestellt, derart, dass zusätzlich zu der Kreispackungszahl auch immer eine maximale Kreispackung in G angegeben werden kann. Dabei wird eine Schranke in Abhängigkeit von der Ordnung, von der Größe bzw. von der Anzahl an Gebieten hergeleitet. Motiviert durch die Eulersche Polyederformel, die den Zusammenhang zwischen der Ordnung, Größe und Anzahl an Gebieten des zugehörigen planaren Graphen beschreibt, stellt sich offensichtlich die Frage, ob die in [60] angegebenen Schranken verallgemeinert werden können, also eine Schranke an die knoten- und kantendisjunkte Kreispackungszahl abgeleitet werden kann, falls sowohl die Ordnung als auch Größe und somit auch die Anzahl an Gebieten eines Graphen gegeben sind. Ferner ist eine natürliche Fragestellung aufbauend auf den Ergebnissen aus [60], ob das Fordern von weiteren Struktureigenschaften erneut bestmögliche Schranken an die knoten- bzw. kantendisjunkte Kreispackungszahl in den Graphen mit diesen Eigenschaften liefert. Genau hier wird der Fokus der Betrachtung innerhalb dieser Arbeit liegen.

Zwei spezielle Unterklassen der polyhedralen Graphen bilden sog. Halin-Graphen sowie Fulleren-Graphen.

- Halin-Graphen zeichnen sich u.a. durch ihre geringe sog. Baumweite von höchstens 3 aus (vgl. [8]). Hierbei ist die Baumweite des Graphen ein Maß dafür wie "baum-ähnlich" dieser Graph ist und entspricht formal der minimalen Weite aller Baumzerlegungen des Graphen. Durch die geringe Baumweite von Halin-Graphen können viele Anwendungen bzw. Algorithmen, die im Allgemeinen in nicht akzeptabler Rechenzeit terminieren, effizient gelöst werden. So sind Anwendungen wie beispielsweise das Handlungsreisendenproblem oder das Bottleneck Handlungsreisendenproblem für Halin-Graphen im Detail ana-

lysiert worden und lassen sich in polynomieller Zeit lösen [53].

- Fulleren-Graphen sind über spezielle 3-dimensionale Kohlenstoffmoleküle, sogenannte Fullerene, definiert. Diese Moleküle sind 1985 erstmalig experimentell hergestellt worden und weisen seitdem ein interdisziplinäres Forschungsgebiet auf. Beispiele für Anwendungen von Fullerenen liegen in der Krebsforschung [48], der HIV-Forschung [5], der Solarzellenforschung [21] und der Wasserstoffspeicherung [72]. Graphentheoretische Kennzahlen unterstützen dabei, diese molekularen Strukturen besser zu charakterisieren [32] und bzgl. chemischer Eigenschaften - wie beispielsweise der Stabilität - einzuordnen [29], [23].

Abbildung 1.3 zeigt in (d) mit dem polyhedralen Graphen zugehörig zum Tetraeder bzw. in (f) mit dem polyhedralen Graphen zugehörig zum Dodekaeder den bzgl. der Ordnung kleinsten Halin- bzw. Fulleren-Graphen. Detaillierte Übersichten zum aktuellen Forschungsstand in Bezug auf Halin-Graphen sowie Fulleren-Graphen und relevante bekannte graphentheoretische Kennzahlen werden in den jeweiligen Kapiteln dieser Arbeit ausgeführt.

Heutige Datenbanksysteme erlauben die Speicherung und Analyse großer Datenmengen (vgl. [16]). Demzufolge sind im Rahmen der chemischen Informatik Algorithmen zur Bestimmung graphentheoretischer Kennzahlen von Forschungsinteresse, die es ermöglichen Material- und Struktureigenschaften chemischer Stoffe zu simulieren und dadurch Materialien zu klassifizieren (vgl. [30], [31], [63]). Innerhalb dieser Arbeit wird die Kreispackungszahl für alle Fulleren-Graphen von der Ordnung kleiner oder gleich 70 bestimmt. Allerdings wächst genau wie für polyhedrale Graphen auch die Anzahl an Halin- und Fulleren-Graphen mit fester Ordnung stark an. So existieren bspw. für Fulleren-Graphen der Ordnung 60 insgesamt 1.812 nicht-isomorphe Graphen, hingegen schon 14.059.174 nicht-isomorphe Graphen für Fulleren-Graphen der Ordnung 150 (vgl. dazu [10]). Nach [11] existieren 132.247.999.328 nicht-isomorphe Fulleren-Graphen der Ordnung 400. Demnach sind in Abhängigkeit von der Ordnung definierte gute obere und untere Schranken an Kennzahlen im Allgemeinen und im Speziellen an Kreispackungszahlen von Interesse für Auswertungen und Anwendungen dieser Graphenklassen.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, die Kreispackungszahlen für Graphenklassen polyhedraler Graphen und hierbei speziell der Halin- und Fulleren-Graphen zu beschreiben, obere Schranken anzugeben und eine Aussage über die Güte der Schranken, also deren Abweichung zu der jeweiligen Kreispackungszahl, zu treffen. Zudem soll für Halin- und Fulleren-Graphen ein Zusammenhang zwischen den Kreispackungszahlen und weiteren Kennzahlen untersucht werden.

1.2 Aufbau

Zu Beginn werden in Kapitel 2 Definitionen aus dem Bereich der Graphentheorie gegeben, die innerhalb dieser Arbeit Verwendung finden. Im Anschluss werden die Definition einer maximalen knoten- bzw. kantendisjunkten Kreispackung und Kreispackungszahl angegeben und auf einen Literaturüberblick für maximale Kreispackungen bzw. die Kreispackungszahl eines Graphen eingegangen. Ferner wird auf die Graphenklasse der planaren und polyhedralen Graphen sowie grundlegende Theoreme wie bspw. die Eulersche Polyederformel eingegangen. Zudem werden platonische und archimedische Körper sowie deren zugehörige polyhedralen Graphen eingeführt, die zugehörigen Kreispackungszahlen angegeben und somit die Betrachtung der Aufgabenstellung für weitere Unterklassen polyhedraler Graphen motiviert.

In Kapitel 3 wird durch Betrachtung polyhedraler Graphen mit fest gewählter Ordnung und Größe eine Verallgemeinerung der Resultate in [60] bzgl. oberer Schranken an Kreispackungszahlen untersucht. Es wird innerhalb des Kapitels analysiert, ob die abgeleiteten oberen Schranken für knoten- und kantendisjunkte Kreispackungszahlen bei polyhedralen Graphen mit fest gewählter Ordnung und Größe bestmöglich sind, also ein Graph angegeben werden kann, dessen Kreispackungszahl den über die Schranke angegebenen Wert annimmt. Dazu wird jeweils ausgehend von speziell gewählten polyhedralen Graphen mit bestimmten Eigenschaften eine Konstruktions-systematik weiterer polyhedraler Graphen vorgestellt, die erneut diese Eigenschaft besitzen.

In Kapitel 4 werden Halin-Graphen, eine Unterklasse polyhedraler Graphen, beschrieben und definiert. Es wird auf die speziellen Struktureigenschaften dieser po-

lyhedralen Graphenklasse eingegangen mit dem Ziel, Schranken abzuleiten. Obere Schranken an Kreispackungszahlen für knoten- sowie kantendisjunkte maximale Kreispackungen werden analysiert. Die Herangehensweise ist dabei ähnlich zu der für polyhedrale Graphen. Es wird eine obere Schranke definiert und es werden Halin-Graphen mit speziellen Eigenschaften konstruiert, derart, dass innerhalb dieser Graphen eine Kreispackung angegeben werden kann, welche die obere Schranke an die knoten- bzw. kantendisjunkte Kreispackungszahl des Halin-Graphen annehmen.

In Kapitel 5 werden die zentralen Fragen der Arbeit in Bezug auf Kreispackungen und deren Kreispackungszahlen für Fulleren-Graphen behandelt. Dabei wird der Zusammenhang zwischen der Kreispackungszahl eines Fulleren-Graphen und der Unabhängigkeitszahl des zugehörigen Dualgraphen untersucht. Ferner wird zur vollständigen Übersicht an obere Schranken für die maximale Kreispackungszahl in Fulleren-Graphen ein spezielles sog. Maximum Independent-Set Problem gelöst werden. Des Weiteren sollen die so erzielten Ergebnisse genutzt werden, um die Güte einer unteren Schranke für polyhedrale Graphen aus [60] ins Verhältnis zu Fulleren-Graphen zu setzen. Abschließend werden Fulleren-Graphen mit einer in Abhängigkeit von der Ordnung des Graphen geringen Kreispackungszahl konstruiert. Hierzu sei bemerkt, dass in [31] gezeigt wird, dass für spezielle Fulleren-Graphen die Unabhängigkeitszahl des Dualgraphen proportional zur Ordnung des Fulleren-Graphen ist.

In Kapitel 6 werden die erzielten Ergebnisse zusammengefasst, interpretiert und in den Kontext zum aktuellen Stand der Forschung gesetzt.

2 Grundlagen

Dieses Kapitel befasst sich zum einen mit der Einführung graphentheoretischer Definitionen und zum anderen mit der Beschreibung planarer und polyedraler Graphen sowie deren speziellen Eigenschaften. In Abschnitt 2.1 dieses Kapitels werden grundlegende graphentheoretische Definitionen gegeben, die zum weiteren Verständnis der Arbeit notwendig sind. In Abschnitt 2.2 wird detailliert auf die Graphenklasse der planaren Graphen eingegangen. Es werden ferner zentrale Resultate planarer Graphen formuliert, die für die Bestimmung der Schranken an die Kreispackungszahlen in den nächsten Kapiteln von zentraler Bedeutung sein werden. Abschließend werden in Abschnitt 2.3 polyhedrale Graphen definiert.

2.1 Graphen und Kreispackungen

Ein *endlicher Graph* G ist ein Paar $G = (V(G), E(G))$ bestehend aus einer endlichen Menge an *Knoten* $V(G)$ und einer endlichen Multimenge an *Kanten* $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$. Eine Kante $e \in E(G)$ sei mit $e = (u, v)$ bezeichnet. Die Knoten u, v heißen *Endpunkte* von e . Wird nicht zwischen (u, v) und (v, u) unterschieden, so heißt G *ungerichtet*. Für $e = (u, v) \in E(G)$ heißt u *adjazent* zu v , e *inzident* zu u, v und u, v *inzident* zu e . Die Mächtigkeit $n = |V(G)|$ der Knotenmenge $V(G)$ heißt *Ordnung* von G . Die Mächtigkeit $m = |E(G)|$ der Kantenmenge $E(G)$ heißt *Größe* von G . Eine Kante $e = (u, v)$ mit $u = v$ heißt *Schlinge*. Falls es zwei verschiedene Kanten $e_i, e_j \in E(G)$ gibt mit $e_i = (u, v)$ und $e_j = (u, v)$, so heißt $(u, v) \in E(G)$ *Multikante* in G . Enthält G weder Schlingen noch Multikanten, so heißt G *schlicht*. Im Folgenden werden ausschließlich schlichte, ungerichtete, endliche Graphen betrachtet.

Die Anzahl $\delta(v)$ der zu $v \in V(G)$ inzidenten Kanten heißt *Grad* von v . Ein Knoten

$v \in V(G)$ mit $\delta(v) = 0$, heißt *isolierter Knoten*. Ein Graph G heißt *r-regulär*, falls $\delta(v) = r$ für alle $v \in V(G)$. Ein 3-regulärer Graph heißt *kubisch*.

Ein Graph $H = (V(H), E(H))$ mit $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$ heißt *Teilgraph von G* . Für $V' \subset V(G)$ sei $G - V' := (V(G) \setminus V', \{(u, v) \in E(G) \mid u, v \in V(G) \setminus V'\})$ und für $E' \subset E(G)$ sei $G - E' := (V(G), E \setminus E')$. Ist $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) = E(G) \cap (V(H) \times V(H))$, so heißt $H = (V(H), E(H))$ der von $V(H)$ *knoten-induzierte Teilgraph von G* . Ist $E(H) \subseteq E(G)$ und $V(H) = \{v \in V(G) \mid v \text{ Endpunkt von } e \in E(H)\}$, so heißt $H = (V(H), E(H))$ der von $E(H)$ *kanten-induzierte Teilgraph von G* .

Sei $(v_{i_0}, e_1, v_{i_1}, e_2, \dots, v_{i_{s-1}}, e_s, v_{i_s})$ eine endliche Folge mit $v_{i_j} \in V(G)$ und paarweise verschiedenen Kanten $e_j = (v_{i_{j-1}}, v_{i_j}) \in E(G)$ und sei $W(v_{i_0}, v_{i_s})$ ein Teilgraph von G mit $V(W) = \{v_{i_j} \in V(G) \mid j \in \{0, \dots, s\}\}$ und $E(W) = \{e_j \in E(G) \mid j \in \{1, \dots, s\}\}$. Dann heißt W *Kantenzug der Länge $l(W) = s$ mit Anfangsknoten v_{i_0} und Endknoten v_{i_s}* . Ein Kantenzug W mit $\delta(v) \leq 2$ für alle $v \in V(W)$ heißt *Pfad*. Ein Pfad $W(v_{i_0}, v_{i_s})$ sei verkürzt durch die Knotenfolge $(v_{i_0}, \dots, v_{i_s})$ beschrieben. Ein Pfad $C = W(v_{i_0}, v_{i_s})$ mit $v_{i_0} = v_{i_s}$ heißt *Kreis* der Länge $l(C) = s$.

Für einen Graphen G sei $\text{girth}(G)$ die Länge eines kürzesten Kreises C in G , d.h. $\text{girth}(G) = \min_{C \subseteq G} l(C)$. Existiert kein Kreis in G , so heißt G *zyklenfrei*. In diesem Fall sei formal $\text{girth}(G) := \infty$. Es gilt $\text{girth}(G) \geq 3$.

Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, falls für jedes Paar $u, v \in V(G)$ ein Pfad $W(u, v)$ in G existiert. Ein Teilgraph \tilde{G} von G heißt *Zusammenhangskomponente*, falls $V(\tilde{G}) \neq \emptyset$, \tilde{G} zusammenhängend ist und \tilde{G} maximal bzgl. dieser Eigenschaft ist, d.h. falls \tilde{G} Teilgraph eines zusammenhängenden Graphen \hat{G} mit \hat{G} Teilgraph von G ist, so gilt $\tilde{G} = \hat{G}$. Ein zusammenhängender, zyklenfreier Graph G heißt *Baum*. Ein Graph G heißt *k-fach knotenzusammenhängend*, falls für jedes Paar $u, v \in V(G)$ k Pfade $W_i(u, v)$, mit $i \in \{1, \dots, k\}$ in G existieren, so dass für $i \neq j$ gilt: $(V(W_i(u, v)) \setminus \{u, v\}) \cap (V(W_j(u, v)) \setminus \{u, v\}) = \emptyset$. Eine Knotenmenge $V' \subset V$ der Kardinalität n' heißt *n' -Knoten-Separator* von G , falls $G - V'$ nicht zusammenhängend ist. Bemerke, G ist k -fach knotenzusammenhängend, falls kein $k - 1$ -Knoten-Separator existiert.

Zwei Graphen $G_1 = (V(G_1), E(G_1)), G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ heißen *isomorph*, wenn

eine bijektive Abbildung $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ existiert, mit der Eigenschaft $(v_i, v_j) \in E(G_1) \Leftrightarrow (\phi(v_i), \phi(v_j)) \in E(G_2)$. Ein Graph $G_1 := (V(G) \cup \{v\}, E(G) \cup \{e_1, e_2\} \setminus \{e\})$ mit $e = (u, w) \in E(G)$, $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (v, w)$ heißt *einfache Unterteilung* von G und die Kante $e \in E(G)$ heißt *unterteilt* durch den Pfad (u, v, w) in G_1 . Ein Graph G' heißt *Unterteilung* von G , falls es eine endliche Folge von Graphen G_i mit $i \in \{0, \dots, s\}$ und $G_0 = G$ sowie $G_s = G'$ gibt, derart, dass G_i eine einfache Unterteilung von G_{i-1} für alle $i \in \{1, \dots, s\}$ ist. Zwei Graphen heißen *homöomorph*, falls sie isomorphe Unterteilungen besitzen (zur Veranschaulichung siehe Abbildung 2.1).

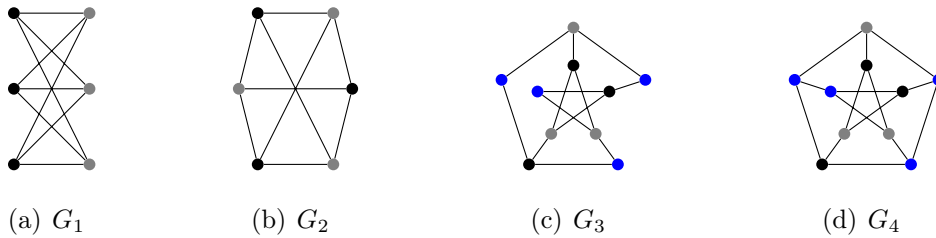


Abbildung 2.1: Grafische Veranschaulichung der *Homöomorphie* zweier Graphen. Der Graph G_1 ist isomorph zu G_2 , aber nicht zu G_3 . Der Graph G_3 ist homöomorph zu G_1 und zu G_2 . Der Graph G_3 ist Teilgraph von G_4 . Der Graph G_4 ist weder homöomorph zu G_1 noch zu G_2 .

Eine Menge $U \subseteq V(G)$ mit $E(G) \cap (U \times U) = \emptyset$ heißt *unabhängige Menge* von G . Eine unabhängige Menge maximaler Kardinalität $\alpha(G)$ heißt *maximale unabhängige Menge* von G und $\alpha(G)$ heißt *Unabhängigkeitszahl*.

Bevor nun eine maximale Kreispackung formal definiert wird sei ein kurzer Überblick zu Resultaten in Bezug auf maximale Kreispackungen in Graphen gegeben. Dazu sei u.a. auf [27], [38], [39], [41], [54], [55], [56], [57], [58] und [64] verwiesen. Hierbei sei vorab bemerkt, dass eine “maximale Kreispackung“ innerhalb dieser Quellen teils unterschiedlich definiert wird. So werden beispielsweise in [54] knotendisjunkte Kreispackungen in ungerichteten (und gerichteten) Graphen betrachtet und diese heißen maximal, wenn es keine Kreispackung gibt, mit größerer Anzahl an Knoten innerhalb der Kreispackung. Es wird gezeigt, dass ein Knoten in der Knotenmenge des Graphen existiert, der in jeder maximalen Kreispackung enthalten ist. In [41] wird die maximale Anzahl an sog. kantendisjunkten Kopien isomorpher, zyklischer,

planarer Teilgraphen (u.a. Kreise) eines gegebenen planaren Graphen (zur Definition planarer Graphen siehe Abschnitt 2.2) analysiert. In [27] wird gefordert, dass alle Kreise der Kreispackung die gleiche (aber ungerade) Länge besitzen. Es werden maximale kantendisjunkte Kreispackungen in einem speziell konstruierten Graphen ausgehend von dem vollständigen Graphen der Ordnung n (zur Definition siehe Abschnitt 2.2) analysiert. Sowohl in [41] als auch [27] eine Kreispackung maximal, wenn es keine Kreispackung gibt, mit größerer Anzahl an Kreisen innerhalb der Kreispackung. Es wird in beiden Referenzen gefordert, dass die Kreise einer Kreispackung alle die gleiche Länge besitzen.

Die in dieser Arbeit verwendete Definition von Kreispackungen sei im Gegensatz zu den obig angegebenen Definitionen nun wie folgt: Es seien C_1, \dots, C_q Kreise in G mit der Eigenschaft $V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann heißt $Z(G) = \{C_1, \dots, C_q\}$ *knotendisjunkte Kreispackung* in G . Eine knotendisjunkte Kreispackung $Z^*(G)$ maximaler Kardinalität $\nu(G)$ heißt *maximale knotendisjunkte Kreispackung* von G und $\nu(G)$ heißt *knotendisjunkte Kreispackungszahl*. Es seien C'_1, \dots, C'_q Kreise in G mit der Eigenschaft $E(C'_i) \cap E(C'_j) = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann heißt $Z(G) = \{C'_1, \dots, C'_q\}$ *kantendisjunkte Kreispackung* in G . Eine kantendisjunkte Kreispackung $Z^*(G)$ maximaler Kardinalität $\nu'(G)$ heißt *maximale kantendisjunkte Kreispackung* von G und $\nu'(G)$ heißt *kantendisjunkte Kreispackungszahl*. Die Knotenmenge einer Kreispackung $Z(G)$ sei mit $V(Z(G))$ und die Kantenmenge mit $E(Z(G))$ bezeichnet. Somit induziert jede Kreispackung einen Graphen $\tilde{G} = (V(Z(G)), E(Z(G)))$.

Nach dieser Definition ist also eine knoten- bzw. kantendisjunkte Kreispackung maximal, wenn es keine knoten- bzw. kantendisjunkte Kreispackung mit größerer Anzahl an Kreisen innerhalb des Graphen gibt. Hierbei können die Kreise der Kreispackung im Gegensatz zu [41] und [27] auch unterschiedliche Länge aufweisen. Diese "Definition einer Kreispackung" und der "Maximalität der Kreispackung" wird u.a. auch in den folgenden Quellen verwendet:

- In [38] wird ein Zusammenhang zwischen $\nu'(G)$ und der zyklomatischen Zahl $\mu(G) := m - n + \kappa(G)$ untersucht, wobei m die Größe, n die Ordnung und $\kappa(G)$ die Anzahl an Zusammenhangskomponenten innerhalb des Graphen G beschreibt. Allgemein gilt $\nu'(G) \leq \mu(G)$ und in [38] wird für jedes $k \geq 0$

nachgewiesen, dass jeder zweifach knotenzusammenhängende Graph, für den $\mu(G) - \nu'(G) = k$ gilt, das Ergebnis einer speziellen Erweiterung einer endlichen Anzahl an Graphen ist. Zudem wird gezeigt, dass für sog. Kaktusgraphen G gilt: $\nu'(G) = \mu(G)$.

- In [56], [55] sowie in [64] wird $\nu'(G)$ in sog. Euler-Graphen G über den minimalen Knotengrad der Knoten in G nach unten abgeschätzt. Zudem werden Graphen charakterisiert, deren kantendisjunkte Kreispackungszahl $\nu'(G)$ genau um eins geringer ist als deren zyklomatische Zahl $\mu(G)$ (also $\nu'(G) = \mu(G) - 1$).
- In [39] werden sog. Knotenseparatoren $S(G)$ verwendet, um $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ zu bestimmen. Dabei ist $S(G)$ ein Knotenseparator von G , falls sich dessen Knotenmenge in drei nicht leere Mengen $S(G)$, $V_1(G)$ und $V_2(G)$ unterteilen lässt, mit der Eigenschaft, dass in $E(G)$ keine Kante (u, v) existiert mit $u \in V_1(G)$ und $v \in V_2(G)$. Ziel ist es dann einen Graphen G geschickt in Graphen G' mit geringerer Ordnung $n' = |V(G')|$ mit $n' \leq \max\{|V_1(G)|, |V_2(G)|\} + |S(G)|$ zu überführen, um so $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ ausgehend von $\nu(G')$ bzw. $\nu'(G')$ zu bestimmen.
- In [57] wird $\nu'(G)$ sowie eine zugehörige maximale Kreispackung für sog. verallgemeinerte Petersen-Graphen G angegeben. Hier wird die spezielle Struktur der verallgemeinerten Petersen-Graphen genutzt, um $\nu'(G)$ in Abhängigkeit von der Ordnung des Graphen anzugeben.
- In [58] wird gezeigt, dass ausgehend von einer maximalen Kreispackung für jeden Knoten in einem sog. Euler-Graphen ein sog. maximaler Trace zugehörig zu diesem Knoten hergeleitet werden kann.

Es sei an dieser Stelle angeführt, dass alle angegebenen Referenzen konzeptionell gemein haben, dass über spezielle Eigenschaften der in den jeweiligen Quellen betrachteten Graphen (bspw. sog. Euler- und sog. Petersen-Graphen) entweder eine maximale Kreispackung bzw. Kreispackungszahl bestimmt werden kann oder ein Zusammenhang zwischen einer maximalen Kreispackung bzw. der Kreispackungszahl der betrachteten Graphen und weiteren graphentheoretischen Kennzahlen (wie bspw. der zyklomatischen Zahl) des Graphen abgeleitet werden kann. In dieser Arbeit wird ein Zusammenhang zwischen der Kreispackungszahl für sog. Halin- und

Fulleren-Graphen G sowie der Unabhängigkeitszahl des zu G gehörigen sog. Dualgraphen (zur Definition siehe Abschnitt 2.2) erfolgen. Zudem werden für speziell konstruierte Graphen G eine knoten- bzw. kantendisjunkte maximale Kreispackung und daraus abgeleitet $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ bestimmt.

Aufbauend auf den grundlegenden Definitionen, die im Zusammenhang mit den in dieser Arbeit betrachteten Graphen notwendig sind, werden nun im nächsten Abschnitt planare Graphen in den Blick genommen. Hierzu sei vorab bemerkt, dass in [14] gezeigt werden konnte, dass auch die Bestimmung von $\nu(G)$ in planaren Graphen ein NP-schweres Problem ist.

2.2 Planare Graphen und deren Eigenschaften

Im anschließenden Abschnitt werden sog. polyhedrale Graphen definiert, dabei wird sich herausstellen, dass jeder polyhedrale Graph auch planar ist. Deshalb wird vorab innerhalb dieses Abschnittes die Klasse der planaren Graphen definiert und wesentliche Resultate für die weitere Betrachtung in den nachfolgenden Kapiteln formuliert. Dazu wird zunächst auf die Repräsentation eines Graphen in der Ebene \mathbb{R}^2 eingegangen. Eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *Jordankurve*, wenn eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert, wobei f injektiv auf $[0, 1)$ und $\text{Bild}(f) = J$ ist. Die Punkte $f(0)$ und $f(1)$ heißen *Randpunkte* von J . Ist zudem $f(0) = f(1)$, so heißt J *geschlossen*. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ist *bogenzusammenhängend*, falls für je zwei Punkte $p_i, p_j \in A$ eine Jordankurve J mit $J \subset A$ und Randpunkten p_i, p_j existiert. Eine offene, bogenzusammenhängende Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Gebiet*.

Satz 2.1. (Jordan, 1893) *Sei $J \subset \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Jordankurve. Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus J$ aus genau zwei bogenzusammenhängenden Teilmengen.*

Beweis. Vgl. [12], Seite 169-175. □

Die durch eine geschlossene Jordankurve induzierten beschränkten und unbeschränkten bogenzusammenhängenden Teilmengen werden als *inneres* bzw. *äußeres Gebiet*

(kurz: Das Innere bzw. das Äußere) von J definiert und mit $I(J)$ bzw. $A(J)$ bezeichnet.

Ein Graph G heißt *eben*, falls

- eine injektive Abbildung $g : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert,
- die Kantenmenge $E(G)$ einer Menge von Jordankurven $\{J_1, \dots, J_m\}$ entspricht mit Randpunkten $J_i(0), J_i(1) \in \text{Bild}(g)$ sowie $J_i(t) \notin \text{Bild}(g)$ für alle $0 < t < 1$ und $i \in \{1, \dots, m\}$,
- für $e_i, e_j \in E(G)$ mit $i \neq j$ gilt, dass $J_i(s) \neq J_j(t)$ für alle s, t mit $0 < s < 1$ und $0 < t < 1$.

Anschaulich ist ein Graph G eben, falls die Knoten $V(G)$ und Kanten $E(G)$ des Graphen G derart in der Ebene gezeichnet werden können, dass sich zwei paarweise verschiedene Kanten ausschließlich in den Randpunkten der Kanten (Knoten inzident zu der Kante) berühren dürfen. Ein Graph G heißt *planar*, falls G isomorph zu einem ebenen Graphen G' ist. Der ebene Graph G' heißt dann *Einbettung von G im \mathbb{R}^2* .

Im folgenden kurzen Einschub sei an dieser Stelle der *Satz von Kuratowski*, ein wesentliches Resultat zur Charakterisierung der Struktur der planaren Graphen, angegeben (Vergleiche dazu [15]). Dazu werden vorab zwei Graphenklassen formuliert. Ein Graph G heißt *vollständig*, falls für jeden Knoten $v \in V(G)$ gilt: $\delta(v) = n - 1$. Ein vollständiger Graph der Ordnung n wird mit K_n bezeichnet. Ein Graph G heißt *vollständig bipartit*, falls $V(G) = V_1 \cup V_2$, mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und für jeden Knoten $v \in V_1$ gilt: $\delta(v) = |V_2|$, für jeden Knoten $v \in V_2$ gilt: $\delta(v) = |V_1|$ und für jede Kante $e = \{u, v\} \in E(G)$ gilt: $u \in V_1 \Leftrightarrow v \in V_2$. Dieser wird mit $K_{|V_1|, |V_2|}$ bezeichnet. Der Graph G_1 aus Abbildung 2.1 entspricht dem $K_{3,3}$.

Satz 2.2. *Ein Graph G ist genau dann planar, wenn G keinen Teilgraphen homöomorph zu K_5 oder $K_{3,3}$ enthält.*

Beweis. Siehe [15], S. 139-141. □

Der Graph G_4 aus Abbildung 2.1 ist eine Darstellung des sog. Petersen Graphen

$P(5, 2)$. Zur exakten Definition des $P(5, 2)$ bzw. der sog. verallgemeinerten Petersen Graphen wird auf [57] verwiesen. Es folgt aus dem Satz von Kuratowski (Satz 2.2), dass $P(5, 2)$ nicht zur Klasse der planaren Graphen gehört, da dieser einen Teilgraphen homöomorph zu $K_{3,3}$ enthält.

Ist G ein ebener Graph, so wird die Ebene durch die Jordankurven J_1, \dots, J_m in endlich viele zusammenhängende Gebiete zerlegt. Dann gibt es genau ein Gebiet, das unbeschränkt ist. Dieses Gebiet heißt *äußeres Gebiet*. Die Menge der Gebiete von G sei $F(G)$ und deren Anzahl $f = |F(G)|$. Beispielsweise gilt $f = 1$ für einen Baum. Ein Punkt x , der auf einer Jordankurve J_i mit $i \in \{1, \dots, m\}$ liegt, heißt Randpunkt des Gebietes A , wenn eine Jordankurve J existiert mit $J(0) = x$ und $J(s) \in F$ für $0 < s \leq 1$. Die Gesamtheit aller Randpunkte eines Gebietes A heißt *Rand von A* (kurz: $Rand(A)$). Dann bezeichne $V(A_i) := \{v \in V(G) \mid g(v) \in Rand(A_i)\}$, $E(A_i) := \{e_i \in E(G) \mid J_i \in Rand(A_i)\}$. Zwei verschiedene Gebiete A_1, A_2 heißen *adjacent*, wenn es eine Jordankurve J_i gibt mit $J_i \in Rand(A_1) \cap Rand(A_2)$. Eine Kante $e \in E(G)$ ist entweder im Rand eines Gebietes oder im Rand von genau zwei Gebieten enthalten, diese Gebiete seien mit A_i^e, A_j^e bezeichnet.

Das von Euler bewiesene Resultat stellt den Zusammenhang zwischen der Ordnung n , der Größe m und der Anzahl an Gebieten f eines zusammenhängenden planaren Graphen dar. Es wird als eines der zentralen Werkzeuge zur Bestimmung von Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ herangezogen.

Satz 2.3. (Eulersche Polyederformel) *Es sei G ein zusammenhängender planarer Graph der Ordnung n , Größe m und Anzahl an Gebieten f . Dann gilt:*

$$n - m + f = 2.$$

Beweis. Siehe [28]. □

Zur Formulierung der folgenden zwei Resultate, die wesentlich für die Bestimmung einer unteren Schranke an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ in Kapitel 4 und 5 sein werden, werden weitere Definitionen benötigt. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Eine *k -Färbung* eines Graphen G ist eine Abbildung $\psi : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ mit der Eigenschaft, dass für je zwei adjazente Knoten v_i und v_j in G gilt: $\psi(v_i) \neq \psi(v_j)$. Ist ψ eine k -Färbung von G , so heißt

G k -färbbar. Als Beispiel seien an dieser Stelle der vollständige Graph K_n sowie der vollständig bipartite Graph K_{n_1, n_2} angeführt. Für K_n gibt es Färbungen mit n Farben, aber keine mit $(n - 1)$ Farben. Für K_{n_1, n_2} gibt es Färbungen mit zwei Farben. Im Falle von Planarität gilt:

Satz 2.4. *Jeder planare Graph ist 4-färbbar.*

Beweis. Siehe [61], S. 52-99. □

Die Aussage dieses ‘Vier-Farben-Satzes’ wird später genutzt werden, um untere Schranken an $\nu'(G)$ für spezielle planare Graphen abzuleiten. Ein Graph G heißt *außenplanar*, wenn eine Einbettung G' von G im \mathbb{R}^2 existiert mit $V(G') = V(F^a)$, wobei F^a dem äußeren Gebiet von G' entspricht.

Satz 2.5. *Jeder außenplanare Graph ist 3-färbbar.*

Beweis. Siehe [52], S. 132. □

Diese Aussage wird in Kapitel 4 herangezogen, um eine bestmögliche untere Schranke an $\nu'(G)$ in speziellen polyhedralen Graphen - den sog. Halin-Graphen - anzugeben.

Abschließend sei der *Dualgraph* eines planaren Graphen G definiert. Ein Graph $G^* = (F(G), E^*)$ mit $E^* := \{(A_i^e, A_j^e) \mid e \in E(G)\}$ heißt *Dualgraph* von G und wird mit G^* bezeichnet. Der Dualgraph eines planaren Graphen ist planar, aber im Allgemeinen weder schlicht noch eindeutig.

Die in Abbildung 2.2 skizzierten kubischen planaren Graphen G_1, G_2 sind isomorph zueinander, hingegen nicht die zugehörigen Dualgraphen G_1^*, G_2^* . Dies wird sofort deutlich, da $\delta(v_i) \leq 7$ für alle $v_i \in V(G_2^*)$ gilt (siehe (b)) und in $V(G_1^*)$ ein Knoten v mit $\delta(v) = 8$ (siehe in (a) rot skizzierter Knoten) existiert. In den Kapiteln 4 und 5 wird $\nu'(G)$ in Relation zu $\alpha(G^*)$ gesetzt.

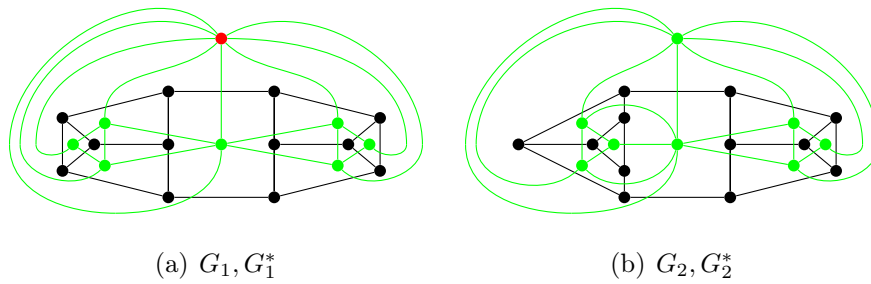


Abbildung 2.2: Darstellung von zwei isomorphen kubischen planaren Graphen G_1, G_2 (in schwarz) sowie von zwei zugehörigen nicht-isomorphen Dualgraphen G_1^*, G_2^* (in grün). Für den in (a) rot dargestellten Knoten $v \in V(G_1^*)$ gilt $\delta(v) = 8$.

2.3 Polyeder, Schlegeldiagramme und polyhedrale Graphen

Aufgabe dieses Abschnittes ist die Einführung der polyhedralen Graphen. Ein Graph G heißt *polyhedral* oder *polyedrisch*, falls dieser isomorph zu einem sog. Schlegel-Diagramm eines konvexen Polyeders ist. Es wird im Folgenden auf Polyeder eingegangen, die Schlegel-Diagramm Darstellung eines solchen Polyeders im \mathbb{R}^2 eingeführt und somit die Definition eines polyhedralen Graphen verdeutlicht. Im Weiteren wird die Klasse der polyhedralen Graphen mit \mathcal{P} bezeichnet.

Unter einem *konvexen Polytop* (verkürzt im Folgenden *Polytop*) versteht man die konvexe Hülle einer endlichen nicht-leeren Menge $M \subseteq \mathbb{R}^s$, d.h.

$$P = \text{conv}(M) := \left\{ \sum_{x \in M} \lambda(x)x \mid \sum_{x \in M} \lambda(x) = 1 \text{ und } \lambda(x) \geq 0, \forall x \in M \right\}.$$

Polytope der Dimension $k \leq s$ werden *k-Polytope* genannt und deren Menge mit \mathbb{P}^k bezeichnet. Ein 0-Polytop heißt *Ecke*, ein 1-Polytop ist die konvexe Hülle zweier Ecken und heißt *Polytop-Kante*. Ist die Menge M_0 minimal bzgl. der Kardinalität aller Mengen M mit $P = \text{conv}(M_0) = \text{conv}(M)$ gewählt, so besteht M_0 aus ausschließlich Ecken von P . Beispiele derartig minimaler Mengen bilden das s -Simplex $\delta_s := \text{conv}\{0, e_1, \dots, e_s\}$, der Hyperwürfel $C_s := [-1, 1]^s$ oder das Kreuzpolytop $C_s^V := \{x \in \mathbb{R}^s \mid \sum_{i=1}^s |x_i| \leq 1\}$ (vgl. [62]).

Im \mathbb{R}^2 bilden konvexe 2-Polytope $P = \text{conv}\{M_0\}$ die konvexe Hülle ihrer Eckenmenge $M_0 = \{x_1, \dots, x_l\}$, d.h. ein konvexes l -Eck. Sind dabei alle Polytop-Kanten gleichlang und alle Innenwinkel des 2-Polytops gleich, so heißt P *regulär*.

Ein konvexes 3-Polytop P wird auch *konvexes Polyeder* genannt. Ist $P \in \mathbb{P}^3$, so besteht dessen Rand aus endlich vielen konvexen 2-Polytopen, den sog. *Facetten* oder *Seitenflächen*. Dabei enthält jede Polytop-Kante genau zwei Ecken und ist in genau zwei Facetten enthalten. Jede Ecke ist in mindestens drei Facetten enthalten.

Ein *Schlegel-Diagramm* dient zur Repräsentation eines konvexen Polyeders $P \in \mathbb{P}^3$ in der Ebene \mathbb{R}^2 . Für eine solche Repräsentation wähle zunächst eine beliebige Facette $F_0(P)$ des zugrunde liegenden Polyeders $P \in \mathbb{P}^3$. Die zu F_0 gehörige Ebene E_0 teilt den \mathbb{R}^3 in zwei offene Halbräume $H_0(F_0), H_1(F_0)$, wobei $H_0 \cap P = \emptyset$ und $H_1 \cap P = P \setminus F_0$. Dies gilt analog für alle Facetten F_i und die Halbräume $H_0(F_i)$ und $H_1(F_i)$. Bezeichne I die Menge von Indizes der Facetten und wähle einen Punkt

$$x \in H_0(F_0) \cap \bigcap_{i \in I \setminus \{0\}} H_1(F_i), \quad (2.1)$$

so ist die Projektion von P unter x auf E_0 eindeutig und wird als *Schlegel-Diagramm* bezeichnet. Das Schlegel-Diagramm eines Polyeders ordnet der Eckenmenge des Polyeders einer Punktmenge V in E_0 und die Menge an Polytop-Kanten des Polyeders einer Menge E an Jordankurven in E_0 zu. Die Randpunkte der Jordankurven aus E sind dann jeweils aus V . Somit kann ein ebener Graphen $G = (V, E)$ in der Ebene E_0 definiert werden. Dabei ist die Darstellung des Polyeders abhängig von der Wahl der Facette F_0 und somit nicht eindeutig. Der in (2.1) gewählte Punkt x ist wohldefiniert, da I endlich, P konvex und F_0 eine Facette von P ist. Bemerke, dass der Rand des äußeren Gebietes des ebenen Graphen des Schlegel-Diagramms der Facette $F_0(P)$ entspricht. Diese sei im Folgenden mit F^a bezeichnet. Die Facetten des Polyeders $F_i(P) \neq F_0(P)$ entsprechen jeweils dem Rand eines beschränkten konvexen Gebietes. Demnach sei im Weiteren der Rand eines Gebietes innerhalb des gewählten Schlegel-Diagramms zugehörig zur Facette $F_i(P)$ mit Facette $F_i \in F(G)$ bezeichnet. Eine Kante $e \in E(G)$ heißt *inzident zur Facette* $F \in F(G)$, falls die zu e gehörige Polytop-Kante in $F(P)$ enthalten ist. Ebenso für die Knoten aus $V(G)$ deren zugehörige Ecke in $F(P)$ liegt. Jede Kante $e \in E(G)$ ist somit inzident zu genau zwei Facetten aus $F(G)$. Ferner bilden die zu F inzidenten Kanten und Knoten

einen Kreis in G . Ein solcher Kreis sei im Folgenden als *Facettenkreis* bezeichnet. Alle weiteren Kreise in G heißen *Nicht-Facettenkreise*.

Ein zentrales Resultat, das den Zusammenhang zwischen konvexen Polyedern, Schlegel-Diagramm-Darstellung und daraus abgeleiteten polyhedralen Graphen sowie planaren Graphen herstellt, wurde von Steinitz formuliert.

Satz 2.6. *Ein Graph G ist polyhedral genau dann, wenn G planar und 3-fach knotenzusammenhängend ist.*

Beweis. Siehe [35], Kapitel 13. □

Mit Hilfe dieses Satzes von Steinitz (Satz 2.6) lassen sich die in Abschnitt 2.2 angegebenen Aussagen für planare Graphen nutzen, um Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ für polyhedrale Graphen herzuleiten. Offenbar gibt es planare Graphen, wie beispielsweise den vollständigen Graphen K_3 , die nicht 3-fach knotenzusammenhängend, d.h. nicht polyhedral, sind.

Bevor später auf die Eigenschaften von polyhedralen Graphen im Allgemeinen eingegangen wird, wird im folgenden Exkurs auf zwei Klassen konvexer Polyeder eingegangen, die platonischen sowie archimedischen Körper. Dabei soll deren spezielle Struktur aufgezeigt sowie veranschaulicht werden und somit die allgemeine Betrachtung polyhedraler Graphen mit speziellen Eigenschaften motivieren. Zudem werden Resultate zu knoten- bzw. kantendisjunkten Kreispackungszahlen für diese speziellen Graphen aufgelistet, die in [65] bewiesen wurden.

Sei P ein konvexes Polyeder, bei dem jede Facette $F_i(P)$ aus sog. kongruenten Vielecken, d.h. den gleichen Vielecken, besteht und jede Ecke in der gleichen Anzahl an Facetten enthalten ist, dann heißt P *platonischer Körper*. Platonische Körper wurden zuerst durch Platon ca. 427-347 v. Chr. beschrieben und untersucht. Das in Satz 2.3 aufgeführte Resultat ist häufig unter der Bezeichnung ‘Eulersche Polyederformel’ zu finden. Es verknüpft die Anzahl an Facetten (2-Polytope), Ecken (0-Polytope) und Polytop-Kanten (1-Polytope) eines konvexen Polyeders und kann zur Bestimmung der fünf platonischen Körper herangezogen werden (vgl. [47], Kapitel 22 und Abbildung 2.3).

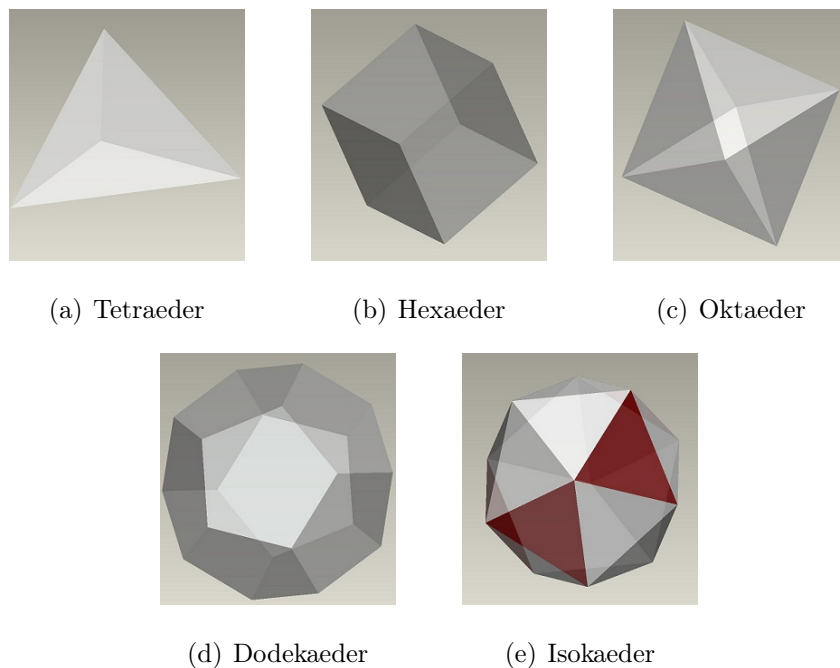


Abbildung 2.3: Eine dreidimensionale Darstellung der fünf platonischen Körper mit 4, 6, 8, 12 und 20 Facetten (Quelle: [65]).

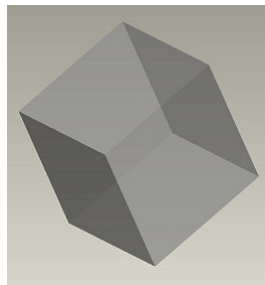
Zudem gilt für den zugehörigen Graphen G eines platonischen Körpers, dass der zugehörige Dualgraph G^* selbst wieder der Graph eines platonischen Körpers ist. Der Graph des Tetraeders ist selbst-dual, der Graph des Hexaeders ist dual zum Graphen des Oktaeders und der Graph des Dodekaeders ist dual zu dem Graphen des Isokaeders.

Es sei an dieser Stelle angeführt, dass der zugehörige polyhedrale Graph zum Dodekaeder der kleinste sog. Fulleren-Graph ist. Diese Graphen werden innerhalb des Kapitels 5 genauer betrachtet. Zu den Eigenschaften des Dodekaeders zählen die sog. Isokaeder-Symmetrie, da der polyhedrale Graph des Isokaeders dual zum polyhedralen Graph G - zugehörig zum Dodekaeder - ist. Ferner besteht die Facettenmenge von G ausschließlich aus Fünfecksfacetten und G besitzt Ordnung 20. Daraus lässt sich mit der Eulerschen Polyederformel (Satz 2.3) direkt ableiten, dass G Größe 30 hat. Da zudem G kubisch ist, folgt automatisch $\nu(G) = \nu'(G)$. Dieser Zusammenhang gilt offensichtlich auch für den polyhedralen Graph des Tetraeders und des Hexaeders.

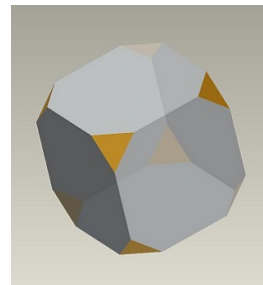
Halbreguläre konvexe Polyeder wurden zuerst von Archimedes von Syrakus, ca. 287-

212 v. Chr., charakterisiert und erhielten demnach die Bezeichnung der archimedischen Körper. Diese sind definiert als konvexe Polyeder mit regelmäßigen Facetten, die die sog. ‘globale Uniformität der Ecken’ erfüllen, d.h. an jeder Ecke liegen reguläre Vielecke in der gleichen Kombination vor, so dass jede Ecke mittels Symmetrieeoperationen auf jede andere Ecke abgebildet werden kann.

Diese Bedingung wird unter anderem durch die Klassen der platonischen Körper, der Prismen und Antiprismen erfüllt. Ein Körper, der nicht zu diesen drei Klassen von Polyedern gehört, aber die globale Uniformität der Ecken erfüllt, heißt *archimedisch*.



(a) Hexaeder



(b) Würfelstumpf

Abbildung 2.4: Eine dreidimensionale Darstellung eines Hexaeders und des zugehörigen Würfelstumpfes, der durch Abstumpfen der Ecken des zugrunde liegenden Polyeders erzeugt wird (Quelle: [65]).

Die Abbildung 2.4 skizziert ein Beispiel, wie ein archimedischer Körper aus einem platonischen Körper durch das sog. ‘Abstumpfen’ aller Ecken des Polyeders hervorgeht. Die zugehörige Transformation $Tr(\cdot)$ für polyhedrale Graphen G erzeugt einen polyhedralen Graphen $Tr(G)$ mit $|V(Tr(G))| = 2|E(G)| = \sum_{v_i \in V(G)} \delta(v_i)$, $|E(Tr(G))| = 3|E(G)| = |E(G)| + |V(Tr(G))|$ und $|F(Tr(G))| = |F(G)| + |V(G)|$. Auf diese Weise werden elf der dreizehn archimedischen Körper gebildet.

Es sei bemerkt, dass diese Transformation angewendet auf den Dualgraph $(Tr(G^*))$ eines Fulleren-Graphen erneut einen speziellen Fulleren-Graph - den sog. Leapfrog-Fulleren-Graph des zugrundeliegenden Fulleren-Graph - erzeugt. Details zu der sog. Leapfrog-Transformation von Fulleren-Graphen werden in Kapitel 5 erläutert. Außerdem werden die Leapfrog-Fulleren-Graphen herangezogen, um oberen Schranken an $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen bestmöglich abzuschätzen.

Die archimedischen Körper des Cubus Simus und Dodecaedron Simum stellen die zwei weiteren archimedischen Körper dar. Diese können durch ein zugrunde liegendes Oktaeder bzw. ein Ikosaeder konstruiert werden.

Abschließend seien innerhalb dieses Exkurses in Tabelle 2.1 die Kreispackungszahlen für knoten- sowie kantendisjunkte Kreispackungen in polyhedralen Graphen abgeleitet aus platonischen sowie archimedischen Körpern aufgelistet. Für die Bestimmung von $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ sei auf [65] verwiesen.

Platonische Körper	$\nu(G)$	$\nu'(G)$	Archimedische Körper	$\nu(G)$	$\nu'(G)$
Tetraeder	1	1	Tetraederstumpf	4	4
Hexaeder	2	2	Würfelstumpf	8	8
Oktaeder	2	4	Kuboktaeder	4	4
Pentagondodekaeder	3	3	Oktaederstumpf	8	8
Isokaeder	4	8	Rhombenkuboktaeder	8	8
			Kuboktaederstumpf	12	12
			Cubus Simus	8	16
			Dodekaederstumpf	20	20
			Ikosidodekaeder	10	10
			Ikosaederstumpf	12	20
			Rhombenikosidodekaeder	20	30
			Ikosidodekaederstumpf	30	30
			Dodecaedron Simum	20	38

Tabelle 2.1: Übersicht zu $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in platonischen und archimedischen Körpern.

Im Folgenden wird das Eindeutigkeitstheorem von Whitney (Satz 2.7) für polyhedrale Graphen angegeben. Dies beschreibt den eindeutigen Zusammenhang zwischen einem polyhedralen Graphen G und dem zugehörigen Dual-Graphen G^* . Durch dieses Resultat kann dann im Anschluss eine erste untere Schranke an $\nu'(G)$ über die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G^*)$ des Dual-Graphen G^* bestimmt werden und wird für die zwei in Kapitel 4 bzw. 5 analysierten Klassen polyhedraler Graphen, den sog. Halin- und Fulleren-Graphen, von zentraler Bedeutung sein, um $\nu'(G)$ eines polyhedralen Graphen G bzw. $\nu(G')$ eines kubisch polyhedralen Graphen G' abzuschätzen bzw.

zu bestimmen.

Satz 2.7. *Sei G ein polyedrales Graph. Dann ist G^* unabhängig von der Einbettung von G im \mathbb{R}^2 eindeutig.*

Beweis. Siehe [68]. □

Es sei angemerkt, dass der in Abbildung 2.2 dargestellte planare Graph, in Abhängigkeit von gewählter Einbettung von G im \mathbb{R}^2 unterschiedliche Dual-Graphen besitzt und somit G^* von der Einbettung von G im \mathbb{R}^2 abhängig und somit nicht eindeutig ist. Folglich ist die Eigenschaft eines polyedrales Graphen G , dass G 3-fach knotenzusammenhängend ist, wesentlich für den Beweis des Satzes 2.7.

Mit Satz 2.7 kann nun für polyedrale Graphen G eine untere Schranke an die kantendisjunkte Kreipackungszahl $\nu'(G)$ durch die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G^*)$ des eindeutig bestimmten Dualgraphen G^* angegeben werden.

Lemma 2.8. *Sei G ein polyedrales Graph, dann gilt: $\alpha(G^*) \leq \nu'(G)$.*

Beweis. Sei $U(G^*)$ eine maximale unabhängige Menge in G^* . Dann induziert $U(G^*)$ eine Menge von Facetten $F(U(G^*)) \subset F(G)$. Für $F_i \in F(U(G^*))$ bilden die Kantenmenge $E(F_i)$ und die Knotenmenge $V(F_i)$ einen Facettenkreis $C(F_i)$. Für $F_i, F_j \in F(U(G^*))$ und $F_i \neq F_j$ sind $C(F_i)$ und $C(F_j)$ kantendisjunkt, da $U(G^*)$ eine unabhängige Menge in G^* ist. Folglich ist $Z(G) := \{C(F_i) \mid F_i \in F(U(G^*))\}$ eine kantendisjunkte Kreispackung in G und somit $\alpha(G^*) = |Z(G)| \leq \nu'(G)$. □

Zudem lassen sich für polyedrale Graphen diese weiteren Aussagen formulieren:

Lemma 2.9. *Es sei G ein polyedrales Graph der Ordnung n und der Größe m . Dann gilt:*

$$(i) \quad 2m = \sum_{i \geq 3} i |\{v \in V(G) \mid \delta(v) = i\}| = \sum_{i \geq 3} i |\{F \in F(G) \mid |V(F)| = i\}|,$$

$$(ii) \quad \lceil \frac{3n}{2} \rceil \leq m \leq 3(n-2).$$

(iii) *Es existiert ein polyedrales Graph der Ordnung n , wenn $n \geq 4$ ist.*

(iv) Es existiert ein polyedrales Graph mit f Facetten, wenn $f \geq 4$.

(v) Es existiert ein polyedrales Graph der Größe m , wenn $m = 6$ oder $m \geq 8$.

Beweis. Die Aussage (i) folgt nach [34] und wird als Handschlaglemma bezeichnet. Die weiteren Aussagen folgen direkt mit dem Handschlaglemma und Satz 2.3. \square

Beispiele für polyhedrale Graphen der Ordnung $n \geq 4$ sind die Schlegel-Diagramme der Pyramiden über einem konvexen $n - 1$ -Eck mit genau n Ecken und $f = n$ Facetten sowie $2(n-1)$ -Polytop-Kanten. Der zugehörige Graph wird als *Wheel-Graph* \mathcal{W}_n der Ordnung n bezeichnet. Wird eine der Ecken mit Grad 3 dieser Pyramiden "abgestumpft", so hat das zugehörige Polyeder $2(n - 1) + 3$ Polytop-Kanten.

3 Obere Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in polyhedralen Graphen $\mathcal{P}[n, m]$

In [60] werden obere Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ für Graphen $G \in \mathcal{PV}_n := \{G \mid G \text{ polyhedral und Ordnung } n\}$, $G \in \mathcal{PE}_m := \{G \mid G \text{ polyhedral und Größe } m\}$ und $G \in \mathcal{PF}_f := \{G \mid G \text{ polyhedral und Anzahl an Facetten } f\}$ angegeben. Es wird gezeigt, dass für $G \in \mathcal{PV}_n$ gilt: $1 \leq \nu(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ und $\lceil \frac{n+4}{8} \rceil \leq \nu'(G) \leq n - 2$. Es gilt für $G \in \mathcal{PE}_m$: $1 \leq \nu(G) \leq \lfloor \frac{2m}{9} \rfloor$ und $\lceil \frac{m+6}{12} \rceil \leq \nu'(G) \leq n - 2$. Sowie für $G \in \mathcal{PF}_f$ gilt: $1 \leq \nu(G) \leq \lfloor \frac{2(f-2)}{3} \rfloor$ und $\lceil \frac{f}{4} \rceil \leq \nu'(G) \leq \lfloor \frac{2(f-2)}{3} \rfloor$. Zudem wird gezeigt, dass diese Schranken mit zwei Ausnahmen bestmöglich sind, es werden also Graphen konstruiert und Kreispackungen innerhalb dieser Graphen angegeben, die die Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ mit Gleichheit erfüllen. Eine Ausnahme ist gegeben durch die untere Schranke an $\nu(G)$ für Graphen aus $G \in \mathcal{PE}_m$, wobei m eine ungerade Zahl ist. Hier gilt $2 \leq \nu(G)$. Die andere Ausnahme bildet die obere Schranke an $\nu'(G)$ für Graphen aus $G \in \mathcal{PV}_n$ mit $n = 7$ und Graphen aus $G \in \mathcal{PE}_m$ mit $m = 15$, hier gilt $\nu'(G) = 4$.

Motiviert durch die in [60] erzielten Ergebnisse wird innerhalb dieses Kapitels auf die Unterklassen

$$\mathcal{P}[n, m] := \{G \mid G \in \mathcal{PV}_n \cap \mathcal{PE}_m\}$$

eingegangen. Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, für $G \in \mathcal{P}[n, m]$ spezielle obere Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ anzugeben und deren Güte, d.h. deren Abweichung von $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ zu untersuchen. Es wird sich dabei herausstellen, dass die angegebenen Schranken bestmöglich für die jeweilige Unterklasse $\mathcal{P}[n, m]$ sind.

3.1 Obere Schranken an $\nu(G)$ in $\mathcal{P}[n, m]$

Neben oberen Schranken für $\nu(G)$ werden in diesem Abschnitt Graphen G angegeben, für die diese oberen Schranken bestmöglich sind. Die Angabe entsprechender Graphen erfolgt dabei konstruktiv. Genauer:

Satz 3.1. *Es sei $[n, m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$.*

(i) *Für alle $G \in \mathcal{P}[n, m]$ gilt: $\nu(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.*

(ii) *Es existiert $G_{[n, m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ mit $\nu(G_{[n, m]}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.*

Beweis. Zu (i) : Sei $G \in \mathcal{P}[n, m]$ und C ein Kreis in G , dann gilt $l(C) \geq 3$, da G schlicht ist. Damit folgt $\nu(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Der Beweis von (ii) erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird die Gültigkeit der Aussage für Graphen $G_{[n, m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ mit $n \geq 4$ und $m = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ gezeigt. Das Ergebnis wird benutzt, um die Aussage dann für alle Paare $[n, m]$ nachzuweisen, für die $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$.

Es sei $4 \leq n \leq 9$ und

$$\mathcal{M}_0 := \{[4, 6], [5, 8], [6, 9], [7, 11], [8, 12], [9, 14]\}.$$

Für $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ zeigt Abbildung 3.1 sechs Graphen $G_{[n, m]} \in \mathcal{P}[n, m]$.

Ein solcher Graph $G_{[n, m]}$ erfüllt die Eigenschaft (1) :

- (1) Es gilt $m = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ und $\nu(G_{[n, m]}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. In $G_{[n, m]}$ gibt es eine maximale Kreispackung $Z(G_{[n, m]})$, eine Facette F und zwei voneinander verschiedene Kanten $e_1 = (u_1, v_1), e_2 = (u_2, v_2) \in E(F)$, die nicht zu Kreisen von $Z(G_{[n, m]})$ gehören und höchstens einen gemeinsamen Knoten haben (siehe Abbildung 3.1).

Ausgehend von $G_{[n, m]}$ wird nun folgendermaßen ein Graph $G'_{[n, m]}$ konstruiert:

- Die Kanten $e_1 = (u_1, v_1)$ bzw. $e_2 = (u_2, v_2)$ werden durch (u_1, s_1, t_1, v_1) bzw. (u_2, s_2, t_2, v_2) unterteilt,
- anschließend werden zwei verschiedene Knoten w_i in das zu F gehörige Gebiet sowie die Kanten $(s_i, w_i), (t_i, w_i)$ mit $i \in \{1, 2\}$ und (w_1, w_2) in die Facette F eingebettet.

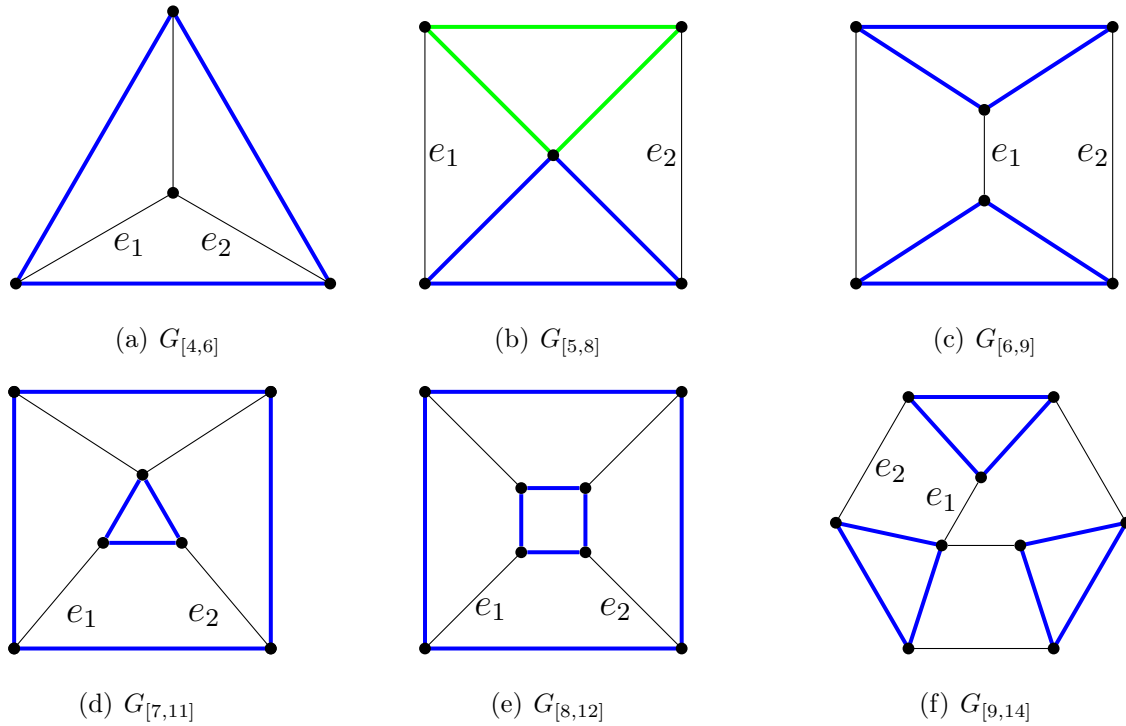


Abbildung 3.1: Polyhedrale Graphen $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ aus Satz 3.1. Die blau gekennzeichneten Kanten visualisieren jeweils eine maximale knotendisjunkte Kreispackung $Z(G_{[n,m]})$. Anmerkung: $Z(G_{[n,m]})$ besteht ausschließlich aus Facettenkreisen und ist mit Ausnahme des Falls $[5, 8]$ auch eine maximale kantendisjunkte Kreispackung. Eine maximale kantendisjunkte Kreispackung in $G_{[5,8]}$ ist durch den blau sowie grün gekennzeichneten Kreis gegeben. Die Kanten e_1, e_2 zeigen direkt, dass die angegebenen Graphen Eigenschaft (1) aus Satz 3.1 sowie Eigenschaft (2) aus Lemma 3.3 erfüllen.

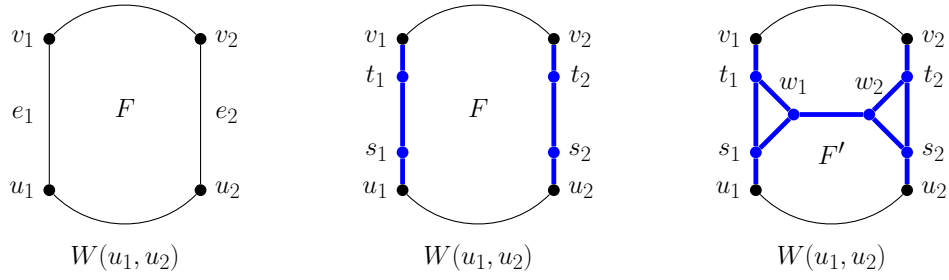
In Abbildung 3.2 ist diese Konstruktionssystematik, ausgehend von der Facette F aus $G_{[n,m]}$, skizziert.

Es gilt:

$$|V(G'_{[n,m]})| = |V(G_{[n,m]})| + 6, |E(G'_{[n,m]})| = |E(G_{[n,m]})| + 9,$$

$$|F(G'_{[n,m]})| = |F(G_{[n,m]})| + 3, |E(G'_{[n,m]})| = \left\lfloor \frac{3|V(G'_{[n,m]})|}{2} \right\rfloor.$$

Zudem ist $G'_{[n,m]}$ nach Konstruktion planar. Der Nachweis, dass $G'_{[n,m]}$ 3-fach knotenzusammenhängend ist, wird durch verschiedene Fallunterscheidungen sehr technisch und ist daher separat im Anhang als Lemma A.1 aufgeführt. Insgesamt ergibt sich, dass $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n + 6, m + 9]$.



(a) $F \in \mathcal{F}(G_{[n,m]})$ mit
 $e_1, e_2 \in E(F)$

(b) Unterteilung von
 e_1 und e_2

(c) Teilgraph von
 $G'_{[n,m]}$

Abbildung 3.2: Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ in Satz 3.1. Hierbei entsprechen die schwarz skizzierten Knoten den zu e_1 bzw. e_2 inzidenten Knoten aus $V(F)$ und $W(u_1, u_2)$ einem Pfad in $G_{[n,m]}$ mit $E(W(u_1, u_2)) \setminus E(F) = \emptyset$ in (a) (bzw. einem Pfad in $G'_{[n,m]}$ mit $E(W(u_1, u_2)) \setminus E(F') = \emptyset$ in (c)).

Offenbar ist $Z(G'_{[n,m]}) = Z(G_{[n,m]}) \cup \{C_1, C_2\}$ mit $C_1 = (s_1, t_1, w_1, s_1)$, und $C_2 = (s_2, t_2, w_2, s_2)$ eine Kreispackung in $G'_{[n,m]}$. Es gilt:

$$|Z(G'_{[n,m]})| = \nu(G_{[n,m]}) + 2 = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{|V(G'_{[n,m]})|}{3} \right\rfloor,$$

also ist $Z(G'_{[n,m]})$ maximal nach (i). Zudem existiert in $G'_{[n,m]}$ eine Facette F' mit einer der folgenden Eigenschaften:

- Falls $u_1 = u_2$ ist, so ist $V(F') = \{s_1, w_1, w_2, s_2, u_1\}$.
- Ansonsten hat $V(F')$ die Darstellung $V(F') = \{s_1, w_1, w_2, s_2\} \cup V(W(u_1, u_2))$, wobei $W(u_1, u_2)$ ein Pfad in $G_{[n,m]}$ mit $E(W(u_1, u_2)) \setminus E(F) = \emptyset$ ist (nach Konstruktion existiert in $G'_{[n,m]}$ ein solcher Pfad).

Damit enthält F' zwei voneinander verschiedene Kanten $e'_1 = (u_1, s_1)$ bzw. $e'_2 = (u_2, s_2)$, die nicht zu Kreisen der Packung $Z(G'_{[n,m]})$ gehören.

Jeder der sechs Graphen $G_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_0$ induziert also einen Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$, $[n, m] \in \mathcal{M}_1 := \{[10, 15], [11, 17], [12, 18], [13, 20], [14, 21], [15, 23]\}$, für den die Eigenschaft (1) gilt.

Diese Tatsache erlaubt nun ein induktives Vorgehen zur Bestimmung von Graphen

$G_{[n,m]}$ mit $n \geq 4$ und $m = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$, welche die Eigenschaft (1) erfüllen. Für $k \geq 1$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k := & \{[4 + 6k, 6 + 9k], [5 + 6k, 8 + 9k], [6 + 6k, 9 + 9k], \\ & [7 + 6k, 11 + 9k], [8 + 6k, 12 + 9k], [9 + 6k, 14 + 9k]\}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gibt es für jedes $[n, m] \in \mathcal{M}_k$ jeweils einen Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$, welcher die Eigenschaft (1) erfüllt. Nach derselben Konstruktionssystematik wie vorher induziert $G_{[n,m]}$ dann einen Graphen $G'_{[n,m]}$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} G'_{[n,m]} & \in \mathcal{P}[n + 6, m + 9], \\ |E(G'_{[n,m]})| & = m + 9 = \lceil \frac{3(n+6)}{2} \rceil, \\ \nu(G'_{[n,m]}) & = \nu(G_{[n,m]}) + 2 = \lfloor \frac{n+6}{3} \rfloor. \end{aligned}$$

Damit induziert jeder der sechs Graphen $G_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_k$ einen Graphen $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n + 6, m + 9]$ mit $[n + 6, m + 9] \in \mathcal{M}_{k+1}$, für den Eigenschaft (1) gilt. Auf diese Weise ist (ii) induktiv für alle Paare $[n, m]$ mit $n \geq 4$ und $m = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ gezeigt.

Sei nun $[n, m]$ derart, dass $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$ und sei $m' = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$. Da $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$, gilt nach Lemma 2.9(ii), dass $m' \leq m \leq 3(n - 2)$. Ist $m = m'$, so gilt (ii) nach dem Vorherigen. Sei also $m' < m \leq 3(n - 2)$. Betrachte nun die Graphen $G_{[n,m']}, G_{[n,m'+1]}, G_{[n,m'+2]}, \dots, G_{[n,3(n-2)]}$. Für $1 \leq s \leq 3(n - 2) - m'$ wird der Graph $G_{[n,m'+s]}$ aus $G_{[n,m'+s-1]} \in \mathcal{P}[n, m' + s - 1]$ folgendermaßen konstruiert: Wähle in $G_{[n,m'+s-1]}$ eine Facette F_{s-1} mit $|E(F)| \geq 4$. Bemerke, F_{s-1} existiert in $F(G_{[n,m'+s-1]})$, da $m' + s - 1 < 3(n - 2)$). Dann gibt es in $V(F_{s-1})$ zwei nicht adjazente Knoten v_{s-1}, w_{s-1} . Setze

$$G_{[n,m'+s]} := (V(G_{[n,m'+s-1]}), E(G_{[n,m'+s-1]}) \cup \{(v_{s-1}, w_{s-1})\}).$$

Offenbar ist $G_{[n,m'+s]} \in \mathcal{P}[n, m' + s]$, $\nu(G_{[n,m'+s]}) \geq \nu(G_{[n,m']}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ und wegen (i) gilt dann $\nu(G_{[n,m'+s]}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Für $s = m - m'$ ergibt sich $\nu(G_{[n,m]}) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

□

Zur Veranschaulichung der Ergebnisse und Visualisierung der strukturellen Vorgehensweise innerhalb des Beweises aus Satz 3.1 ist für $n \leq 14$ und $m \leq 21$ in Tabelle

	n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
m															
6	1														
7															
8			1												
9			1	2											
10				2											
11				2	2										
12				2	2	2									
13					2	2									
14					2	2	3								
15					2	2	3	3							
16						2	3	3							
17						2	3	3	3						
18							2	3	3	3	4				
19								3	3	3	4				
20									3	3	3	4	4		
21										3	3	3	4	4	4

Tabelle 3.1: Übersicht zu oberen Schranken an $\nu(G)$ für polyhedrale Graphen $G \in \mathcal{P}[n, m]$ mit $(n \leq 14, m \leq 21)$.

3.1 die für das zugehörige $[n, m]$ -Paar jeweils die knotendisjunkte Kreispackungszahl $\nu(G_{[n,m]})$ des innerhalb des Beweises konstruierten Graphen $G_{[n,m]}$ aufgelistet. Dabei sind die farblich blau hinterlegten Kreispackungszahlen zugehörig zu den Graphen $G_{[n,m], [n, m]} \in \mathcal{M}_0$ aus Abbildung 3.1. Die grün hinterlegten Kreispackungszahlen gehören zu den Graphen $G_{[n,m], [n, m]} \in \mathcal{M}_1$.

Abschließend sei bemerkt, dass auch polyhedrale Graphen mit sehr geringer Kreispackungszahl existieren. Ein Beispiel bilden die Wheel-Graphen $G_n \in \mathcal{W}_n$ mit $G_n \in \mathcal{P}[n, 2(n - 1)]$ und $\nu(G_n) = 1$.

3.2 Obere Schranken an $\nu'(G)$ in $\mathcal{P}[n, m]$

In Analogie zur Güte der oberen Schranken an $\nu(G)$ wird nun auf die Güte der oberen Schranken an $\nu'(G)$ für Graphen $G \in \mathcal{P}[n, m]$ eingegangen. Es wird sich auch für $\nu'(G)$ herausstellen, dass die oberen Schranken in diesem Sinne - mit Ausnahme von genau einem Paar, nämlich $[7, 15]$ - bestmöglich für $G \in \mathcal{P}[n, m]$ sind. Auch hier erfolgt die Angabe entsprechender Graphen $G_{[n, m]}$.

Dazu sei $[n, m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$. Dann gilt nach [60] für alle $G \in \mathcal{P}[n, m]$, dass $\nu'(G) \leq n - 2$ mit $G \in \mathcal{PV}_n$, $\nu'(G) \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$ mit $G \in \mathcal{PE}_m$ und $\nu'(G) \leq \lfloor \frac{2(m-n)}{3} \rfloor$ mit $G \in \mathcal{PF}_{m-n+2}$.

Damit ist

$$\nu'(G) \leq \min \left\{ n - 2, \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \right\}.$$

Zudem gilt $m \leq 3(n - 2)$ nach Lemma 2.9(ii) sowie $n - m + f = 2$ nach Satz 2.3 und folglich:

$$\nu'(G) \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \right\}. \quad (3.1)$$

Für $G \in \mathcal{P}[7, 15]$ ergibt sich nach Lemma 5.10 aus [65]

$$\nu'(G) \leq n - 3 = 4 < 5 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \right\}.$$

Es stellt sich allerdings heraus, dass ausschließlich für $\mathcal{P}[7, 15]$ kein Graph $G \in \mathcal{P}[7, 15]$ existiert, der die Ungleichung (3.1) mit Gleichheit erfüllt. Es lässt sich zeigen:

Satz 3.2. *Es sei $[n, m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $[n, m] \neq [7, 15]$ und $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$, dann existiert ein Graph $G \in \mathcal{P}[n, m]$ mit*

$$\nu'(G) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \right\}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, werden zwei Lemmata benötigt. Zunächst werden in Lemma 3.3 die Fälle $[n, m]$ mit $m \in \{\frac{3n}{2}, \frac{3n}{2} + 1\}$, falls n eine gerade Zahl ist, und $m = \frac{3n+1}{2}$, falls n eine ungerade Zahl ist, betrachtet. In beiden Situationen gilt $\left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor$. Daraufhin werden in Lemma 3.4 die Fälle $[n, m]$ mit $3(n-2) - 2 \leq m \leq 3(n-2)$ betrachtet. Aufbauend auf den Resultaten aus Lemma 3.3 und Lemma 3.4 werden dann konstruktiv Graphen $G_{[n, m]}$ angegeben, die den Aussagen von Satz

3.2 entsprechen. Die Beweisidee der nachfolgenden zwei Lemmata verläuft analog zu der aus Satz 3.1(ii). Der Unterschied liegt jeweils in der Wahl der Menge \mathcal{M}_0 und der Kardinalität der bzgl. der Konstruktionssystematik erzeugten Mengen \mathcal{M}_k .

Lemma 3.3. *Es sei $[n, m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$ und $m \in \{\frac{3n}{2}, \frac{3n}{2} + 1\}$, falls n eine gerade Zahl ist, bzw. $m = \frac{3n+1}{2}$, falls n eine ungerade Zahl ist. Dann existiert $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ mit*

$$\nu'(G_{[n,m]}) = \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor.$$

Beweis. Es sei $4 \leq n \leq 10$ und

$$\mathcal{M}_0 := \{[4, 6], [5, 8], [6, 9], [6, 10], [7, 11], [8, 12], [8, 13], [9, 14], [10, 16]\}.$$

Für $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ zeigen die Abbildung 3.1 und Abbildung 3.3 insgesamt neun Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$.

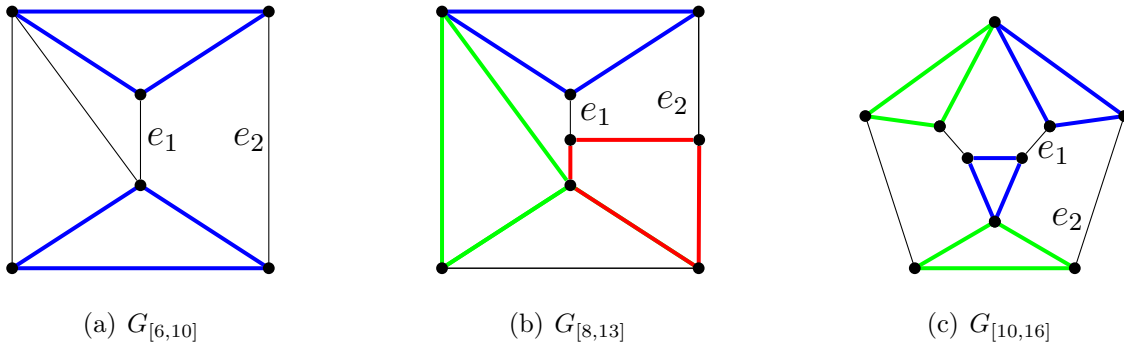


Abbildung 3.3: Drei polyhedrale Graphen $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ aus Lemma 3.3. Die farblich gekennzeichneten Kanten visualisieren jeweils Kreise einer maximalen kantendisjunkten Kreispackung $Z(G_{[n,m]})$. Anmerkung: Die Graphen $G_{[n,m]}$ erfüllen die Eigenschaft (2) aus Lemma 3.3 (siehe die jeweils skizzierten Kanten e_1, e_2) und die Eigenschaft (4) aus Satz 3.2 (da $Z(G_{[n,m]})$ aus Facettenkreisen besteht).

Ein solcher Graph $G_{[n,m]}$ erfüllt die Eigenschaft (2) :

- (2) Es gilt $m \in \{\frac{3n}{2}, \frac{3n}{2} + 1\}$, falls n eine gerade Zahl ist, sowie $m = \frac{3n+1}{2}$, falls n eine ungerade Zahl ist. Es gilt $\nu'(G_{[n,m]}) = \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor$. In $G_{[n,m]}$ gibt es eine maximale Kreispackung $Z(G_{[n,m]})$, eine Facette F und zwei voneinander verschiedene Kanten $e_1, e_2 \in E(F)$, welche nicht zu Kreisen von $Z(G_{[n,m]})$

gehören und e_1 und e_2 höchstens einen gemeinsamen Knoten haben (siehe Abbildung 3.1 und Abbildung 3.3).

Genauso wie in dem Beweis von Satz 3.1(ii) wird aus $G_{[n,m]}$ nun folgendermaßen ein Graph $G'_{[n,m]}$ konstruiert:

- Die Kanten $e_1 = (u_1, v_1)$ bzw. $e_2 = (u_2, v_2)$ werden durch (u_1, s_1, t_1, v_1) bzw. (u_2, s_2, t_2, v_2) unterteilt,
- anschließend werden zwei Knoten w_i in das zu F gehörige Gebiet sowie die Kanten $(s_i, w_i), (t_i, w_i)$ mit $i \in \{1, 2\}$ und (w_1, w_2) in die Facette F eingebettet.

Ausgehend von der Facette F aus $G_{[n,m]}$ ist diese Konstruktionssystematik in Abbildung 3.2 skizziert.

Es gilt: $|V(G'_{[n,m]})| = |V(G_{[n,m]})| + 6$, $|E(G'_{[n,m]})| = |E(G_{[n,m]})| + 9$, $|F(G'_{[n,m]})| = |F(G_{[n,m]})| + 3$. Zudem ist $G'_{[n,m]}$ nach Konstruktion planar. Dass $G'_{[n,m]}$ 3-fach zusammenhängend ist, folgt analog zu dem Beweis von Satz 3.1(ii) mit Lemma A.1. Insgesamt ergibt sich, dass $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n + 6, m + 9]$.

Dann ist $Z(G'_{[n,m]}) = Z(G_{[n,m]}) \cup \{C_1, C_2\}$, mit $C_1 = (s_1, t_1, w_1, s_1)$, und $C_2 = (s_2, t_2, w_2, s_2)$ eine Kreispackung in $G'_{[n,m]}$. Es gilt:

$$|Z(G'_{[n,m]})| = \nu'(G_{[n,m]}) + 2 = \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{2(|E(G'_{[n,m]})| - |V(G'_{[n,m]})|)}{3} \right\rfloor,$$

also ist $Z(G'_{[n,m]})$ maximal nach (3.1). Ferner existiert in $G'_{[n,m]}$ eine Facette F' mit einer der folgenden Eigenschaften:

- Falls $u_1 = u_2$ ist, so ist $V(F') = \{s_1, w_1, w_2, s_2, u_1\}$.
- Ansonsten hat $V(F')$ die Darstellung $V(F') = \{s_1, w_1, w_2, s_2\} \cup V(W(u_1, u_2))$, wobei $W(u_1, u_2)$ ein Pfad in $G_{[n,m]}$ mit $E(W(u_1, u_2)) \setminus E(F) = \emptyset$ ist (nach Konstruktion existiert in $G'_{[n,m]}$ ein solcher Pfad).

Damit enthält F' zwei voneinander verschiedene Kanten $e'_1 = (u_1, s_1)$ bzw. $e'_2 = (u_2, s_2)$, die nicht zu Kreisen der Packung $Z(G'_{[n,m]})$ gehören.

Jeder der neun Graphen $G_{[n,m],[n,m]} \in \mathcal{M}_0$ induziert also nach Konstruktion einen Graphen $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$, $[n, m] \in \mathcal{M}_1 := \{[10, 15], [11, 17], [12, 18], [12, 19], [13, 20], [14, 21], [14, 22], [15, 23] [16, 25]\}$, für den die Eigenschaft (2) gilt.

Diese Tatsache erlaubt genauso wie in Satz 3.1(ii) nun ein induktives Vorgehen zur Bestimmung von Graphen $G_{[n,m]}$ mit $n \geq 4$ und $m \in \{\frac{3n}{2}, \frac{3n}{2} + 1\}$, falls n eine gerade Zahl ist, sowie $m = \frac{3n+1}{2}$, falls n eine ungerade Zahl ist, welche $\nu'(G_{[n,m]}) = \lfloor \frac{2(m-n)}{3} \rfloor$ erfüllen. Für $k \geq 1$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k := & \{[4 + 6k, 6 + 9k], [5 + 6k, 8 + 9k], [6 + 6k, 9 + 9k], \\ & [6 + 6k, 10 + 9k], [7 + 6k, 11 + 9k], [8 + 6k, 12 + 9k], \\ & [8 + 6k, 13 + 9k], [9 + 6k, 14 + 9k], [10 + 6k, 16 + 9k]\}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gibt es für jedes $[n, m] \in \mathcal{M}_k$ jeweils einen Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$, welcher die Eigenschaft (2) erfüllt. Nach der Konstruktionssystematik von Graphen wie vorher induziert $G_{[n,m]}$ einen Graphen $G'_{[n,m]}$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} G'_{[n,m]} & \in \mathcal{P}[n + 6, m + 9], \\ |E(G'_{[n,m]})| & = m + 9 = \lfloor \frac{3(n+6)}{2} \rfloor, \\ \nu'(G'_{[n,m]}) & = \nu'(G_{[n,m]}) + 2 = \lfloor \frac{2((m+9)-(n+6))}{3} \rfloor. \end{aligned}$$

Damit induziert jeder der neun Graphen $G_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_k$ einen Graphen $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n + 6, m + 9]$ mit $[n + 6, m + 9] \in \mathcal{M}_{k+1}$, für den die Eigenschaft (2) gilt. Es folgt die Behauptung. \square

Betrachte nun die Fälle $[n, m] \neq [7, 15]$ und $3(n - 2) - 2 \leq m \leq 3(n - 2)$. Dann gilt:

Lemma 3.4. *Es sei $[n, m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$, $[n, m] \neq [7, 15]$ und $3(n - 2) - 2 \leq m \leq 3(n - 2)$. Dann gibt es Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ mit*

$$\nu'(G_{[n,m]}) = \min \left\{ \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, \lfloor \frac{2(m-n)}{3} \rfloor \right\}.$$

Beweis. Für $[n, m] \in \{[4, 6], [5, 9], [6, 10]\}$ gilt: $\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \rfloor < \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$, ansonsten gilt $\lfloor \frac{m}{3} \rfloor \leq \lfloor \frac{2(m-n)}{3} \rfloor$ für $[n, m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$ und $3(n - 2) - 2 \leq m \leq 3(n - 2)$.

Für $[n, m] \in \{[4, 6], [5, 9], [6, 10]\}$ ist die Behauptung für den in Abbildung 3.1(a) skizzierten Graphen $G_{[4,6]}$, den in Abbildung 3.3(a) skizzierten Graphen $G_{[6,10]}$ sowie dem in Abbildung 3.4(a) skizzierten Graphen $G_{[5,9]}$ erfüllt.

Es sei $5 \leq n \leq 9$ und

$$\mathcal{M}_0 := \{[5, 8], [6, 11], [6, 12], [7, 13], [8, 16], [9, 21]\}.$$

Abbildung 3.1(b) und Abbildung 3.4(b) – (f) zeigen sechs Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ mit $[n, m] \in \mathcal{M}_0$.

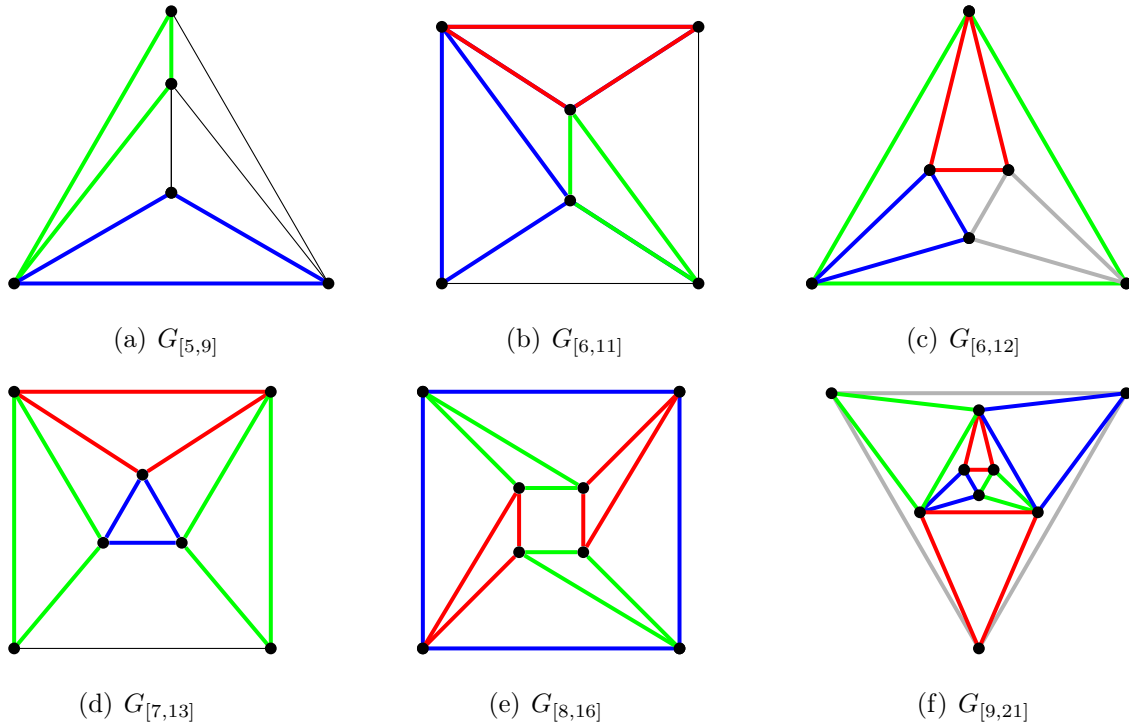


Abbildung 3.4: Polyhedrale Graphen $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ aus Lemma 3.4. Die farblich gekennzeichneten Kanten visualisieren jeweils Kreise eine maximale kantendisjunkte Kreispackung $Z(G_{[n,m]})$. Anmerkung: Die Graphen $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ erfüllen, die Eigenschaft (3) aus Lemma 3.4 und die Eigenschaft (4) aus Satz 3.2, da $Z(G_{[n,m]})$ ausschließlich aus Facettenkreisen besteht.

Ein solcher Graph $G_{[n,m]}$ erfüllt die Eigenschaft (3) :

- (3) Es gilt $3(n-2) - 2 \leq m \leq 3(n-2)$ und $\nu'(G_{[n,m]}) = \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$. In $G_{[n,m]}$ gibt es eine maximale Kreispackung $Z(G_{[n,m]})$ sowie eine Facette F mit $C(F) \in Z(G_{[n,m]})$ (siehe Abbildung 3.1(b) und Abbildung 3.4(b) – (f)).

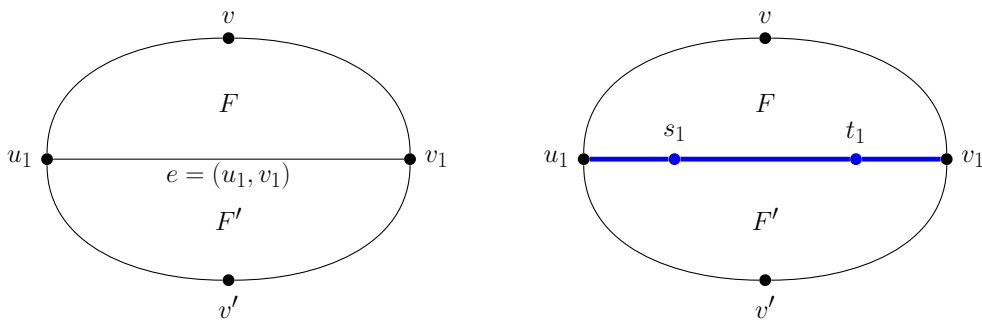
Aus $G_{[n,m]}$ wird nun folgendermaßen ein Graph $G'_{[n,m]}$ konstruiert:

- Wähle eine beliebige Kante $e = (u_1, v_1) \in E(F)$. Da e in der Kantenmenge von genau zwei Facetten enthalten ist, gibt es genau eine Facette F' mit $e \in E(F')$

und $F' \neq F$. Ferner existieren zwei Knoten $v \in V(F) \setminus \{u_1, v_1\}$ sowie $v' \in V(F') \setminus \{u_1, v_1\}$, da $G_{[n,m]}$ schlicht ist und somit keine Multikanten enthält.

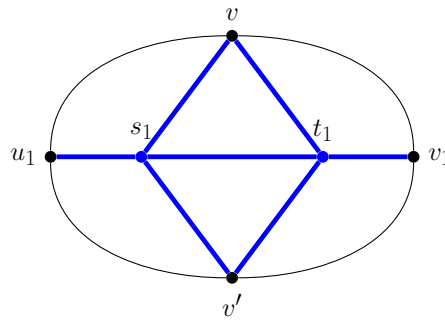
- Die Kante $e = (u_1, v_1)$ wird durch (u_1, s_1, t_1, v_1) unterteilt,
- anschließend werden zwei Kanten $(s_1, v), (t_1, v)$ in das zugehörige Gebiet der Facette F und zwei Kanten $(s_1, v'), (t_1, v')$ in die Facette F' eingebettet.

Ausgehend von den Facetten F und F' aus $G_{[n,m]}$ ist diese Konstruktionssystematik in Abbildung 3.5 skizziert.



(a) $F, F' \in F(G_{[n,m]})$ mit $C(F) \in Z(G_{[n,m]})$

(b) Unterteilung von e



(c) Teilgraph von $G'_{[n,m]}$

Abbildung 3.5: Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ in Lemma 3.4. Anmerkung: Da $C(F) \in Z(G_{[n,m]})$, ist $C(F') \notin Z(G_{[n,m]})$. Die Knoten $v \in V(F)$ und $v' \in V(F')$ existieren, da $G_{[n,m]}$ schlicht ist.

Somit ist nach Konstruktion $|V(G'_{[n,m]})| = |V(G_{[n,m]})| + 2$, $|E(G'_{[n,m]})| = |E(G_{[n,m]})| + 6$, $|F(G'_{[n,m]})| = |F(G_{[n,m]})| + 4$. Ferner ist $G'_{[n,m]}$ offensichtlich planar. Der Nachweis, dass $G'_{[n,m]}$ 3-fach zusammenhängend ist, wird analog zu dem Beweis von Satz 3.1(ii) im Anhang A.1 in Lemma A.2 aufgeführt. Insgesamt ergibt sich, dass $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n + 2, m + 6]$.

Dann ist $Z(G'_{[n,m]}) = (Z(G_{[n,m]}) \setminus \{C(F)\}) \cup \{C_1, C_2, C_3\}$ mit $C_1 = (s_1, t_1, v', s_1)$, $C_2 = (v, s_1, W(u_1, v))$, wobei $E(W(u_1, v)) \setminus E(F) = \emptyset$ und $C_3 = (v, t_1, W(v_1, v))$, wobei $E(W(v_1, v)) \setminus E(F) = \emptyset$ eine Kreispackung in $G'_{[n,m]}$.

Es gilt für $[n, m] \neq [7, 15]$:

$$|Z(G'_{[n,m]})| = \nu'(G_{[n,m]}) + 2 = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{|E(G'_{[n,m]})|}{3} \right\rfloor,$$

also ist $Z(G'_{[n,m]})$ maximal nach (3.1). Zudem existiert mit C_1 ein Facettenkreis in $Z(G'_{[n,m]})$ und somit eine Facette $F \in F(G'_{[n,m]})$ mit Kantenmenge $E(F) = E(C_1)$. Somit induziert jeder der sechs Graphen $G_{[n,m],[n,m]} \in \mathcal{M}_0$ also einen Graphen $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ mit

$$[n, m] \in \mathcal{M}_1 := \{[7, 14], [8, 17], [8, 18], [9, 19], [9, 20], [11, 27]\},$$

für den die Eigenschaft (3) gilt.

Diese Tatsache erlaubt nun ein induktives Vorgehen zur Bestimmung von Graphen $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \neq [7, 15]$, $n \geq 4$ und $3(n-2) - 2 \leq m \leq 3(n-2)$, welche $\nu'(G_{[n,m]}) = \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor$ erfüllen. Für $k \geq 1$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k := & \{[5 + 2k, 8 + 6k], [6 + 2k, 11 + 6k], [6 + 2k, 12 + 6k], \\ & [7 + 2k, 13 + 6k], [8 + 2k, 16 + 6k], [9 + 2k, 21 + 6k]\}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gibt es für jedes $[n, m] \in \mathcal{M}_k$ jeweils einen Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$, welcher die Eigenschaft (3) erfüllt. Somit induziert nach derselben Konstruktionssystematik wie vorher $G_{[n,m]}$ dann einen Graphen $G'_{[n,m]}$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} G'_{[n,m]} & \in \mathcal{P}[n + 2, m + 6], \\ \nu'(G'_{[n,m]}) & = \nu'(G_{[n,m]}) + 2 = \left\lfloor \frac{m+6}{3} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Damit induziert jeder der sechs Graphen $G_{[n,m],[n,m]} \in \mathcal{M}_k$ einen Graphen $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n + 2, m + 6]$ mit $[n + 2, m + 6] \in \mathcal{M}_{k+1}$, für den die Eigenschaft (3) gilt. Es folgt die Behauptung. \square

Zusammen mit Lemma 3.3 und Lemma 3.4 kann nun der Beweis des Satzes 3.2 geführt werden. Die Beweisidee für die übrigen Fälle ist ähnlich der aus dem ersten

Schritt im Beweis zu Satz 3.1(ii). Der wesentliche Unterschied liegt in der Konstruktionssystematik zur Bestimmung der Menge \mathcal{M}_k , da diese anders als dort und den vorausgegangenen Lemmata 3.3 und 3.4 keine konstante Kardinalität besitzt. Genauer:

Beweis. Für $n \geq 4$ und $m \in \{\frac{3n}{2}, \frac{3n}{2} + 1\}$, falls n eine gerade Zahl ist, bzw. $m = \frac{3n+1}{2}$, falls n eine ungerade Zahl ist, ergibt sich die Behauptung bereits aus Lemma 3.3. Für $[n, m] \neq [7, 15]$, $n \geq 4$ und $3(n-2) - 2 \leq m \leq 3(n-2)$ ist die Behauptung die Aussage von Lemma 3.4. Die in Lemma 3.3 und Lemma 3.4 konstruierten Graphen besitzen Eigenschaft (4):

(4) Es gilt $\nu'(G_{[n,m]}) = \min \left\{ \lfloor \frac{m}{3} \rfloor, \lfloor \frac{2(m-n)}{3} \rfloor \right\}$. In $G_{[n,m]}$ gibt es eine maximale Kreispackung $Z(G_{[n,m]})$ und eine Facette F mit $C(F) \in Z(G_{[n,m]})$.

Dies gilt für die betrachteten Graphen in Lemma 3.3, da nach der dortigen Konstruktionssystematik eine Facette F mit $E(F) = E(C_1)$ existiert sowie die in Abbildung 3.1 und Abbildung 3.3 skizzierten maximalen Kreispackungen $Z(G_{[n,m]})$ ausschließlich aus Facettenkreisen bestehen. Für die in Lemma 3.4 betrachteten Graphen gilt dies offensichtlich, da diese Eigenschaft (3) erfüllen und die in Abbildung 3.1(a), in Abbildung 3.3(a) und in Abbildung 3.4(a) skizzierten maximalen Kreispackungen ausschließlich aus Facettenkreisen bestehen.

Für $[n, m] \in \mathcal{M}_0 := \{[4, 6], [5, 8], [5, 9], [6, 9], [6, 10], [6, 11], [6, 12]\}$ existiert $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ mit der Eigenschaft (4).

Aus $G_{[n,m]}$ wird nun folgendermaßen ein Graph $G'_{[n,m]}$ konstruiert:

- Wähle drei beliebige verschiedene Kanten $e_1 = (u_1, v_1)$, $e_2 = (u_2, v_2)$, $e_3 = (u_3, v_3)$ aus $E(F)$. Diese Kanten e_i existieren, da $G_{[n,m]}$ schlicht ist und somit keine Multikanten enthält.
- Die Kanten e_i , mit $i \in \{1, 2, 3\}$ werden durch die Pfade (u_i, s_i, v_i) unterteilt.
- Anschließend werden drei Kanten $(s_1, s_2), (s_1, s_3), (s_2, s_3)$ in die Facette F eingebettet.

Ausgehend von der Facette F aus $G_{[n,m]}$ ist diese Konstruktionssystematik in Abbildung 3.6 skizziert.

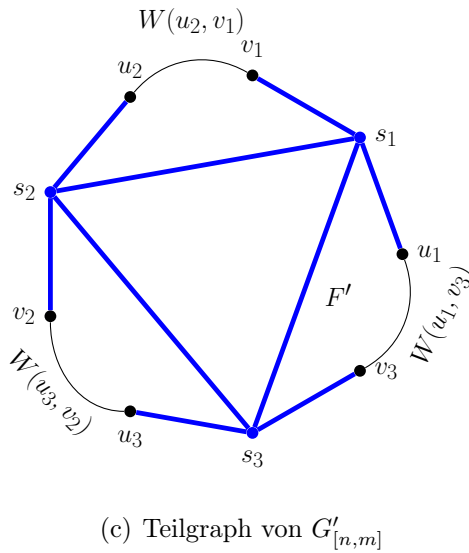
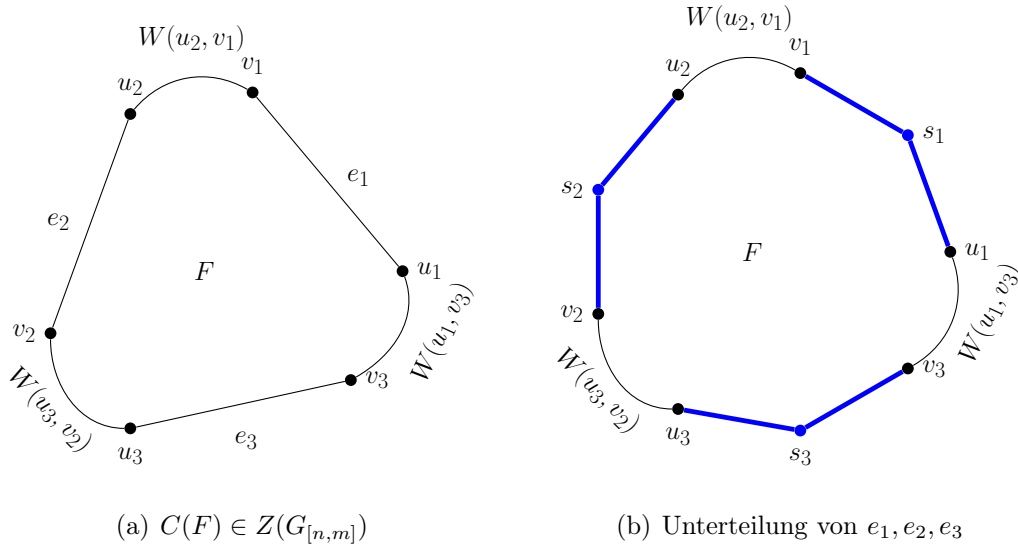


Abbildung 3.6: Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ in Satz 3.2. Anmerkung: Die drei hier skizzierten Pfade $W(u_{i+1}, v_i)$ sowie $W(u_1, v_3)$ können jeweils auch ein Knoten in $V(F)$ (falls $u_{i+1} = v_i$ bzw. $u_3 = v_1$ gilt) oder jeweils eine Kante in $E(F)$ sein (falls $(u_i, v_{i+1}) \in E(F)$ bzw. $(u_1, v_3) \in E(F)$).

Hier gilt nach Konstruktionssystematik von $G'_{[n,m]}$: $|V(G'_{[n,m]})| = |V(G_{[n,m]})| + 3$, $|E(G'_{[n,m]})| = |E(G_{[n,m]})| + 6$, $|F(G'_{[n,m]})| = |F(G_{[n,m]})| + 3$. Zudem ist $G'_{[n,m]}$ planar. Dass $G'_{[n,m]}$ 3-fach zusammenhängend ist, wird analog zu dem ersten Schritt aus Satz 3.1(ii) separat im Anhang A.1 in Lemma A.3 aufgeführt. Insgesamt ergibt sich somit, dass $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n + 3, m + 6]$.

Offenbar ist

$$Z(G'_{[n,m]}) = (Z(G_{[n,m]}) \cup \{C_1, C_2, C_3\}) \setminus \{C(F)\}$$

mit $C_1 = (s_1, s_2, W(u_2, s_1))$ mit $E(W(u_2, v_1)) \subset E(C(F))$, $C_2 = (s_2, s_3, W(u_3, s_2))$ mit $E(W(u_3, v_2)) \subset E(C(F))$ und $C_3 = (s_3, s_1, W(u_1, s_3))$ mit $E(W(u_1, v_3)) \subset E(C(F))$, eine Kreispackung in $G'_{[n,m]}$. Es gilt für $[n, m] \neq [7, 15]$:

$$\begin{aligned} |Z(G'_{[n,m]})| &= \nu'(G_{[n,m]}) + 2 \\ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \right\} + 2 \\ &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{|E(G'_{[n,m]})|}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(|E(G'_{[n,m]})| - |V(G'_{[n,m]})|)}{3} \right\rfloor \right\}, \end{aligned}$$

also ist $Z(G'_{[n,m]})$ maximal nach (3.1). Zudem existiert in $G'_{[n,m]}$ eine Facette F' mit $E(F') = E(C_3)$. Jeder der sieben Graphen $G_{[n,m]}$, $[n, m] \in \mathcal{M}_0$ induziert also einen Graphen $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n+3, m+6]$,

$$[n+3, m+6] \in \mathcal{M}'_0 := \{[7, 12], [8, 14], [8, 15], [9, 15], [9, 16], [9, 17], [9, 18]\},$$

für den die Eigenschaft (4) gilt.

Definiere für $i \in \{4, 5, 6\}$ die Mengen $\mathcal{M}_{i,0} := \{[n, m] \in \mathcal{M}_0 \mid n = i\}$ sowie zudem $\mathcal{M}'_{i,0} := \{[n, m] \in \mathcal{M}'_0 \mid n = i+3\}$. Dann gilt $\mathcal{M}_{i,0} = \{[i, m] \mid \mathcal{P}[i, m] \neq \emptyset\}$.

Zudem definiere für $i \in \{4, 5, 6\}$ die drei Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,1} &:= \mathcal{M}'_{i,0} \\ &\cup \{[i+3, m] \mid G_{[i+3,m]} \in \mathcal{P}[n, m] \text{ erfüllt (2)}\} \\ &\cup \{[i+3, m] \mid G_{[i+3,m]} \in \mathcal{P}[n, m] \text{ erfüllt (3)}\}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.3 und Lemma 3.4 gilt $|\mathcal{M}_{i,1}| = |\mathcal{M}'_{i,0}| + 3$ für $i = 4$, $|\mathcal{M}_{i,1}| = |\mathcal{M}'_{i,0}| + 5$ für $i = 5$ und $|\mathcal{M}_{i,1}| = |\mathcal{M}'_{i,0}| + 4$ für $i = 6$ und damit $\mathcal{M}_{4,1} = \{[7, m] \mid \mathcal{P}[7, m] \neq \emptyset\} \setminus \{[7, 15]\}$ sowie $\mathcal{M}_{i,1} = \{[i+3, m] \mid \mathcal{P}[i+3, m] \neq \emptyset\}$ mit $i \in \{5, 6\}$. Nach Lemma 3.3 und 3.4 existiert - mit Ausnahme des Paares $[7, 15]$ - ein Graph $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}_{[n+3, m+6]}$ mit $[n+3, m+6] \in \mathcal{M}_{i,1}$, der Eigenschaft (4) erfüllt.

Bemerke, dass für den Fall $[10, 21]$ der Graph $G_{[10,21]}$ aus Abbildung 3.7 die Eigenschaft (4) erfüllt. Füge somit dieses $[n, m]$ -Paar zu der Menge $\mathcal{M}'_{4,1}$ hinzu. Dann gilt $|\mathcal{M}'_{4,1}| = |\mathcal{M}'_{4,0}| + 4$. Dies erlaubt nun ein induktives Vorgehen zur Bestimmung von

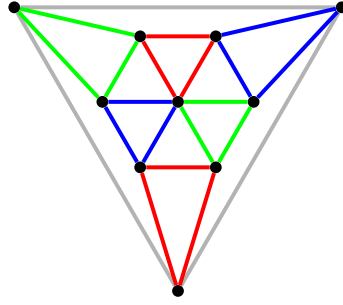


Abbildung 3.7: Polyhedraler Graph $G'_{[10,21]}$ mit $\nu'(G) = 7$. Die farblich gekennzeichneten Kanten visualisieren Kreise einer maximalen kantendisjunkten Kreispackung $Z(G_{[10,21]})$. Anmerkung: Offensichtlich erfüllt $G'_{[10,21]}$ die Eigenschaft (4), da die gewählte Kreispackung ausschließlich aus Facettkreisen besteht.

Graphen $G_{[n,m]}$ mit $[n, m] \neq [7, 15]$, $n \geq 4$ und $\lceil \frac{3n}{2} \rceil \leq m \leq 3(n-2)$, welche die Eigenschaft (4) erfüllen.

Für $i \in \{5, 6\}$ und $k \geq 1$ sowie $i = 4$ und $k \geq 2$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,k} &:= \mathcal{M}'_{i,k-1} \\ &\cup \{[i+3k, m] \mid G_{[i+3k,m]} \text{ erfüllt (2)}\} \\ &\cup \{[i+3k, m] \mid G_{[i+3k,m]} \text{ erfüllt (3)}\}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme gibt es für jedes $[n, m] \in \mathcal{M}_{i,k}$ jeweils einen Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$, welcher die Eigenschaft (4) erfüllt. Nach derselben Konstruktionssystematik wie vorher induziert $G_{[n,m]}$ dann einen Graphen $G'_{[n,m]}$ für den zusätzlich zur Eigenschaft (4) noch die Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned} G'_{[n,m]} &\in \mathcal{P}[n+3, m+6], \\ \nu'(G'_{[n,m]}) &= \nu'(G_{[n,m]}) + 2 = \min \left\{ \left\lfloor \frac{m+6}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2((m+6)-(n+3))}{3} \right\rfloor \right\}. \end{aligned}$$

Das zu $G'_{[n,m]}$ gehörige $[n, m]$ -Paar ist dann in $\mathcal{M}'_{i,k}$ enthalten und es gilt $|\mathcal{M}'_{i,k}| = |\mathcal{M}_{i,k}|$.

Definiere nun

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,k+1} &:= \mathcal{M}'_{i,k} \\ &\cup \{[i+3(k+1), m] \mid G_{[i+3(k+1),m]} \text{ erfüllt (2)}\} \\ &\cup \{[i+3(k+1), m] \mid G_{[i+3(k+1),m]} \text{ erfüllt (3)}\}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.3 und Lemma 3.4 existiert ein Graph $G'_{[n,m]} \in \mathcal{P}_{[n+3,m+6]}$ mit $[n+3, m+6] \in \mathcal{M}_{i,k+1}$, der Eigenschaft (4) erfüllt.

Sei $i \in \{4, 5, 6\}$ und $k \geq 0$. Falls nun $n = i + 3(k+1)$ eine ungerade Zahl ist, so existieren $3(n-2) - \lceil \frac{3n}{2} \rceil + 1$ $[n, m]$ -Paare mit $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$. Zudem gilt für $n \neq 7$ mit Lemma 3.3 und 3.4, dass

$$|\mathcal{M}_{i,k+1}| = |\mathcal{M}'_{i,k}| + 4 = 3((n-3) - 2) - \frac{3(n-3)}{2} + 5 = 3(n-2) - \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 1.$$

Falls $n = i + 3(k+1)$ eine gerade Zahl ist, so gibt es $3(n-2) - \frac{3n}{2} + 1$ $[n, m]$ -Paare mit $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$. Zudem gilt zusammen mit Lemma 3.3 und 3.4, dass

$$|\mathcal{M}_{i,k}| = |\mathcal{M}'_{i,k-1}| + 5 = 3((n-3) - 2) - \left\lceil \frac{3(n-3)}{2} \right\rceil + 6 = 3(n-2) - \frac{3n}{2} + 1.$$

Somit existiert nach der Konstruktionssystematik für jedes $[n, m]$ -Paar - mit Ausnahme von $[7, 15]$ - ein Graph $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}_{[n,m]}$ mit

$$\nu'(G_{[n,m]}) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \right\}.$$

□

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass für den polyhedralen Graphen G abgeleitet aus der Schlegel-Diagramm-Darstellung des Pentagondodekaeders mit $n = 20, m = 30$ und $\nu'(G) = 3 < \min \left\{ \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(30-20)}{3} \right\rfloor \right\}$ gilt, was offensichtlich zeigt, dass nicht für jeden Graph $G \in \mathcal{P}[n, m]$ folgt: $\nu'(G) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \right\}$.

Es folgt somit auch für $\nu'(G)$, dass die obere Schranke mit der Ausnahme des Paares $[7, 15]$ bestmöglich ist. Für $n \leq 14, m \leq 21$ sind die Kreispackungszahlen $\nu'(G_{[n,m]})$ in Tabelle 3.2 aufgelistet.

Die blau hinterlegten Kreispackungszahlen entsprechen $\nu'(G_{[n,m]})$ für $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ aus Lemma 3.3. Die grün hinterlegten Kreispackungszahlen entsprechen $\nu'(G_{[n,m]})$ für $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ aus Lemma 3.4.

Das Paar $[7, 15]$ mit $\nu'(G_{[7,15]}) \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{15}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(15-7)}{3} \right\rfloor \right\} - 1$ und das Paar $[10, 21]$ mit $\nu'(G_{[10,21]}) \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{21}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(21-10)}{3} \right\rfloor \right\}$ sind rot hinterlegt. Die Kreispackungszahlen zu Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ zu Paaren aus $\mathcal{M}'_{i,0}$ sind gelb und zu Graphen $G_{[n,m]} \in \mathcal{P}[n, m]$ zu Paaren aus $\mathcal{M}'_{i,1}$ für $i \in \{4, 5, 6\}$ sind orangefarbig hinterlegt.

n \ m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	1										
7											
8		2									
9		2	2								
10			2								
11			3	2							
12			4	3	2						
13				4	3						
14				4	4	3					
15				4	4	4	3				
16					5	4	4				
17					5	5	4	4			
18					6	6	5	4	4		
19						6	6	5	4		
20						6	6	6	5	4	
21						7	7	6	6	5	4

Tabelle 3.2: Übersicht zu bestmöglichen oberen Schranken an $\nu'(G)$ für polyhedrale Graphen $G \in \mathcal{P}[n, m]$ (mit $n \leq 14, m \leq 21$).

Innerhalb der konstruierten Graphen G existiert eine maximale Kreispackung $Z(G)$, die ausschließlich aus Facettenkreisen in G besteht. Somit gilt für die entsprechenden Graphen

$$\nu'(G) = \alpha(G^*).$$

Was direkt zu folgender Aussage über die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G^*)$ des Dualgraphen G^* für $G \in \mathcal{P}[n, m]$ führt.

Korollar 3.5. *Es sei $[n, m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $[n, m] \neq [7, 15]$ und $\mathcal{P}[n, m] \neq \emptyset$, dann existiert ein Graph $G \in \mathcal{P}[n, m]$ mit*

$$\alpha(G^*) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2(m-n)}{3} \right\rfloor \right\}.$$

3.3 Polyhedrale Graphen mit $\nu(G) > \alpha(G^*)$

Abschließend werden innerhalb dieses Abschnittes kubische, polyhedrale Graphen konstruiert, die eine maximale Kreispackung mit

$$\nu(G) = \nu'(G) > \alpha(G^*)$$

besitzen. Für derartige Graphen G kann es also keine maximale Kreispackung geben, die ausschließlich aus Facettenkreisen besteht. Zur Illustration ist in Abbildung 3.8(a) ein kubischer, polyhedraler Graph angegeben, für den $\nu(G) = 3$ und $\alpha(G^*) = 2$ gilt. Die blau gekennzeichneten Kanten in G entsprechen der Kantenmenge der maximalen Kreispackung. Sein zugehöriger Dualgraph G^* ist in Abbildung 3.8(b) mit einer 4-Färbung dargestellt. Offensichtlich ist $\alpha(G^*) = 2$.

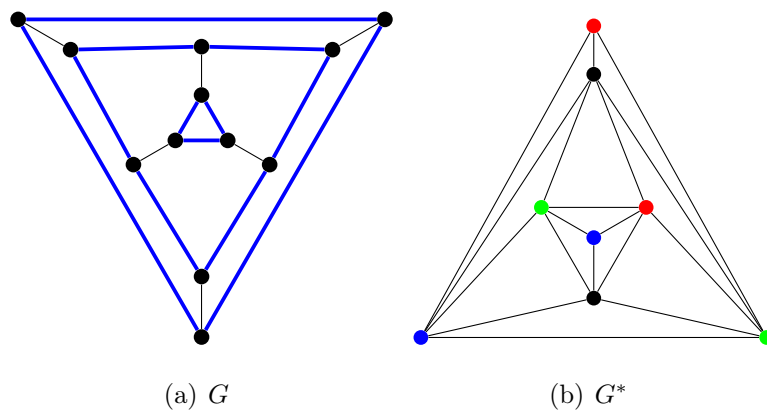
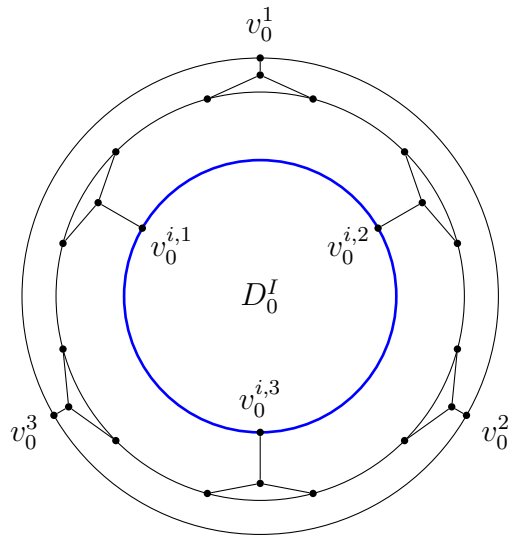


Abbildung 3.8: Darstellung eines kubisch, polyhedralen Graphen G mit $\nu(G) = 3 > 2 = \alpha(G^*)$. Die blau skizzierten Kanten entsprechen dabei der Kantenmenge einer maximalen Kreispackung in G . Zudem ist in G^* ein 4-Färbung skizziert.

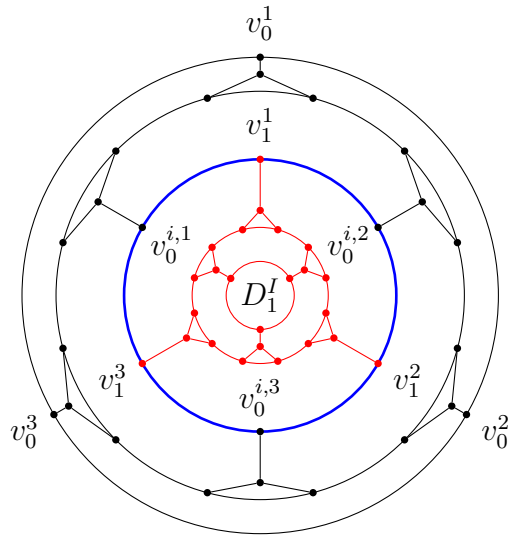
Zudem kann die Differenz $\nu(G) - \alpha(G^*)$ im Allgemeinen für einen kubischen, polyhedralen Graphen G und seinen zugehörigen Dualgraphen G^* beliebig groß ausfallen.

Lemma 3.6. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert ein kubischer, polyhedraler Graph G_k mit $\nu(G_k) - \alpha(G_k^*) = k$.

Beweis. Der Beweis wird über vollständige Induktion nach k geführt. Für $k = 0$ sei dazu der in Abbildung 3.9(a) dargestellte kubische, polyhedrale Graph G_0 gewählt.



(a) G_0



(b) G_1

Abbildung 3.9: Darstellung von zwei kubischen, polyhedralen Graphen G_0 und G_1 . Es gilt $\nu(G_0) = \alpha(G_0^*) = 8$ sowie $\nu(G_1) = 15$ und $\alpha(G_1^*) = 14$. Hierbei wird G_1 ausgehend von G_0 konstruiert. Die in (b) schwarz dargestellten Knoten entsprechen der Knotenmenge $V(G_0)$ in (a) und die schwarz dargestellten Kanten der Kantenmenge $E(G_0) \setminus E(D_0^I)$ in G_0 . Die rot dargestellten Knoten v_1^1, v_1^2 und v_1^3 entsprechen der Unterteilung der Kanten aus $E(D_0^I)$ in G_1 . Zudem entsprechen die rot dargestellten Knoten der Knotenmenge $V(\tilde{G}_0)$ sowie die rot dargestellten Kanten (Kantenmenge $E(\tilde{G}_0)$) sind in D_0^I von G_0 eingebettet. Der blau skizzierte Kreis $C(F^6(G_1)) = (v_0^{i,1}, v_1^1, v_0^{i,2}, v_1^2, v_0^{i,3}, v_1^3, v_0^{i,1})$ (der Länge 6) ist in einer maximalen Kreispackung von G_1 enthalten. Hierbei ist $F^a(G_1) = F^a(G_0) = D_0^A$.

Hierbei ist $F^3(G_0) := \{F \in F(G_0) \mid |E(F)| = 3\}$, d.h. $F^3(G_0)$ ist die Menge an Dreiecksfacetten in G_0 . Offenbar ist $|F^3(G_0)| = 8$. Sei ferner $F^8(G_0) := \{F \in F(G_0) \mid |E(F)| = 8\}$ die Menge an Achtecksfacetten in G_0 . Hier gilt $|F^8(G_0)| = 6$. Dann ergibt sich $F(G_0) = F^3(G_0) \cup F^8(G_0)$ in G_0 .

Zunächst wird nun $\nu(G_0) - \alpha(G_0^*)$ bestimmt.

Offensichtlich sind die 8 Facettenkreise aus $\mathcal{C}_0^3 := \{C(F) \mid F \in F^3(G_0)\}$ paarweise knotendisjunkt. Damit ist $Z^3(G_0) := \mathcal{C}_0^3$ eine Kreispackung in G_0 mit $|Z^3(G_0)| = 8$. Da $|V(G_0)| = 24$ und $\nu(G_0) \leq \left\lfloor \frac{|V(G_0)|}{3} \right\rfloor = 8$ ist, muss $Z^3(G_0)$ maximal sein.

Zudem ist $U^0 := \{v \in V(G_0^*) \mid \delta_{G_0^*}(v) = 3\}$ eine unabhängige Menge in G_0^* mit $|U^0| = 8$. Da G_0 kubisch ist, ist $\nu(G_0) = \nu'(G_0)$. Nach Lemma 2.8 folgt also $\nu(G_0) \geq \alpha(G_0^*)$. Somit ist U^0 maximal. Es gilt

$$\nu(G_0) - \alpha(G_0^*) = 0.$$

Aus Abbildung 3.9(a) wird deutlich, dass in G_0 zwei Dreiecksfacetten $D_0^A, D_0^I \in F^3(G_0)$ mit $D_0^A = (v_0^1, v_0^2, v_0^3, v_0^1) = F^a(G_0)$ und $D_0^I = (v_0^{i,1}, v_0^{i,2}, v_0^{i,3}, v_0^{i,1})$ existieren. Sei \tilde{G}_0 der durch $E(G_0) \setminus E(D_0^A)$ kanteninduzierte Teilgraph von G_0 . In Abbildung 3.9(b) ist die Knoten und Kantenmenge von \tilde{G}_0 in rot als Teilgraph von G_1 skizziert. Dann gibt es genau 3 Knoten in $v_0^j \in V(\tilde{G}_0)$ mit $\delta_{\tilde{G}_0}(v_0^j) = 1$.

Aus G_0 wird nun ein Graph G_1 (skizziert in Abbildung 3.9(b)) konstruiert:

- (1) Für $j \in \{1, 2\}$ unterteile die Kanten $(v_0^{i,j}, v_0^{i,j+1})$ durch den Knoten v_1^j sowie die Kante $(v_0^{i,3}, v_0^{i,1})$ durch den Knoten v_1^3 . Auf diese Weise entsteht ein Graph G'_1 . Es gilt $\delta(v_1^j) = 2$ in G'_1 . Zudem gibt es in G'_1 eine Sechseckfacette $F^6(G'_1)$ mit

$$C(F^6(G'_1)) = (v_0^{i,1}, v_1^1, v_0^{i,2}, v_1^2, v_0^{i,3}, v_1^3, v_0^{i,1}).$$

- (2) Bette \tilde{G}_0 in $F^6(G'_1)$ ein, derart, dass v_1^j in $V(G'_1)$ und v_0^j in $V(\tilde{G}_0)$ zusammenfallen.

Für den Induktionsanker ($k = 1$) betrachten wir den Graphen G_1 . Dieser hat die folgenden Eigenschaften:

- Es gilt $V(G_1) = V(G_0) \cup V(\tilde{G}_0)$, $|V(G_1)| = 48$ und $E(G_1) = E(G'_1) \cup E(\tilde{G}_0)$.

- Nach Konstruktion ist G_1 offenbar kubisch und polyhedral.
- Es gilt $F^a(G_1) = F^a(G_0) = D_0^A$.
- G_1 enthält genau 14 Dreiecksfacetten, 6 Achtecksfacetten und 6 Neunecksfacetten $F^9(G_1) := \{F \in F(G_1) \mid |E(F)| = 9\}$. Es gilt

$$F(G_1) = F^3(G_1) \cup F^8(G_1) \cup F^9(G_1).$$

- Mit $D_1^I \in F^3(G_1) \setminus \{D_0^A\}$ ist in G_1 (genau wie zuvor in G_0) eine Dreiecksfacette enthalten, derart, dass drei Achtecksfacetten F_i^8 mit $i \in \{1, 2, 3\}$ und $E(F_i^8) \cap E(D_1^I) \neq \emptyset$ in G_1 existieren (siehe Abbildung 3.9(b)). Bemerke, die Kanten der Kantenmenge $E(D_1^I)$ können somit in der selben Weise wie die Kantenmenge $E(D_0^I)$ unterteilt und anschließend \tilde{G}_0 in D_1^I eingebettet werden.
- Die 14 Facettenkreise aus $\mathcal{C}_1^3 := \{C(F) \mid F \in F^3(G_1)\}$ sind paarweise knotendisjunkt in G_1 und jeweils knotendisjunkt zu $C(F^6(G'_1))$. Dann ist also

$$Z^3(G_1) := \mathcal{C}_1^3 \cup \{C(F^6(G'_1))\}$$

eine Kreispackung in G_1 mit $|Z^3(G_1)| = 15$. Da $|V(G_1)| = 48$ und G_1 genau 14 knotendisjunkte Kreise der Länge l mit $l = 3$ enthält, ist $\nu(G_1) \leq 15$ und folglich $Z^3(G_1)$ maximal.

- G_1 enthält keinen Kreis der Länge l mit $l \leq 5$ mit Ausnahme von den 14 Facettenkreisen aus $\mathcal{C}_1^3 := \{C(F) \mid F \in F^3(G_1)\}$.
- Zudem ist $U^1 := \{v \in V(G_1^*) \mid \delta_{G_1^*}(v) = 3\}$ eine unabhängige Menge in G_1^* mit $|U^1| = 14$. Für jeden Knoten $w \in V(G_1^*)$ mit $\delta_{G_1^*}(w) > 3$, existieren drei zu w adjazente Knoten $w_i \in V(G_1^*), i \in \{1, 2, 3\}$, welche die Eigenschaft haben $\delta_{G_1^*}(w_i) = 3$. Jeder zu w_i in G_1^* adjazente Knoten v ($v \neq w$) ist auch adjazent zu w in G_1^* . Ist w in einer unabhängigen Menge U^w in $V(G_1^*)$ enthalten, so ist U^w nicht maximal, da mit $\tilde{U}^w := U^w \setminus \{w\} \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ eine unabhängige Menge in $V(G_1^*)$ existiert mit $|\tilde{U}^w| = |U^w| + 2$. Folglich ist U^1 maximal.

Somit gilt

$$\nu(G_1) - \alpha(G_1^*) = 1.$$

Da in \tilde{G}_0 eine Dreiecksfacette D_0^I enthalten ist, derart, dass drei Achtecksfacetten F_i^8 mit $i \in \{1, 2, 3\}$ und $E(F_i^8) \cap E(D_0^I) \neq \emptyset$ in \tilde{G}_0 (siehe Abbildung 3.9(b), rot skizzierter Teilgraph von G_1) existieren, kann nun für $k \geq 2$ ausgehend von G_{k-1} ein Graph G_k konstruiert werden. Hierzu wird durch Unterteilung der Kanten von $E(D_{k-1}^I)$ in G_{k-1} der Graph G'_k erzeugt wird. Sowie durch die Einbettung von \tilde{G}_0 in $F^6(G'_k)$ der Graph G_k bestimmt werden.

Nach Induktionsannahme gibt es mit G_k einen kubisch, polyhedralen Graph, der die folgenden Eigenschaften (5) erfüllt:

- Es gilt $V(G_k) = V(G_{k-1}) \cup V(\tilde{G}_0)$, $|V(G_k)| = 24(k+1)$ und $E(G_k) = E(G'_k) \cup E(\tilde{G}_0)$.
- Es gilt $F^a(G_k) = F^a(G_0) = D_0^A$.
- G_k enthält genau $8 + 6k$ Dreiecksfacetten, 6 Achtecksfacetten und $6k$ Neunecksfacetten $F^9(G_k) := \{F \in F(G_k) \mid |E(F)| = 9\}$. Es gilt $F(G_k) = F^3(G_k) \cup F^8(G_k) \cup F^9(G_k)$.
- G_k enthält k paarweise knotendisjunkte Kreise der Länge 6

$$C(F^6(G'_1)), \dots, C(F^6(G'_k)).$$

- Die $8 + 6k$ Facettenkreise aus $\mathcal{C}_1^3 := \{C(F) \mid F \in F^3(G_k)\}$ sind paarweise knotendisjunkt in G_k und jeweils paarweise knotendisjunkt zu den Kreisen

$$C(F^6(G'_1)), \dots, C(F^6(G'_k)).$$

- Mit $D_k^I \in F^3(G_k) \setminus \{D_0^A\}$ ist in G_k eine Dreiecksfacette enthalten, derart, dass drei Achtecksfacetten F_i^8 mit $i \in \{1, 2, 3\}$ und $E(F_i^8) \cap E(D_k^I) \neq \emptyset$ in G_k existieren. Die Kanten der Kantenmenge $E(D_k^I)$ können folglich analog zu D_0^I unterteilt und \tilde{G}_0 in D_k^I eingebettet werden.
- G_k enthält keinen Kreis der Länge l mit $l \leq 5$ mit Ausnahme von den $8 + 6k$ Facettenkreisen aus $\mathcal{C}_k^3 := \{C(F) \mid F \in F^3(G_1)\}$.
- Zudem gibt es mit $U^k := \{v \in V(G_k^*) \mid \delta_{G_k^*}(v) = 3\}$ eine unabhängige Menge in G_k^* mit $|U^k| = 8 + 6k$. Für jeden Knoten $w \in V(G_k^*)$ mit $\delta_{G_k^*}(w) > 3$, existieren

drei zu w adjazente Knoten $w_i \in V(G_k^*), i \in \{1, 2, 3\}$ mit $\delta_{G_k^*}(w_i) = 3$ sowie jeder zu w_i in G_k^* adjazente Knoten (ungleich w) ist auch adjazent zu w in G_k^* .

- Es gilt

$$\nu(G_k) - \alpha(G_k^*) = k.$$

Also erfüllt G_1 offenbar genau diese Eigenschaften (5).

Nun wird durch Unterteilung der Kanten von $E(D_k^I)$ der Graph G'_{k+1} erzeugt. Sowie durch die Einbettung von \tilde{G}_0 in $F^6(G'_{k+1})$ der Graph G_{k+1} bestimmt. Dann besitzt G_{k+1} die Eigenschaften:

- Es gilt $V(G_{k+1}) = V(G_k) \cup V(\tilde{G}_0)$, $|V(G_{k+1})| = 24(k + 2)$ und $E(G_{k+1}) = E(G'_{k+1}) \cup E(\tilde{G}_0)$.
- Nach Konstruktion ist G_{k+1} offenbar kubisch und polyhedral.
- Es gilt $F^a(G_{k+1}) = F^a(G_0) = D_0^A$.
- G_{k+1} enthält genau $8 + 6(k + 1)$ Dreiecksfacetten, 6 Achtecksfacetten und $6(k + 1)$ Neunecksfacetten $F^9(G_{k+1}) := \{F \in F(G_{k+1}) \mid |E(F)| = 9\}$. Es gilt $F(G_{k+1}) = F^3(G_{k+1}) \cup F^8(G_{k+1}) \cup F^9(G_{k+1})$.
- Mit $D_{k+1}^I \in F^3(G_{k+1}) \setminus \{D_0^A\}$ ist in G_{k+1} eine Dreiecksfacette enthalten, derart, dass drei Achtecksfacetten F_i^8 mit $i \in \{1, 2, 3\}$ und $E(F_i^8) \cap E(D_{k+1}^I) \neq \emptyset$ in G_{k+1} existieren.
- G_{k+1} enthält $(k + 1)$ paarweise knotendisjunkte Kreise der Länge 6

$$C(F^6(G'_1)), \dots, C(F^6(G'_{k+1})),$$

da D_k^I jeweils paarweise knotendisjunkt zu den Kreisen

$$C(F^6(G'_1)), \dots, C(F^6(G'_k))$$

in G_k ist.

- Die $8 + 6(k + 1)$ Facettenkreise aus $\mathcal{C}_{k+1}^3 := \{C(F) \mid F \in F^3(G_{k+1})\}$ sind paarweise knotendisjunkt in G_{k+1} und jeweils paarweise knotendisjunkt zu

$$C(F^6(G'_1)), \dots, C(F^6(G'_{k+1})).$$

Dann ist

$$Z^3(G_{k+1}) := \mathcal{C}_{k+1}^3 \cup \{C(F^6(G'_j)), j \in \{1, \dots, k+1\}\}$$

eine Kreispackung in G_{k+1} mit $|Z^3(G_{k+1})| = 8 + 7(k+1)$. Nach Konstruktion besitzt G_{k+1} keinen Kreis der Länge l mit $l \leq 5$, der nicht einer der $8 + 6(k+1)$ Kreise der Länge l mit $l = 3$ in G_{k+1} ist, also ist $Z^3(G_{k+1})$ maximal.

- Zudem ist $U^{k+1} := \{v \in V(G_{k+1}^*) \mid \delta_{G_{k+1}^*}(v) = 3\}$ eine unabhängige Menge in G_{k+1}^* mit $|U^{k+1}| = 8 + 6(k+1)$. Für jeden Knoten $w \in V(G_{k+1}^*)$ mit $\delta_{G_{k+1}^*}(w) > 3$, existieren drei zu w adjazente Knoten $w_i \in V(G_{k+1}^*), i \in \{1, 2, 3\}$, welche die Eigenschaft haben $\delta_{G_{k+1}^*}(w_i) = 3$. Jeder zu w_i in G_{k+1}^* adjazente Knoten v ($v \neq w$) ist auch adjazent zu w in G_{k+1}^* . Folglich ist U^{k+1} maximal. Es ergibt sich

$$\nu(G_{k+1}) - \alpha(G_{k+1}^*) = (8 + 7(k+1)) - (8 + 6(k+1)) = k+1.$$

Somit erfüllt G_{k+1} die Eigenschaften (5) und Lemma 3.6 ist bewiesen.

□

4 Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in Halin-Graphen

Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt in der Bestimmung von oberen Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ für eine Unterklasse polyedraler Graphen, den sogenannten Halin-Graphen. Konvexe Polyeder, deren zugehörige Graphen Halin-Graphen sind, werden Domes oder Roofless Polyhedra genannt (vgl. [17], [20]).

Ein *Halin-Graph* ist ein planarer Graph $G = (V(G), E(G))$ mit der Kantenmenge $E(G) = E_1 \cup E_2$ derart, dass der von E_1 kanten-induzierte Teilgraph B ein Baum mit $\delta(v_i) \neq 2$ für alle $v_i \in V(B)$ ist, $|V(B)| \geq 4$ gilt und der von E_2 kanten-induzierte Teilgraph C^a ein Kreis mit $V(C^a) = \{v \in V(B) \mid \delta(v) = 1\}$ und $E(C^a) = E_2$ ist. Abbildung 4.1 zeigt zwei Beispiele für Halin-Graphen.

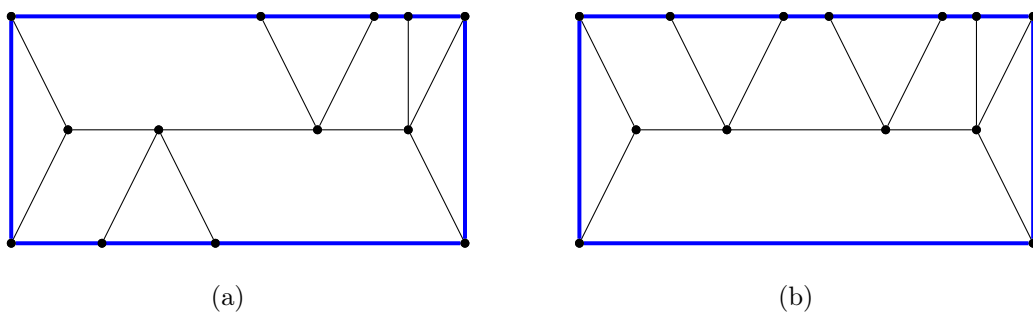


Abbildung 4.1: Beispiele zu Halin-Graphen. Die blau skizzierten Kanten entsprechen jeweils der Kantenmenge von C^a und die schwarz skizzierten Kanten jeweils der Kantenmenge von B .

Die beiden in Abbildung 4.1 dargestellten Halin-Graphen sind nicht isomorph, im Gegensatz zu den jeweils von E_1 kanten-induzierten Teilgraphen B .

Halin-Graphen wurden erstmalig durch Rudolf Halin in [37] als sog. minimal 3-fach-knotenzusammenhängende planare Graphen beschrieben. Hierbei bedeutet minimal 3-fach-knotenzusammenhängend, dass jeder Halin-Graph G 3-fach knotenzusammenhängend und planar also polyhedral ist, aber jeder kanteninduzierte Teilgraph $G - e$ mit $e \in E(G)$ nicht 3-fach knotenzusammenhängend ist.

Beispielhaft seien an dieser Stelle einige Eigenschaften von Halin-Graphen G aufgelistet:

- G ist hamiltonsch. D.h. es existiert ein Kreis C in G mit $V(C) = V(G)$. Zudem existiert für jedes $e \in E(G)$ ein sog. hamiltonscher Kreis C_e (mit $V(C_e) = V(G)$) mit $e \in E(C_e)$ (vgl. [17]).
- In $F(G)$ existiert eine Dreiecksfacette, also eine Facette mit einem Facettenkreis der Länge 3 (vgl. [70]). Somit ist G nicht 2-färbbar. Bemerke, da G planar ist, ist G 4-färbbar nach Satz 2.4. Da K_4 ein Halin-Graph ist, gibt es offensichtlich nicht 3-färbbare Halin-Graphen.
- G besitzt eine Baumweite von höchstens 3 (vgl. [8]). Die *Baumweite* von G entspricht der minimalen Baumweite aller Baumzerlegungen von G . Eine *Baumzerlegung* von G ist dabei definiert als Tupel (X, T) , wobei $X := \{X_1, \dots, X_k\}$ mit $X_i \subseteq V(G)$ ist und T ein Baum ist, dessen k Knoten die Teilmengen X_i sind. Dabei seien die folgenden Eigenschaften für (X, T) erfüllt:

$$(a) \bigcup_{i \in \{1, \dots, k\}} X_i = V(G),$$

$$(b) \text{ Für jedes } e = (u, v) \in E(G) \text{ existiert ein } X_i \text{ mit } u, v \in X_i,$$

$$(c) \text{ Falls } v \in X_i \text{ und } v \in X_j, \text{ dann gilt für alle Knoten } X_l \text{ mit } X_l \in W(X_i, X_j) \text{ in } T, \text{ dass } v \in X_l.$$

Die *Baumweite einer Baumzerlegung* (X, T) ist die maximale Kardinalität aller in der Baumzerlegung enthaltenen Teilmengen X_i ($\max_{i \in \{1, \dots, k\}} |X_i|$).

Die Definition der Baumweite eines Graphen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht verwendet werden, ist allerdings elementar für die Bedeutung von Halin-Graphen, da teilweise NP-schwere Probleme für Graphen mit beliebiger Baumweite für Graphen mit beschränkter Baumweite in polynomialer Zeit gelöst werden

können. So gewann die Klasse der Halin-Graphen u.a. dadurch an Bedeutung, da Problemstellungen - wie etwa das Handlungsreisendenproblem - die für Graphen im Allgemeinen nicht effizient lösbar sind [53], für Graphen dieser Unterklasse effizient, d.h. in polynomieller Zeit, gelöst werden können [17]. Zudem konnte in [7] beispielsweise gezeigt werden, dass eine maximale unabhängige Menge von der Knotenmenge eines Halin-Graphen in linearer Zeit bestimmt werden kann.

Es wird sich zeigen, dass auch die Bestimmung von $\nu'(G)$ für $G \in \mathcal{H}$ in polynomieller Zeit erfolgen kann, da dies äquivalent zur Bestimmung der Unabhängigkeitszahl $\alpha(G^*)$ des zugehörigen Dualgraphen G^* ist. Diese Bestimmung lässt sich in polynomieller Zeit durchführen [73].

Die Menge der Halin-Graphen sei im Folgenden mit \mathcal{H} bezeichnet. Ohne Einschränkung sei die gewählte Einbettung von $G \in \mathcal{H}$ in die Ebene \mathbb{R}^2 innerhalb dieses Kapitels derart, dass die Kantenmenge $E(C^a)$ der Kantenmenge der äußeren Facette $E(F^a)$ entspricht (analog zu den beiden Darstellungen in Abbildung 4.1). Die Knoten $v \in V(B)$, $\delta(v) \geq 3$ in B seien dabei in das innere Gebiet $I(J(C^a))$ eingebettet. Für die Kantenmenge $E(G) \setminus E(C^a)$ gilt $(E(G) \setminus E(C^a)) \cap I(J(C^a)) \neq \emptyset$.

Das folgende Lemma fasst vorab fünf elementare Aussagen zusammen:

Lemma 4.1. *Sei $G \in \mathcal{H}$, dann gilt:*

- (i) Für jeden Kreis C in G ist $E(C) \cap E(C^a) \neq \emptyset$,
- (ii) $|E(C^a)| = |V(C^a)| = f - 1$,
- (iii) $1 \leq \nu(G) \leq \min \{2n - m - 1, \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor\}$,
- (iv) $\lceil \frac{n+4}{2} \rceil \leq f \leq n$ und $f = n \Leftrightarrow G \in \mathcal{W}_n$,
- (v) $n + 2 \leq 2|V(C^a)|$.

Beweis. (i) Angenommen es gibt C mit $E(C) \cap E(C^a) = \emptyset$. Dann gilt $E(C) \subseteq E(G) \setminus E(C^a) = E_1$. Dies liefert einen Widerspruch, da der kanten-induzierte Teilgraph von E_1 ein Baum ist.

- (ii) Da C^a ein Kreis ist, gilt $|E(C^a)| = |V(C^a)|$. Sei $e \in E(C^a)$, dann existiert genau eine von F^a verschiedene Facette F_e mit $e \in E(F_e)$ und $E(F_e) \cap$

$E(C^a) \setminus \{e\} = \emptyset$, da G dreifach knotenzusammenhängend ist. Somit gilt für $E(C^a)$, dass

$$|E(C^a)| = |\{F_e \in F(G) \mid e \in E(C^a)\}| = |F(G)| - |\{F^a\}| = f - 1.$$

(iii) Da C^a ein Kreis ist, folgt $1 \leq \nu(G)$. Zudem ist $\text{girth}(G) \geq 3$, da $G \in \mathcal{H}$. Sei C ein von C^a verschiedener Kreis in G , dann existiert ein Knoten $v \in V(C) \setminus V(C^a)$. Also ist

$$\nu(G) \leq n - |V(C^a)| = n - (f - 1) = 2n - m - 1.$$

$n - (f - 1) = 2n - m - 1$ folgt mit (ii) und der Eulerschen Polyederformel (siehe Satz 2.3). Ferner existieren zwei Knoten $u, v \in V(C) \cap V(C^a)$ nach (i). Somit folgt mit (ii), dass $\nu(G) \leq \lfloor \frac{|V(C^a)|}{2} \rfloor = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor$.

(iv) Nach Lemma 2.9(ii) und Satz 2.3 ist $\lceil \frac{n+4}{2} \rceil \leq f$ und nach (iii) gilt $1 \leq n - (f - 1)$. Für $1 = n - (f - 1)$ existiert genau ein $v \in V(G) \setminus V(C^a)$. Nach Definition eines Wheel-Graphen folgt $f = n$ für $G \in \mathcal{W}_n$.

(v) Nach (ii) und (iv) gilt: $n + 2 \leq 2(f - 1) = 2|V(C^a)|$.

□

Der folgende Satz beschreibt die Beziehung zwischen $\nu'(G)$ und $\alpha(G^*)$ für Halin-Graphen G .

Satz 4.2. *Sei $G \in \mathcal{H}$, dann gilt $\nu'(G) = \alpha(G^*)$.*

Beweis. Mit Lemma 2.8 gilt $\nu'(G) \geq \alpha(G^*)$. Angenommen, es sei $\nu'(G) > \alpha(G^*)$. Dann existiert eine maximale kantendisjunkte Kreispackung $Z(G) = \{C_1, \dots, C_j, C_{j+1}, \dots, C_{\nu'(G)}\}$. Es sei die Nummerierung der Kreise in $Z(G)$ so gewählt, dass C_i für $i \leq j \leq \alpha(G^*)$ ein Facettenkreis in G und somit C_{j+1} ein Nicht-Facettenkreis in $Z(G)$ ist. Ferner sei $Z(G)$ so gewählt, dass unter allen maximalen kantendisjunkten Kreispackungen j maximal ist.

Da C_{j+1} ein Kreis in G ist, gibt es mit Lemma 4.1(i) eine Kante $e = (u, v) \in E(C^a) \cap E(C_{j+1})$. Zudem gibt es nach Lemma 4.1(ii) genau eine Facette $F \neq F^a$ mit $e \in E(F)$.

Betrachte nun diese Kantenmenge $E(F)$ genauer. In $E(F)$ existiert dann eine Kante e' mit $e' \in E(Z(G)) \setminus E(C_{j+1})$, da sonst die kantendisjunkte Kreispackung $Z'(G) := Z(G) \setminus \{C_{j+1}\} \cup \{C(F)\}$ maximal ist und somit j nicht maximal gewählt wäre.

Angenommen es sei $e' = (u', v') \in E(F)$ mit $e' \in E(Z(G)) \setminus E(C_{j+1})$. Da $e \in E(C^a)$, folgt $e' \notin E(C^a)$ und somit $e' \in E(B)$ nach Lemma 4.1 (i) und (ii). Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Genau einer der beiden Knoten u', v' ist in $V(C^a)$ enthalten. Sei $u' \in V(C^a)$, dann ist $\delta(u') = 3$. Zudem sind die beiden von e' verschiedenen zu u' inzidenten Kanten in $E(C^a) \cap E(C_{j+1})$ enthalten, da u' inzident zu e ist. Da $\delta(u') = 3$ und $C_{j+1} \in Z(G)$, ergibt sich der Widerspruch zu $e' \in E(Z(G)) \setminus E(C_{j+1})$.

Seien $u', v' \notin V(C^a)$, dann existiert genau eine Facette $\tilde{F} \neq F$ mit $e' \in E(\tilde{F})$ und nach Lemma 4.1(ii) genau eine Kante $\tilde{e} = (\tilde{u}, \tilde{v}) \in E(C^a) \cap E(\tilde{F})$ sowie $\tilde{u}, \tilde{v} \notin \{u, v\}$. Da $e' \in E(B)$ und $G \in \mathcal{H}$ gilt, besteht der kanten-induzierte Teilgraph $E(G) \setminus \{e, e', \tilde{e}\}$ dann aus zwei Zusammenhangskomponenten. Sei die Bezeichnung der Knoten $\{u, u', v, v'\}$ ohne Einschränkung in G so gewählt, dass die Knotenmenge genau einer der beiden Zusammenhangskomponenten u und u' sowie die Knotenmenge anderen Zusammenhangskomponente v und v' enthält. Somit existiert weder ein Pfad $W(u, v)$ noch ein Pfad $W(u', v')$ in dem kanten-induzierten Teilgraphen $E(G) \setminus \{e, e', \tilde{e}\}$. Da C_{j+1} ein Kreis in G ist und $e' \notin E(C_{j+1})$, ist folglich $\tilde{e} \in E(C_{j+1})$. Dann existiert kein Kreis C mit $e' \in E(C)$ und $C \in Z(G)$, da $C_{j+1} \in Z(G)$.

Somit gilt $E(F) \cap (E(Z(G)) \setminus E(C_{j+1})) = \emptyset$ im Widerspruch zur Wahl von $Z(G)$. \square

Es sei $F \in \mathcal{F}(G)$, dann seien die zugehörigen Knoten in G^* mit $v(F)$ bezeichnet. Nach Satz 4.2 kann das Problem der Bestimmung der Kreispackungszahl $\nu'(G)$ für kantendisjunkte Kreise auf die Bestimmung der Unabhängigkeitszahl $\alpha(G^*)$ des Dualgraphen G^* zurückgeführt werden. Genauer: Die Bestimmung der Kreispackungszahl für kantendisjunkte Kreise kann sogar auf die Bestimmung der Unabhängigkeitszahl des sog. schwachen Dualgraphen zurückgeführt werden. Der knoteninduzierte Teilgraph von G^* mit $V(G^{*,w}) = V(G^*) \setminus \{v(F^a)\}$, heißt *schwacher Dualgraph* $G^{*,w}$ von G . Dies gilt, da für den Fall $\alpha(G^*) = 1$ ein beliebiger Knoten

$v(F_i) \neq v(F^a)$ in $V(G^*)$ gewählt werden kann bzw. für $\alpha(G^*) \geq 2$ der Knoten $v(F^a)$ in keiner unabhängigen Menge von G^* enthalten sein kann, da $v(F^a)$ adjazent zu allen übrigen Knoten in G^* ist. Der Graph $G^{*,w}$ ist außenplanar, da jede Facette $F \in F(G)$ eine gemeinsame Kante mit F^a in G besitzt. In [73] wird ein Algorithmus zur Bestimmung einer bzgl. der Knotengewichtung maximalen unabhängigen Menge für außenplanare knotengewichtete Graphen mit polynomialer Ordnung (von $\mathcal{O}(n^{2,87})$) angegeben. Offensichtlich kann dieser Algorithmus für die Bestimmung einer maximalen unabhängigen Menge sowie $\alpha(G^{*,w})$ in $G^{*,w}$ und folglich nach Satz 4.2 auch für die Bestimmung einer maximalen Kreispackung sowie $\nu'(G)$ in G verwendet werden.

Korollar 4.3. *Sei $G \in \mathcal{H}$, dann lässt sich eine maximale kantendisjunkte Kreispackung $Z(G)$ und somit $\nu'(G)$ mit einem Algorithmus von polynomialer Ordnung ermitteln.*

Da $G^{*,w}$ außenplanar ist, gilt nach Theorem 1 aus [52] zudem:

Korollar 4.4. *Sei $G \in \mathcal{H}$, dann ist $G^{*,w}$ 3-färbbar.*

4.1 Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in Halin-Graphen

\mathcal{HV}_n , \mathcal{HE}_m und \mathcal{HF}_f

Im folgenden Abschnitt werden Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ für spezielle Unterklassen von \mathcal{H} betrachtet. Es bezeichne $\mathcal{HV}_n := \{G \in \mathcal{H} \mid G \text{ hat Ordnung } n\}$, $\mathcal{HF}_f := \{G \in \mathcal{H} \mid G \text{ hat Facettenanzahl } f\}$ und $\mathcal{HE}_m := \{G \in \mathcal{H} \mid G \text{ hat Größe } m\}$. Dazu sei bemerkt, dass $\mathcal{HV}_n \subseteq \mathcal{PV}_n$, $\mathcal{HE}_m \subseteq \mathcal{PE}_m$ und $\mathcal{HF}_f \subseteq \mathcal{PF}_f$.

Satz 4.5. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & G \in \mathcal{HV}_n : 1 \leq \nu(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, \\
 & G \in \mathcal{HE}_m : \nu(G) \geq \begin{cases} 1, & m \text{ gerade} \\ 2, & m \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und } \nu(G) \leq \left\lfloor \frac{m+1}{5} \right\rfloor, \\
 & G \in \mathcal{HF}_f : 1 \leq \nu(G) \leq \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor. \\
 (ii) \quad & G \in \mathcal{HV}_n : \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor \leq \nu'(G) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \\
 & G \in \mathcal{HE}_m : \left\lfloor \frac{m+3}{9} \right\rfloor \leq \nu'(G) \leq \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor, \\
 & G \in \mathcal{HF}_f : \left\lfloor \frac{f-1}{3} \right\rfloor \leq \nu'(G) \leq \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor.
 \end{aligned}$$

(iii) Sei $m \neq 10$, dann sind die Schranken aus (i) an $\nu(G)$ bestmöglich,

Sei $m \neq 13$, dann sind die Schranken aus (ii) an $\nu'(G)$ bestmöglich.

Beweis. (i) Seien F_1, \dots, F_{f-1} Facetten aus G mit $F_i \neq F^a$. Falls nun $\bigcap_{i=1}^{f-1} V(F_i) \neq \emptyset$ gilt, so ist $G \in \mathcal{HF}_f \cap \mathcal{HV}_n \cap \mathcal{W}_n$. Somit ist $G \in \mathcal{HE}_{2(n-1)}$ und G besitzt eine gerade Anzahl an Kanten sowie $\nu(G) = 1$. Andernfalls existieren zwei knotendisjunkte Facetten in G , was $\nu(G) \geq 2$ impliziert. Somit ergeben sich die unteren Schranken an $\nu(G)$.

Für $G \in \mathcal{HF}_f$ ergibt sich mit Lemma 4.1(iii), dass $\nu(G) \leq \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor$. Ferner gilt für $G \in \mathcal{HV}_n$, dass $\nu(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, da $\text{girth}(G) \geq 3$. Demnach folgt $5\nu(G) \leq \frac{2(f-1)}{2} + \frac{3n}{3}$ und mit der Eulerschen Polyederformel erhält man $\nu(G) \leq \left\lfloor \frac{m+1}{5} \right\rfloor$ für $G \in \mathcal{HE}_m$.

(ii) Die unteren Schranken an $\nu'(G)$ folgen mit Satz 4.2 und Korollar 4.4. Es gilt $\nu'(G) = \alpha(G^*) = \alpha(G^{*,w}) \geq \left\lceil \frac{f-1}{3} \right\rceil$ für $G \in \mathcal{HF}_f$. Ferner gilt $f-1 = m-n+1 \geq \frac{1}{2}n+1 = \frac{n+2}{2}$ sowie $f-1 = m-n+1 \geq \frac{1}{3}m+1 = \frac{m+3}{3}$ und somit $\nu'(G) \geq \left\lceil \frac{n+2}{6} \right\rceil$ für $G \in \mathcal{HV}_n$ sowie $\nu'(G) \geq \left\lceil \frac{m+3}{9} \right\rceil$ für $G \in \mathcal{HE}_m$.

Nach Lemma 4.1 gilt für die oberen Schranken $\nu'(G) \leq \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ für $G \in \mathcal{HF}_f$ und $G \in \mathcal{HV}_n$ sowie $\nu'(G) \leq \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor$ für $G \in \mathcal{HE}_m$ mit der Eulerschen Polyederformel und $4\nu'(G) \leq 2 \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

(iii) Die in Tabelle 4.1 skizzierten Halin-Graphen werden herangezogen, um zu zeigen, dass die drei in Abhängigkeit von \mathcal{HV}_n , \mathcal{HE}_m und \mathcal{HF}_f in (i) und (ii) beschriebenen unteren Schranken an $\nu(G)$ bzw. an $\nu'(G)$ (mit Ausnahme von $m = 13$) bestmöglich sind.

An dieser Stelle wird basierend auf den in Tabelle 4.1 visualisierten Graphen die Struktur der iterativ zu konstruierenden Halin-Graphen verdeutlicht.

In Zeile 1 werden ausgehend von G_0^1 (mit $f = 4$) vier Halin-Graphen G_j^1 mit $j \in \{1, \dots, 4\}$ konstruiert, die $\nu(G_j^1) = 1$ erfüllen. Der Halin-Graph G_j^1 kann demnach ausgehend von G_{j-1}^1 durch Hinzufügen eines Knotens und zweier Kanten erzeugt werden. Analog gilt dies für Zeile 2, ausgehend von G_0^2 (mit $f = 5$), hier gilt $\nu(G_j^2) = 2$. Der bzw. die in G_j^i zu G_{j-1}^i mit $i \in \{1, 2\}$ hinzugefügte Knoten bzw. zwei Kanten sind in hierbei blau dargestellt.

Ausgehend von G_0^3 (mit $f = 5$) werden in Zeile 3 drei Halin-Graphen G_j^3 mit $j \in \{1, \dots, 3\}$ dargestellt, die $\nu'(G_j^3) = \lfloor \frac{f-1}{3} \rfloor$ erfüllen. Der Halin-Graph G_j^3 kann demnach ausgehend von G_{j-1}^3 durch Hinzufügen von zwei Knoten und drei Kanten erzeugt werden. Analog gilt dies für Zeile 4, ausgehend von G_0^4 (mit $f = 7$) und für Zeile 5, ausgehend von G_0^5 (mit $f = 9$). Die in G_j^i zu G_{j-1}^i mit $i \in \{3, 4, 5\}$ hinzugefügten zwei Knoten und drei Kanten sind in hierbei blau dargestellt.

Der Beweis wird formal innerhalb des Anhangs A.2 geführt. Ausgehend von den in Tabelle 4.1 dargestellten Halin-Graphen werden die Halin-Graphen G_j^i mit denen für alle $f \geq 4$ ein $G \in \mathcal{HF}_f$ existiert mit $\nu'(G) = \lfloor \frac{f-1}{3} \rfloor$, für alle $m \geq 6, m \neq \{7, 13\}$ ein $G \in \mathcal{HE}_m$ existiert mit $\nu'(G) = \lfloor \frac{m+3}{9} \rfloor$ sowie für alle $n \geq 4$ ein Graph $G \in \mathcal{HV}_n$ existiert mit $\nu'(G) = \lfloor \frac{n+2}{6} \rfloor$ konstruiert.

Da $\mathcal{HE}_7 = \emptyset$, verbleibt noch \mathcal{HE}_{13} zu diskutieren. Sei $G \in \mathcal{HE}_{13}$, dann ist $|V(C^a)| = 6$, $|V(B)| = 8$, nach Lemma 4.1(v). Folglich existieren genau zwei Knoten $v_1, v_2 \in V(B) \setminus V(C^a)$. Es sei ohne Einschränkung die Bezeichnung derart gewählt, dass $\delta(v_1) \leq \delta(v_2)$. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden: $\delta(v_1) = \delta(v_2) = 4$ oder $\delta(v_1) = 3$ und $\delta(v_2) = 5$.

Bezeichne die Knoten $v_i^a \in V(C^a)$, mit $i \in \{1, \dots, 6\}$ derart, dass v_i^a adja-

Zeile	Eigenschaften	$f = 4$	$f = 5$	$f = 6$	$f = 7$	$f = 8$	$f = 9$	$f = 10$	$f = 11$	
1	$\nu(G) = 1, f \geq 4,$ $n \geq 4, m = 2n - 2$									
2	$\nu(G) = 2,$ $m = 2n - 3$									
3	$\nu'(G) = \lceil \frac{f-1}{3} \rceil = \lceil \frac{n+2}{6} \rceil =$ $\lceil \frac{m+3}{9} \rceil, f \geq 4,$ $n \in \{4+2k k \geq 0\}, m = \frac{3n}{2}$									
4	$\nu'(G) = \lceil \frac{n+2}{6} \rceil = \lceil \frac{m+3}{9} \rceil,$ $n \in \{5+2k k \geq 0\},$ $m \in \{8+3k k \geq 0\}$									
5	$\nu'(G) = \lceil \frac{m+3}{9} \rceil,$ $m \in \{10+3k k \geq 0\}$									

Tabelle 4.1: Halin-Graphen aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m, \mathcal{HF}_f$, die die unteren Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ mit Gleichheit erfüllen. Eine Ausnahme bildet $G \in \mathcal{HE}_{13}$, hier gilt $\nu'(G) = 3$. Anmerkung: die blau skizzierten Knoten bzw. Kanten in G_j^i (i entspricht dem Zeilenindex in der Tabelle) entsprechen hierbei den zu G_{j-1}^i hinzugefügten Knoten bzw. Kanten. Für G_0^1 gilt $f = 4$, für G_0^2 und G_0^3 gilt $f = 5$, für G_0^4 gilt $f = 4$, für G_0^5 gilt $f = 7$ und für G_0^5 gilt $f = 9$.

zent zu v_{i+1}^a und v_6^a adjazent zu v_1^a . Falls $\delta(v_1) = \delta(v_2) = 4$, so seien v_i^a mit $i \in \{1, 2, 3\}$ adjazent zu v_1 und v_i^a mit $i \in \{4, 5, 6\}$ adjazent zu v_2 . Dann existieren mit $C_1 = (v_1, v_1^a, v_2^a, v_1)$, $C_2 = (v_2, v_5^a, v_6^a, v_2)$, $C_3 = (v_2, v_1, v_3^a, v_4^a, v_2)$ drei kantendisjunkte Kreise in G . Falls $\delta(v_1) = 3$ und $\delta(v_2) = 5$, so seien die Knoten v_i^a mit $i \in \{1, 2\}$ adjazent zu v_1 und v_i^a mit $i \in \{3, \dots, 6\}$ adjazent zu v_2 . So existieren mit $C_1 = (v_1, v_1^a, v_2^a, v_1)$, $C_2 = (v_2, v_3^a, v_4^a, v_2)$, $C_3 = (v_2, v_5^a, v_6^a, v_2)$ drei kantendisjunkte Kreise in G . Demnach gilt für $G \in \mathcal{HE}_{13} : \lceil \frac{m+3}{9} \rceil = 2 < 3 = \nu'(G)$.

Die in den ersten drei Zeilen von Tabelle 4.2 skizzierten Halin-Graphen werden herangezogen, um zu zeigen, dass die (mit Ausnahme von $m = 10$) oberen Schranken an $\nu(G)$ bestmöglich sind. Basierend auf den gewählten Graphen wird auch hier die Struktur weiterer formal iterativ zu konstruierender Halin-Graphen im Rahmen einer Beweisskizze verdeutlicht. Die fünf Graphen $\tilde{G}_0^i, i \in \{1, \dots, 5\}$ aus Zeile 1 (mit $f \in \{5, 6\}$), Zeile 2 (mit $f = 6$) und Zeile 3 (mit $f = 7$) nehmen die oberen Schranken an $\nu(G)$ an. Ausgehend von $\tilde{G}_0^i, i \in \{1, \dots, 5\}$ werden durch Einfügen von drei Knoten und fünf Kanten die jeweiligen Graphen \tilde{G}_1^i mit $|F(\tilde{G}_1^i)| = |F(\tilde{G}_0^i)| + 2$ erzeugt, die erneut die obere Schranke mit Gleichheit annehmen. Analog wird dann ausgehend von \tilde{G}_{j-1}^i der Graph \tilde{G}_j^i konstruktiv gebildet. Die genaue technische Konstruktionsmethodik dieser Halin-Graphen wird innerhalb des Anhangs A.2 beschrieben und somit dieser Teil der Behauptung bewiesen.

Die Graphen \tilde{G}_j^i mit $i \in \{6, 7\}$, die die oberen Schranken an $\nu'(G)$ annehmen, sind ausgehend von den Graphen \tilde{G}_0^6 in Zeile 4 (mit $f = 4$) und \tilde{G}_0^7 in Zeile 5 (mit $f = 5$) konstruiert. Bemerke, nach Konstruktion ist $G_j^1 = \tilde{G}_j^6$ und $G_j^2 = \tilde{G}_j^7$.

Sei $\mathcal{HF}_f \neq \emptyset$, dann existiert nach obig beschriebener Konstruktionsmethodik ein Graph $G \in \mathcal{HF}_f$ mit $\nu'(G) = \nu(G) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor$. Sei $\mathcal{HE}_m \neq \emptyset$, dann existiert ein Graph $G \in \mathcal{HE}_m$ mit $\nu'(G) = \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ sowie für alle $m \neq 10$ ein Graph $G \in \mathcal{HE}_m$, mit $\nu(G) = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor$. Für den Wheel-Graphen $G \in \mathcal{HE}_{10}$ gilt: $\nu(G) = 1 < 2 = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor$. Sei $\mathcal{HV}_n \neq \emptyset$, dann existiert ein Graph $G \in \mathcal{HV}_n$ mit $\nu'(G) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ sowie ein Graph $G \in \mathcal{HV}_n$ mit $\nu(G) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Zeile	Eigenschaften	$f = 4$	$f = 5$	$f = 6$	$f = 7$	$f = 8$	$f = 9$	$f = 10$
1	$\nu(G) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor, f \geq 4$ $n \in \{4\} \cup \{6 + 3k, 8 + 3k k \geq 0\},$ $m \in \{6\} \cup \{9 + 5k, 12 + 5k k \geq 0\}$ $\nu(G) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor,$ $n \in \{7 + 3k k \geq 0\},$ $m \in \{11 + 5k k \geq 0\}$							
2	$\nu(G) = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor,$ $m \in \{8 + 5k, 10 + 5k k \geq 0\}$							
3	$\nu(G) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m}{4} \rfloor,$ $m \in \{6 + 2k k \geq 0\}$ $\nu'(G) = \lfloor \frac{m}{4} \rfloor,$ $m \in \{9 + 2k k \geq 0\}$							
4								
5								

Tabelle 4.2: Halin-Graphen aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m, \mathcal{HF}_f$, die die oberen Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ mit Gleichheit erfüllen. Eine Ausnahme bildet $G \in \mathcal{HE}_{10}$, hier gilt $\nu(G) = 1$. Anmerkung zur Betrachtung von $\nu(G)$: die blau skizzierten Knoten bzw. Kanten in \tilde{G}_j^i entsprechen hierbei den zu \tilde{G}_{j-1}^i hinzugefügten Knoten bzw. Kanten. Der Graph \tilde{G}_0^1 ist in Zeile 1 mit $f = 5$, \tilde{G}_0^2 in Zeile 1 mit $f = 6$, \tilde{G}_0^3 ist in Zeile 2 mit $f = 6$ \tilde{G}_0^4 ist in Zeile 3 mit $f = 7$ (oben) und \tilde{G}_0^5 ist in Zeile 3 mit $f = 7$ (unten) dargestellt. Anmerkung zur Betrachtung von $\nu'(G)$: die blau skizzierten Knoten bzw. Kanten in \tilde{G}_j^i entsprechen hierbei den zu \tilde{G}_{j-1}^i hinzugefügten Knoten bzw. Kanten. Der Graph \tilde{G}_0^6 ist in Zeile 4 mit $f = 4$ und \tilde{G}_0^7 in Zeile 5 mit $f = 5$ dargestellt.

Somit ist gezeigt, dass die Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ mit Ausnahme von genau zwei Fällen bestmöglich gewählt sind. Ausnahmen bilden die obere Schranke für den Fall $G \in \mathcal{HE}_{10}$, hier gilt $\nu(G) = 1$, und die untere Schranke für den Fall $G \in \mathcal{HE}_{13}$, hier gilt $\nu'(G) = 3$.

□

Das Resultat liefert eine vollständige Übersicht zu oberen und unteren Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ für die Unterklassen $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m, \mathcal{HF}_f$ der Halin-Graphen \mathcal{H} . Somit wurden in Analogie zur Fragestellung aus [60] auch für Halin-Graphen bestmögliche Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ konstruiert. Ob die Übertragung weiterer für polyhedrale Graphen in Kapitel 3 erzielter Ergebnisse auf Halin-Graphen möglich ist, wird im folgenden Abschnitt untersucht.

4.2 Obere Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in Halin-Graphen $\mathcal{H}[n, m]$

Sei, in Anlogie zu $\mathcal{P}[n, m]$, nun $\mathcal{H}[n, m]$ für Halin-Graphen definiert:

$$\mathcal{H}[n, m] := \{G \mid G \in \mathcal{HV}_n \cap \mathcal{HE}_m\}.$$

Mit der Eulerschen Polyederformel gilt: Falls $\mathcal{H}[n, m] \neq \emptyset$, so ist die Anzahl an Facetten eines Graphen $G \in \mathcal{H}[n, m]$ eindeutig mit $f = m - n + 2$ bestimmt, d.h. $G \in \mathcal{HF}_{m-n+2}$.

Satz 4.6. *Es sei $[n, m] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\mathcal{H}[n, m] \neq \emptyset$.*

- (i) *Für alle $G \in \mathcal{H}[n, m]$ gilt: $\nu'(G) \leq \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$.*
- (ii) *Für alle $G \in \mathcal{H}[n, m]$ gilt: $\nu(G) \leq \min \{ \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor, 2n - m - 1 \}$.*
- (iii) *Es existiert $G \in \mathcal{H}[n, m]$ mit $\nu(G) = \min \{ \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor, 2n - m - 1 \}$ und es existiert $G \in \mathcal{H}[n, m]$ mit $\nu'(G) = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$.*

Beweis. Sei $G \in \mathcal{H}[n, m]$, dann gilt mit Satz 4.5 und der Eulerschen Polyederformel

$$(i) \quad \nu'(G) \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{m-n+1}{2} \right\rfloor \right\} = \left\lfloor \frac{m-n+1}{2} \right\rfloor.$$

Die letzte Gleichheit folgt nach Lemma 4.1(iv) mit $f \leq n$ und somit $4 \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor = 4 \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor \leq 2 \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor + 2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq m$. Nach Lemma 4.1(iii) gilt zudem

$$(ii) \quad \nu(G) \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{m-n+1}{2} \right\rfloor, 2n-m-1 \right\}.$$

(iii) Die in Tabelle 4.3 skizzierten Halin-Graphen werden genutzt, um jeweils einen Halin-Graphen $G \in \mathcal{H}[n, m]$ zu erzeugen, der die obere Schranke an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ mit Gleichheit erfüllt. Als Ausgangsgraph sei der Wheel-Graph $G_{f,0} \in \mathcal{H}(f, 2(f-1))$ für festes $f \geq 4$ gewählt. Die konzeptionelle Idee zur Bildung eines Graphen $G_{f,j}$ wird im Folgenden verbal skizziert und detailliert im Anhang A.3 ausgeführt.

Sei $j \geq 1$, dann werden die Graphen $G_{f,j}$ ausgehend von $G_{f,j-1}$ wie folgt iterativ gebildet:

- Für $j < \lfloor \frac{f-4}{2} \rfloor$ wird der Knoten $v_0 \in V(G_{f,0}) \setminus V(C^a)$ (jeweils der blau skizzierte Knoten innerhalb des Wheel-Graphen) sukzessive in $G_{f,j}$ durch einen im inneren Gebiet von C^a liegenden Pfad der Länge j (im folgenden verkürzt als innerer Pfad bezeichnet) ersetzt. Die Knoten und Kanten des inneren Pfades sind in Abbildung 4.3 innerhalb der Graphen blau dargestellt. Dabei ist jeder Knoten des so erzeugten Pfades in der Knotenmenge einer Dreiecksfacette (Facette mit Facettenkreis der Länge 3) in $G_{f,j}$ enthalten. Die Kantenmenge dieser Dreiecksfacette ist in Abbildung 4.3 rot dargestellt. Dabei gilt $|V(G_{f,j})| = |V(G_{f,j-1})| + 1$, $|E(G_{f,j})| = |E(G_{f,j-1})| + 1$ sowie $\nu(G_{f,j}) = \nu(G_{f,j-1}) + 1 = 2n - m - 1$ und $\nu'(G_{f,j}) = \nu'(G_{f,j-1}) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$.
- Für $j \geq \lfloor \frac{f-4}{2} \rfloor$ werden iterativ weitere Knoten auf dem inneren Pfad eingefügt. Hierbei wird sukzessive ein Knoten des inneren Pfades (ungleich dem Anfangs- bzw. Endknoten des Pfades) in $G_{f,j-1}$ durch zwei Knoten und eine Kante in $G_{f,j}$ ersetzt. Beispielhaft sind die zwei Knoten des inneren Pfades innerhalb des Graphs mit $n = 10$ und $f = 7$ sowie des Graphen mit $n = 12$ und $f = 8$ in Abbildung 4.3 rot dargestellt. Die zwei Knoten sind dann in der Knotenmenge einer Vierecksfacette (Facette mit Facettenkreis der Länge 4) von $G_{f,j}$ enthalten. Dabei bleiben $\nu(G_{f,j})$ und $\nu'(G_{f,j})$ konstant mit $\nu(G_{f,j}) = \nu'(G_{f,j}) = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$.

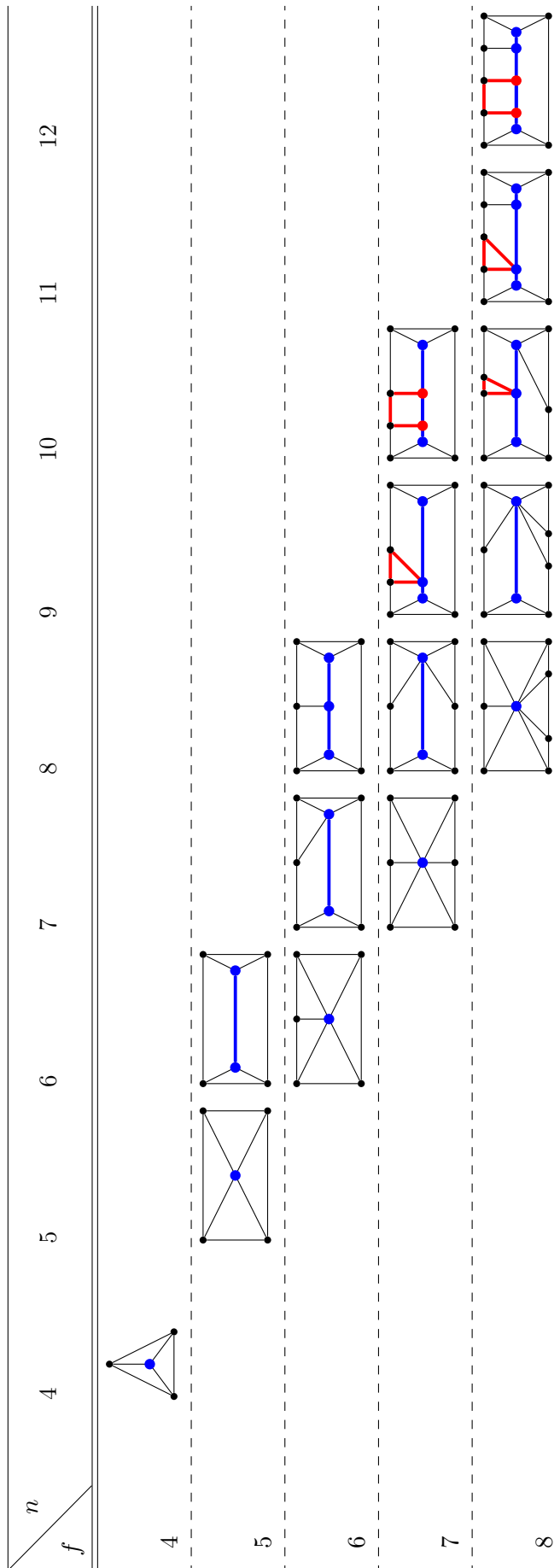


Tabelle 4.3: Halin-Graphen aus $\mathcal{H}[n, m]$ mit $f \leq 8$ und $n \leq 12$ sowie $\nu(G) = \min \{ \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor, 2n - m - 1 \}$ und $\nu'(G) = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$. Die Knoten und Kanten des Pfades der Länge j sind blau skizziert. Die rot dargestellten Kanten entsprechen der Kantenmenge der Dreiecksfacette bzw.

der Kantenmenge der Vierecksfacette (mit Ausnahme der Kante des inneren Pfades). Für $j \geq \lfloor \frac{f-4}{2} \rfloor$ sind in $G_{f,j}$ die zwei Knoten rot dargestellt, die sowohl in der Knotenmenge der Vierecksfacette als auch in der Knotenmenge des inneren Pfades enthalten sind.

Nach Konstruktion gilt $G_{f,j} \in \mathcal{H}(f+j, 2(f-1)+j) \cap \mathcal{HF}_f$. Für $j \in \{0, \dots, \lceil \frac{f}{2} \rceil - 2\}$:

$$\nu(G_{f,j}) = 1 + j = 2n - m - 1 \leq \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m-n+1}{2} \right\rfloor$$

und für $j \in \{\lceil \frac{f}{2} \rceil - 1, \dots, n-4\}$:

$$\nu(G_{f,j}) = \left\lfloor \frac{f-1}{2} \right\rfloor \leq 2n - m - 1.$$

Ferner gilt $\nu'(G_{f,j}) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$. Somit sind die oberen Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ mit $G \in \mathcal{H}[n, m]$ bestmöglich. \square

5 Schranken an $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen

Innerhalb dieses Kapitels werden nun Kreispackungszahlen bzw. maximale Kreispackungen in sog. Fulleren-Graphen betrachtet. Bevor ein solcher Fulleren-Graph formal definiert wird, soll ein Bezug zu Anwendungen in der Chemie hergestellt werden. Hier haben sog. Fullerene in den letzten 30 Jahren eine zunehmende wirtschaftliche Bedeutung erfahren (vgl. [46]).

Zum besseren Verständnis der folgenden chemischen Definition von Fullerenen sei kurz bemerkt, dass das Element ‘Kohlenstoff’ im Periodensystem der Elemente mit C bezeichnet wird, sechs Protonen und Elektronen besitzt sowie der vierten Hauptgruppe zugeordnet wird, das heißt, dass das Kohlenstoffatom besitzt auf der äußeren Schale vier ungepaarte Elektronen, die Bindungen zu weiteren Atomen eingehen können, um eine Edelgas-Elektronenanordnung mit acht Elektronen zu erhalten. Dazu bilden Kohlenstoffatome Bindungen mit weiteren Atomen, welche selbst ungepaarte Elektronen in das so entstehende Molekül bzw. die Verbindung mit einbringen.

In [50] sind als Beispiele für solche Moleküle angegeben: Kohlenstoffdioxid (CO_2), Kohlenwasserstoffe wie Methan (CH_4), Ethan (C_2H_6) oder n-Hexan (C_nH_{2n+2}) sowie Benzol (C_6H_6). Innerhalb des Benzol-Moleküls gehen sechs Kohlenstoffatome eine zweidimensionale ringförmige Verbindung ein, die aus drei Doppel- und drei Einfachbindungen bestehen. Die sechseckige Ringstruktur des Benzols wird als Sechsring bezeichnet. Beispielhaft ist ein solcher Sechsring in Abbildung 5.1 dargestellt.

Kohlenwasserstoffe und Benzol zeigen, dass Kohlenstoffatome auch Bindungen mit weiteren Kohlenstoffatomen eingehen. Die Fähigkeit von Kohlenstoffatomen, eine

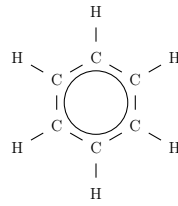
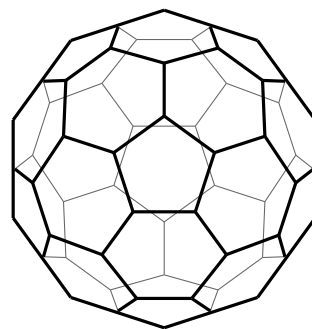


Abbildung 5.1: Sechseckige Ringstruktur des Benzols C_6H_6 . Bemerke, die 6 Kohlenstoffatome sind innerhalb der Darstellung mit C , die Wasserstoffatome mit H bezeichnet. Die Ringstruktur des Benzols ist durch den Kreis visualisiert.

Vielzahl an Bindungen mit weiteren Atomen einzugehen, wird in der organischen Chemie beschrieben.

Neben Grafit und Diamant bilden die sog. Fullere eine weitere Klasse von Kohlenstoffmolekülen (Moleküle bestehend aus ausschließlich Kohlenstoffatomen). Sie zeichnen sich durch ihre kugelförmige Anordnung aus [51]. *Fullerene* sind dreidimensionale Moleküle, die ausschließlich aus Kohlenstoffatomen bestehen, die symmetrisch auf einer Kugel oder einem Ellipsoid angeordnet sein können und dabei fünfeckige und sechseckige Kohlenstoffringe (kurz: Fünf- bzw. Sechsringe) bilden. Das wohl bekannteste Fulleren ist das Molekül C_{60} - auch bekannt als *Buckyball* -, das aus sechzig Kohlenstoffatomen besteht. Es hat die Form eines historischen Lederfußballs mit 20 Sechsringen und 12 Fünfringen. Schematisch wird eine dreidimensionale Darstellung des C_{60} in Abbildung 5.2 dargestellt. In dieser Abbildung



(a) C_{60} im \mathbb{R}^3

Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des Fulleren C_{60} bzw. Buckyballs.

sind die Kohlenstoffatome jeweils durch eine Ecke und die Bindungen zwischen den Kohlenstoffatomen jeweils durch Polyederkanten repräsentiert.

Benannt wurden Fullerene nach Richard Buckminster Fuller, einem amerikanischen Architekten, der durch seine Umsetzung von geodätischen Kuppelkonstruktionen bekannt wurde (vgl. [22]). Diese Kuppelkonstruktionen zeichnen sich u.a. dadurch aus, dass sie aus einfachen geometrischen Grundkörpern (meistens Dreiecken) bestehen, materialsparend sind und eine hohe Stabilität aufweisen.

Experimentell nachgewiesen wurde die Existenz von Fullerenen erstmals durch die Forschergruppe um Sir Harold Kroto im Jahr 1985 [44]. Die Forschergruppe erhielt im Jahr 1996 den Nobelpreis in Chemie [45] für den Nachweis der Fullerene. Fullerene können durch die Verdampfung von Grafit im Lichtbogen hergestellt werden.

Das Fulleren C_{60} hat einen Durchmesser von ca. $7 \cdot 10^{-10}$ Meter [69]. Somit entspricht das Größenverhältnis des Durchmessers eines C_{60} relativ zum Durchmesser eines Fußballs mit ca. 22 cm dem eines Fußballs relativ zum fünffachen Durchmesser der Erde (ca. 12.750 km). Zudem ist das C_{60} Fulleren das kleinste sog. *IPR-Fulleren*, welches die sog. *Independent Pentagon Rule* erfüllt. Diese bedeutet, dass jeder Fünfring des Fullerenes benachbart zu fünf Sechsringen ist.

Die Untersuchung von Fullerenen bildet seit ihrer Entdeckung ein weites, interdisziplinäres Forschungsgebiet. Anwendung finden sich beispielsweise in folgenden Bereichen:

- Medizintechnik und Biologie: In [5] wird ein Überblick über medizinische Anwendungsgebiete von Fullerenen ausgeführt. Beispielsweise sind C_{60} Derivate mit ihren antiviralen Aktivitäten von Interesse zur Bekämpfung von AIDS bzw. HIV und werden darüberhinaus aufgrund ihrer geringen Größe als potentieller Träger von Arzneimitteln angesehen. In [48] wird gezeigt, dass sog. Fullerenderivate mit funktionalen Gruppen als Photosensibilisator in der Krebsforschung bzw. Behandlung von bösartigen Tumoren angewendet werden können. Ein Vorteil dieser Fullerenderivate liegt im Gegensatz zur Chemotherapie in der geringeren Toxizität.
- Photovoltaik: Die ersten organischen Solarzellen bestanden sowohl aus organischen Makromolekülen (konjugierten Polymeren) als auch aus Fullerenen, wobei die Polymere als Elektronendonatoren und die Fullerene als Elektronenakzeptoren verwendet wurden. Diese fügten sich aus zwei dünnen Schichten

des Polymers sowie der Fullerene zusammen. Unter Lichteinstrahlung werden Elektronen des Polymers an die Fullerene abgegeben. Vorteile im Vergleich zu anorganischen Solarzellen liegen u.a. in den geringen Herstellungs- und Materialkosten, der flexiblen Einsatzmöglichkeiten und der energieeffizienten Herstellung ohne Hochtemperaturverfahren. Nachteile hingegen liegen in dem aktuell relativ geringen Wirkungsgrad im Vergleich zu anorganischen Werkstoffen, dem daraus resultierenden größeren Flächenbedarf sowie der Zersetzung bzw. dem Langzeitstabilitätsverlust in Verbindung mit Sonnenlicht. Eine Übersicht zu der historischen Entwicklung von organischen Solarzellen ist in [21] ausgeführt.

- Energietechnik: Wasserstoff gilt als saubere alternative Energiequelle zu fossilen Brennstoffen. Die effiziente Speicherung von Wasserstoffmolekülen ist dabei von zentraler Bedeutung. Nach Einschätzung der amerikanischen Energiebehörde DoE wird ein Massenanteil des Wasserstoffs oberhalb von 9% als Brennstoffzelle benötigt, um eine geeignete Alternative zu herkömmlichen Verbrennungsmotoren in Personenkraftwagen zu bieten. Dieser Schwellenwert kann theoretisch auch für metallorganische Moleküle basierend auf dem C_{60} erzielt werden [72]. Zusätzlich haben metallorganische Moleküle den Vorteil, dass sie im Vergleich zu festen Materialien eine geringe Temperatur zur reversiblen Reaktion benötigen.

Weitere Anwendungsgebiete von Fullerenen ergeben sich im Zusammenhang mit der Herstellung von Diamanten, Sensoren oder Katalysatoren sowie die Härtung von Metallen [67].

Basierend auf oben beschriebenen Struktureigenschaften (und unter Vernachlässigung von Doppelbindungen) lassen sich Fullerene mathematisch als kubische konvexe Polyeder auffassen, deren Facetten aus ausschließlich Fünf- bzw. Sechsecken bestehen. Nach Satz 2.6 können Fullerene also als kubische dreifach knotenzusammenhängende planare Graphen $G = (V(G), E(G))$ dargestellt werden, deren Facetten F ausschließlich fünf oder sechs Knoten besitzen. Ein solcher Graph heißt *Fulleren-Graph*. Als Beispiel sei ein zum Schlegel-Diagramm isomorpher Fulleren-Graph G_{60} des Polyeders C_{60} in Abbildung 5.3 skizziert. Verkürzt bezeichnet sei ein

Fulleren-Graph ‘abgeleitet’ aus dem zugrundeliegenden Fulleren.

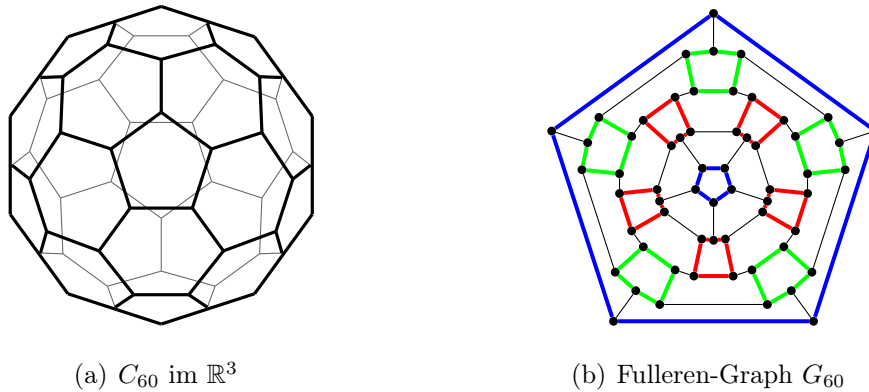


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung des IPR-Fullerens C_{60} und des abgeleiteten IPR-Fulleren-Graphen G_{60} . Die farblich skizzierten Kanten in (b) entsprechen der Kantenmenge der 12 Fünfecksfacetten in G_{60} .

Facetten mit fünf Knoten seien dann als *Fünfecksfacetten* und Facetten mit sechs Knoten als *Sechsecksfacetten* bezeichnet. Die Menge der Fünfecksfacetten sei mit $F^5(G)$ und die Menge der Sechsecksfacetten mit $F^6(G)$ bezeichnet. Ein Fulleren-Graph abgeleitet aus einem IPR-Fulleren heißt *IPR-Fulleren-Graph*. Im Folgenden bezeichne \mathcal{F}_n die Menge aller nicht-isomorphen Fulleren-Graphen der Ordnung n und IPR_n die der IPR-Fulleren-Graphen der Ordnung n .

n	$ \mathcal{F}_n $	n	$ \mathcal{F}_n $	$ IPR_n $	n	$ \mathcal{F}_n $	$ IPR_n $
20	1	42	45		62	2,385	
24	1	44	89		64	3,465	
26	1	46	116		66	4,478	
28	2	48	199		68	6,332	
30	3	50	271		70	8,149	1
32	6	52	437		72	11,190	1
34	6	54	580		74	14,246	1
36	15	56	924		76	19,151	2
38	17	58	1,205		\vdots	\vdots	\vdots
40	40	60	1,812	1	190	131,561,744	8,187,581

Tabelle 5.1: Anzahlen nicht-isomorphen Fulleren-Graphen \mathcal{F}_n (und IPR Fulleren-Graphen, bezeichnet als IPR_n) in \mathcal{F}_n , mit $n \leq 76$ und $n = 190$ aus [10].

Graphentheoretische Konzepte und Methoden können für Fulleren-Graphen benutzt werden und unterstützen die chemische Grundlagenforschung in Bezug auf diese Molekülklasse.

Folgende Ergebnisse konnten so zum Beispiel unter verschiedenen Forschungsaspekten erzielt werden:

- (a) Überblick über die kombinatorische Vielfalt: In [10] wird ein Algorithmus beschrieben, der alle nicht-isomorphen Fulleren-Graphen mit bis zu 300 Knoten erzeugt. Die konzeptionelle Idee zur systematischen Konstruktion von Fulleren-Graphen wird später in Abschnitt 5.3 skizziert.
- (b) Strukturelle Eigenschaften: In [2] wird ein ausführlicher Überblick der strukturellen Eigenschaften in Fulleren-Graphen dargestellt. Dabei wird u.a. der sog. zyklische Zusammenhang, der sog. graphentheoretische Durchmesser sowie die Unabhängigkeitszahl von Fulleren-Graphen angegeben. Wesentliche Resultate werden dazu ausgeführt. Ein Fulleren-Graph G ist *zyklisch 5-Kanten zusammenhängend*, d.h. es müssen mindestens fünf Kanten aus der Kantenmenge $E(G)$ entfernt werden, damit der auf diese Weise induzierte Teilgraph G' so in Zusammenhangskomponenten zerfällt, dass sie jeweils einen Kreis enthalten. Der *graphentheoretische Durchmesser* sei definiert als $\text{diam}(G) := \max\{|W(u, v)| \mid u, v \in V(G)\}$, dabei sei $W(u, v)$ ein Pfad minimaler Länge von u nach v in G . Für $G \in \mathcal{F}_n$ ist der graphentheoretische Durchmesser von der Ordnung $\mathcal{O}(\sqrt{n})$. Für $G \in \mathcal{F}_n$ gilt, dass $\alpha(G) \geq \frac{n}{2} - \sqrt{\frac{3n}{5}}$ sowie $\alpha(G) \geq 2(\text{diam}(G) - 1)$ (vergleiche für weitere Ergebnisse zu $\alpha(G)$ in einem Fulleren-Graphen auch [32]).
- (c) Stabilitätsuntersuchungen: Stabilität von dreidimensionalen Molekülen wird in [6] dadurch charakterisiert, dass die Stabilität des Moleküls mit ‘zunehmender Kugelförmigkeit’ steigt. Nach [43] besitzen IPR-Fullerene eine höhere Stabilität als vergleichbare Fullerene, die nicht die Independent Pentagon Rule erfüllen. Als Indikatoren für die Stabilität von Molekülen können graphentheoretische Invarianten auf Graphen, abgeleitet aus chemischen Molekülen, herangezogen werden. Ein Beispiel hierfür ist die Kekulé-Zahl $k(G)$ [63]. Diese ist durch die Anzahl an verschiedenen sog. Kekulé-Strukturen beschrieben. Eine Kekulé-

Struktur zugehörig zu einem Molekül entspricht dabei einem perfekten Matching auf dem aus dem Molekül abgeleiteten Graph, wobei die Matchingkanten zu Doppelbindungen des Moleküls korrespondieren. Tendenziell gilt die Aussage, dass die Stabilität des Moleküls mit der Anzahl an verschiedenen Kekulé-Strukturen ansteigt. Dies gilt durch die sog. Mesomerie-Stabilisierung, wodurch die Ladungsverteilung im Molekül gleichmäßiger ist. Mit [71] gilt für Fulleren-Graphen G , dass $\left\lceil \frac{3(n+2)}{4} \right\rceil \leq k(G)$. Ferner ist für die Fulleren-Graphen G_{60} bzw. G_{70} , abgeleitet aus den Fulleren C_{60} bzw. C_{70} , die Anzahl an perfekten Matchings mit 12.500 bzw. 52.168 angegeben.

In [63] wird bemerkt, dass die Kekulé-Zahl für Fullerene kein ausreichender Indikator für Stabilität ist und weitere Kennzahlen herangezogen werden müssen, um eine bessere Aussage über die Stabilität von Fullerenen abzuleiten. Eine dieser Invarianten ist die sog. Fries-Zahl κ_{Fr} . Diese misst die maximale Anzahl an sog. bezenartigen Sechsringen über alle Kekulé-Strukturen, also Sechsecksfacetten mit drei Matchingkanten des perfekten Matchings innerhalb des aus dem Molekül abgeleiteten Graphen. Beispielsweise ist $\kappa_{Fr}(G_{60}) = 20$ für G_{60} abgeleitet aus dem Buckyball C_{60} .

In [31] wird $\alpha(G^*)$ in Zusammenhang mit $\kappa_{Fr}(G)$ gesetzt. Hier gilt: $\alpha(G^*) \geq \frac{\kappa_{Fr}(G)+4}{2}$. Abschließend sei die Clar-Zahl $\gamma(G)$ als Kardinalität der größten Menge paarweise resonanter bezenartiger Sechsringe über alle Kekulé-Strukturen genannt und als Indikator für Fulleren Stabilität angeführt [40]. Graphentheoretisch bedeutet dies: Für jedes perfekte Matching auf G wird eine maximale unabhängige Menge des Dual-Graphen bestehend aus ausschließlich Sechsecksfacetten bestimmt, die jeweils drei Matchingkanten des perfekten Matchings besitzen. Das Maximum über alle perfekten Matchings liefert dann $\gamma(G)$. Beispielsweise ist $\gamma(G_{60}) = 8$ für G_{60} abgeleitet aus dem Buckyball C_{60} .

Weitere graphentheoretische Kennzahlen zur Beschreibung der Stabilität von Fullerenen sind u.a. in [29] und [23] ausgeführt.

Nun werden erste Resultate zur Größe m , und Anzahl an Facetten f in Abhängigkeit von der Ordnung n eines Fulleren-Graphen angegeben. Sei $G \in \mathcal{F}_n$ ein Fulleren-Graph der Ordnung n . Ferner bezeichne $f_5 = |F^5(G)|$ und $f_6 = |F^6(G)|$, dann

gilt:

$$(i) \quad 2m = 3n, \text{ (da } G \text{ kubisch ist)}$$

$$(ii) \quad f = \frac{n}{2} + 2, \text{ (nach (i) sowie Satz 2.3)}$$

$$(iii) \quad f_5 = 12, f_6 = \frac{1}{2}n - 10, \text{ da nach Definition, (i) und (ii) gilt:}$$

$$f_5 + f_6 = \frac{n}{2} + 2,$$

$$5f_5 + 6f_6 = 3n.$$

(iv) Nach (ii) ist $n \in 2\mathbb{N}_0$, nach (iii) ist $n \geq 20$. Nach [36] ist $n \neq 22$.

Aufgrund von (iv) ist für $G \in \mathcal{F}_n$ dessen Größe m sowie die zugehörige Anzahl f an Facetten eindeutig festgelegt.

Untersuchungen zu maximalen knoten- bzw. kantendisjunkten Kreispackungen bzw. den zugehörigen knoten- bzw. kantendisjunkten Kreispackungszahlen in Fulleren-Graphen sind aktuell nicht bekannt. Da Fulleren-Graphen nach Definition kubisch sind, gilt offensichtlich $\nu(G) = \nu'(G)$.

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Untersuchung von Fulleren-Graphen in dieser Arbeit stellen die in [33] definierten sog. Fulleren-Patches (spezielle Teilgraphen eines Fulleren-Graphen) dar. Sie ermöglichen einerseits in Kapitel 5.1 die Beschreibung bestimmter „Transformationen“, mit denen Fulleren-Graphen in andere Fulleren-Graphen überführt werden können. Andererseits können Fulleren-Patches in Kapitel 5.2 mit kombinatorischen Methoden hinsichtlich der Existenz von Nicht-Facettenkreisen analysiert werden und so Aufschluss über einen möglichen Zusammenhang zwischen $\nu(G)$ und $\alpha(G^*)$ geben.

Sei G ein in der Ebene \mathbb{R}^2 eingebetteter Fulleren-Graph und C ein Kreis in G , so wird der von den Knotenmenge $\{v \in V(G) \mid v \in \overline{I(J(C))}\}$ knoteninduzierte Teilgraph $P(C)$ der von C induzierte *Fulleren-Patch* von G genannt. Ein Beispiel für einen Fulleren-Patch in dem aus dem C_{20} (Fulleren mit geringster Anzahl an Kohlenstoffatomen) abgeleiteten Fulleren-Graph G_{20} ist in Abbildung 5.4 gegeben.

Sei G in die Ebene \mathbb{R}^2 eingebettet, dann kann analog zum Patch $P(C)$ auch ein Patch $P^A(C)$ bestehend aus Facetten des äußeren Gebietes $\overline{A(J(C))}$ definiert werden. In

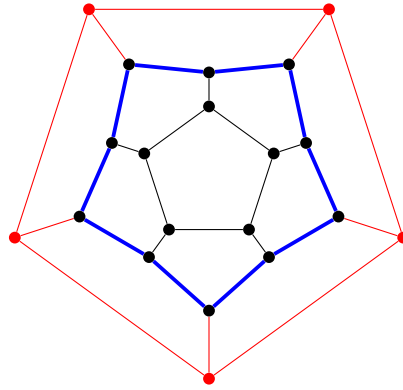


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung eines Fulleren-Patches $P(C)$ in G_{20} . Hierbei entsprechen die blau dargestellten Kanten der Kantenmenge des Kreises C . Die schwarz dargestellten Knoten entsprechen der Knotenmenge des Patches $P(C)$ und die rot dargestellten Knoten bzw. Kanten den Knoten bzw. Kanten aus G_{20} , die nicht in dem Patch $P(C)$ enthalten sind.

dem in Abbildung 5.4 skizzierten Patch $P(C)$ des G_{20} ist C blau gekennzeichnet. Die Kantenmenge der in Abbildung 5.4 schwarz und blau dargestellten Kanten entspricht der Kantenmenge $E(P(C))$ und die Kantenmenge, die rot und blau dargestellt ist, entspricht $E(P^A(C))$.

Wesentlich für die algorithmische Bestimmung der Kreispackungszahlen ist die in [10] vorgestellte Konstruktionsmethodik für Fulleren-Graphen. Sie basiert unter anderem auf dem Auffinden von spezieller Pfade und dadurch abgeleiteter Patches. Der Quelltext des von Brinkmann und McKay in **C** implementierten Algorithmus **Fulgen** zur vollständigen Erzeugung von Inzidenzlisten der Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ ist in [9] beschrieben. Die mit **Fulgen** erzeugten Inzidenzlisten dienen als Daten-Input für die in Abschnitt 5.3 beschriebene Analyse von Kreispackungen in Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ mit $n \leq 72$.

In Abschnitt 5.3 wird ein Verfahren zur Bestimmung für von $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ mit $n \leq 72$ beschrieben. Wesentlich innerhalb des Verfahrens ist das in Abschnitt 5.2 bewiesene Resultat, das den Zusammenhang zwischen $\alpha(G^*)$ und $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen beschreibt.

Nach [11] gibt es 132.247.999.328 nicht-isomorphe Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_{400}$. Diese Anzahl an Fulleren-Graphen mit geringer Ordnung ($n = 400$) motiviert erneut (in

Analogie zu polyhedralen Graphen bzw. Halin-Graphen), dass es auch für Fulleren-Graphen von Interesse ist, ‘gute’ obere Schranken an $\nu(G)$ zu bestimmen sowie darüber hinaus ein Verfahren zur Bestimmung einer maximalen Kreispackung für $G \in \mathcal{F}_n$ zu beschreiben. Ziel der Abschnitte 5.1 und 5.3 ist es nun, eine bestmögliche obere Schranke an $\nu(G)$ für $G \in \mathcal{F}_n$ anzugeben. Abschließend wird in Abschnitt 5.4 auf die Konstruktion von Fulleren-Graphen G mit einem - relativ zur Ordnung - geringen $\nu(G)$ eingegangen.

5.1 Obere Schranken an $\nu(G)$ mit $G \in \mathcal{F}_n$ für $n \geq 72$

Bestreben dieses Abschnittes ist es, in einem ersten Schritt obere Schranken an $\nu(G)$ für Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ herzuleiten und im zweiten Schritt zu untersuchen, ob diese Schranken angenommen werden. Dazu sind Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ über geeignete Transformationen zu konstruieren, die eine möglichst große Anzahl knotendisjunkter Kreise aufweisen.

Eine intuitive obere Schranke an $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen G ergibt sich als:

$$\nu(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\text{girth}(G)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor.$$

Ein Fulleren-Graph besitzt nach (iii) genau zwölf Kreise der Länge fünf und alle weiteren Kreise besitzen mindestens die Länge sechs. Somit folgt:

$$\nu(G) \leq \left\lfloor \frac{n+12}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 2. \quad (5.1)$$

Abbildung 5.3(b) zeigt eine schematische Darstellung des IPR-Fulleren-Graphen kleinster Ordnung (vgl. dazu Tabelle 5.1) mit $n = 60$ und $\nu(G) = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 2 = \left\lfloor \frac{60}{6} \right\rfloor + 2 = 12$. Für diesen Graphen ist also die Schranke (5.1) mit Gleichheit erfüllt und somit in \mathcal{F}_{60} bestmöglich. Die zugehörige maximale Kreispackung ist eindeutig durch die 12 Facettenkreise gegeben, die die zwölf Fünfecksfacetten beranden.

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird analysiert werden, ob die Schranke (5.1) für $n \geq 72$ analog zu $n = 60$ bestmöglich ist, also ob es für jedes $n \geq 72$ mit $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ ein Graph $G_n \in \mathcal{F}_n$ existiert für den (5.1) gilt. Lemma 5.2 wird dies widerlegen. Trotzdem wird in Satz 5.4 eine in n nicht monoton wachsende bestmögliche Schranke angegeben werden können.

Um diese Analyse durchzuführen wird vorab das folgende Lemma formuliert, um Eigenschaften von Kreisen in Fulleren-Graphen besser zu verstehen. Dazu wird die Struktur eines Kreises C eines Fulleren-Patches $P(C)$ näher analysiert werden. Sei $k_a := |\{v \in V(P(C)) \mid \delta(v) = 2\}|$ und $k_i = |V(C)| - k_a$. Das heißt, k_a entspricht der Anzahl an Knoten von C , die in G adjazent zu einem Knoten aus $A(J(C))$ und k_i der Anzahl an Knoten von C , die in G adjazent zu einem Knoten aus $I(J(C))$ sind. Es bezeichne $f_5(C)$ die Anzahl der Fünfecksfacetten in $\overline{I(J(C))}$. In dem in Abbildung 5.4 skizzierten Patch des G_{20} gilt: $k_i = k_a = 5$ und $f_5(C) = 6$. Es gilt:

Lemma 5.1. *Sei C ein Kreis in einem Fulleren-Graphen G und $P(C)$ der durch C induzierte Patch, dann gilt:*

$$(i) \quad k_a - k_i = 6 - f_5(C),$$

$$(ii) \quad f_5(C) \leq 6 \Rightarrow k_a \geq 5.$$

Beweis. Betrachte den Patch $P(C) \subseteq G$ der Ordnung n_p , Größe m_p und mit f_p Gebieten. Ist $v \in V(P(C))$ und existiert eine Kante $(v, w) \in E(G)$ mit $w \in A(J(C))$ dann gilt $\delta_p(v) = 2$, sonst gilt $\delta_p(v) = 3$ in $P(C)$. Somit gilt $2m_p = 3n_p - k_a$.

Ebenso gilt für $F \in F(P(C)) \setminus \{F^a(P(C))\}$, dass $F \in F^5 \cup F^6$ und $|E(F^a(P(C)))| = |E(C)| = k_a + k_i$. Demnach ergibt sich $2m_p = 6(f_p - 1) - f_5(C) + k_a + k_i$. Durch Anwendung der Eulerschen Polyederformel für planare Graphen folgt für $P(C)$:

$$\begin{aligned} n_p - m_p + f_p &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2m_p + k_a}{3} - m_p + \frac{2m_p + f_5(C) - k_a - k_i}{6} + 1 &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2m_p}{3} - m_p + \frac{2m_p}{6} + \frac{k_a}{3} + \frac{f_5(C) - k_a - k_i}{6} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2k_a + f_5(C) - k_a - k_i &= 6 \\ \Leftrightarrow k_a - k_i &= 6 - f_5(C). \end{aligned}$$

Der Beweis zu (ii) wird induktiv nach $f_p = |F(P(C))|$ geführt. Für $f_p = 2$ gilt die Aussage per definitionem. Angenommen die Aussage gilt für jeden durch einen Kreis \tilde{C} induzierten Patch $P(\tilde{C})$ mit der Eigenschaft: $2 \leq |F(P(\tilde{C}))| \leq i$. Sei $P(C)$ ein durch C induzierter Patch in G mit $f_p = |F(P(C))| = i + 1$.

- Falls eine Facette $F \neq F^a(P(C))$ in $P(C)$ mit $|E(F) \cap E(C)| \geq 3$ existiert, so besteht der aus $E(P(C)) \setminus (E(F) \cap E(C))$ kanteninduzierte Teilgraph \tilde{G} aus einer, zwei oder drei Zusammenhangskomponenten (vgl. Abbildung 5.5). Diese sei mit K^1 bezeichnet, falls \tilde{G} eine Zusammenhangskomponente ist und sonst mit K^1, K^2 bzw. K^1, K^2, K^3 bezeichnet, falls \tilde{G} aus zwei bzw. drei Zusammenhangskomponenten besteht.

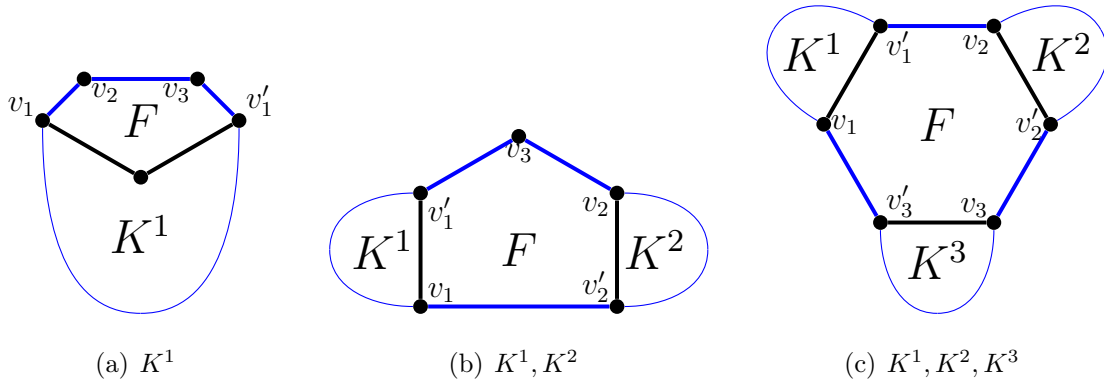


Abbildung 5.5: Beispielhafte Darstellung von \tilde{G} bestehend aus einer (in (a)), zwei (in (b)) bzw. drei Zusammenhangskomponenten in (c) sowie der Facette F innerhalb des Patches $P(C)$. Bemerke, innerhalb der Darstellung ist der Kreis C blau dargestellt, die Kanten der Facette F mit $|E(F) \cap E(C)| \geq 3$ fett markiert, dabei sind die schwarzen Kanten aus $E(F) \setminus E(C)$ und die blau skizzierten Kanten aus $E(F) \cap E(C)$. Die weiteren Facetten aus $P(C)$ sind in der Darstellung nicht berücksichtigt und F ist innerhalb der gewählten Darstellung (a), (b) eine Fünfecksfacette in $P(C)$.

Da $P(C)$ ein Patch in G ist, sind in der Facettenmenge der Zusammenhangskomponenten von \tilde{G} mit Ausnahme der äußeren Facette jeweils ausschließlich Fünf- bzw. Sechsecksfacetten enthalten. Zudem existieren in \tilde{G} entweder zwei Knoten (falls \tilde{G} eine Zusammenhangskomponente ist), vier Knoten (falls \tilde{G} aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht) oder sechs Knoten (falls \tilde{G} aus drei Zusammenhangskomponenten besteht) mit $\delta_{\tilde{G}}(v_i) = 2$ und $v_i \in \{v \in V(C) \cap V(F) \mid \delta(v) = 3\}$ in $P(C)$. Da $v_i \in V(C)$ in $P(C)$, ist $v_i \in V(F^a(\tilde{G}))$. Für alle weiteren Knoten aus $V(\tilde{G})$ ist der Knotengrad gleich dem Knotengrad des zugehörigen Knotens in $P(C)$. Somit sind die Zusammenhangskomponenten von \tilde{G} jeweils Patches von G mit jeweils geringerer Facettenanzahl als $P(C)$. Für die Knoten $v_i, v'_i \in V(K^i) \cap V(C)$ in Abbildung

5.5 gilt: $\delta(v_i) = \delta(v'_i) = 2$ in \tilde{G} und $\delta(v_i) = \delta(v'_i) = 3$ in $P(C)$. Sei C_i der Kreis in K^i mit $E(C_i) = E(F^a(K^i))$.

Im Falle einer Zusammenhangskomponente K^1 gilt:

$$f_5(C) \leq 6 \Rightarrow f_5(C_1) \leq 6.$$

Da K^1 ein Patch in G mit $2 \leq f_p \leq i$ ist, gilt nach Induktionsannahme $f_5(C_1) \leq 6 \Rightarrow k_a(C_1) \geq 5$. Falls $|E(C) \cap E(F)| = 3$ ist, so folgt $k_a(C) = (k_a(C_1) - 2) + 2$ bzw. falls $|E(C) \cap E(F)| > 3$ ist, so folgt $k_a(C) \geq (k_a(C_1) - 2) + 3$. Folglich gilt:

$$k_a(C) \geq (k_a(C_1) - 2) + 2.$$

Bemerke, in Abbildung 5.5(a) gilt beispielhaft für eine Fünfecksfacette F : $\delta(v_1) = \delta(v'_1) = 3$ und $\delta(v_2) = \delta(v_3) = 2$ in $P(C)$ sowie $\delta_{\tilde{G}}(v_1) = \delta_{\tilde{G}}(v'_1) = 2$ in K^1 .

Analog gilt im Falle zweier Zusammenhangskomponenten K^1, K^2 :

$$f_5(C) \leq 6 \Rightarrow f_5(C_1) + f_5(C_2) \leq 6 \Rightarrow f_5(C_1) \leq 6, f_5(C_2) \leq 6.$$

Da K^1 und K^2 jeweils ein Patch in G mit $2 \leq f_p \leq i$ ist, gilt nach Induktionsannahme $f_5(C_1) \leq 6 \Rightarrow k_a(C_1) \geq 5$ und $f_5(C_2) \leq 6 \Rightarrow k_a(C_2) \geq 5$. Dazu sei bemerkt, falls $|E(C) \cap E(F)| = 3$ ist, so folgt $k_a(C) = (k_a(C_1) - 2) + (k_a(C_2) - 2) + 1$ bzw. falls $|E(C) \cap E(F)| > 3$ ist, so folgt $k_a(C) \geq (k_a(C_1) - 2) + (k_a(C_2) - 2) + 2$. Folglich gilt:

$$k_a(C) \geq 1 + k_a(C_1) + k_a(C_2) - 4 \geq 7 > 5.$$

In Abbildung 5.5(b) gilt beispielhaft für eine Fünfecksfacette F : $\delta(v_i) = \delta(v'_i) = 3$ und $\delta(v_3) = 2$ in $P(C)$ sowie $\delta_{\tilde{G}}(v_i) = \delta_{\tilde{G}}(v'_i) = 2$ in $K^i, i \in \{1, 2\}$ und folglich $k_a(C) = 1 + k_a(C_1) + k_a(C_2) - 4$.

Im Falle dreier Zusammenhangskomponenten K^1, K^2, K^3 gilt:

$$\begin{aligned} f_5(C) \leq 6 &\Rightarrow f_5(C_1) + f_5(C_2) + f_5(C_3) \leq 6 \\ &\Rightarrow f_5(C_1) \leq 6, f_5(C_2) \leq 6, f_5(C_3) \leq 6. \end{aligned}$$

Da K^1, K^2 und K^3 jeweils ein Patch in G mit $2 \leq f_p \leq i$ ist, gilt nach Induktionsannahme $f_5(C_1) \leq 6 \Rightarrow k_a(C_1) \geq 5, f_5(C_2) \leq 6 \Rightarrow k_a(C_2) \geq 5,$

und $f_5(C_3) \leq 6 \Rightarrow k_a(C_3) \geq 5$. Bemerke, dieser Fall tritt nur auf, wenn F eine Sechsecksfacette ist und ist in Abbildung 5.5(c) visualisiert. Hier gilt: $\delta(v_i) = \delta(v'_i) = 3$ in $P(C)$ sowie $\delta_{\tilde{G}}(v_i) = \delta_{\tilde{G}}(v'_i) = 2$ in $K^i, i \in \{1, 2, 3\}$ und folglich

$$k_a(C) = k_a(C_1) + k_a(C_2) + k_a(C_3) - 6 \geq 9 > 5.$$

- Sonst gilt $|E(F_k) \cap E(C)| \leq 2$ für jede Facette $F_k \neq F^a(P(C))$ in $P(C)$ und somit $k_a \leq k_i$. Da nach Voraussetzung $f_5(C) \leq 6$ ist, folgt aber nach (i) : $k_a \geq k_i$. Also ist $k_a = k_i$, folglich $|V(C)| = 2k_i$ und mit (i) : $f_5(C) = 6$. Daher existiert für jede Facette $F_i \neq F^a(P(C))$ mit $E(F_i) \cap E(C) \neq \emptyset$ ein Knoten $v_l \in V(F_i)$ mit $\delta(v_l) = 2$ in $P(C)$. Deshalb gilt $|E(F_i) \cap E(C)| = 2$ sowie $|\{F \in F(P(C)) \setminus \{F^a(P(C))\} \mid E(F) \cap E(C) \neq \emptyset\}| = k_i$.

Betrachte nun den durch $V(P(C)) \setminus V(C)$ knoten-induzierten Teilgraphen G' von $P(C)$. Bemerke, falls G' nicht zusammenhängend wäre, so gäbe es eine Facette F in $P(C)$ mit $|E(F) \cap E(C)| = 2, |V(F) \cap V(C)| = 4$ und für $v_i \in V(F)$ gilt in $P(C)$: $\delta(v_i) = 3$. Somit ist G' zusammenhängend. Ist G' ein Patch und $C' = C(F^a(G'))$, so folgt nach Induktionsannahme $k_a = k_i = k_a(C') \geq 5$.

Angenommen G' ist kein Patch. Da G' zusammenhängend ist und $k_a = k_i$ in $P(C)$ gilt, gibt es zwei Facetten F_i und F_j mit $i \neq j$ sowie $|E(F_i) \cap E(C)| = |E(F_j) \cap E(C)| = 2$ und eine Kante $e \in E(G')$ mit $e \in E(F_i) \cap E(F_j)$. Dann besteht der durch $E(P(C)) \setminus \{e, E(F_i) \cap E(C), E(F_j) \cap E(C)\}$ kanten-induzierte Teilgraph \tilde{G} aus zwei Zusammenhangskomponenten. Da $P(C)$ ein Patch in G ist, bestehen die Facettenmengen der Zusammenhangskomponenten von \tilde{G} mit Ausnahme der äußeren Facette jeweils aus ausschließlich Fünf- bzw. Sechsecksfacetten. Zudem existieren in \tilde{G} dann sechs Knoten mit $\delta(v_k) = 2$ wobei zwei dieser sechs Knoten aus $\{v \in V(C) \cap V(F_i) \mid \delta(v) = 3\}$, zwei Knoten aus $\{v \in V(C) \cap V(F_j) \mid \delta(v) = 3\}$ und zwei Knoten inzident zu e mit $\delta(v_k) = 3$ (da $e \notin E(C)$) in $P(C)$ sind. Da v_k aus $V(C)$ bzw. inzident zu e in $P(C)$ ist, ist v_k in $V(F^a(\tilde{G}))$ enthalten. Für alle weiteren Knoten aus $V(\tilde{G})$ ist der Knotengrad gleich dem Knotengrad des zugehörigen Knotens in $P(C)$. Somit sind die zwei Zusammenhangskomponenten jeweils Patches $P(C^1), P(C^2)$ in

\tilde{G} mit geringerer Facettenanzahl als $P(C)$. Somit gilt:

$$f_5(C) \leq 6 \Rightarrow f_5(C^1) + f_5(C^2) \leq 6 \Rightarrow f_5(C^1) \leq 6, f_5(C^2) \leq 6.$$

Da $P(C^1)$ und $P(C^2)$ jeweils ein Patch in G mit $2 \leq f_p \leq i$ ist, gilt nach Induktionsannahme $f_5(C) \leq 6 \Rightarrow k_a(C^1) \geq 5$ und $f_5(C^2) \leq 6 \Rightarrow k_a(C^2) \geq 5$ und folglich $k_a = k_a(P(C^1)) - 3 + k_a(P(C^2)) - 3 + 2 \geq 2 + 2 + 2 > 5$.

□

Mit Lemma 5.1 können nun die Längen $l(C) = k_a + k_i$ für Kreise C in einem Fulleren-Graphen G abgeschätzt werden. Ein Kreis C in einem Fulleren-Graph, dessen Knoten alternierend adjazent zu einem Knoten aus $A(J(C))$ bzw. zu einem Knoten aus $I(J(C))$ sind, heißt *Petriekreis*. Aufgrund von Lemma 5.1(ii) hat also ein Petriekreis mindestens die Länge zehn.

Ferner sei bemerkt, dass Kreise der Längen fünf bzw. sechs in Fulleren-Graphen G nach Lemma 5.1 immer Facettenkreise sind. Zudem besitzt der kürzeste Nicht-Facettenkreis eines Fulleren-Graphen G mindestens die Länge acht und in einem IPR-Fulleren-Graphen die Länge neun. Dies gilt für $k_i = 2$, da dann genau zwei Facetten in $\overline{I(J(C))}$ enthalten sind und damit $l(C) \geq 8$ bzw. $l(C) \geq 9$ für IPR-Fulleren-Graphen, in denen keine zwei verschiedenen Fünfecksfacetten eine gemeinsame Kante besitzen, folgt. Im Fall $k_i \geq 3$ ist $l(C) = k_a + k_i \geq 8$ nach Lemma 5.1. Für IPR-Fulleren-Graphen ist $k_i = 3$ noch zu betrachten. Hier sind genau drei Facetten in $\overline{I(J(C))}$ enthalten und somit $l(C) \geq 11$.

Zur Untersuchung, wann (5.1) mit Gleichheit erfüllt werden kann, werden drei Fälle betrachtet, für die nach Lemma 5.1 folgendes gilt:

- Falls $n \in \{4 + 6k \mid k \geq 4\}$ ist, so kann (5.1) nur dann mit Gleichheit angenommen werden, wenn alle Kreise mit Ausnahme von höchstens zwei Kreisen der zugehörigen maximalen knotendisjunkten Kreispackung ausschließlich Facettenkreise sind,
- falls $n \in \{2 + 6k \mid k \geq 3\}$ ist, wenn alle Kreise mit Ausnahme von höchstens einem Kreis der zugehörigen maximalen Kreispackung ausschließlich Facettenkreise sind,

- falls $n \in \{6k \mid k \geq 4\}$ ist, wenn alle Kreise der zugehörigen maximalen Kreispackung ausschließlich Facettenkreise eines IPR-Fulleren-Graphen sind. Somit kann (5.1) in diesem Fall ausschließlich für $n \geq 60$ gelten.

Lemma 5.2. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $G \in \mathcal{F}_n$ mit $n = 62 + 6k$. Dann gilt:*

$$\nu(G) < \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 2.$$

Beweis. Angenommen, es sei $\nu(G) = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 2$. Sei $Z(G)$ eine maximale Kreispackung in G . Sei die Menge an Facettenkreisen zugehörig zu den zwölf Fünfecksfacetten aus F^5 bezeichnet mit

$$Z(F^5) := \{C(F) \in G \mid F \in F^5\}.$$

Dann folgt $10 \leq |Z(F^5) \cap Z(G)| \leq 12$, da für $|Z(F^5) \cap Z(G)| \leq 9$ gilt: $|Z(G)| \leq 9 + \left\lfloor \frac{n-45}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + 2 < \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 2$ für $n = 62 + 6k$. Also muss $Z(G)$ zwischen 10 und 12 Facettenkreise der Länge 5 enthalten und demnach werden im Folgenden diese drei Fälle unterschieden:

- (i) Im Fall $|Z(F^5) \cap Z(G)| = 10$ sind alle Kreise in $Z(G)$ Facettenkreise, da ein Nicht-Facettenkreis mindestens die Länge acht besitzt und somit $|Z(G)| \leq 10 + 1 + \left\lfloor \frac{n-50-8}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + 2 < \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 2$ wäre. Zudem ist $n = |V(Z(G))|$, da $|Z(G)| = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 2$ und $n = 62 + 6k$. Es gibt also genau zwei Facettenkreise $C_1, C_2 \in Z(F^5) \setminus Z(G)$.

Da $Z(G)$ aus ausschließlich Facettenkreisen besteht und genau fünf Facettenkreise genau eine Kante in $E(C_1)$ besitzen, können höchstens zwei dieser fünf Facettenkreise in $Z(G)$ enthalten sein und somit höchstens vier der fünf Knoten aus $V(C_1)$. Dann existiert ein Knoten $v \in V(G)$ mit $v \in V(C_1) \setminus V(Z(G))$. Dies ist ein Widerspruch.

- (ii) Im Fall $|Z(F^5) \cap Z(G)| = 11$ sind alle Kreise in $Z(G)$ Facettenkreise, da ein Nicht-Facettenkreis auch in diesem Fall mindestens die Länge acht besitzt und somit $|Z(G)| \leq 11 + 1 + \left\lfloor \frac{n-55-8}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + 2 < \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 2$ wäre. Demnach gilt in diesem Fall $n - |V(Z(G))| = 1$. Also existiert genau ein Fünfecksfacettenkreis C mit $C \notin Z(G)$ und damit analog zur Argumentation im Fall (i) genau ein Knoten v mit $v \in V(G) \setminus V(Z(G))$. Zudem ist $v \in V(F_i^6) \setminus V(Z(G))$, $i \in$

$\{1, 2\}$, d.h. v ist in der Knotenmenge von zwei Sechsecksfacetten enthalten, da $|Z(F^5) \cap Z(G)| = 11$.

Da G kubisch ist, existieren genau drei Knoten $v_j \in V(Z(G)), j \in \{3, 4, 5\}$ die adjazent zu v sind. Dann existieren drei Facetten F_j mit $v_j \in V(F_j) \cap V(Z(G))$, da v der einzige Knoten in $V(G) \setminus V(Z(G))$ ist. Da $Z(G)$ aus ausschließlich Facettenkreisen besteht, gilt $|\{u \in V(F_i^6) \mid u \in V(Z(G))\}| \leq 4$ für die Sechsecksfacetten F_1^6 und F_2^6 . Dann existieren aber zwei weitere Knoten $v_i \notin V(Z(G)), i \in \{1, 2\}$ und $v_i \in V(F_i^6)$ im Widerspruch zu $|V(Z(G))| = |V(G)| - 1$. Abbildung 5.6 zeigt einen Teilgraphen eines Fulleren-Graphen, der den Widerspruch visualisiert.

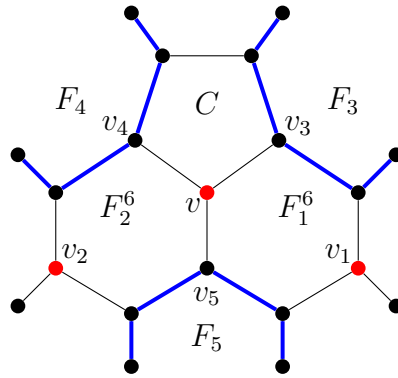


Abbildung 5.6: Teilgraph eines Fulleren-Graphen mit $|Z(F^5) \cap Z(G)| = 11$. Falls der rot dargestellte Knoten v nicht in der Knotenmenge $V(Z(G))$ enthalten ist, so sind auch die zwei rot dargestellten Knoten $v_i \in V(F_i^6)$ im Fall $|Z(F^5) \cap Z(G)| = 11$ nicht in $V(Z(G))$ enthalten. Die blau dargestellten Kanten sind in $E(Z(G))$ enthalten, falls v_3, v_4 und v_5 in $V(Z(G))$ enthalten sind.

(iii) Im Fall $|Z(F^5) \cap Z(G)| = 12$ ist G ein IPR-Fulleren-Graph, da alle 12 Fünfecksfacettenkreise $C(F_i^5)$ in $Z(G)$ enthalten und somit die Fünfecksfacetten F_i^5 jeweils paarweise kantendisjunkt sind. Da kein Kreis der Länge acht in einem IPR-Fulleren-Graphen existiert, besteht $Z(G)$ aus ausschließlich Facettenkreisen, da sonst $|Z(G)| \leq 12 + 1 + \lfloor \frac{n-60-9}{6} \rfloor = \lfloor \frac{n-3}{6} \rfloor + 2 < \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$ wäre. Weil nun $n = 62 + 6k$ ist, gibt es genau zwei Knoten $v_i \notin V(Z(G)), i \in \{0, 1\}$.

Nun werden zwei Fällen unterschieden: Entweder v_1 ist adjazent zu v_0 oder es sind alle drei zu v_0 adjazenten Knoten $v_j, j \in \{2, 3, 4\}$ in $V(Z(G))$.

Im ersten Fall existieren genau vier Knoten $v_j \in V(Z(G)), j \in \{2, \dots, 5\}$ und vier Facetten F_j mit $v_j \in V(F_j) \cap V(Z(G))$ und v_2, v_3 sind zu v_0 sowie v_4, v_5 zu v_1 adjazent. Zusätzlich ist $v_0 \in V(F_l^6) \setminus V(Z(G)), l \in \{1, 2, 3\}$. Ohne Einschränkung sei $v_1 \in V(F_1^6) \cap V(F_2^6)$. Da $v_0 \in V(F_l^6)$ ist, ist $C(F_l^6) \notin Z(G)$. Da $Z(G)$ aus ausschließlich Facettenkreisen besteht, gilt $|\{v \in V(F_l) \mid v \in V(Z(G))\}| \leq 4$ für $l \in \{1, 2, 3\}$. Dann existiert ein $v'_0 \in V(F_3^6) \setminus V(Z(G))$ mit $v'_0 \notin \{v_0, v_1\}$ im Widerspruch zu $n - |V(Z(G))| = 2$. Abbildung 5.7(a) zeigt einen Teilgraphen eines Fulleren-Graphen, der den Widerspruch visualisiert.

Im zweiten Fall existieren drei Sechsecksfacetten $F_l^6, l \in \{5, 6, 7\}$ mit $v_0 \in V(F_l^6)$. Da $v_0 \in V(F_l^6)$ ist, ist $C(F_l^6) \notin Z(G)$. Da $Z(G)$ aus ausschließlich Facettenkreisen besteht, gilt $|\{u \in V(F_l) \mid u \in V(Z(G))\}| \leq 4$ für $l \in \{5, 6, 7\}$. Somit existiert ein Knoten $v_l \in V(F_l)$ mit $v_l \neq v_0$ und $v_l \in V(F_l) \setminus V(Z(G))$ im Widerspruch zu $n - |V(Z(G))| = 2$. Abbildung 5.7(b) zeigt einen Teilgraphen eines Fulleren-Graphen, der den Widerspruch visualisiert.

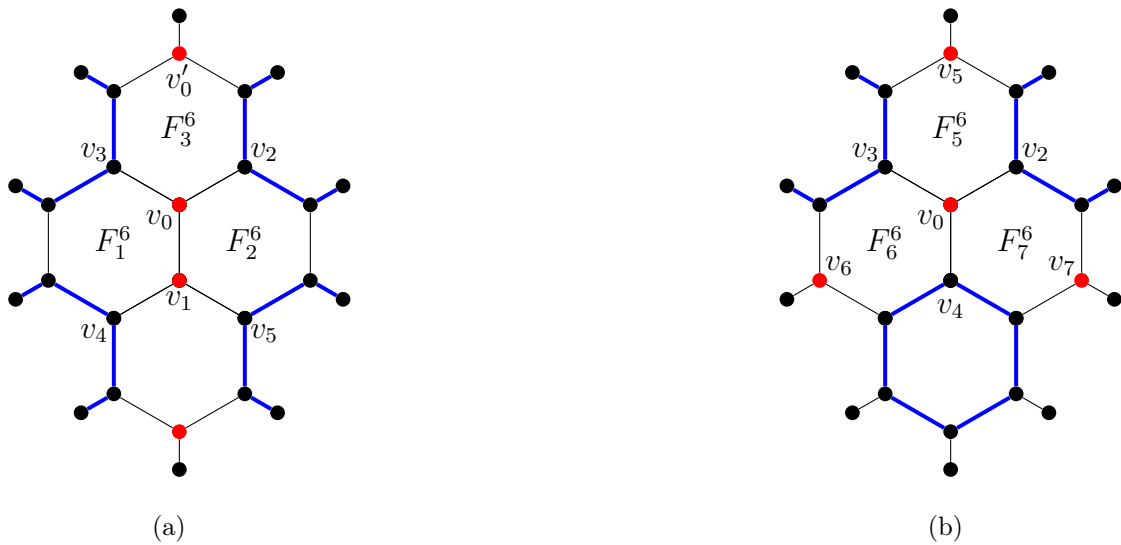


Abbildung 5.7: Zwei Teilgraphen eines Fulleren-Graphen mit $|Z(F^5) \cap Z(G)| = 12$. Falls der rot dargestellte Knoten v_0 (und v_1 in (a)) nicht in der Knotenmenge $V(Z(G))$ enthalten ist, so sind auch die rot dargestellten Knoten v'_0 in (a) und $v_i \in V(F_i^6)$ in (b) im Fall $|Z(F^5) \cap Z(G)| = 12$ nicht in $V(Z(G))$ enthalten. Die blau dargestellten Kanten sind in $E(Z(G))$ enthalten, falls in (a) die Knoten v_2, v_3, v_4 und v_5 bzw. in (b) die Knoten v_2, v_3 und v_4 in $V(Z(G))$ enthalten sind.

□

Bevor im Weiteren das Hauptresultat dieses Abschnittes mit Satz 5.4 formuliert und bewiesen wird, werden vorab für den Beweis notwendige Graphen-Transformationen eingeführt, mit deren Hilfe spezielle Fulleren-Graphen aus anderen Fulleren-Graphen erzeugt werden können. Ziel hierbei ist es, Graphen $G \in \mathcal{F}_k$ zu konstruieren, für die $\nu(G)$ maximal in \mathcal{F}_k ist, d.h. für einen solchen Graphen G existiert kein $G' \in \mathcal{F}_k$ mit $\nu(G') > \nu(G)$.

Leapfrog-Transformation

Als erstes wird mit der Leapfrog-Transformation eine Transformation vorgestellt, mit der aus einem Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_k$ ein Fulleren-Graph $G^l \in \mathcal{F}_{3k}$ erzeugt werden kann. Es wird sich zeigen, dass $\nu(G^l)$ maximal unter allen Graphen aus \mathcal{F}_{3k} ist.

Sei G ein Fulleren-Graph, dann heißt

$$\text{leap} : \mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{F}_{3k} \text{ mit } \text{leap}(G) := (\text{St}(G))^*$$

Leapfrog-Transformation von G . Dabei ist $\text{St}(\cdot)$ eine Transformation, die im Inneren jeder Facette $F_i \in F(G)$ einen Knoten v_i einfügt. Die Kantenmenge von G wird dann so ergänzt, dass v_i adjazent zu jedem Knoten aus $V(F_i)$ ist. Nach [2] ist $\text{St}(G)$ eine sternförmige Triangulation aus \mathcal{P}_{3k} mit $\delta_{\text{St}}(v_i) = 5$, falls F_i eine Fünfecksfacette und ansonsten $\delta_{\text{St}}(v_i) = 6$. Nach Satz 2.7 ist der zugehörige Dualgraph $(\text{St}(G))^*$ aus \mathcal{F}_{3k} eindeutig bestimmt.

Ein schematischer Teilgraph zur Visualisierung der Leapfrog-Transformation ist in Abbildung 5.8 skizziert. Dabei wird ausgehend von dem Teilgraphen in (a) der zugehörige Graph $\text{St}(G)$ in (b) erzeugt und ausgehend von dem Graphen $\text{St}(G)$ der zugehörige Dual-Graph in (c) konstruiert. Innerhalb der Abbildung 5.8(c) entsprechen die schwarz dargestellten Knoten bzw. Kanten der Knoten- bzw. Kantenmenge des Leapfrog-Fulleren-Graphen und die blau bzw. grau markierten Knoten der Knotenmenge des Teilgraphens aus (b). Die Leapfrog-Transformation definiert einen Fulleren-Graphen $G^l = \text{leap}(G)$ (siehe [2]), mit

$$|F(G^l)| = |V(\text{St}(G))| = |V(G)| + |F(G)|,$$

$$|V(G^l)| = 2(|F(G^l)| - 2) = 3|V(G)|, \text{ da } f = \frac{n}{2} + 2 \text{ in } G \in \mathcal{F}_n \text{ und}$$

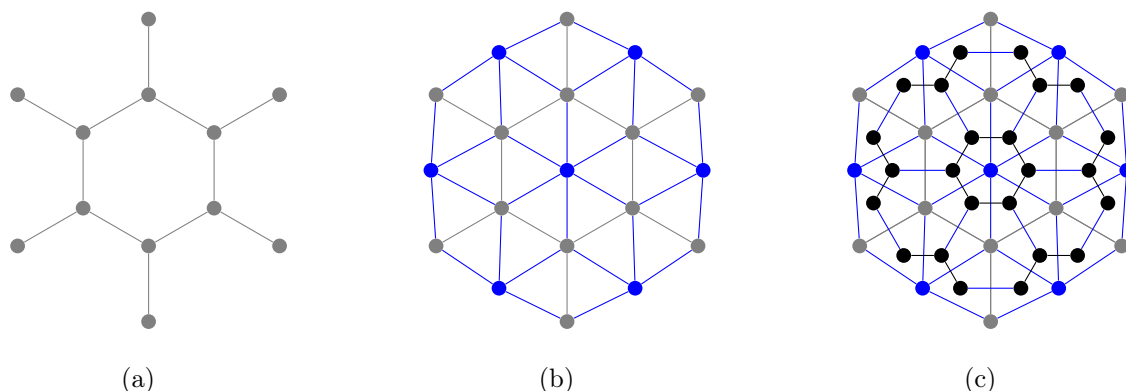


Abbildung 5.8: Teilgraph eines (a) Fulleren-Graphen G , des (b) zugehörigen Graphen $St(G)$ sowie des (c) Leapfrog-Fulleren-Graphen G^l .

$$|E(G^l)| = \frac{3|V(G^l)|}{2} = \frac{9|V(G)|}{2} = |E(G)| + 3|V(G)|, \text{ da } m = \frac{3n}{2} \text{ in } G \in \mathcal{F}_n.$$

Der Graph G^l heißt dann *Leapfrog-Fulleren-Graph* von G . Aufgrund der Konstruktionsystematik von G^l bilden Leapfrog-Fulleren-Graphen eine Unterklasse der IPR-Fulleren-Graphen. Zudem gibt es nach Konstruktion eine unabhängige Menge in $St(G)$ der Kardinalität $F(G)$ und folglich $|F(G)|$ knotendisjunkte Facettenkreise in G^l . Somit folgt für einen Leapfrog-Fulleren-Graph G^l direkt: $\nu(G^l) \geq |F(G)| = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$ und mit (5.1) folglich: $\nu(G^l) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$. Somit erfüllt jeder Leapfrog-Fulleren-Graph (5.1) mit Gleichheit. Aufgrund der Konstruktion von Leapfrog-Fulleren-Graphen G^l gilt: $n = 60$ oder $n \geq 72$ und $n = 0 \pmod{6}$.

Demnach ist die Untersuchung von $\nu(G)$ für $G \in \mathcal{F}_n$ mit $n \geq 72$, $n = 2 \pmod{6}$ bzw. $n = 4 \pmod{6}$ noch von Interesse. Idee dazu ist es, spezielle Leapfrog-Fulleren-Graphen durch weitere Transformationen "lokal" zu verändern und somit die Kreispackungszahl dieser transformierten Fulleren-Graphen dann zu analysieren.

Neben der Leapfrog-Transformation, die auf einer Transformation des gesamten Graphen $G \in \mathcal{F}_k$ basiert, gibt es auch Transformationen, die nur einen Patch $P(C)$ innerhalb eines bestehenden Fulleren-Graphen G durch einen anderen Patch $\tilde{P}(C)$ austauschen und dadurch einen neuen Fulleren-Graphen \tilde{G} erzeugen. Ohne Einschränkung sei dies im Folgenden ein innerer Patch bzgl. der gewählten Projektion von G . Wesentlich ist dabei, dass $F^a(P(C)) = F^a(\tilde{P}(C))$ ist, also die äußere Facette durch die Transformation unverändert bleibt.

Einfache-Endo-Kroto-Transformation

Sei $G \in \mathcal{F}_n$ mit der Eigenschaft, dass zwei knotendisjunkte Fünfecksfacetten F_1^5, F_2^5 und eine Sechsecksfacette F_0^6 in G existieren mit $E(F_i^5) \cap E(F_0^6) \neq \emptyset$ für $i \in \{1, 2\}$. Die Kante aus $E(F_i^5) \cap E(F_0^6)$ sei mit (u_i, v_i) bezeichnet. Ferner gelte für jeden Pfad $W(u, v)$ mit $u \in \{u_1, v_1\}$ und $v \in \{u_2, v_2\}$, dass $|E(W(u, v))| \geq 2$. Dann heißt die Unterteilung der Kante (u_i, v_i) durch den Pfad (u_i, s_i, v_i) sowie das Einfügen der Kante (s_1, s_2) in F_0^6 *einfache Endo-Kroto-Transformation* [26]. Für den so konstruierten Graphen G' gilt: $G' \in \mathcal{F}_{n+2}$.

Zweifache-Endo-Kroto-Transformation

Sei $G \in \mathcal{F}_n$ mit der Eigenschaft, dass zwei knotendisjunkte Fünfecksfacetten F_1^5, F_2^5 und zwei adjazente Sechsecksfacetten F_1^6, F_2^6 in G existieren mit $E(F_1^5) \cap E(F_2^6) = \emptyset$, $E(F_2^5) \cap E(F_1^6) = \emptyset$ und für $i \in \{1, 2\}$ gilt: $E(F_i^5) \cap E(F_i^6) \neq \emptyset$, $E(F_1^6) \cap E(F_2^6) \neq \emptyset$. Die Kante aus $E(F_i^5) \cap E(F_i^6)$ sei mit (u_i, v_i) und die Kante aus $E(F_1^6) \cap E(F_2^6)$ sei mit (u_3, v_3) bezeichnet. Ferner gelte für jeden Pfad $W(u, v)$ mit $u \in \{u_1, v_1\}$ und $v \in \{u_2, v_2\}$, dass $|E(W(u, v))| \geq 3$. Dann heißt die Unterteilung der Kanten (u_i, v_i) durch die Pfade (u_i, s_i, v_i) sowie die Unterteilung der Kante (u_3, v_3) durch den Pfad (u_3, s_3, t_3, v_3) sowie das Einfügen zweier Kanten *zweifache Endo-Kroto-Transformation* [26]. Für das Einfügen dieser Kanten seien zwei Fälle unterschieden:

- ist u_3 adjazent zu u_1 bzw. v_3 adjazent zu v_2 , so füge die Kante (s_1, t_3) in F_1^6 und die Kante (s_2, s_3) in F_2^6 ein,
- sonst füge die Kante (s_1, s_3) in F_1^6 und die Kante (s_2, t_3) in F_2^6 ein.

Für den so erzeugten Graphen G' gilt: $G' \in \mathcal{F}_{n+4}$. Anzumerken sei an dieser Stelle, dass die Notation der Knoten derart gewählt sei, dass ein Pfad $W(u_1, u_2)$ existiert mit $u_3 \in W(u_1, u_3)$ und $v_1, v_2, v_3 \notin W(u_1, u_3)$.

Stone-Wales-Transformation

Abschließend wird an dieser Stelle zusätzlich zu den Endo-Kroto-Transformationen die *Stone-Wales-Transformation* erläutert [66]. Hierbei sei $G \in \mathcal{F}_n$ mit der Eigenschaft, dass zwei knotendisjunkte Fünfecksfacetten F_1^5, F_2^5 und zwei Sechsecksfacetten F_1^6, F_2^6 in G existieren, derart, dass es eine Kante $e = (u_1, u_2)$ gibt mit $e \in E(F_i^6)$ und $u_i \in V(F_i^5)$. Dann brette jeweils einen Knoten v_i in das Innere von F_i^6 ein und entferne die Knoten u_i sowie die zu u_i inzidenten Kanten aus G . Dann sei v_1 ad-

jazent zu den zwei Knoten $v_i \in V(F_1^6)$, mit $\delta(v_i) = 2$ und v_2 adjazent zu den zwei Knoten $v_j \in V(F_2^6)$, mit $\delta(v_j) = 2$ sowie v_1 adjazent zu v_2 . Diese Transformation heißt *Stone-Wales-Transformation* und für den so konstruierten Graphen G' gilt: $G' \in \mathcal{F}_n$.

Die Endo-Kroto-Transformationen sowie die Stone-Wales-Transformation werden in Abbildung 5.9 ausgehend von dem zugrundeliegenden Patch veranschaulicht.

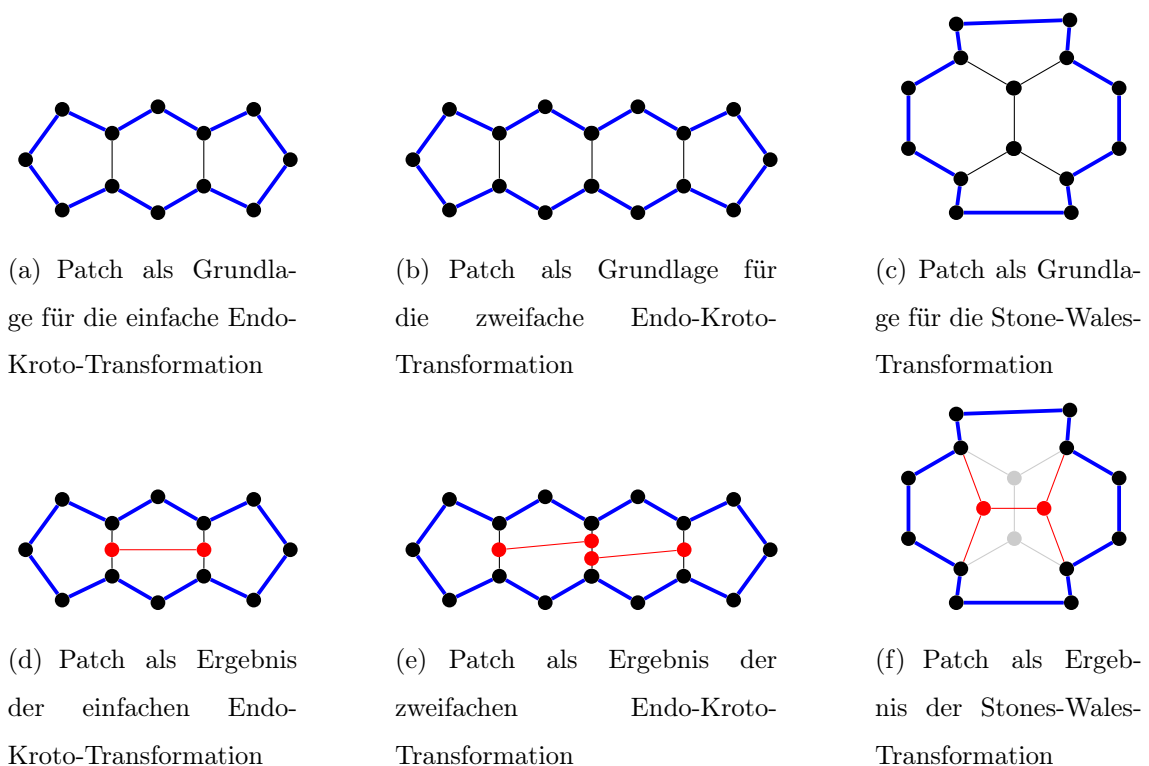


Abbildung 5.9: Visualisierung der einfachen und zweifachen Endo-Kroto- und Stone-Wales-Transformation. Abbildung (d) zeigt ausgehend von dem in (a) dargestellten Patch die einfache Endo-Kroto-Transformation, Abbildung (e) zeigt ausgehend von (b) die zweifache Endo-Kroto-Transformation und Abbildung (f) zeigt ausgehend von (c) die Stone-Wales-Transformation. Hierbei werden die rot skizzierten Knoten und Kanten in den zugrundeliegenden Patch eingefügt. Bemerke bei der Darstellung der Stone-Wales-Transformation werden die grau skizzierten Knoten und Kanten aus dem zugrundeliegenden Patch (dargestellt in (c)) entfernt.

Die einfache Endo-Kroto-Transformation ist in (d) ausgehend von einem Patch aus (a) skizziert. Ein Beispiel für eine der drei potenziell möglichen zweifachen Endo-

Kroto-Transformationen ist in (e) ausgehend von einem Patch aus (b) skizziert. Die Stone-Wales-Transformation ist in (f) ausgehend von einem Patch aus (c) skizziert. Bemerke, die rot skizzierten Knoten und Kanten wurden durch die Transformation dem zugrundeliegenden Patch hinzugefügt und die grau skizzierten Knoten und Kanten aus dem zugrundeliegenden Patch entfernt. Zusammenfassend lässt sich für diese drei Transformationen festhalten, dass ausgehend von einem Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ durch die Stone-Wales-Transformation ein weiterer Fulleren-Graph in \mathcal{F}_n , durch die einfache Endo-Kroto-Transformation ein Fulleren-Graph in \mathcal{F}_{n+2} und durch die zweifache Endo-Kroto-Transformation ein Fulleren-Graph in \mathcal{F}_{n+4} erzeugt wird.

Diese Eigenschaft der beschriebenen Transformationen lässt sich in Satz 5.4 verwenden, um Graphen ausgehend von speziellen Leapfrog-Fulleren Graphen zu konstruieren, die die dort angeführte obere Schranke mit Gleichheit erfüllen. Ferner sei bemerkt, dass $P^A(C) = \tilde{P}^A(C)$ bei diesen drei Transformationen gilt.

Ausgehend von den im folgenden Lemma konstruierten Fulleren-Graphen G kann dann mit Hilfe der Leapfrog-Transformation $leap(G)$ ein Leapfrog-Fulleren-Graph erzeugt werden. Basierend auf diesem speziellen Leapfrog-Fulleren-Graph kann dann mit Hilfe der Endo-Kroto- sowie Stone-Wales-Transformation eine Aussage über die Güte der in (5.1) formulierten oberen Schranke an $\nu(G)$ getroffen werden.

Lemma 5.3. *Es sei $k \neq 1, k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert für jedes $n \geq 20 + 2k$ ein Graph $G_n \in \mathcal{F}_n$ mit $F_0^5, F_1^5, F_2^5 \in F^5$ sowie $E(F_0^5) \cap E(F_1^5) \neq \emptyset$, $E(F_0^5) \cap E(F_2^5) \neq \emptyset$ und $E(F_1^5) \cap E(F_2^5) = \emptyset$.*

Beweis. Der Beweis wird mittels vollständiger Induktion nach n geführt. Die Aussage ist offensichtlich erfüllt für $n = 20$, da $F^5(G_{20}) = F(G_{20})$ (Vergleiche dazu auch Abbildung 5.4). Sei $\mathcal{M}_0 := \{24, 26, \dots, 34\}$. Für $n \in \mathcal{M}_0$ gilt die Aussage mit den in Abbildung 5.10 skizzierten Fulleren-Graphen G_n .

Ein solcher Graph erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- (*) In G_n existiert ein Petriekreis C der Länge 12 mit der Eigenschaft, dass drei Fünfecksfacetten F_0^5, F_1^5 und F_2^5 mit $E(F_0^5) \cap E(F_1^5) \neq \emptyset$, $E(F_0^5) \cap E(F_2^5) \neq \emptyset$

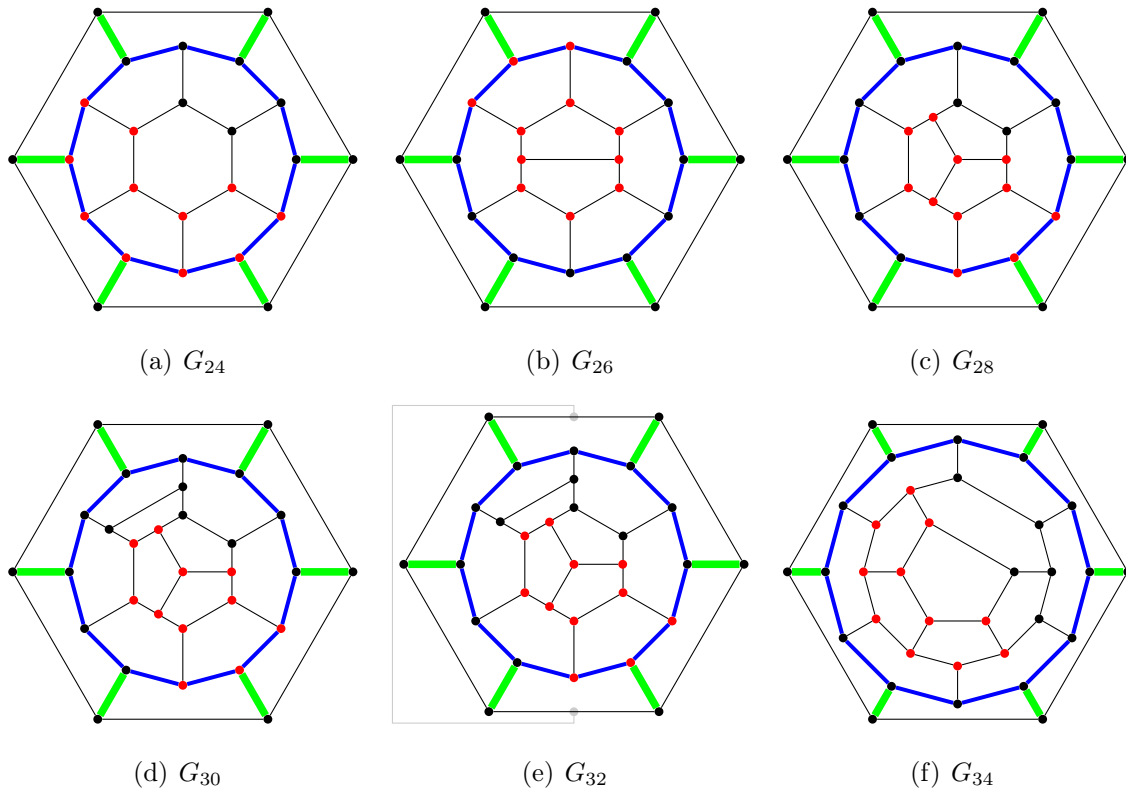


Abbildung 5.10: Sechs Fulleren-Graphen $G_i, i \in \{24, 26, \dots, 34\}$ die Eigenschaft (*) aus Lemma 5.3 erfüllen. Anmerkung: Die jeweils 11 rot skizzierten Knoten entsprechen der Knotenmenge der drei speziell gewählten Fünfsecksfacetten aus F^5 . Die jeweils sechs grün skizzierten Kanten innerhalb der Graphen sind in der Kantenmenge von $P^A(C)$ enthalten und sind inzident zu den k_a Knoten des jeweiligen Petriekreises C der Länge 12. Die Kantenmenge $E(C)$ ist jeweils in blau dargestellt. Durch die zwei grau skizzierten Knoten und die grau skizzierte Kante, unterscheidet sich $P^A(C)$ in G_{32} von $P^A(C)$ in G_n mit $n \in \{24, 26, 28, 30, 34\}$.

und $E(F_1^5) \cap E(F_2^5) = \emptyset$ in dem inneren Patch $P^I(C)$ enthalten sind (die rot skizzierten Knoten entsprechen dabei der Knotenmenge von F_0^5, F_1^5 und F_2^5).

Ohne Einschränkung seien die Einbettungen der Graphen $G_n, n \in \mathcal{M}_0$ so gewählt, dass sechs Kanten $e_i = (u_i, v_i)$ für $i \in \{1, \dots, 6\}$ inzident zu jeweils einem Knoten $v_i \in V(C)$ und einem Knoten $u_i \in A(J(C))$ sind. Diese Kanten seien in mathematisch positiver Drehrichtung nummeriert (und sind in Abbildung 5.10 grün skizziert).

Ausgehend von G_n sei G'_n wie folgt konstruiert:

Unterteile die Kanten $e_i = (u_i, v_i)$ jeweils durch einen Pfad (u_i, s_i, t_i, v_i) .

Füge die Kanten (s_i, t_{i+1}) , für $i \in \{1, \dots, 5\}$ und (s_6, t_1) zu der Kantenmenge hinzu.

Bemerke, da die sechs Kanten $e_i = (u_i, v_i)$ in der Kantenmenge des äußeren Patches $P^A(C)$ enthalten sind, bleibt innerhalb der Konstruktionssystematik von G'_n der innere Patch $P^I(C)$ unverändert. Es gilt $P^I(C)$ in G_n ist gleich $P^I(C')$ in G'_n . Somit erfüllt G'_n die Eigenschaft (*). In Abbildung 5.11 ist zur Visualisierung der Konstruktionssystematik ein Teilgraph von G'_n in (b), der dem äußeren Patch von $\tilde{P}^A(C)$ in G'_n entspricht, ausgehend von $P^A(C)$ in G_n skizziert.

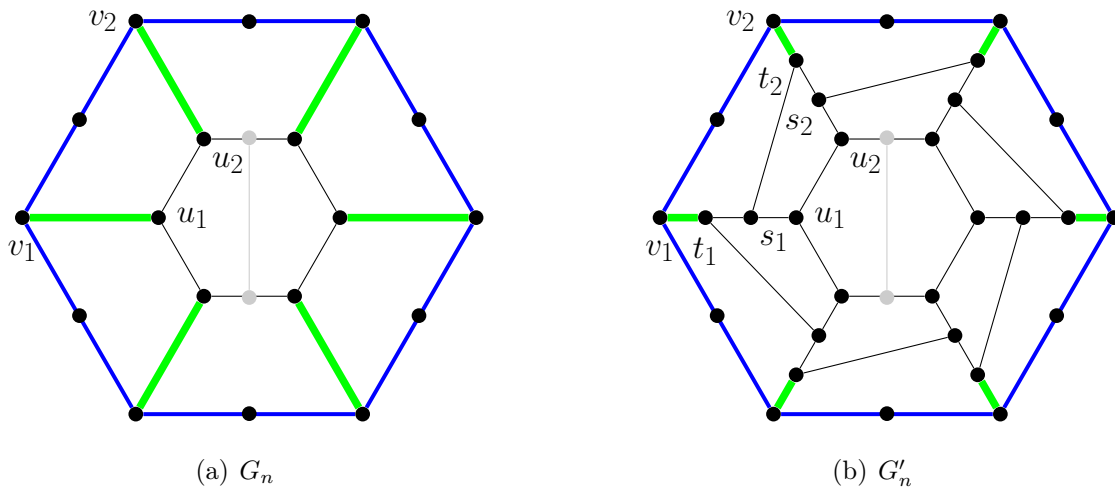


Abbildung 5.11: Schematische Darstellung des äußeren Patches $P^A(C)$ in $G_n, n \in \mathcal{M}_0$ in (a) und des äußeren Patches $\tilde{P}(C)$ in G'_n in (b). Bemerke, dass innerhalb der Darstellung die zwei grau skizzierten Knoten sowie die grau skizzierte Kante für $n = 32 + 12k$ existieren, nicht aber für $n \neq 32 + 12k, k \in \mathbb{N}_0$.

Für den so erzeugten Graphen G'_n gilt folglich: $V(G'_n) = V(G_n) + 12$, $E(G'_n) = E(G_n) + 18$, $F(G'_n) = F(G_n) + 6$ und $G'_n \in \mathcal{F}_{n+12}$. Ferner existieren die Facetten F_0^5, F_1^5 und F_2^5 mit $E(F_0^5) \cap E(F_1^5) \neq \emptyset$, $E(F_0^5) \cap E(F_2^5) \neq \emptyset$ und $E(F_1^5) \cap E(F_2^5) = \emptyset$ nach Konstruktion auch in G'_n . Durch die Kanten (v_i, t_i) weiterhin sechs Kanten und ein Petriekreis C' der Länge 12, wobei diese sechs Kanten inzident zu jeweils einem Knoten $v'_i \in V(C')$ und $u'_i \in A(J(C))$ bzgl. der gewählten Einbettung von G_n sind. Jeder der sechs Graphen G_n mit $n \in \mathcal{M}_0$ induziert demnach einen Graphen $G'_n \in \mathcal{F}_{n+12}$, der Eigenschaft (*) erfüllt.

Diese Tatsache erlaubt nun ein induktives Vorgehen zur Bestimmung von Graphen,

die die Eigenschaft (*) erfüllen. Für $k \geq 1$ sei $\mathcal{M}_k := \{24 + 12k, 26 + 12k, \dots, 34 + 12k\}$. Angenommen, für alle $n \in \mathcal{M}_k$ gibt es einen Graphen $G_n \in \mathcal{F}_n$, welcher die Eigenschaft (*) erfüllt. Nach derselben Konstruktionssystematik wie vorher induziert G_n dann einen Graphen G'_n mit der Eigenschaft: $V(G'_n) = V(G_n) + 12$, $E(G'_n) = E(G_n) + 18$, $F(G'_n) = F(G_n) + 6$ und $G'_n \in \mathcal{F}_{n+12}$. Somit induziert ein Graph G_n mit $n \in \mathcal{M}_k$ einen Graphen G'_n mit $n \in \mathcal{M}_{k+1}$, für den Eigenschaft (*) gilt. \square

Basierend auf den in Lemma 5.3 konstruierten Fulleren-Graphen werden nun als Hauptresultat dieses Abschnittes Fulleren-Graphen mit Hilfe der eingeführten Fulleren-Graph Transformationen konstruiert, die die obere Schranke an $\nu(G)$ aus Ungleichung (5.1) bzw. Satz 5.2 bestmöglich erfüllen. Genauer:

Satz 5.4. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $k \neq 1$. Dann existiert ein Graph $G_n \in \mathcal{F}_n$ mit*

- (i) $\nu(G_n) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$, falls $n = 60 + 6k$
- (ii) $\nu(G_n) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$, falls $n = 62 + 6k$
- (iii) $\nu(G_n) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$, falls $n = 64 + 6k$.

Beweis. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $k \neq 1$.

- (i) Betrachte den Fall $n = 60 + 6k$: Nach Lemma 5.3 existiert ein Fulleren-Graph $G_{\frac{n}{3}}$. Für den Leapfrog-Fulleren-Graph $G_{\frac{n}{3}}^l := \text{leap}(G_{\frac{n}{3}}) \in \mathcal{F}_n$ von $G_{\frac{n}{3}}$ gibt es folglich eine knotendisjunkte Kreispackung $Z(G_{\frac{n}{3}}^l)$ mit $|Z(G_{\frac{n}{3}}^l)| = |F(G_{\frac{n}{3}})| = \frac{\frac{n}{3}}{2} + 2 = \frac{n}{6} + 2$. Wegen Ungleichung (5.1) ist $|Z(G_{\frac{n}{3}}^l)|$ dann maximal. Damit ist (i) gezeigt. Bemerke, da $|Z(G_{\frac{n}{3}}^l)| = \frac{n}{6} + 2$ gilt, besteht $Z(G_{\frac{n}{3}}^l)$ aus 12 Fünfecksfacettenkreisen sowie $\frac{n}{6} - 10$ Sechsecksfacettenkreisen und jede Kreispackung, die einen Nicht-Facettenkreis enthält, ist nicht maximal in $G_{\frac{n}{3}}^l$.

Um (ii) und (iii) zu zeigen, sind noch weitere Vorüberlegungen notwendig. Sei dazu weiterhin $n = 60 + 6k$. Nach Konstruktion der Fulleren-Graphen in Lemma 5.3 existieren drei Fünfecksfacetten F_0^5 , F_1^5 und F_2^5 derart, dass $E(F_0^5) \cap E(F_i^5) \neq \emptyset$ mit $i \in \{1, 2\}$ und $E(F_1^5) \cap E(F_2^5) = \emptyset$. Der ausgehend von $G_{\frac{n}{3}}$ konstruierte Leapfrog-Fulleren-Graph $G_{\frac{n}{3}}^l$ besitzt einen Patch $P(C)$ bestehend aus den zwei Fünfecksfacetten $F_0^{5,l}, F_2^{5,l}$ sowie den beiden Sechsecksfacetten F_i^6 mit $E(F_1^6) \cap E(F_2^6) \neq \emptyset$,

$E(F_0^5) \cap E(F_i^6) \neq \emptyset$ und $E(F_2^5) \cap E(F_i^6) \neq \emptyset$ auf den die Stone-Wales-Transformation angewendet werden kann.

Der Graph resultierend aus dieser Stone-Wales Transformation von $G_{\frac{n}{3}}^l$ sei mit $G_n^{s,w}$ und der Stone-Wales transformierte Patch mit $\tilde{P}(C)$ bezeichnet. Ohne Einschränkung sei die Bezeichnung der Facetten in $G_n^{s,w}$ so gewählt, dass $F_2^{6,s,w}$ die Sechsecksfacette in $G_n^{s,w}$ korrespondierend zu der Fünfecksfacette $F_2^{5,l}$ in $G_{\frac{n}{3}}^l$ ist (genauer soll korrespondierend hierbei bedeuten, dass vier Knoten $v_i \in V(C)$ existieren mit $i \in \{1, \dots, 4\}$ und $v_i \in V(F_2^{6,s,w})$ in $G_n^{s,w}$ sowie $v_i \in V(F_2^{5,l})$ in $G_{\frac{n}{3}}^l$). Zudem sei $F_1^{6,s,w}$ korrespondierend zu $F_0^{5,l}$, $F_0^{5,s,w}$ korrespondierend zu F_2^6 und $F_2^{5,s,w}$ korrespondierend zu F_1^6 . Zusätzlich bezeichne F_0^6 eine Sechsecksfacette in $G_n^{s,w}$ mit den Eigenschaften $E(F_0^6) \cap E(F_1^{5,l}) \neq \emptyset$ sowie $E(F_0^6) \cap E(F_0^{5,s,w}) \neq \emptyset$. Visualisiert wird dies für einen jeweiligen Teilgraphen aus $G_{\frac{n}{3}}^l, G_{\frac{n}{3}}^l$ und $G_n^{s,w}$ in Abbildung 5.12.

Hierbei seien die grau skizzierten Knoten und Kanten in (b) und (c) weder in $G_{\frac{n}{3}}^l$ noch in $G_n^{s,w}$ enthalten, sondern visualisieren lediglich die Knoten und Kanten des Teilgraphen aus (a). Die blau skizzierten Kanten in (b) bzw. (c) entsprechen der Kantenmenge aus $P(C)$ in $G_{\frac{n}{3}}^l$ bzw. aus $\tilde{P}(C)$ in $G_n^{s,w}$. Da $C(F_2^{5,l}) \in Z(G_{\frac{n}{3}}^l)$, folgt in $G_n^{s,w}$

$$E(F_2^{6,s,w}) \cap E(Z(G_n^{s,w}) \setminus \{C(F_0^{5,l}), C(F_2^{5,l})\}) = \emptyset.$$

In $G_n^{s,w}$ gibt es somit eine knotendisjunkte Kreispackung bestehend aus ausschließlich Facettenkreisen

$$Z(G_n^{s,w}) = Z(G_{\frac{n}{3}}^l) \setminus \{C(F_0^{5,l}), C(F_2^{5,l})\} \cup \{C(F_2^{6,s,w})\},$$

wobei $C(F_0^{5,l}), C(F_2^{5,l}), C(F_2^{6,s,w})$ die entsprechenden Facettenkreise in $G_{\frac{n}{3}}^l$ bzw. $G_n^{s,w}$ bezeichnen. Es gilt:

$$\nu(G_n^{s,w}) \geq |Z(G_n^{s,w})| \geq |Z(G_{\frac{n}{3}}^l)| - 1 = \frac{n}{6} + 1.$$

Der so konstruierte Graph $G_n^{s,w}$ sowie dessen Eigenschaften werden nun benutzt, um (ii) mit Hilfe der einfachen Endo-Kroto- und (iii) mit Hilfe der zweifachen Endo-Kroto-Transformation zu beweisen.

(ii) Für $n = 62 + 6k, k \neq 1$ wird nun die einfache Endo-Kroto-Transformation auf den Patch bestehend aus den Facetten $F_1^{5,l}, F_0^{5,s,w}$ und F_0^6 in $G_{n-2}^{s,w}$

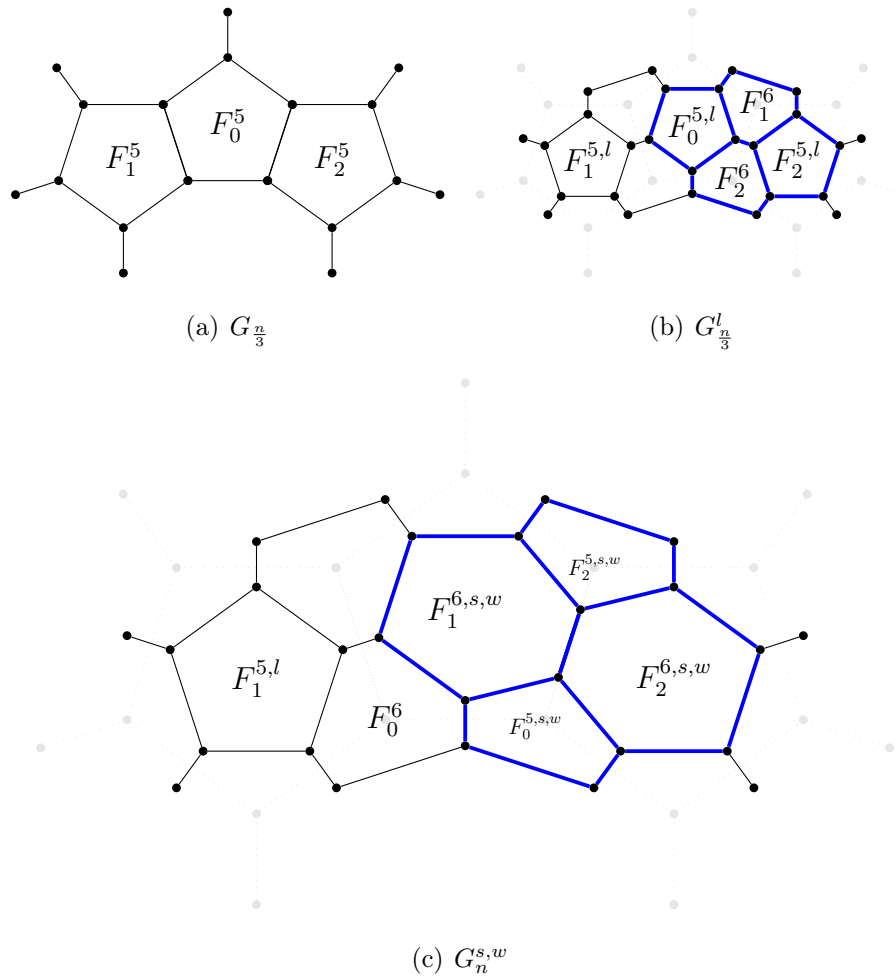


Abbildung 5.12: In (a) ist ein Teilgraph eines Fulleren-Graphen $G_{\frac{n}{3}}$ nach Lemma 5.3, in (b) ein Teilgraph des zu $G_{\frac{n}{3}}$ gehörigen Leapfrog-Fulleren-Graph $G_{\frac{n}{3}}^l$ und in (c) ein Teilgraph des über die Stone-Wales Transformation erzeugte Fulleren-Graph $G_n^{s,w}$ skizziert.

angewendet. Für den so konstruierten Fulleren-Graphen $G_n^{e,k}$ gilt:

$$\nu(G_n^{e,k}) \geq |Z(G_{n-2}^{s,w})| \geq |Z(G_{\frac{n-2}{3}}^l)| - 1 = \frac{n-2}{6} + 1 = \left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor + 1.$$

Mit Lemma 5.2 folgt $\nu(G_n^{e,k}) = \left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor + 1$.

Basierend auf einem Teilgraphen von $G_{n-2}^{s,w}$ aus Abbildung 5.12(c) wird die oben beschriebene Konstruktion von $G_n^{e,k}$ in Abbildung 5.13 visualisiert. Bemerke, erneut sind die grau skizzierten Knoten und Kanten nicht in dem Graphen $G_n^{e,k}$ enthalten sondern entsprechen den zugehörigen Knoten und Kanten des Fulleren-Graphen $G_{\frac{n-2}{3}}$. Die grün skizzierte Kante entspricht der im Rahmen der einfachen Endo-Kodo Transformation hinzugefügten

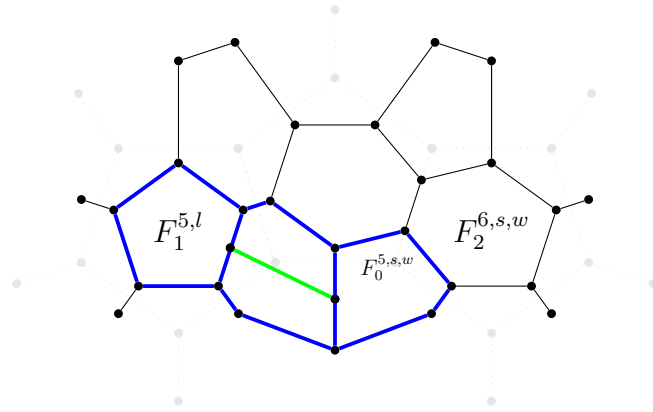


Abbildung 5.13: Schematische Darstellung der einfachen Endo-Kroto-Transformation angewendet auf $P(C)$ in $G_{n-2}^{s,w}$.

Kante. Die blau skizzierten Kanten der Kantenmengen des Patches $P(C)$ auf den die Einfache-Endo-Kroto Transformation angewendet wurde.

(iii) Für $n = 64 + 6k, k \neq 1$ wird die zweifache Endo-Kroto-Transformation auf den Patch bestehend aus den Facetten $F_1^{5,l}, F_0^6, F_1^{6,s,w}, F_2^{5,s,w}$ in $G_{n-4}^{s,w}$ angewendet und erzeugt einen Graphen $\tilde{G}_n^{e,k}$. Dann existiert in $\tilde{G}_n^{e,k}$ eine Kreispackung bestehend aus ausschließlich Facettenkreisen

$$Z(\tilde{G}_n^{e,k}) = Z(G_{n-4}^{s,w}) \cup \{C(F_0^{5,e,k})\},$$

wobei $C(F_0^{5,e,k})$ dem Facettenkreis zugehörig zu der Fünfecksfacette $F_0^{5,e,k}$ in $\tilde{G}_n^{e,k}$ entspricht. Diese ist in Abbildung 5.14 visualisiert.

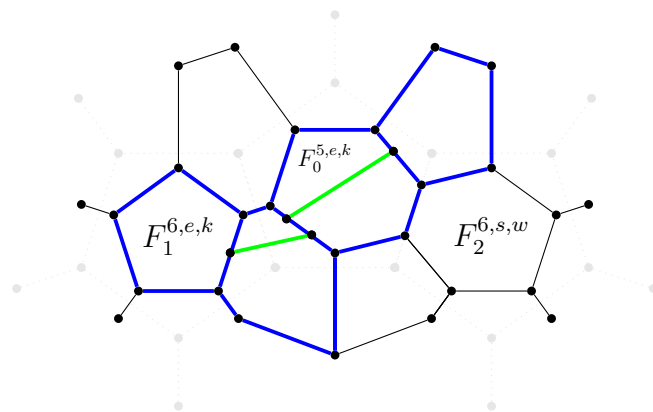


Abbildung 5.14: Schematische Darstellung der zweifachen Endo-Kroto-Transformation angewendet auf einen Patch $P(C)$ in $G_{n-4}^{s,w}$.

Bemerke, da $C(F_2^{6,s,w}) \in Z(G_{n-4}^{s,w})$, ist $C(F_1^{6,s,w}) \notin Z(G_{n-4}^{s,w})$. Ferner korrespondiert $C(F_1^{6,s,w})$ in $G_{n-4}^{s,w}$ nach Konstruktion zu dem Fünfecksfacet-

tenkreis $C(F_0^{5,l}) \in Z(G_{\frac{n-4}{3}}^l)$ in $G_{\frac{n-4}{3}}^l$. Somit gilt für die Facettenkreise $C(F_i)$ mit $F_i \in F(G_{n-4}^{s,w})$, $F_i \neq F_2^{6,s,w}$ sowie $E(F_i) \cap E(F_1^{6,s,w}) \neq \emptyset$, dass $C(F_i) \notin Z(G_{n-4}^{s,w})$. Somit folgt: $E(F_0^{5,e,k}) \cap E(Z(G_{n-4}^{s,w})) = \emptyset$ und folglich gilt:

$$\nu(\tilde{G}_n^{e,k}) \geq |Z(G_{n-4}^{s,w})| + 1 \geq \frac{n-4}{6} + 2 = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2.$$

Mit (5.1) folgt $\nu(\tilde{G}_n^{e,k}) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$. Basierend auf einem Teilgraphen von $G_{n-4}^{s,w}$ wird die oben beschriebene Konstruktion von $\tilde{G}_n^{e,k}$ in Abbildung 5.14 visualisiert. Dazu sei erneut bemerkt, dass die grau skizzierten Knoten und Kanten nicht zu dem Fulleren-Graph $\tilde{G}_n^{e,k}$ gehören, sondern zu dem Fulleren-Graph $G_{\frac{n-4}{3}}^l$. Zudem entsprechen die grün skizzierten Kanten den Kanten, die durch die zweifache Endo-Kroto-Transformation zu $G_{n-4}^{s,w}$ hinzugefügt werden sowie die blau skizzierten Kanten der Kantenmengen des Patches $P(C)$ auf den die Zweifache-Endo-Kroto Transformation angewendet wurde.

□

Demnach kann nun mit Lemma 5.2 und Satz 5.4 sowie der beschriebenen Leapfrog-Fulleren-Graphen und der bzgl. der Stones-Wales und Endo-Kroto-transformierten Leapfrog-Fulleren-Graphen eine bestmögliche obere Schranke für $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen aus \mathcal{F}_n mit $n \in \{60, 62, 64\}$ bzw. $n \geq 72$ angegeben werden. Zudem lassen sich aus der Konstruktion der Graphen $G_{n+2}^{e,k}$ bzw. $\tilde{G}_{n+4}^{e,k}$ maximale Kreispackungen bestehend aus ausschließlich Facettenkreisen $Z(G_{n+2}^{e,k}) := Z(G_n^{s,w})$ und $Z(\tilde{G}_{n+4}^{e,k}) := Z(G_n^{s,w}) \cup \{C(F_0^{e,k})\}$ ausgehend von einer maximalen Kreispackung $Z(G_{\frac{n}{3}}^l)$ in $G_{\frac{n}{3}}^l$ angeben. Anzumerken bleibt, dass $\nu(\mathcal{F}_n) := \max\{\nu(G) | G \in \mathcal{F}_n\}$ nicht monoton in n wächst. Hierdurch unterscheidet sich $\nu(\mathcal{F}_n)$ strukturell von polyhedralen Graphen bzw. Halin-Graphen.

Auf Basis der Ergebnisse dieses Abschnitts bleiben zur vollständigen Angabe der oberen Schranken an $\nu(G)$ nur noch die Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ mit $n \leq 70$ zu untersuchen.

Bemerkung 5.5. Für die in Satz 5.4 konstruierten Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ gilt:

$$\alpha(G^*) = \nu(G).$$

Nun wird im Folgenden der Zusammenhang von $\alpha(G^*)$ und $\nu(G)$ für Fulleren-Graphen analysiert.

5.2 Zusammenhang von $\alpha(G^*)$ und $\nu(G)$ in Fulleren-Graphen

Für polyhedrale Graphen G ist der jeweils zugehörige Dual-Graph G^* nach dem Theorem von Whitney [68] eindeutig bestimmt. Eine maximale unabhängige Menge $U(G^*)$ induziert daher eine Kreispackung in G , die aus Facettenkreisen in G besteht. Somit gilt

$$\alpha(G^*) \leq \nu(G).$$

In Satz 4.2 wurde gezeigt, dass für Halin-Graphen die Beziehung $\alpha(G^*) = \nu(G)$ Gültigkeit hat und daher insbesondere auch für kubische Halin-Graphen gilt. Folglich ist die Existenz kubischer polyhedraler Graphen G mit $\alpha(G^*) = \nu(G)$ sichergestellt. Die Eigenschaft $\alpha(G^*) = \nu(G)$ gilt aber nicht notwendigerweise für beliebige kubische Graphen G . In Abbildung 3.8 ist ein kubischer polyhedraler Graph angegeben, für den $\nu(G) = \alpha(G^*) + 1$ gilt. Ferner wurde in Lemma 3.6 gezeigt, dass für einen kubischen polyhedralen Graphen im Allgemeinen eine Abschätzung von $\nu(G)$ durch $\alpha(G^*)$ beliebig schlecht ausfallen kann. Somit wird die spezielle Struktur der Fulleren-Graphen (bestehend aus exakt zwölf Fünfecksfacetten und sonst ausschließlich Sechsecksfacetten) von entscheidender Bedeutung für die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen $\alpha(G^*)$ und $\nu(G)$ sein.

Es sei als kurzer Einschub vorab bemerkt, dass es einen Fulleren-Graph G und maximale Kreispackungen $Z(G)$ gibt, die nicht ausschließlich aus Facettenkreisen bestehen. Wobei der Fulleren-Graph G_{20} ein Beispiel zu dieser Aussage liefert. Abbildung 5.15 skizziert durch die blau visualisierten Kreise eine Kreispackung $Z(G_{20})$, die einen Kreis der Länge zehn beinhaltet.

Allerdings existiert offensichtlich auch eine Kreispackung aus ausschließlich Facettenkreisen über die in Abbildung 5.15 mit F_0^5, F_1^5 und F_2^5 bezeichneten knotendisjunkten Facetten. Die Aussage, dass $\nu(G_{20}) = 3$ ist, wird an dieser Stelle nicht

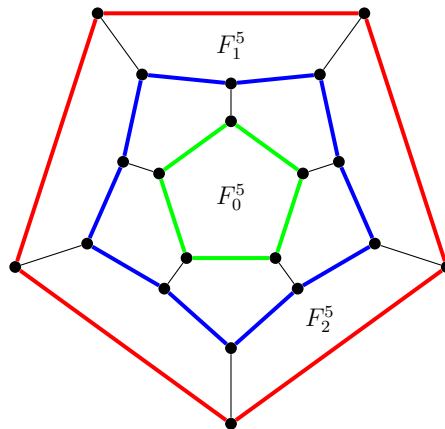


Abbildung 5.15: Darstellung einer maximalen Kreispackung in G_{20} mit einem Kreis der Länge zehn. Die Kantenmenge der farblich skizzierten Kanten entsprechen drei kantendisjunkten Kreisen, wobei einer die Länge 10 (in blau dargestellt) und zwei die Länge 5 (in rot und grün dargestellt) besitzen. Bemerke, die Kantenmenge der drei Fünfecksfacetten bezeichnet mit F_0^5 , F_1^5 und F_2^5 sind ebenfalls kantendisjunkt.

explizit bewiesen, folgt aber als Teilergebnis aus den Ergebnissen dieses und des Abschnittes 5.3.

Nach Lemma 5.1 enthalten Petriekreise in Fulleren-Graphen genau sechs Fünfecksfacetten in ihrem Inneren und weisen folglich mindestens die Länge 10 auf. Dies lässt vermuten, dass Beispiele in Analogie zu Abbildung 3.8 für Fulleren-Graphen nicht möglich sind. Dieser Vermutung wird im Folgenden nachgegangen. Dazu wird bewiesen, dass die Gleichheit zwischen $\nu(G)$ und $\alpha(G^*)$ wie für kubischen Halin-Graphen auch für Fulleren-Graphen gilt.

Satz 5.6. *Sei G ein Fulleren-Graph. Dann gilt*

$$\nu(G) = \alpha(G^*).$$

Der Beweis der Aussage wird über einen Widerspruch zur Annahme der Existenz einer maximalen Kreispackung $Z(G)$ mit $\nu(G) > \alpha(G^*)$ geführt. Da dieser Widerspruchsbeweis in teilweise sehr technische Fallunterscheidungen strukturiert ist, werden vorab zur Gliederung des Beweises an dieser Stelle die zu beweisenden Aussagen verbal zusammengefasst, die Beweisidee veranschaulicht und anschließend die einzelnen Teilschritte formal und detailliert ausgeführt. Wesentlich für die Beweise

sind die Eigenschaften eines Fulleren-Graphen (kubisch, polyhedral, 12 Fünfecksfacetten und sonst ausschließlich Sechsecksfacetten).

Es sei G ein Fulleren-Graph und es sei $Z'(G)$ eine maximale Kreispackung von G , welche die zusätzliche Eigenschaft besitzen soll, dass die Anzahl der in $Z'(G)$ enthaltenen Nicht-Facettenkreise minimal ist (*Minimalitätseigenschaft*).

Wenn angenommen wird, dass $\nu(G) > \alpha(G^*)$, dann enthält $Z'(G)$ mindestens einen Nicht-Facettenkreis C . Ein solcher Kreis C werde für das Weitere zunächst fixiert und der zugehörige innere (bzw. äußere) Patch $P(C)$ genauer untersucht.

- (i) Als Erstes wird in Lemma 5.7 gezeigt, dass eine Facette von G entweder keine gemeinsame Kante mit C besitzt oder die gemeinsamen Kanten einen Pfad beschreiben, der aus höchstens 3 Kanten besteht.
- (ii) Als Zweites wird in Lemma 5.8 gezeigt, dass die Knoten im inneren Patch $P(C)$, die nicht auch Knoten in C sind, selbst wieder einen Patch $P(C^I)$ induzieren. Dessen äußere Facette ist durch einen Kreis C^I induziert. Analoges gilt dann für die Knoten im äußeren Patch $P^A(C)$.
- (iii) Die Eigenschaften von $P(C)$ sowie $P(C^I)$ erlauben es nun mindestens eine Facette F zu identifizieren mit den beiden Eigenschaften:
 - Der zugehörige Facettenkreis $C(F)$ gehört nicht zu $Z'(G)$.
 - Der Kreis $C(F)$ hat keine gemeinsame Kante mit irgendeinem der Kreise aus $Z'(G) \setminus \{C\}$.

Damit kann der Nicht-Facettenkreis C durch den Facettenkreis $C(F)$ in $Z'(G)$ “ersetzt“ werden, im Widerspruch zur Minimalitätseigenschaft von $Z'(G)$.

Im Folgenden werden die Beweisschritte für die skizzierte Beweisidee formal ausgeführt.

Lemma 5.7. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$. Dann gibt es eine maximale*

Kreispackung $Z'(G)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

Minimalitätseigenschaft: Unter allen maximalen Kreispackungen hat $Z'(G)$ (5.2) eine minimale Anzahl an Nicht-Facettenkreisen.

Für jeden Nicht-Facettenkreis $C \in Z'(G)$ und jeden Facettenkreis $C(F)$ mit $E(C) \cap E(C(F)) \neq \emptyset$ ist der durch $E(C) \cap E(C(F))$ kanteninduzierte (5.3) Teilgraph von G ein Pfad der Länge $l \leq 3$.

Beweis. Wegen $\nu(G) > \alpha(G^*)$ enthält jede maximale Kreispackung von G mindestens einen Nicht-Facettenkreis. Da die Anzahl an maximalen Kreispackungen in G endlich ist, muss es daher eine solche maximale Kreispackung geben, die (5.2) erfüllt. Diese sei mit $Z'(G)$ bezeichnet.

Für das Folgende sei $Z'(G)$ und ein Nicht-Facettenkreis $C \in Z'(G)$ fixiert sowie F eine Facette in G mit $C(F) \notin Z'(G)$.

Dann ist $|E(F) \cap E(C)| \leq 3$ und $|V(F) \cap V(C)| \leq 4$, da anderenfalls

$$Z^*(G) = Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F)\} \quad (5.4)$$

eine maximale Kreispackung von G wäre, die eine geringere Anzahl an Nicht-Facettenkreisen als $Z'(G)$ enthält. Damit würde $Z'(G)$ aber nicht (5.2) erfüllen.

Ist $E(F) \cap E(C)$ zusammenhängend, so ist $E(F) \cap E(C)$ ein Pfad der Länge $l \leq 3$.

Angenommen, $E(F) \cap E(C)$ wäre nicht zusammenhängend, dann muss aber $|E(F) \cap E(C)| \leq 2$ sein, da anderenfalls $|V(F) \cap V(C)| \geq 5$. Dann wäre wie in (5.4) aber $Z^*(G)$ eine maximale Kreispackung.

Es bleibt also der Fall zu betrachten, dass $|E(F) \cap E(C)| = 2$ und $E(F) \cap E(C)$ nicht zusammenhängend ist. Es sei dazu $e_1 = (u_1, v_1)$, $e_2 = (u_2, v_2)$ und $\{e_1, e_2\} = E(F) \cap E(C)$. Dann sind drei Unterfälle zu betrachten:

- (i) Falls $F \in F^5$, dann ist aber $Z^*(G)$ in (5.4) eine maximale Kreispackung (zur Illustration vergleiche dazu Abbildung 5.16(a)).
- (ii) Falls $F \in F^6$ und es keine Kante in $E(G) \setminus \{e_1, e_2\}$ gibt, deren beide Endknoten in $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ liegen, dann ist wiederum die Kreispackung $Z^*(G)$ aus (5.4) maximal. (Zur Illustration vergleiche dazu Abbildung 5.16(b)).

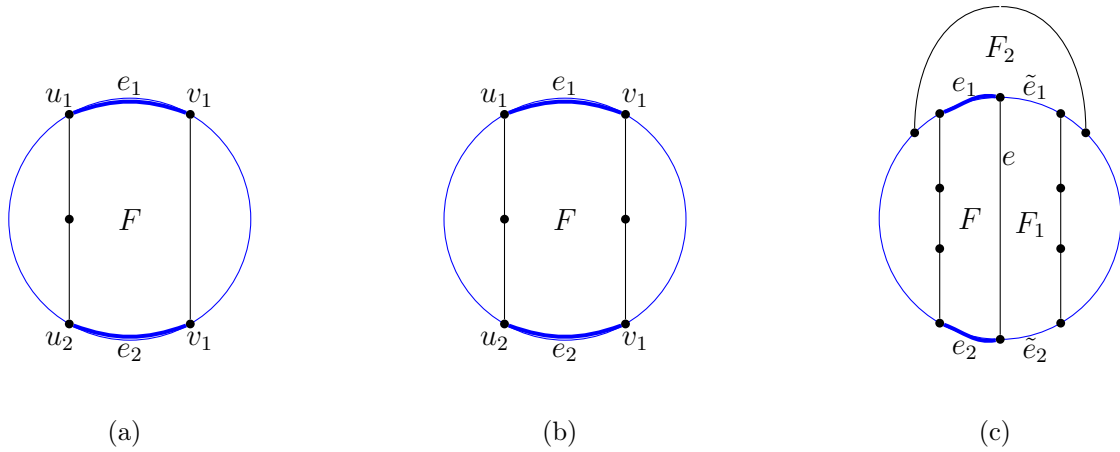


Abbildung 5.16: Darstellung der drei Fallunterscheidungen für die Situation $|E(F) \cap E(C)| = 2$ und $E(F) \cap E(C)$ nicht zusammenhängend. Hierbei ist jeweils der Kreis C blau und die Kanten $e_1, e_2 \in E(F) \cap E(C)$ in fett skizziert.

(iii) Falls $F \in F^6$ und es eine Kante in $e \in E(G) \setminus \{e_1, e_2\}$ gibt, deren beide Endknoten aus $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ sind, dann gibt eine Facette F_1 mit $e \in E(F_1)$ und zwei Kanten \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 mit $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \in E(F_1) \cap E(C)$. Ohne Einschränkung sei \tilde{e}_1 die Kante, die einen gemeinsamen Knoten mit e_1 und e hat. Offenbar ist $F_1 \notin F^5$, da sonst für F_1 der Unterfall (i) zutrifft. Somit ist $F_1 \in F^6$. Dann muss es aber eine Facette F_2 mit $e_1, \tilde{e}_1 \in E(F_2)$ und $|V(F_2) \cap V(C)| \geq 5$ geben (vergleiche dazu Abbildung 5.16(c)). Dann wäre diesmal

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_2)\}$$

eine maximale Kreispackung mit (wiederum) einer geringeren Anzahl an Nicht-Facettenkreisen als $Z'(G)$.

□

Somit ist mit Lemma 5.7 nachgewiesen, dass eine Facette $F \in F(G)$ entweder keine gemeinsame Kante mit C besitzt oder die gemeinsamen Kanten einen Pfad der Länge kleiner oder gleich drei beschreiben. Im Folgenden werden nun die Menge der Facetten F mit $E(F) \cap E(C) \neq \emptyset$, d.h. die Facetten mit einer gemeinsamen Kante mit C näher untersucht. Der (fixierte) Nicht-Facettenkreis $C \in Z'(G)$ erzeugt sowohl einen inneren Patch $P(C)$ als auch einen äußeren Patch $P^A(C)$.

Die Menge der Facetten in $P(C)$ lässt sich in drei Teilmengen $\{F^a(C)\}$, $F^I(C)$ und $\tilde{F}^I(C)$ zerlegen.

Hierbei ist $F^a(C)$ die äußere Facette von $P(C)$,

$$F^I(C) := \{F \subset P(C) \mid E(F) \cap E(C) \neq \emptyset\}$$

(d.h. die Menge der Facetten aus $P(C)$, die eine gemeinsame Kante mit C haben) und

$$\tilde{F}^I(C) := \{F \subset P(C) \mid E(F) \cap E(C) = \emptyset\}$$

(d.h. die Menge an Facetten aus $P(C)$, die keine gemeinsame Kante mit C haben). Da $P(C)$ (und analog $P^A(C)$) ein Patch ist, ist sichergestellt, dass $F^I(C) \neq \emptyset$. Analog kann eine entsprechende Zerlegung für die Menge der Facetten in $P^A(C)$ angegeben werden.

Sei G^I der von

$$\{e \mid e \in E(F^I(C)) \text{ und } e \in E(\tilde{F}^I(C))\}$$

kanteninduzierte Teilgraph. Analog sei G^A der von

$$\{e \mid e \in E(F^A(C)) \text{ und } e \in E(\tilde{F}^A(C))\}$$

kanteninduzierte Teilgraph. In Abbildung 5.17 seien G^I und G^A exemplarisch für einen Kreis C in $G \in \mathcal{F}_{34}$ verdeutlicht. Die kanteninduzierten Teilgraphen G^I und G^A sind in Abbildung 5.17 jeweils Kreise in G .

Beachte bereits hier: Falls es eine Facette $F_i \in F^I(C)$ gäbe mit $E(F_i) \cap E(G^I) = \emptyset$ (oder eine Facette $F_j^A \in F^A(C)$ gäbe mit $E(F_j^A) \cap E(G^A) = \emptyset$), so würde durch $Z^*(G) = Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_i)\}$ (oder $Z^*(G) = Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_j^A)\}$) eine maximale Kreispackung festgelegt, die eine geringere Anzahl an Nicht-Facettenkreisen als $Z'(G)$ besäße. Daher kann diese Situation nicht auftreten und somit ist sichergestellt, dass $\tilde{F}^I(C) \neq \emptyset$.

Die Tatsache, dass C ein Nicht-Facettenkreis von $Z'(G)$ ist, hat nun zur Folge:

Lemma 5.8. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.2) erfüllt. Dann ist G^I (bzw. G^A) ein Kreis in G und $|F^I(C)| = k_i(C)$ (bzw. $|F^A(C)| = k_a(C)$).*

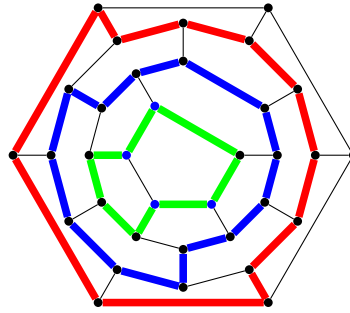
(a) G_{34}

Abbildung 5.17: Darstellung des Fulleren-Graphen G_{34} mit Eigenschaft (*) aus Lemma 5.3 zur Illustration der kanteninduzierten Teilgraphen G^I und G^A sowie einem Kreis C . Anmerkung: Die blau skizzierte Kantenmenge entspricht beispielhaft der Kantenmenge von C (die auch $P^A(C)$ bzw. $P^I(C)$ erzeugt), die grün skizzierte Kantenmenge der Kantenmenge von G^I und die rot skizzierte Kantenmenge der Kantenmenge von G^A .

Beweis. Der Beweis wird für den Teilgraphen G^I geführt. In analoger Weise lässt sich die Behauptung für G^A zeigen.

Für $w \in V(G^I)$ gilt $\delta(w) = 2$, da $P(C)$ ein Patch ist und somit w entweder in den Knotenmengen von genau zwei Facetten aus $F^I(C)$ und einer Facette aus $\tilde{F}^I(C)$ oder in den Knotenmengen von genau einer Facette aus $F^I(C)$ und genau zwei Facetten aus $\tilde{F}^I(C)$ enthalten ist. Die Zusammenhangskomponenten von G^I sind also Kreise.

Angenommen G^I sei nicht zusammenhängend. Dann besteht G^I aus mindestens zwei Kreisen. Jede Facette $F \in F^I(C)$ besitzt eine gemeinsame Kante mit C , somit kann F höchstens mit zwei Kreisen aus G^I eine gemeinsame Kante haben.

Angenommen es existiert eine Facette $F_j \in F^I(C)$ mit gemeinsamer Kante zu genau zwei Kreisen C_1^I, C_2^I aus G^I . Dann gibt es eine weitere Facette $F_k \in F^I(C)$ mit $E(F_k) \cap E(C_1^I) \neq \emptyset$, $E(F_k) \cap E(C_2^I) \neq \emptyset$ und $E(F_k) \cap E(F_j) \neq \emptyset$. Andernfalls existiert eine Facette F_l mit der Eigenschaft $F_l \in F^I(C)$ mit $E(F_l) \cap E(F_k) \neq \emptyset$ und $E(F_l) \cap E(F_j) \neq \emptyset$. Somit wäre $|V(F_j)| \geq 7$ im Widerspruch zur Eigenschaft, dass G ein Fulleren-Graph ist (vergleiche dazu Abbildung 5.18(a)).

Dann gibt es zwei Facetten $H_i \in F(P(C_i^I))$ in G derart, dass $E(H_i) \cap E(F_j) \neq \emptyset$

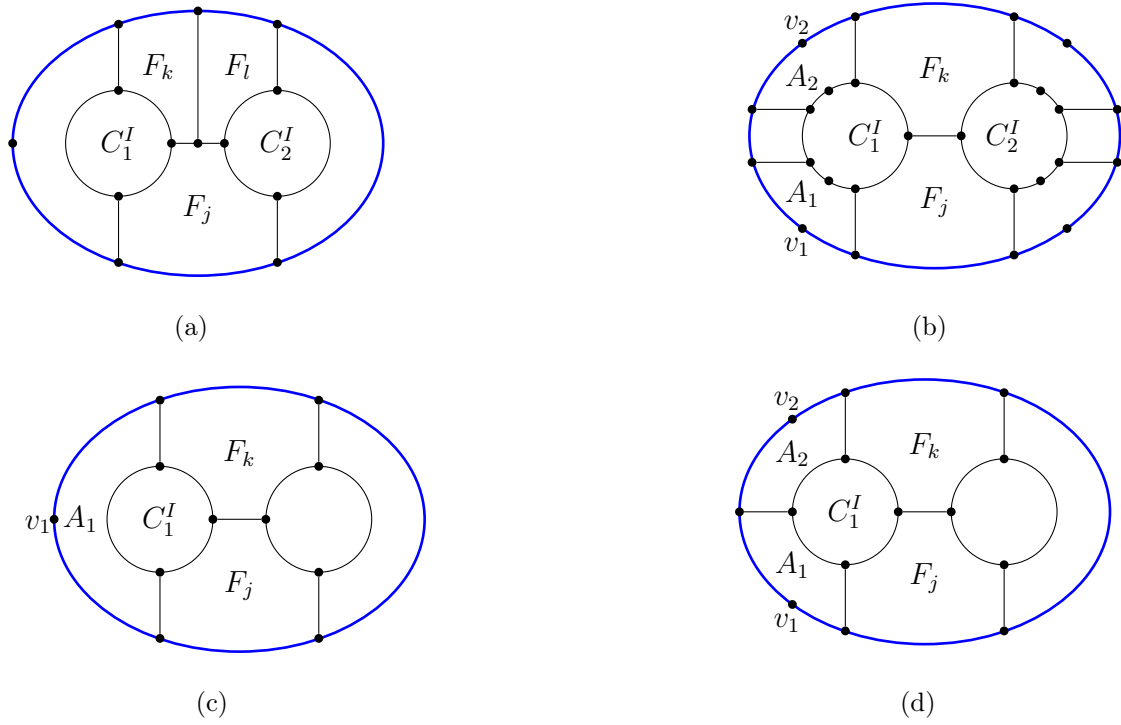


Abbildung 5.18: Schematische Darstellung eines Teilgraphen des Patches $P(C)$. Die schematisch blau skizzierten Kanten entsprechen der Kantenmenge aus C . In (a) ist F_j eine Siebenecksfacette. In (b) wird der Fall $A_1 \neq A_2$ und $E(A_1) \cap E(A_2) = \emptyset$, in (c) wird der Fall $A_1 = A_2$ und in (d) der Fall $A_1 \neq A_2$ und $E(A_1) \cap E(A_2) \neq \emptyset$ visualisiert.

und $E(H_i) \cap E(F_k) \neq \emptyset$ mit $i \in \{1, 2\}$.

Beachte hier: Für jeden Kreis $\tilde{C} \in Z'(G)$ mit $E(\tilde{C}) \cap E(F_j) \cap E(H_1) \neq \emptyset$ gilt $|V(\tilde{C}) \cap V(H_1)| \geq 5$. Analog gilt dies für H_2 . Somit ist mindestens einer der beiden Facettenkreise $C(H_1)$ bzw. $C(H_2)$ ein Facettenkreis der Kreispackung $Z'(G)$, da sonst

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_j)\}$$

eine maximale Kreispackung wäre, die einen Facettenkreis mehr als $Z'(G)$ enthält.

Sei ohne Einschränkung $C(H_1) \in Z'(G)$ und A_1 die Facette aus $F^I(C)$ mit $E(A_1) \cap E(H_1) \neq \emptyset$ sowie $E(A_1) \cap E(F_j) \neq \emptyset$ und A_2 die Facette aus $F^I(C)$ mit $E(A_2) \cap E(H_1) \neq \emptyset$ sowie $E(A_2) \cap E(F_k) \neq \emptyset$ (vergleiche dazu Abbildung 5.18(b)). Beachte, dass es einen Knoten $v_i \in V(A_i)$ mit $\delta(v_i) = 2$ in $P(C)$ geben muss, da C sonst einen Pfad der Länge $l > 3$ mit einer Facette aus $P^A(C)$ enthält und dies im Widerspruch zu Lemma 5.7 stände.

Zudem ist $E(A_1) \cap E(A_2) = \emptyset$, da andernfalls

- sofern $A_1 = A_2$, so wäre $|V(H_1)| = 3$ oder eine der Facetten F_j, F_k bzw. A_1 wäre keine Fünf- bzw. Sechsecksfacette, d.h. G wäre kein Fulleren-Graph (vergleiche dazu Abbildung 5.18(c)),
- oder sofern $A_1 \neq A_2$ und $e \in E(A_1) \cap E(A_2)$ existiert, so wäre $k_a(P(C_1^I)) = 4$ und $k_i(P(C_1^I)) \leq 2$. Nach Lemma 5.1(i) würde dann aber $f_5(C_1^I) \geq 4$ im Widerspruch zu $k_i(P(C_1^I)) \leq 2$ folgen (vergleiche dazu Abbildung 5.18(d)).

Für $E(A_1) \cap E(A_2) = \emptyset$ ist dann aber

$$|V(A_i) \cap \{V(C(H_1)) \cup V(C)\}| \geq 5$$

und

$$V(A_i) \cap V(Z'(G) \setminus \{C, C(H_1)\}) = \emptyset, i \in \{1, 2\}.$$

Die Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C, C(H_1)\} \cup \{C(A_1), C(A_2)\}, i \in \{1, 2\}$$

mit einem Facettenkreis mehr als $Z'(G)$ wäre dann maximal. Folglich besitzt jede Facette F_i zu genau einem Kreis aus G^I eine gemeinsame Kante.

In analoger Weise zeigt man, dass jede Facette F_j^A mit genau einem Kreis aus G^A eine gemeinsame Kante besitzt.

Nach Annahme besteht $G^I \cup G^A$ aus mindestens drei Zusammenhangskomponenten. Da G genau 12 Fünfecksfacetten besitzt, folgt, dass einer dieser drei Kreise - etwa der Kreis \hat{C} - höchstens vier Fünfecksfacetten in $P(\hat{C})$ enthält. D.h. $f_5(\hat{C}) \leq 4$ und somit folgt nach Lemma 5.1(ii), dass $k_a(\hat{C}) \geq 5$. Ohne Einschränkung sei angenommen \hat{C} liegt im Inneren von C (anderenfalls wird die folgende Argumentation für das Äußere von C durchgeführt). Betrachte die Menge an Facetten

$$\hat{F}^I(C) := \{F_i \in F^I(C) \mid E(F_i) \cap E(\hat{C}) \neq \emptyset\}.$$

Da jedes $F_i \in F^I(C)$ nur mit genau einem Kreis aus G^I eine gemeinsame Kante besitzt, existieren $\left\lfloor \frac{k_a(\hat{C})}{2} \right\rfloor \geq 2$ kantendisjunkte Facetten $\hat{F}_j \in F^I(C)$, $j \in \{1, \dots, \frac{k_a(\hat{C})}{2}\}$ mit den zugehörigen Facettenkreisen $C(\hat{F}_j)$. Seien

$$\bar{C} := \{\hat{F}_j \mid j \in \{1, \dots, \frac{k_a(\hat{C})}{2}\}\}$$

und

$$\hat{C} := \{\tilde{C} \in Z'(G) \mid E(\hat{C}) \cap E(\tilde{C}) \neq \emptyset\}.$$

Ist $\hat{C} \notin Z(G)$, dann gilt $|\hat{C}| \leq \left\lfloor \frac{k_i(\hat{C})}{2} \right\rfloor$ und die Menge

$$Z^*(G) := Z'(G) \setminus (\{C\} \cup \hat{C}) \cup \bar{C} \quad (5.5)$$

beschreibt eine Kreispackung in G . Es gilt nach Lemma 5.1, dass $k_a(\hat{C}) \geq k_i(\hat{C}) + 2$. Somit ergibt sich für die Kardinalität von $Z^*(G)$ aus (5.5):

$$\begin{aligned} |Z^*(G)| &= |Z'(G)| - 1 - |\hat{C}| + \left\lfloor \frac{k_a(\hat{C})}{2} \right\rfloor \\ &\geq |Z'(G)| - 1 - \left\lfloor \frac{k_i(\hat{C})}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_a(\hat{C})}{2} \right\rfloor \\ &\geq |Z'(G)| - 1 - \left\lfloor \frac{k_i(\hat{C})}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_i(\hat{C})}{2} \right\rfloor + 1 \\ &= |Z'(G)|. \end{aligned}$$

Ist $\hat{C} \in Z'(G)$, so ist $\hat{C} = \{\hat{C}\}$ und ebenfalls $k_a(\hat{C}) \geq 5$ nach Lemma 5.1. Damit gilt auch in diesem Fall $|Z^*(G)| \geq |Z'(G)|$. Also ist $Z^*(G)$ in (5.5) eine maximale Kreispackung, allerdings mit geringerer Anzahl an Nicht-Facettenkreisen als $Z'(G)$. Dies kann nicht sein. Folglich sind G^I und G^A Kreise in G . \square

Zur besseren Wiedererkennung, dass es sich bei den induzierten Teilgraphen G^I bzw. G^A um Kreise handelt, seien diese zukünftig mit C^I bzw. C^A und die zugehörigen Patches mit $P(C^I)$ bzw. $P(C^A)$ bezeichnet. Ferner seien abkürzend $k_i := k_i(C) = |F^I(C)|$ und $k_a := k_a(C) = |F^A(C)|$ von nun an verwendet.

Nach Lemma 5.8 kann die Einbettung von G so gewählt werden, dass $f_5(C^I) \leq f_5(C^A)$ und damit $f_5(C^I) \leq 6$ gilt. Durch Anwendung von Lemma 5.1(ii) auf C^I ergibt sich dann $k_a(C^I) \geq 5$ und somit $k_i \geq 5$.

Falls $f_5(C^A) \leq 6$ ist, gilt analog mit Lemma 5.1(ii) angewendet auf C^A , dass $k_a(C^A) \geq 5$ und somit $k_a \geq 5$ ist. Ist $f_5(C^A) > 6$, so gilt nach Lemma 5.1(ii) angewendet auf C ebenso $k_a \geq 5$. Da $k_i \geq 5$ gilt, kann C^I nicht in $Z'(G)$ enthalten sein. Ansonsten gäbe es nämlich zwei knotendisjunkte Facetten $F_1, F_2 \in F^I(C)$, so

dass $Z^*(G) := Z'(G) \setminus \{C, C^I\} \cup \{C(F_1), C(F_2)\}$ mehr Facettenkreise als $Z'(G)$ enthalten würde aber ebenfalls maximal wäre. Analog kann auch C^A nicht in $Z'(G)$ enthalten sein.

Im Folgenden seien die Facetten $F_i \in F^I(C)$ in mathematisch negativer Drehrichtung fortlaufend nummeriert und

$$\mathcal{C} := \{\tilde{C} \in Z'(G) \mid E(\tilde{C}) \cap E(C^I) \neq \emptyset\}.$$

Falls $f_5(C^I) \leq 4$ wäre oder falls $f_5(C^I) = 5$ und k_i eine gerade Zahl wären, würde $|\mathcal{C}| \leq \left\lfloor \frac{k_i(C^I)}{2} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor$. Dann wäre aber

$$Z^*(G) := Z'(G) \setminus (\{C\} \cup \mathcal{C}) \cup \{C(F_i) \mid i \text{ ist eine gerade Zahl}\}$$

eine maximale Kreispackung im Widerspruch zur Wahl von $Z'(G)$.

Demnach bleiben noch die folgenden drei Fälle zu analysieren:

- (I) $f_5(C^I) = 5$ und k_i ist eine ungerade Zahl,
- (II) $f_5(C^I) = 6$ und k_i ist eine ungerade Zahl,
- (III) $f_5(C^I) = 6$ und k_i ist eine gerade Zahl.

Innerhalb des Beweises der nun betrachteten Fälle (I), (II) und (III) werden sog. Sequenzen, die in einer speziellen zyklischen Folge enthalten sind, betrachtet. Für jeden Fall wird gezeigt, dass für alle pot. möglichen Sequenzen der Folge eine Kreispackung angegeben werden kann, derart, dass $Z'(G)$ nicht die Minimalitätseigenschaft besitzen würde und diese folglich nicht innerhalb der Folge auftreten können. Sei nun eine zyklischen Folge sowie eine Sequenz enthalten in dieser Folge wie folgt definiert: Sei $R^I(C)$ bzw. $R^A(C)$ der von $E(F^I(C))$ bzw. $E(F^A(C))$ kanteninduzierte Teilgraph von G und

$$\vartheta(F_j) := |\{v \in V(F_j) \cap V(C^I) \mid \delta_{R^I}(v) = 2 \text{ in } R^I(C)\}|$$

bzw.

$$\vartheta^A(F_j^A) := |\{v \in V(F_j^A) \cap V(C^A) \mid \delta_{R^A}(v) = 2 \text{ in } R^A(C)\}|.$$

Die Größe $\vartheta(F_j)$ beschreibt also die Anzahl der inneren Knoten auf dem Pfad $C^I \cap F_j$. Nach Lemma 5.7 und Lemma 5.8 gilt für jedes $F_j \in F^I(C)$, dass $\vartheta(F_j) \in \{0, 1, 2\}$.

Analog gilt dies für $\vartheta^A(F_j^A)$. Aufgrund von Lemma 5.7 und Lemma 5.8 induziert die Menge

$$\{w \in V(G^*) \mid F \in F^I(C) \text{ mit } w \in I(F)\}$$

einen Kreis $C^* := (w_1, \dots, w_{k_i}, w_1)$ mit $C^* \subset G^*$ der Länge k_i im Dualgraphen G^* . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dabei die Indizierung der Knoten $w_j \in V(C^*)$ so erfolgt, dass w_j der Facette $F_j \in F^I(C)$ entspricht. Im Folgenden wird

$$(\vartheta(C^*)) := (\vartheta(F_1), \dots, \vartheta(F_{k_i}), \vartheta(F_1))$$

zyklische $\{0, 1, 2\}$ -Folge bzgl. C^* genannt. Ist $P^* = (w_{j_1}, \dots, w_{j_l}) \subset C^*$ ein Pfad in C^* , so heißt

$$(\vartheta(P^*)) := (\vartheta(F_{j_1}), \dots, \vartheta(F_{j_l}))$$

eine Sequenz der Länge l auf C^* (hierbei sind die Indizes der Facetten ggf. modulo k_i zu lesen). Wir schreiben verkürzt $(\vartheta(P^*)) \subset (\vartheta(C^*))$ und sagen $(\vartheta(C^*))$ enthält die Sequenz des Typs $(\vartheta(P^*))$, F_{j_1}, \dots, F_{j_l} werden die zu P^* gehörigen Facetten genannt. Analoges lässt sich für den zu $F^A(C)$ gehörigen Kreis $C^{*,A}$ definieren. Hier seien die Bezeichnungen $(\vartheta(C^{*,A}))$ und $(\vartheta(P^{*,A}))$ gewählt.

Beispielhaft ist in Abbildung 5.19 die Situation für $k_i = 6$ angegeben und hierbei sei F_1 so festgelegt, dass $\vartheta(F_1) = 0$ ist. Dann ist $(\vartheta(C^*)) = (0, 1, 2, 0, 1, 2, 0)$. Das j -te Element von $(\vartheta(C^*))$ ist innerhalb der Facette F_j dargestellt.

Es sei bemerkt, dass für $F_j \in F^I(C)$ gilt: $|E(F_j) \cap E(C)| = |E(F_j)| - 3 - \vartheta(F_j)$. Zudem existiert zu jeder Facette F_j mit $\vartheta(F_j) = 2$ eine Facette $F_k^A \in F^A(C)$ mit $\vartheta(F_k^A) = 0$ und $E(F_j) \cap E(C) \cap E(F_k^A) \neq \emptyset$.

Innerhalb des Beispiels aus Abbildung 5.19 gibt es eine Sequenz der Länge 3 mit $(\vartheta(P^*)) = (0, 1, 2)$ aber keine Sequenz der Länge 2 mit $(\vartheta(P^*)) = (2, 2)$. Die beispielhaft beschriebene Visualisierung wird im Folgenden innerhalb der Abbildungen verwendet, um die betrachteten Sequenzen und die abgeleiteten Widersprüche zur Wahl von $Z'(G)$ zu verdeutlichen.

Das Ziel besteht nun darin, Pfade $P^* \subset C^*$ systematisch zu analysieren. Dabei wird sich herausstellen, dass jede mögliche Sequenz $(\vartheta(P^*)) \subset (\vartheta(C^*))$ - sofern sie existieren würde - eine maximale Kreispackung $Z^*(G)$ in G induzieren würde,

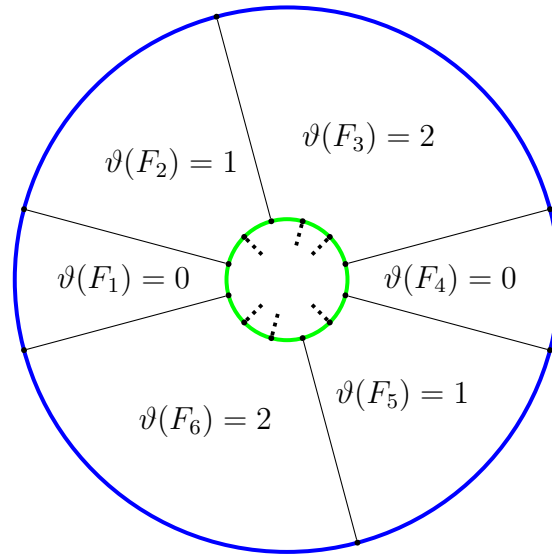


Abbildung 5.19: Ausschnitt eines Patches $\mathcal{P}(C)$ mit Facetten $F_j \in F^I(C)$ und $(\vartheta(C^*)) = (0, 1, 2, 0, 1, 2, 0)$. Bemerke, blau skizzierte Kreis visualisiert C und der grün skizzierte Kreis C^I . Die Knoten aus $V(C)$ mit Knotengrad 2 sind innerhalb dieser Darstellung nicht berücksichtigt. Zudem ist $\vartheta(F_j)$ innerhalb der Facette F_j dargestellt. Die gestrichelt gekennzeichneten Kanten entsprechen innerhalb der Darstellung der Kantenmenge aus $V(P(C^I)) \setminus V(C^I)$ inzident zu den inneren Knoten auf dem Pfad $C^I \cap F_j$.

derart, dass $Z'(G)$ die Eigenschaft (5.2) verletzt. Dies heißt dann, dass C nicht in einer Kreispackung enthalten sein kann, die die Minimalitätseigenschaft (5.2) erfüllt.

In den nachfolgenden beiden Lemma bzw. Korollaren werden zunächst Sequenzen einer bestimmten Struktur betrachtet. Es stellt sich heraus, dass diese für keinen der noch zu betrachtenden Fälle (I), (II) und (III) vorkommen können. Es gilt nämlich:

Lemma 5.9. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.2) erfüllt. Dann enthält $(\vartheta(C^*))$ keine Sequenz des folgenden Typs: $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$ und $(0, 1, 1, 1)$.*

Beweis. Angenommen es sei $(0, 0, 0) \subset (\vartheta(C^*))$ mit zugehörigen Facetten F_1, F_2 und F_3 (vergleiche hierzu Abbildung 5.20).

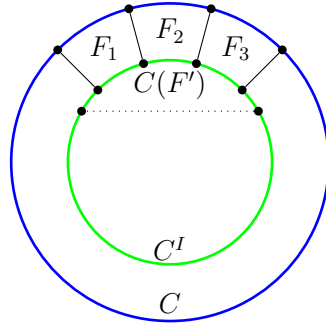


Abbildung 5.20: Schematische Darstellung einer Sequenz des Typs $(0, 0, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$. Hierbei visualisiert der blau skizzierte Kreis dem Kreis C und der grün skizzierte Kreis den Kreis C^I . Es sind ausschließlich die Facetten der betrachteten Sequenz innerhalb der Darstellung (ohne Berücksichtigung der Knoten aus $V(C)$ mit Knotengrad 2). Die gestrichelt gezeichnete Kante gehört zu dem Facettenkreis $C(F')$.

Dann existiert eine Facette $F' \in P(C^I)$ mit

$$E(F') \cap E(F_i) \neq \emptyset$$

und $F' \neq F^a(C^I)$. Falls nun $E(F_2) \cap E(Z'(G) \setminus \{C\}) = \emptyset$ gilt, so besitzt die maximale Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_2)\}$$

offenbar mehr Facettenkreise als $Z'(G)$. Andernfalls ist $C(F') \in Z'(G)$ wegen der Minimalitätseigenschaft (5.2) und somit besitzt die maximale Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C(F'), C\} \cup \{C(F_1), C(F_3)\}$$

offenbar mehr Facettenkreise als $Z'(G)$. Beide Situationen führen also zu einem Widerspruch zur Minimalitätseigenschaft von $Z'(G)$.

Angenommen es sei $(0, 1, 0) \subset (\vartheta(C^*))$ mit zugehörigen Facetten F_1, F_2 und F_3 (vergleiche Abbildung 5.21(a)).

Dann ist entweder

$$E(F_i) \cap E(Z'(G) \setminus \{C\}) = \emptyset$$

für mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}$ oder für alle i gilt $E(F_i) \cap E(Z'(G) \setminus \{C\}) \neq \emptyset$. Dann gibt es aber ein $C' \in Z'(G)$ mit $C' \neq C$ und $E(F_i) \cap E(C') \neq \emptyset$. Im ersten Fall besitzt die maximale Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_i)\}$$

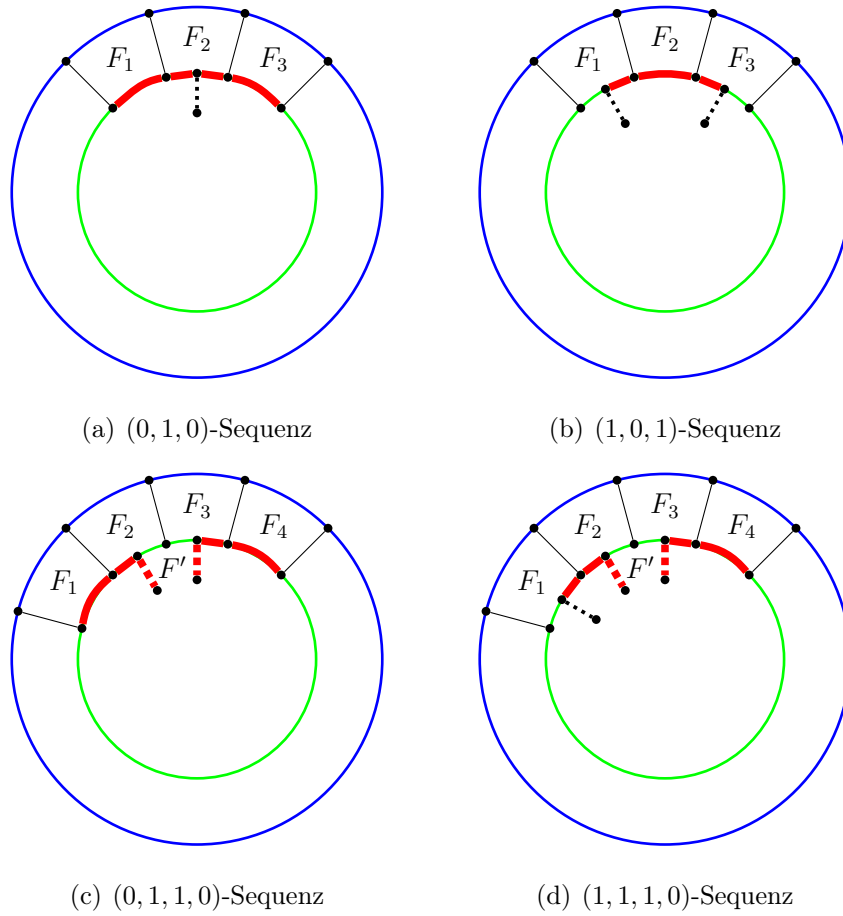


Abbildung 5.21: Schematische Darstellung von Sequenzen in $(\vartheta(C^*))$. Hierbei visualisiert der blau skizzierte Kreis C und der grün skizzierte Kreis C^I . Es sind ausschließlich die Facetten F_j der betrachteten Sequenz innerhalb der Darstellung (ohne Berücksichtigung der Knoten aus $V(C)$ mit Knotengrad 2) dargestellt. Die rot skizzierten Kanten sind aus $E(C')$ in (a), (b) bzw. $E(C')$ und $E(C'')$ in (c), (d).

offenbar mehr Facettenkreise als $Z'(G)$. Im zweiten Fall besitzt die maximale Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C', C\} \cup \{C(F_1), C(F_3)\}$$

offenbar mehr Facettenkreise als $Z'(G)$. Bemerke, $E(F_1) \cap E(F_3) = \emptyset$, da $k_i \geq 5$. In beiden Fällen ist auch hier die Minimalitätseigenschaft (5.2) von $Z'(G)$ verletzt.

Angenommen es sei $(1, 0, 1) \subset (\vartheta(C^*))$ mit zugehörigen Facetten F_1, F_2 und F_3 (vergleiche Abbildung 5.21(b)). Dann ist entweder

$$E(F_2) \cap E(Z'(G) \setminus \{C\}) = \emptyset$$

oder für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt $E(F_i) \cap E(Z'(G) \setminus \{C\}) \neq \emptyset$. Dann es gibt genau einen

Kreis $C' \neq C$ aus $Z'(G)$ mit $E(C') \cap E(F_i) \neq \emptyset$. Im ersten Fall besitzt die maximale Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_2)\}$$

offenbar mehr Facettenkreise als $Z'(G)$. Im zweiten Fall besitzt die maximale Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C', C\} \cup \{C(F_1), C(F_3)\}$$

offenbar mehr Facettenkreise als $Z'(G)$. Bemerke, $E(F_1) \cap E(F_3) = \emptyset$, da $k_i \geq 5$. Beides kann nicht vorkommen. Mit der gleichen Argumentation ergibt sich, dass auch die Sequenzen $(1, 0, 0) \subset (\vartheta(C^*))$ bzw. $(0, 0, 1) \subset (\vartheta(C^*))$ nicht auftreten können.

Angenommen es sei $(0, 1, 1, 0) \subset (\vartheta(C^*))$ mit zugehörigen Facetten F_1, F_2, F_3 und F_4 (Vergleiche dazu Abbildung 5.21(c)). Falls für ein $i \in \{1, \dots, 4\}$

$$E(F_i) \cap E(Z'(G) \setminus \{C\}) = \emptyset,$$

so ist $Z(G) := Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_i)\}$ eine maximale Kreispackung in G . Ansonsten gilt für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, dass $E(F_i) \cap E(Z'(G) \setminus \{C\}) \neq \emptyset$.

Dann existiert entweder genau ein Kreis $C' \neq C$ aus $Z'(G)$ mit $E(C') \cap E(F_i) \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, 4$ und folglich ist

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C, C'\} \cup \{C(F_1), C(F_3)\}$$

eine maximale Kreispackung in G .

Oder es existieren zwei Kreise $C', C'' \in Z'(G)$, derart dass C', C'' und C paarweise verschieden sind und für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt $E(F_i) \cap E(Z'(G) \setminus \{C, C', C''\}) = \emptyset$. Dann kann die Bezeichnung von C' und C'' ohne Einschränkung so gewählt sein, dass $E(C') \cap E(F_1) \neq \emptyset$ sowie $E(C'') \cap E(F_4) \neq \emptyset$. Dann ist $E(C') \cap E(F_2) \neq \emptyset$ und $E(C'') \cap E(F_3) \neq \emptyset$. Somit ist

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C, C', C''\} \cup \{C(F_1), C(F_4)\}$$

eine Kreispackung mit $|Z(G)| = |Z'(G)| - 1$. Bemerke, $E(F_1) \cap E(F_4) = \emptyset$, da $k_i \geq 5$. Allerdings existiert damit auch eine Facette F' mit $E(F') \cap E(F_2) \neq \emptyset, E(F') \cap E(F_3) \neq \emptyset, E(F') \cap E(C') \neq \emptyset, E(F') \cap E(C'') \neq \emptyset$ und $E(F') \cap E(Z(G)) = \emptyset$. Somit

ist $Z(G) \cup \{C(F')\}$ eine maximale Kreispackung in G , die mehr Facettenkreise als $Z'(G)$ besitzt.

Eine analoge Argumentation zeigt, dass auch weder $(1, 1, 1, 0) \subset (\vartheta(C^*))$ noch $(0, 1, 1, 1) \subset (\vartheta(C^*))$ (Vergleiche dazu Abbildung 5.21(d)) auftreten können. Beachte, gilt in diesem Fall: $E(C') \cap E(F_i) \neq \emptyset, i \in \{2, 3, 4\}$, so ist

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C, C'\} \cup \{C(F_2), C(F_4)\}$$

eine maximale Kreispackung in G .

□

Aus Lemma 5.9 ergibt sich für Sequenzen auf $(\vartheta(C^{*,A}))$ sofort:

Korollar 5.10. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.2) erfüllt. Dann enthält $(\vartheta(C^{*,A}))$ keine Sequenz des folgenden Typs: $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$ bzw. $(0, 1, 1, 1)$.*

Beweis. Da $k_a = |F^A(C)| \geq 5$ ist, folgt die Behauptung direkt durch Anwendung der Argumentation aus Lemma 5.9 auf $(\vartheta(C^{*,A}))$. □

Darüberhinaus gibt es noch Sequenzen, die ebenfalls in keinem der noch zu betrachtenden Fälle (I), (II) und (III) vorkommen können:

Lemma 5.11. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.2) erfüllt. Dann enthält $(\vartheta(C^*))$ keine Sequenz des folgenden Typs: $(2, 2)$, $(1, 2, 1)$ bzw. $(2, 1, 1, 2)$.*

Beweis. - Angenommen es sei $(2, 2) \subset (\vartheta(C^*))$ (vergleiche Abbildung 5.22(a)).

Dann muss es eine Facette $F_j^A \in F^A(C)$ geben. Für die gilt offenbar $|E(C) \cap E(F_j^A)| \geq 4$. Dies steht im Widerspruch zu Lemma 5.7.

- Angenommen es sei $(1, 2, 1) \in (\vartheta(C^*))$ (vergleiche Abbildung 5.22(b)). Da G als Fulleren-Graph nur Fünf- bzw. Sechsecksfacetten enthält, müsste $(\vartheta(C^{*,A}))$ eine Sequenz des Typs $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ oder $(0, 0, 0)$ enthalten. Eine solche Situation kann nach Korollar 5.10 in $(\vartheta(C^{*,A}))$ aber nicht auftreten.

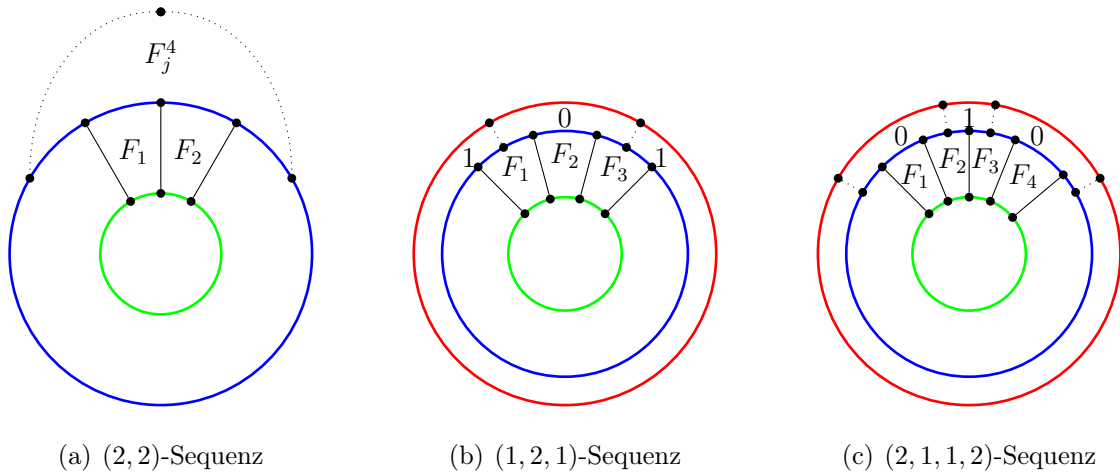


Abbildung 5.22: Schematische Darstellung von Sequenzen in $(\vartheta(C^*))$ zugehörigen Sequenzen auf $(\vartheta(C^{*,A}))$. Der blaue Kreis visualisiert C , der rote Kreis den Kreis C^A in (b), (c) und der grüne Kreis den Kreis C^I . Bemerke, falls eine Sequenz des Typs (2, 2) in $(\vartheta(C^*))$ existiert, gibt es eine Facette F_j^A (visualisiert durch die den gestrichelt gekennzeichneten Pfad der Länge l mit $l = 1$, falls $F_j^A \in F^5(G)$ und $l = 2$, falls $F_j^A \in F^6(G)$), wobei der kanteninduzierte Teilgraph $E(C) \cap E(F_j^A)$ ein Pfad der Länge 4 ist. Falls eine (1, 2, 1)-Sequenz in $(\vartheta(C^*))$ existiert, so gibt es in $(\vartheta(C^{*,A}))$ eine Sequenz des Typs (1, 0, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 0) oder (0, 0, 0), hier in (b) beispielhaft für den Fall (1, 0, 1) visualisiert. Falls eine (2, 1, 1, 2)-Sequenz in $(\vartheta(C^*))$ existiert, so gibt es in $(\vartheta(C^{*,A}))$ eine Sequenz des Typs (0, 0, 0) oder (0, 1, 0), hier in (c) beispielhaft für den Fall (0, 1, 0) visualisiert.

- Angenommen es sei $(2, 1, 1, 2) \subset (\vartheta(C^*))$, dann müsste es in $(\vartheta(C^{*,A}))$ eine Sequenz des Typs (0, 1, 0) oder eine Sequenz des Typs (0, 0, 0) geben (vergleiche Abbildung 5.22(c)). Diese Situation kann aber nach Korollar 5.10 in $(\vartheta(C^{*,A}))$ nicht auftreten.

□

Unmittelbar gilt natürlich dann das folgende Korollar für Sequenzen in $(\vartheta(C^{*,A}))$:

Korollar 5.12. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.2) erfüllt. Dann enthält $(\vartheta(C^{*,A}))$ keine Sequenz des folgenden Typs: (2, 2), (1, 2, 1) bzw. (2, 1, 1, 2).*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt durch Anwendung der Argumentation aus Lemma 5.11 auf $(\vartheta(C^{*,A}))$. \square

Im Folgenden werden zusätzlich spezielle Situationen für die Fälle (I), (II) und (III) betrachtet. Speziell für den Fall (I) gilt:

Lemma 5.13. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.2) erfüllt. Es sei $f_5(C^I) = 5$ und k_i eine ungerade Zahl. Dann enthält $(\vartheta(C^*))$ weder eine Sequenz des Typs $(2, 1)$, des Typs $(1, 2)$ noch des Typs $(1, 1, 1)$.*

Beweis. Da $f_5(C^I) = 5$ und k_i eine ungerade Zahl ist, ergibt sich für $\mathcal{C} = \{\tilde{C} \in Z'(G) \mid E(C^I) \cap E(\tilde{C}) \neq \emptyset\}$, dass

$$|\mathcal{C}| \leq \frac{k_i - 1}{2}.$$

Falls $|\mathcal{C}| < \frac{k_i - 1}{2}$, so ist

$$Z(G) := Z'(G) \setminus (\mathcal{C} \cup \{C\}) \cup \{C(F_j) \mid F_j \in F^I(C) \text{ und } j \text{ eine gerade Zahl}\}$$

eine maximale Kreispackung in G mit einer geringeren Anzahl an Nicht-Facettenkreisen als $Z'(G)$. Dies kann aber nicht sein. Demnach muss $|\mathcal{C}| = \frac{k_i - 1}{2}$ gelten. Dann gilt für die Kantenmenge

$$\tilde{E} := \{e \in E(P(C^I)) \mid e = (u, v), u \in V(C^I), v \notin V(C^I)\},$$

dass $|\tilde{E}| = k_i(C^I) = k_a(C^I) - 1 = k_i - 1$ ($k_i(C^I) = k_a(C^I) - 1$ nach Lemma 5.1 und $F_5(C^I) = 5$) und $\tilde{E} \subset E(\mathcal{C})$. Die Kantenmenge jedes Kreises aus \mathcal{C} enthält also genau zwei Kanten aus \tilde{E} .

Angenommen es existiert eine Sequenz des Typs $(2, 1) \subset (\vartheta(C^*))$ mit zugehörigen Facetten F_1, F_2 (in Abbildung 5.23 ist diese Situation skizziert). Zwei der drei Kanten $e_1, e_2, e_3 \in \tilde{E}$ (in Abbildung 5.23(b) gestrichelt gekennzeichnet) sind dann in der Kantenmenge eines Kreises $\tilde{C} \in \mathcal{C}$ enthalten (dies seien ohne Einschränkung e_1 und e_2). Dann ist die Kreispackung

$$\begin{aligned} Z(G) := & Z'(G) \setminus (\mathcal{C} \cup \{C\}) \\ & \cup \{\tilde{C}\} \cup \{C(F_i) \mid F_i \in F^I(C), i \geq 3, i \text{ ist eine ungerade Zahl}\} \end{aligned}$$

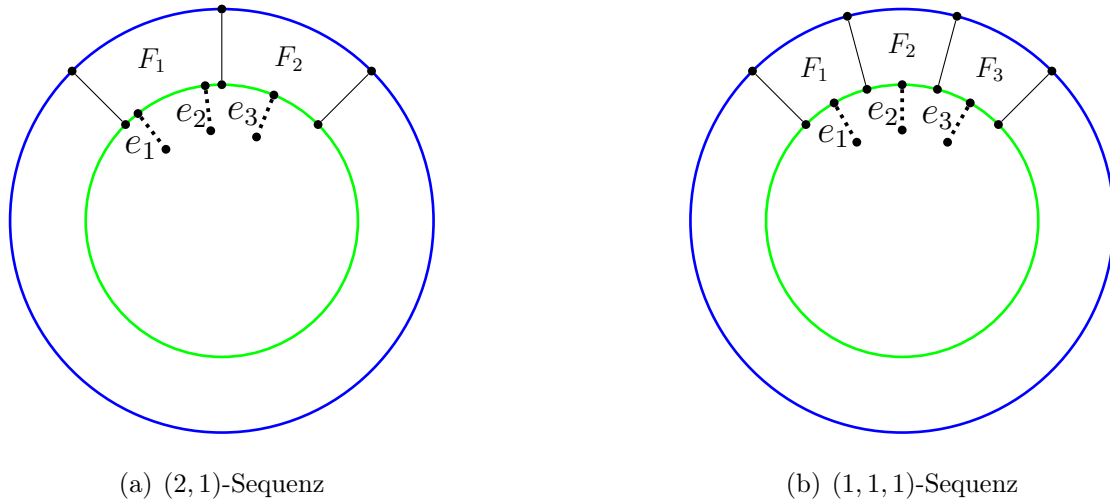


Abbildung 5.23: Schematische Darstellung von Sequenzen in $(\vartheta(C^*))$. Der blaue Kreis visualisiert C , und der grüne Kreis den Kreis C^I . Bemerke, in (a) (bzw. in (b)) gibt es drei Kanten $e_i \in \tilde{E}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ mit e_1, e_2 inzident zu einem Knoten aus $V(F_1)$ und e_3 inzident zu einem Knoten aus $V(F_2)$ (bzw. e_i inzident zu einem Knoten aus $V(F_i)$). Diese seien durch die drei gestrichelt gekennzeichneten Kanten visualisiert.

maximal in G , in der mindestens ein Facettenkreis mehr enthalten ist als in $Z'(G)$.

Angenommen es existiert eine Sequenz des Typs $(1, 1, 1) \subset (\vartheta(C^*))$ und e_1, e_2 sind in \tilde{C} enthalten. Dann ist die Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus (C \cup \{C\}) \cup \{\tilde{C}\} \cup \{C(F_i) \mid F_i \in F^I(C), i \geq 3, i \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$$

maximal in G , in der mindestens ein Facettenkreis mehr enthalten ist als in $Z'(G)$.

Angenommen es existiert eine Sequenz des Typs $(1, 1, 1) \subset (\vartheta(C^*))$ sowie e_2 und e_3 sind in \tilde{C} enthalten, dann ist die Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus (C \cup \{C\}) \cup \{\tilde{C}\} \cup \{C(F_j) \mid F_j \in F^I(C), j = 1 \text{ oder } j \geq 4, j \text{ ist eine gerade Zahl}\}$$

maximal in G , und enthält mindestens einen Facettenkreis mehr als $Z'(G)$.

Es sei bemerkt, dass e_1, e_3 in \tilde{C} nicht enthalten sein können, da sonst $e_2 \notin E(C)$ und somit $|\mathcal{C}| < \frac{k_i-1}{2}$ ist. □

Bemerkt werden sollte ebenfalls, dass sich die Argumentation hier nicht ohne weiteres auf $F^A(C)$ übertragen lässt, da im Fall (I) ggf. $f_5(C^A) \neq 5$ ist.

Mit den bisherigen Resultaten lassen sich die Typen der möglichen Sequenzen nun für den Fall (I) weiter untersuchen:

Wäre eine Sequenz der Länge fünf des Typs

$$(\vartheta(F_{j-2}), \vartheta(F_{j-1}), 1, \vartheta(F_{j+1}), \vartheta(F_{j+2}))$$

(also $\vartheta(F_j) = 1$) in $(\vartheta(C^*))$ enthalten, so müsste es auch mindestens eine der folgenden fünf Sequenzen, nämlich des Typs $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ oder $(2, 1)$, $(1, 2)$ in $(\vartheta(C^*))$ geben. Nach Lemma 5.9 und Lemma 5.13 können diese nicht auftreten (vergleiche dazu die Tabelle A.1 aus Anhang A.5). Somit kann es im Fall (I) keine Facette F_j mit $\vartheta(F_j) = 1$ geben.

Betrachte im Folgenden die vier noch möglichen Sequenzen der Länge 2 in $(\vartheta(C^*))$ vom Typ

$$(\vartheta(F_j), \vartheta(F_{j+1})) \text{ mit } \vartheta(F_j), \vartheta(F_{j+1}) \in \{0, 2\}.$$

Nach Lemma 5.11 kann keine Sequenz des Typs $(2, 2)$ auftreten. Bleiben also noch die Sequenzen vom Typ $(0, 2)$, vom Typ $(2, 0)$ und vom Typ $(0, 0)$ zu untersuchen. Da $f_5(C) = 5$ ist, ist $k_i = 1 + \sum_{j=1}^{k_i} \vartheta(F_j)$ (nach Lemma 5.1). Demnach müssen zwei Facetten F_j, F_{j+1} existieren mit $\vartheta(F_j) = \vartheta(F_{j+1}) = 0$. Sei die Nummerierung der Facetten ohne Einschränkung so gewählt, dass $\vartheta(F_1) = \vartheta(F_2) = 0$ gilt.

Da nach Lemma 5.11 keine $(2, 2)$ -Sequenz bzw. nach Lemma 5.9 keine $(0, 0, 0)$ -Sequenz auftreten kann und da zudem k_i eine ungerade Zahl ist, kann, wenn überhaupt, nur eine Sequenz der Länge k_i des Typs

$$(0, 0, 2, 0, \dots, 2)$$

auftreten mit $\vartheta(F_1) = \vartheta(F_{2j}) = 0$ sowie $\vartheta(F_{2j+1}) = 2$ für $j \in \{1, \dots, \frac{k_i-1}{2}\}$.

Zur weiteren Betrachtung von Fall (I) sei $Z'(G)$ im Folgenden unter allen maximalen Kreispackungen $Z(G)$ die Eigenschaft (5.2) erfüllen so gewählt, dass der Nicht-Facettenkreis $C \in Z'(G)$ und der von C induzierte Patch $P(C)$ die Eigenschaften

besitzen:

$$P(C) \text{ enth\u00e4lt keinen weiteren Nicht-Facettenkreis von } Z'(G). \quad (5.6)$$

Die Anzahl der in $P(C)$ enthaltenen Facettenkreise aus $Z'(G)$ ist minimal

$$\text{bzgl. aller Patches } P(\tilde{C}), \text{ die Eigenschaft (5.6) erf\u00fcllen, mit } k_i(\tilde{C}) = 5 \quad (5.7)$$

und $\tilde{C} \in Z(G)$.

F\u00fcr die weitere Betrachtung sei f\u00fcr $j \in \{1, \dots, \frac{k_i-1}{2}\}$ die Kante $e_{2j} := E(C^I) \cap E(F_{2j})$. Zu jeder Kante e_{2j} existiert eine weitere Facette $F'_{2j} \neq F_{2j}$ mit $F'_{2j} \in F(P(C))$ und der Eigenschaft, $e_{2j} \in E(F'_{2j})$. Es sei bemerkt, dass f\u00fcr alle Kanten e_{2j} gilt:

$$e_{2j} \in E(C),$$

da sonst $Z(G) := Z'(G) \setminus \{C\} \cup \{C(F_{2j})\}$ eine maximale Kreispackung in G mit einer geringeren Anzahl an Facettenkreisen als $Z'(G)$ w\u00e4re.

Damit l\u00e4sst sich nun Folgendes zeigen:

Lemma 5.14. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.6) und (5.7) erf\u00fcllt, sowie $f_5(C^I) = 5$ und k_i eine ungerade Zahl. Dann existiert in $(\mathcal{V}(C^*))$ keine Sequenz der L\u00e4nge k_i des Typs*

$$(0, 0, 2, 0, \dots, 2).$$

Beweis. Die Kreispackung

$$Z(G) := Z'(G) \setminus (C \cup \{C\}) \cup \{C(F_{2j}) \mid j \in \{1, \dots, \frac{k_i-1}{2}\}\}$$

besitzt die Kardinalit\u00e4t $|Z'(G)| - 1$. Die Kantenmengen $E(F'_{2j}) \setminus E(C^I)$ induzieren Pfade W_{2j} . Die Pfade W_{2j} sind paarweise kantendisjunkt, weil sich die Facettenkreise $C(F'_{2j})$ in $Z'(G)$ befinden und somit paarweise kantendisjunkt sind. Diese Pfade sollen nun zu einem Kreis ‘‘verbunden‘‘ werden. Dazu sei $v_{2j} := V(F_{2j+1}) \cap V(W_{2j})$ und $v_{2j+1} := V(F_{2j+1}) \cap V(W_{2j+2})$ (mit $W_{2 \cdot \frac{k_i-1}{2} + 2} = W_2$) sowie $e_{2j+1} := (v_{2j}, v_{2j+1})$. Dann ist

$$C^1 := (W_2, e_3, W_4, e_5, \dots, W_{k_i-1}, e_{k_i})$$

offenbar ein Kreis. Für C^1 gilt: $E(C^1) \cap E(Z(G)) = \emptyset$. Somit ist $Z^1(G) := Z(G) \cup \{C^1\}$ eine maximale Kreispackung (vergleiche Abbildung 5.24). Dann erfüllt $Z^1(G)$ aber nicht Eigenschaft (5.7).

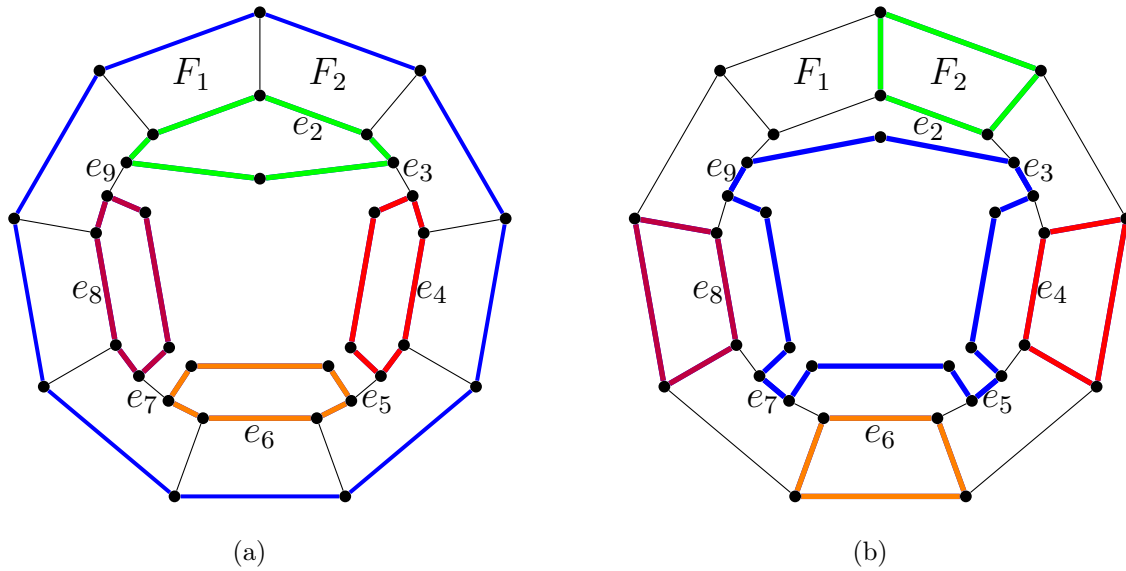


Abbildung 5.24: Beispielhafte Darstellung einer Sequenz des Typs $(0, 0, 2, 0, \dots, 2)$ in $(\vartheta(C^*))$ mit $|V(C^*)| = 9$. Die farblich skizzierten Kanten in (a) entsprechen der Kantenmenge der Kreise aus \mathcal{C} und C . Die farblich skizzierten Kanten in (b) entsprechen der Kantenmenge der Facettenkreise $C(F_{2j})$ sowie dem Kreis C^1 (blau) in einem Teilgraphen von G .

□

Da kein $\vartheta(F_j) = 1$ und keine Sequenz des Typs $(\vartheta(F_j), \vartheta(F_{j+1}))$ mit $\vartheta(F_j), \vartheta(F_{j+1}) \in \{0, 2\}$ in $(\vartheta(C^*))$ vorkommen kann, folgt die Behauptung für den Fall (I).

In den Fällen (II) und (III) ist $f_5(C^I) = 6$. Analog muss $f_5(C^A) = 6$ und folglich $f_5(C) = 6$ gelten. Anzumerken bleibt, dass $f_5(R^I(C)) = f_5(R^A(C)) = 0$ ist und somit folgt:

$$f_6(R^I(C)) = f_6(R^A(C)) = k_i = k_a = \sum_{j=1}^{k_i} \vartheta(F_j).$$

Zur Betrachtung der Fälle (II) und (III) sei $Z^1(G)$ im Folgenden unter allen maximalen Kreispackungen, die (5.2) erfüllen, so gewählt, dass $f_5(C) = 6$ für den betrachteten Nicht-Facettenkreis $C \in Z^1(G)$ gilt. Sowie $Z^1(G)$ die Eigenschaft 5.6

sowie die folgende Eigenschaft besitzt:

Die Anzahl der in $P(C)$ enthaltenen Facettenkreise aus $Z'(G)$ ist minimal bzgl. aller Patches $P(\tilde{C})$, die Eigenschaft (5.6) erfüllen, mit $k_i(\tilde{C}) = 6$ (5.8) und $\tilde{C} \in Z(G)$.

Dann enthält $P(C)$ offenbar mindestens zwei Facettenkreise aus $Z'(G)$. Es wird nun gezeigt, dass auch für den Fall (II) bestimmte Sequenzen nicht vorkommen können. Die Beweisideen orientieren sich an denen des Falls (I).

Lemma 5.15. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.6) und (5.8) erfüllt, sowie $f_5(C^I) = 6$ und k_i eine ungerade Zahl. Dann existiert in $(\vartheta(C^*))$ keine Sequenz des Typs $(1, 1, 1)$, $(1, 2)$ oder $(2, 1)$.*

Beweis. - Angenommen es sei $(1, 1, 1) \subset (\vartheta(C^*))$ mit zugehörigen Facetten F_1, F_2 und F_3 (betrachte zur Illustration Abbildung 5.23(b)). Genau zwei der drei Kanten $e_1, e_2, e_3 \in \tilde{E}$ (in Abbildung 5.23(b) gestrichelt gekennzeichnet) sind dann in den Kantenmenge eines Facettenkreises $C(F') \in Z'(G)$ enthalten. Falls e_1 und e_2 in $E(C(F'))$ enthalten sind, dann ist die Kreispackung

$$Z^1(G) := Z'(G) \setminus (C \cup \{C\}) \cup \{C(F')\} \cup \{C(F_j) \mid F_j \in F^I(C), j \geq 3, j \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$$

eine maximale Kreispackung in G mit einer geringeren Anzahl an Facettenkreisen als $Z'(G)$. Falls e_2 und e_3 in $E(C(F'))$ enthalten sind, dann ist aber die Kreispackung

$$Z^2(G) := Z'(G) \setminus (C \cup \{C\}) \cup \{C(F')\} \cup \{C(F_j) \mid F_j \in F^I(C), j = 1 \text{ oder } j \geq 4, j \text{ ist eine gerade Zahl}\}$$

maximal in G mit einer geringeren Anzahl an Facettenkreisen als $Z'(G)$. Der Fall, dass e_1 und e_3 in $E(C(F'))$ enthalten sind, kann nicht vorkommen, da $Z'(G)$ die Eigenschaft (5.8) erfüllt, $P(C)$ keinen weiteren Nicht-Facettenkreis aus $Z'(G)$ enthält und $k_i \geq 5$ gilt.

- Angenommen es sei $(2, 1) \subset (\vartheta(C^*))$ mit zugehörigen Facetten F_1 und F_2 .
Betrachte nun die Sequenz

$$(\vartheta(F_{k_i}), \vartheta(F_1), \vartheta(F_2)).$$

Da nach Lemma 5.11 keine Sequenz des Typs $(1, 2, 1)$ oder $(2, 2)$ in der Sequenz $(\vartheta(F_{k_i}), \vartheta(F_1), \vartheta(F_2))$ enthalten sein kann, muss demnach $\vartheta(F_{k_i}) = 0$ sein.

Betrachte nun

$$(0, 2, 1, \vartheta(F_3), \vartheta(F_4)).$$

Angenommen es wäre $\vartheta(F_3) = 2$, dann wäre $\vartheta(F_4) \notin \{1, 2\}$ nach Lemma 5.11. Somit ist $\vartheta(F_4) = 0$. Wenn also die Sequenz $(0, 2, 1, 2, 0)$ existiert, dann gibt es eine Facette F' mit $C(F') \in Z'(G)$ mit $E(F') \cap E(F_2) \neq \emptyset$, (andernfalls ersetze C durch $C(F_1)$). Falls $E(F') \cap E(F_1) \neq \emptyset$, dann ist die Kreispackung $Z^1(G)$ maximal in G . Falls $E(F') \cap E(F_3) \neq \emptyset$, dann ist die Kreispackung $Z^2(G)$ maximal in G . Somit ist $\vartheta(F_3) \neq 2$.

Angenommen es sei $\vartheta(F_3) = 1$, so ist $\vartheta(F_4) \neq 2$ nach Lemma 5.11 und $\vartheta(F_4) \neq 1$, da sonst eine Sequenz des Typs $(1, 1, 1)$ existieren würde. Also gäbe es dann eine Sequenz des Typs $(0, 2, 1, 1, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$. Wegen $\vartheta(F_4) = \vartheta(F_{k_i}) = 0$ und $|\mathcal{C}| = \frac{k_i-1}{2}$ muss es einen Facettenkreis $C(F')$ geben mit der Eigenschaft, dass $C(F') \in Z'(G)$, $E(F') \cap E(F_1) \neq \emptyset$ und $E(F') \cap E(F_2) \neq \emptyset$. Dann ist aber die Kreispackung $Z^1(G)$ maximal in G . Somit ist $\vartheta(F_3) \neq 1$.

Angenommen es sei $\vartheta(F_3) = 0$, dann kann die Sequenz des Typs $(0, 2, 1, 0)$ höchstens einmal in $(\vartheta(C^*))$ auftreten. Für die Kante e_2 (in Abbildung 5.23, mittlere gestrichelt gekennzeichnete Kante) gilt: $e_2 \notin E(Z'(G))$ und somit folgt $|\mathcal{C}| < \frac{k_i-1}{2}$, falls mehr als eine Sequenz des Typs $(0, 2, 1, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$ existiert. Falls die Sequenz des Typs $(0, 2, 1, 0)$ häufiger als einmal in $(\vartheta(C^*))$ wäre, so die Kreispackung

$$\begin{aligned} Z^3(G) := & Z'(G) \setminus (\mathcal{C} \cup \{C\}) \\ & \cup \{C(F_j) \mid F_j \in F^I(C), j \geq 3, j \text{ ist eine ungerade Zahl}\} \end{aligned}$$

maximal in G mit einer geringeren Anzahl an Facettenkreisen als $Z'(G)$.

Es bleibt somit das einmalige Auftreten der Sequenz des Typs $(0, 2, 1, 0)$ genauer zu betrachten. Es stellt sich heraus, dass F_2 die einzige Facette mit $\vartheta(F_i) = 1$ ist. Denn angenommen es existiert eine weitere Facette $F_i \neq F_2$ mit $\vartheta(F_i) = 1$, dann sind $\vartheta(F_{i-1}) \neq 2$ sowie $\vartheta(F_{i+1}) \neq 2$, da nur eine Sequenz des Typs $(0, 2, 1, 0)$ existiert. Zudem wäre falls $\vartheta(F_{i-1}) = 1$ und $\vartheta(F_{i+1}) = 1$ eine Sequenz des Typs $(1, 1, 1)$ in $(\vartheta(C^*))$ enthalten. Der Fall $\vartheta(F_{i-1}) = 0$ und $\vartheta(F_{i+1}) = 0$ kann nach Lemma 5.9 nicht auftreten. Falls $\vartheta(F_{i-1}) = 0$ und $\vartheta(F_{i+1}) = 1$ sind, so ergäbe sich $\vartheta(F_{i+2}) = 0$. Die Sequenz des Typs $(0, 1, 1, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$ ist nach Lemma 5.9 nicht möglich. Demnach ist F_2 die einzige Facette in $F^I(C)$ mit $\vartheta(F_2) = 1$.

Da nach Lemma 5.11 keine Sequenz des Typs $(2, 2)$ in $(\vartheta(C^*))$ existiert und

$$|\{F_i \in F^I(C) \mid \vartheta(F_i) = 2\}| = |\{F_i \in F^I(C) \mid \vartheta(F_i) = 0\}|,$$

ist die einzig mögliche Sequenz der Länge k_i des Typs $(2, 1, 0, 2, 0, 2, \dots, 0)$ (vergleiche Abbildung 5.25). Seien ohne Einschränkung $\vartheta(F_1) = 2$ und $\vartheta(F_2) = 1$ sowie $\vartheta(F_{2j+1}) = 0$ für $j \in \{1, \dots, \frac{k_i-1}{2}\}$ und $\vartheta(F_{2j}) = 2$ für $j \in \{2, \dots, \frac{k_i-1}{2}\}$.

Dann lässt sich ein Nicht-Facettenkreis \tilde{C} und eine Kreispackung $Z^*(G)$ konstruieren, derart, dass in $P(\tilde{C})$ weniger Facettenkreise aus $Z^*(G)$ als Patch $P(\tilde{C})$ Facettenkreise aus $Z'(G)$ enthält.

Beweis: Es existieren $\frac{k_i-1}{2}$ Facetten $F_{2j+1} \in F^I(C)$ mit $\vartheta(F_{2j+1}) = 0$, die genau $\frac{k_i-1}{2}$ Facetten $F'_{2j+1} \in F(P(C^I))$ mit

$$E(F'_{2j+1}) \cap E(F_{2j+1}) \neq \emptyset, j \in \{1, \dots, \frac{k_i-1}{2}\}.$$

Es gilt $C(F'_{2j+1}) \in Z'(G)$, da $\vartheta(F_{2j+1}) = 0$. Zudem sind die Facetten F'_{2j+1} paarweise kantendisjunkt, da $C(F'_{2j+1}) \in Z'(G)$. Für $j = 1, \dots, k_i-1$ bezeichne W_{2j+1} den durch

$$E(F'_{2j+1}) \setminus E(C^I)$$

zusammenhängenden kanteninduzierten Pfad der Länge größer oder gleich zwei. Die Anfangs- bzw. Endknoten des Pfades seien mit v_{2j+1} bzw. v_{2j+2} bezeichnet. Dann ist $v_{2j+1} \in V(F_{2j})$ und $v_{2j+2} \in V(F_{2j+2})$. Zudem ist

$$e_{2j+2} := (v_{2j+2}, v_{2j+3})$$

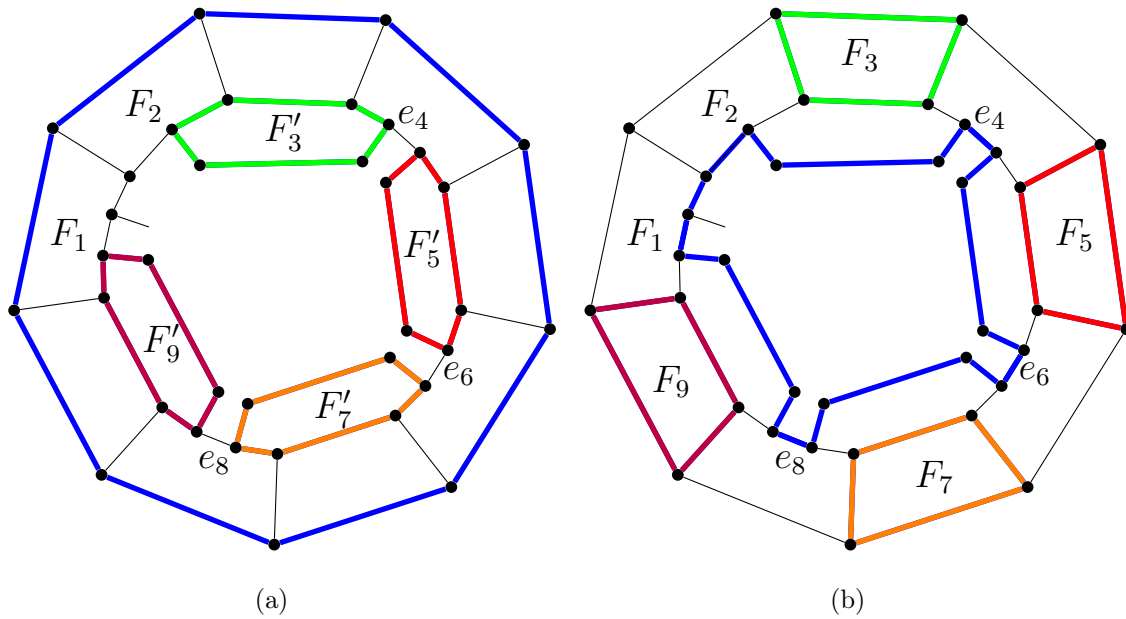


Abbildung 5.25: Beispielhafte Darstellung einer Sequenz des Typs $(2, 1, 0, 2, \dots, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$ mit $|V(C^*)| = 9$. Die farblich skizzierten Kanten in (a) entsprechen der Kantenmenge der Kreise aus \mathcal{C} und C . Die farblich skizzierten Kanten in (b) entsprechen der Kantenmenge der Facettenkreise $C(F_{2j+1}), j \geq 1$ sowie dem Kreis \tilde{C} (blau) in einem Teilgraphen von G .

für $j \in \{1, \dots, \frac{k_i-1}{2} - 1\}$ eine Kante in $E(C^I) \cap E(F_{2j+2})$. Sowie

$$\tilde{W} := W(v_{k_i+1}, v_3)$$

ein Pfad mit $E(W(v_{k_i+1}, v_3)) \subset E(C^I) \cap E(F_1) \cap E(F_2)$. Damit ist

$$\tilde{C} := (W_3, e_4, \dots, W_{k_i}, \tilde{W})$$

ein Kreis. Nach Konstruktion gilt für die Kantenmenge $E(\tilde{C})$ offenbar $E(\tilde{C}) \cap E(Z^3(G)) = \emptyset$. Somit ist

$$Z^4(G) := Z'(G) \setminus (\mathcal{C} \cup \{C\}) \cup \{\tilde{C}\} \cup \{C(F_j) \mid F_j \in F^I(C), j \geq 3, j \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$$

eine Kreispackung mit $|Z^4(G)| = |Z'(G)|$ (vergleiche Abbildung 5.25). Ferner besitzt $Z^4(G)$ mit \tilde{C} einen Kreis, dessen Patch $P(\tilde{C})$ genau $\frac{k_i-1}{2}$ weniger Facettenkreise als C enthält.

□

Im Fall (II), in dem $k_i \geq 5$ eine ungerade Zahl ist und $f_5^I(C) = 6$ gilt, muss es wenn überhaupt eine ungerade Anzahl an Facetten F_i mit $\vartheta(F_i) = 1$ geben. Angenommen es existiert eine solche Facette F_i . Betrachte dann die Sequenzen des Typs $(\vartheta(F_{i-2}), \vartheta(F_{i-1}), 1, \vartheta(F_{i+1}), \vartheta(F_{i+2}))$, so führen sämtliche Möglichkeiten zu Sequenzen, die durch Lemma 5.9 und 5.15 ausgeschlossen wurden (vergleiche dazu die Tabelle A.2 aus Anhang A.5). Der Fall (II) kann somit nicht vorkommen.

Demnach bleibt abschließend noch der Fall (III) zu diskutieren, also, dass $f_5(C^I) = 6$ und k_i eine gerade Zahl ist. Nach Lemma 5.1 gilt dann $k_i = k_i(C^I) \geq 6$.

Da $Z'(G)$ minimal bzgl. der Anzahl an Nicht-Facettenkreisen ist und Eigenschaft (5.6) und (5.8) besitzt, existiert in $P(C)$ keinen Nicht-Facettenkreis aus $Z'(G) \setminus \{C\}$. Somit besteht \mathcal{C} aus ausschließlich Facettenkreisen. Zudem gilt in diesem Fall $|\mathcal{C}| = \frac{k_i(C^I)}{2} = \frac{k_i}{2}$. Zusätzlich müssen $\frac{k_i}{2}$ Kreise C_i^A mit $E(C_i^A) \cap E(C^A) \neq \emptyset$ in der maximalen Kreispackung $Z'(G)$ enthalten sein, weil $k_i = k_a$ ist. Ebenso gilt wie in Fall (II) wieder $f_5(F^I(C)) = f_5(F^A(C)) = 0$.

Lemma 5.16. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.6) und (5.8) erfüllt, sowie $f_5(C^I) = 6$ und k_i eine gerade Zahl. Dann existiert in $(\vartheta(C^*))$ keine Sequenz des Typs $(0, 2, 1, 0)$, $(0, 1, 2, 0)$ bzw. $(0, 2, 1, 2, 0)$.*

Beweis. (i) Angenommen es existiere in $(\vartheta(C^*))$ eine Sequenz des Typs

$$(0, 2, 1, 0)$$

mit zugehörigen Facetten F_1, \dots, F_4 . Dann gibt es eine Kante $e_2 = (u, v)$ mit $u \in V(C^I) \cap V(F_2)$ und $e_2 \notin E(C)$ (vergleiche Abbildung 5.23, mittlere gestrichelt gekennzeichnete Kante e_2), dies hieße aber das $|\mathcal{C}| < \frac{k_i}{2}$, was für Fall (III) nicht sein kann.

(ii) Angenommen es existiere in $(\vartheta(C^*))$ eine Sequenz des Typs

$$(0, 2, 1, 2, 0)$$

mit zugehörigen Facetten F_1, \dots, F_5 und Knoten $u_1, \dots, u_5 \in V(C^I)$ mit $\delta_{R^I}(u_i) = 2$ in $R^I(C)$. Da $\vartheta(F_1) = \vartheta(F_5) = 0$ gäbe es eine Kante $e_1 = (u_1, v_1)$

und eine Kante $e_5 = (u_5, v_5)$ mit $u_1 \in V(F_2) \cap V(C^I)$, $u_5 \in V(F_4) \cap V(C^I)$ und $e_1, e_5 \in E(Z'(G)) \setminus E(C^I)$. Zudem existieren drei Kanten $e_i = (u_i, v_i) \notin E(C^I)$ mit $i \in \{2, 3, 4\}$ und $u_i \in V(F_i)$. Da $P(C)$ ausschließlich Facettenkreise aus $Z'(G)$ enthält, können höchstens zwei dieser drei Kanten dann aber in der Kantenmenge $E(Z'(G))$ enthalten sein. Somit wäre $|C| < \frac{k_i}{2}$.

□

Für das nachfolgende Lemma wird eine andere Beweisidee als die vom Beweis des Lemmas 5.16 benötigt. Es wird über die Existenz einer speziellen Sequenz auf $(\vartheta(C^{*,A}))$ argumentiert, genauer:

Lemma 5.17. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.6) und (5.8) erfüllt, sowie $f_5(C^I) = 6$ und k_i eine gerade Zahl. Dann existiert in $(\vartheta(C^*))$ keine Sequenz des Typs $(2, 1, 1, 1, 2)$ oder $(2, 1, 1, 1, 1)$.*

Beweis. (i) Angenommen es existiere in $(\vartheta(C^*))$ eine Sequenz des Typs

$$(2, 1, 1, 1, 2).$$

Dann wäre eine Sequenz des Typs $(0, 1, 1, 0)$ in $(\vartheta(C^{*,A}))$ enthalten, da Fünfecksfacetten weder in $F^I(C)$ noch in $F^A(C)$ enthalten sind. Nach Korollar 5.10 kann aber eine solche Sequenz in $(\vartheta(C^{*,A}))$ nicht vorkommen.

(ii) Angenommen es existiere in $(\vartheta(C^*))$ eine Sequenz des Typs

$$(2, 1, 1, 1, 1).$$

Dann wäre eine Sequenz des Typs $(0, 1, 1, 1)$ in $(\vartheta(C^{*,A}))$ enthalten, da Fünfecksfacetten weder in $F^I(C)$ noch in $F^A(C)$ enthalten sind. Nach Korollar 5.10 kann aber eine solche Sequenz in $(\vartheta(C^{*,A}))$ nicht vorkommen.

□

Für den Fall (III) lässt sich nach Lemma 5.9, Lemma 5.11, Lemma 5.16 und Lemma 5.17 nun folgendes noch für $(\vartheta(C^*))$ schließen:

- (i) Eine Sequenz vom Typ $(1, 1, 1)$ in $(\vartheta(C^*))$ impliziert, dass $\vartheta(F_j) = 1$ für $j \in \{1, \dots, k_i\}$. Dies wird klar, wenn sämtliche mögliche Kombinationen von Sequenzen des Typs

$$(\vartheta(F_i), 1, 1, 1, \vartheta(F_{i+4}))$$

betrachtet werden. Dabei stellt sich heraus, dass für derartige Kombinationen höchstens $(1, 1, 1, 1, 1)$ aufgrund der vorherigen Lemma auftreten kann (vergleiche dazu die Tabelle A.3 aus Anhang A.5).

- (ii) Aufgrund der Lemma können alle möglichen Kombinationen von Sequenzen des Typs $(\vartheta(F_i), 1, \vartheta(F_{i+2}))$ mit $\vartheta(F_i), \vartheta(F_{i+2}) \in \{0, 2\}$ nicht auftreten (vergleiche dazu die Tabelle A.3 aus Anhang A.5).

Existiert kein $F \in F^I(C)$ mit $\vartheta(F) = 1$, so gibt es in $(\vartheta(C^*))$ eine Sequenz der Länge k_i des Typs $(2, 0, \dots, 2, 0)$, da nach Lemma 5.11 keine Sequenz des Typs $(2, 2)$ auftreten kann und $\sum_{i=1}^{k_i} \vartheta(F_i) = k_i$.

- (iii) Gibt es in $(\vartheta(C^*))$ eine Sequenz der Länge 6 des Typs

$$(\vartheta(F_{i-1}), \vartheta(F_i), 1, 1, \vartheta(F_{i+3}), \vartheta(F_{i+4})),$$

mit $\vartheta(F_i), \vartheta(F_{i+3}) \in \{0, 2\}$, so können nach Lemma 5.9 und 5.11 höchstens die Sequenzen des Typs $(0, 2, 1, 1, 0, 2)$ bzw. $(2, 0, 1, 1, 2, 0)$ auftreten. Also gibt es ohne Einschränkung eine Nummerierung der Facetten $F_i \in F^I(C)$ (modulo k_i), derart dass $(\vartheta(F_{2j-1}), \vartheta(F_{2j})) \in \{(0, 2), (1, 1)\}$ bzw. $(\vartheta(F_{2j-1}), \vartheta(F_{2j})) \in \{(2, 0), (1, 1)\}$ für $j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}$. Dies liegt daran, dass nach Lemma 5.11 keine Sequenz des Typs $(2, 2)$ sowie nach Korollar 5.10 keine Sequenz des Typs $(2, 1, 1, 2)$ und wegen $\sum_{i=1}^{k_i} \vartheta(F_i) = k_i$ auch keine Sequenz des Typs $(0, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$ existiert. Falls $\vartheta(F_i) = 1$ ist, so ist entweder nach (i) entweder $\vartheta(F_{i-1}) = 1$ oder $\vartheta(F_{i+1}) = 1$ (Index modulo k_i). Existiert eine Facette $\vartheta(F_i) = 1$ und $\vartheta(F_{i-1}) = 1$, so wähle die Nummerierung derart, dass F_{i-1} mit \tilde{F}_1 bezeichnet wird, falls $\vartheta(F_i) = 1$ und $\vartheta(F_{i+1}) = 1$, so wähle die Nummerierung derart, dass F_i mit \tilde{F}_1 bezeichnet wird. Ohne Einschränkung sei im Folgenden diese Nummerierung der Facetten betrachtet.

Die Beweisidee ist nun wie in Lemma 5.14 und Lemma 5.15. Wie dort werden hier wieder $\frac{k_i}{2}$ Facettenkreise \mathcal{C} durch $\frac{k_i}{2}$ Facettenkreise aus $F^I(C)$ sowie der Nicht-Fa-

Facettenkreis C durch einen weiteren Kreis $\tilde{C} \subset P(C)$ ersetzt. Der Kreis \tilde{C} ist dabei so konstruiert, dass der Patch $P(\tilde{C})$ weniger Facettenkreise aus $Z'(G)$ enthält als $P(C)$. Damit würde der Kreis C aber nicht die Eigenschaft (5.8) besitzen. Diese Idee wird nun in den folgenden drei Lemma formal angewendet. In Lemma 5.18 und Lemma 5.19 werden dazu zwei Spezialfälle aus Lemma 5.20 betrachtet.

Lemma 5.18. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.6) und (5.8) erfüllt, sowie $f_5(C^I) = 6$ und k_i eine gerade Zahl. Dann existiert in $(\vartheta(C^*))$ keine Sequenz der Länge k_i des Typs*

$$(1, 1, \dots, 1, 1).$$

Beweis. Da $f_5(C) = 6$ und k_i eine gerade Zahl ist, so ist $|\mathcal{C}| = \frac{k_i}{2} \geq 3$. Es ist

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C, C\} \cup \{C(F_{2j}) \mid j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}\}$$

eine Kreispackung mit $|Z(G)| = |Z'(G)| - 1$.

Dann gibt es zu jedem $F_j \in F^I(C)$ ein $F'_j \subset P(C^I)$ die Facette mit der Eigenschaft $E(F'_j) \cap E(F_j) \neq \emptyset$ und $E(F'_j) \cap E(F_{j-1}) \neq \emptyset$ (Index modulo k_i). Offenbar existieren $(u_j, v_j) \in E(Z'(G))$, $j = \{1, \dots, k_i\}$ mit $u_j \in V(F_j)$ und $v_j \notin V(C^I)$. Weiterhin gibt es Pfade $W_j = W(v_j, v_{j+1}) \subset E(F'_j)$ (sowie $W_{k_i} = W(v_{k_i}, v_1)$) mit $l(W_j) \leq 2$.

Dann gilt entweder $\mathcal{C} = \{C(F'_{2j}) \mid j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}\}$ oder $\mathcal{C} = \{C(F'_{2j+1}) \mid j \in \{0, \dots, \frac{k_i}{2} - 1\}\}$. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{C} = \{C(F'_{2j}) \mid j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}\}$. Dann sind die Pfade W_{2j} für $j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}$ paarweise kantendisjunkt, da $C(F'_{2j}) \in \mathcal{C}$. Da G kubisch ist und die Facetten F'_j entweder Fünf- oder Sechsecksfacetten sind, sind die Pfade W_{2j+1} paarweise kantendisjunkt und zudem gilt $E(W_{2j+1}) \cap E(Z'(G)) = \emptyset$. Somit ist der durch W_1, \dots, W_{k_i} kanteninduzierte Teilgraph von $P(C^I)$ ein Kreis

$$\tilde{C} := (W_1, \dots, W_{k_i})$$

und $E(\tilde{C}) \cap E(Z'(G) \setminus \mathcal{C}) = \emptyset$. Dann ist $Z^1(G) := Z(G) \cup \{\tilde{C}\}$ eine maximale Kreispackung in G mit $|Z^1(G)| = |Z'(G)|$ allerdings mit geringerer Facettenkreisen aus $Z^1(G)$ in $P(\tilde{C})$ als Facettenkreisen aus $Z'(G)$ in $P(C)$ (vergleiche dazu Abbildung 5.26). Dies kann aber nach Wahl von $Z'(G)$ nicht sein. \square

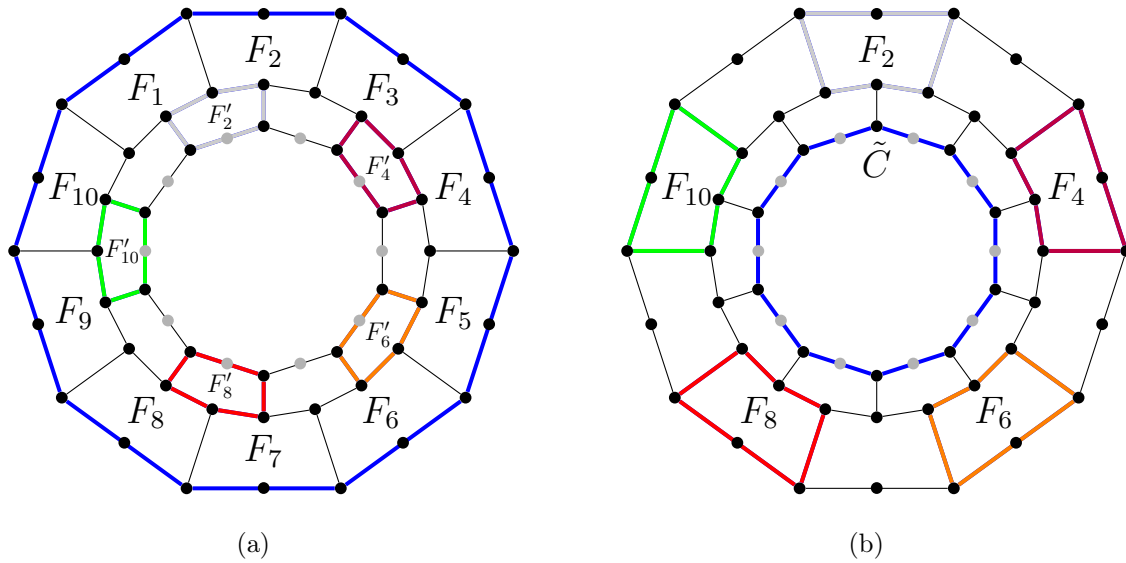


Abbildung 5.26: Beispielhafte Darstellung einer Sequenz des Typs $(1, 1, 1, 1, \dots, 1)$ in $(\vartheta(C^*))$ mit $|V(C^*)| = 10$. Die farblich skizzierten Kanten in (a) entsprechen der Kantenmenge der Kreise aus \mathcal{C} und C (in blau). Die farblich skizzierten Kanten in (b) entsprechen der Kantenmenge der Facettenkreise $C(F_{2j})$ sowie dem Kreis \tilde{C} (in blau) in einem Teilgraphen von G . Bemerke, innerhalb der Darstellung gibt es zu jedem F'_i einen grau skizzierten Knoten aus $V(F'_i)$. Falls F'_i eine Sechsecksfacette ist, so existiere dieser Knoten in $V(P(C))$ und sonst nicht.

Lemma 5.19. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.6) und (5.8) erfüllt, sowie $f_5(C^I) = 6$ und k_i eine gerade Zahl. Dann existiert in $(\vartheta(C^*))$ keine Sequenz der Länge k_i des Typs*

$$(2, 0, \dots, 2, 0).$$

Beweis. Da $f_5(C) = 6$ und k_i eine gerade Zahl ist, ist $|\mathcal{C}| = \frac{k_i}{2} \geq 3$. Der Beweis wird analog zu dem aus Lemma 5.14 geführt (vergleiche Abbildung 5.27 mit Abbildung 5.24). Es ist

$$Z(G) := Z'(G) \setminus \{C, C\} \cup \left\{ C(F_{2j}) \mid j \in \left\{ 1, \dots, \frac{k_i - 1}{2} \right\} \right\}$$

eine Kreispackung mit $|Z(G)| = |Z'(G)| - 1$. Die Kantenmengen $E(F'_{2j}) \setminus E(C^I)$ induzieren Pfade W_{2j} . Die Pfade W_{2j} sind paarweise kantendisjunkt, weil die Facetten F'_{2j} paarweise kantendisjunkt sind. Diese Pfade sollen nun zu einem Kreis \tilde{C} verbunden werden. Dazu sei $v_{2j} := V(F_{2j+1}) \cap V(W_{2j})$ und $v_{2j+1} := V(F_{2j+1}) \cap V(W_{2j+2})$

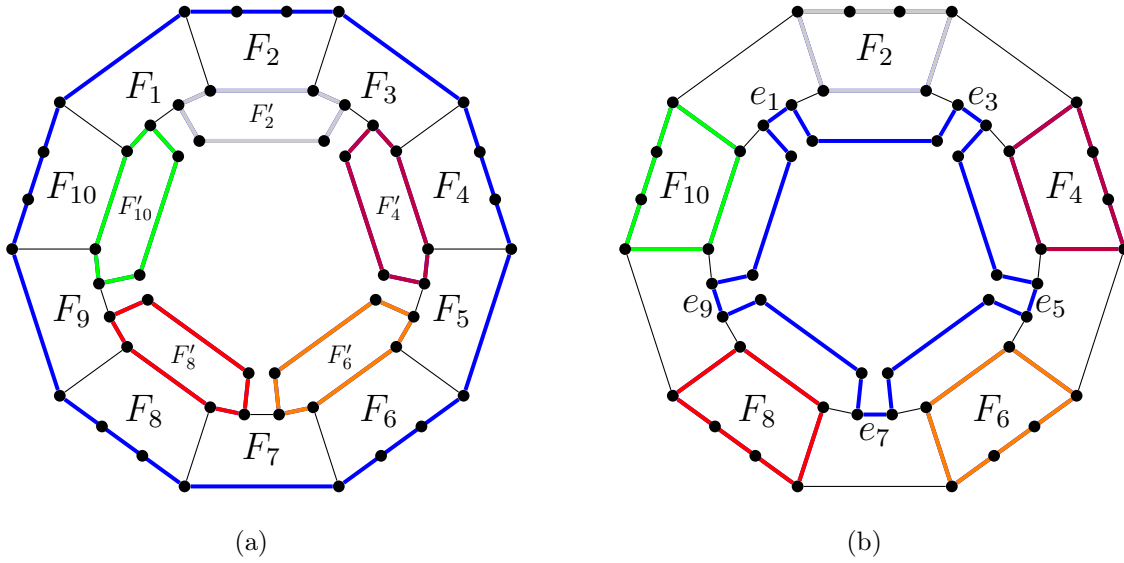


Abbildung 5.27: Beispielhafte Darstellung einer Sequenz des Typs $(2, 0, \dots, 2, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$ mit $|V(C^*)| = 10$. Die farblich skizzierten Kanten in (a) entsprechen der Kantenmenge der Kreise aus \mathcal{C} und C (in blau). Die farblich skizzierten Kanten in (b) entsprechen der Kantenmenge der Facettenkreise $C(F_{2j})$ sowie dem Kreis \tilde{C} (in blau) in einem Teilgraphen von G .

(mit $W_{2\frac{k_i-1}{2}+2} = W_2$) sowie $e_{2j+1} := (v_{2j}, v_{2j+1})$. Dann ist

$$\tilde{C} := (e_1, W_2, e_3, W_4, e_5, \dots, W_{k_i-2}, e_{k_i-1}, W_{k_i})$$

offenbar ein Kreis. Für \tilde{C} gilt: $E(\tilde{C}) \cap E(Z'(G)) = \emptyset$. Somit ist $Z^1(G) := Z(G) \cup \{\tilde{C}\}$ eine maximale Kreispackung mit $|Z^1(G)| = |Z'(G)|$ allerdings mit geringerer Facettenkreisen aus $Z^1(G)$ in $P(\tilde{C})$ als Facettenkreisen aus $Z'(G)$ in $P(C)$. Dies kann aber nach Wahl von $Z'(G)$ nicht sein. \square

Lemma 5.20. *Angenommen es sei $\nu(G) > \alpha(G^*)$, C ein Nicht-Facettenkreis einer maximalen Kreispackung $Z'(G)$, die (5.6) und (5.8) erfüllt, sowie $f_5(C^I) = 6$ und k_i eine gerade Zahl. Dann existiert in $(\vartheta(C^*))$ keine Sequenz des Typs*

$$(\vartheta(F_1), \dots, \vartheta(F_{k_i}))$$

der Länge k_i mit $(\vartheta(F_{2j-1}), \vartheta(F_{2j})) \in \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$ für $j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}$.

Beweis. Da $f_5(C) = 6$ und k_i eine gerade Zahl ist, ist $|C| = \frac{k_i}{2} \geq 3$. Betrachte eine beliebige Sequenz der Länge k_i in $(\vartheta(C^*))$ mit $(\vartheta(F_j), \vartheta(F_{j+1})) \in \{(0, 2), (2, 0),$

$(1, 1)$ und $j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}$, die nicht unter die Fälle aus Lemma 5.18 und Lemma 5.19 fällt.

Nach den Vorüberlegungen aus (iii) existiert eine Sequenz des Typs $(0, 2, 1, 1, 0, 2)$ oder des Typs $(2, 0, 1, 1, 2, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$. In $(\vartheta(C^*))$ kann weder eine Sequenz des Typs $(0, 1, 1, 0)$ noch des Typs $(2, 1, 1, 2)$ enthalten sein. Ebenso kann keine Sequenz des Typs $(2, 0, 0, 2)$ auftreten, da sonst auch eine Sequenz des Typs $(2, 2)$ oder $(2, 1, 1, 2)$ in $(\vartheta(C^*))$ enthalten wäre.

Demnach sei ohne Einschränkung die Sequenz des Typs $(\vartheta(F_1), \dots, \vartheta(F_{k_i}))$ derart, dass für $j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}$

$$(\vartheta(F_{2j-1}), \vartheta(F_{2j})) \in \{(0, 2), (1, 1)\}.$$

Aus Lemma 5.17 folgt, dass höchstens $\lfloor \frac{k_i}{4} \rfloor$ Sequenzen des Typs $(1, 1)$ in der Sequenz der Länge k_i auftreten können.

In Abbildung 5.28 ist der Fall einer solchen Sequenz beispielhaft skizziert.

Hierzu wird eine Kreispackung $Z^1(G)$ konstruiert, derart, dass $Z^1(G)$ die Eigenschaft (5.8) nicht erfüllt. Es ist

$$Z(G) := Z^1(G) \setminus \{\mathcal{C}, C\} \cup \{C(F_{2j-1}) \mid j \in \{1, \dots, \frac{k_i}{2}\}\}$$

eine Kreispackung mit $|Z(G)| = |Z^1(G)| - 1$. Die Beweisführung aus Lemma 5.18 für $(1, 1)$ -Sequenzen bzw. aus Lemma 5.19 für $(0, 2)$ -Sequenzen wird auch hier benutzt, um einen Kreis \tilde{C} mit $E(\tilde{C}) \cap E(Z(G)) = \emptyset$ zu konstruieren (vergleiche dazu Abbildung 5.28). Der Kreis \tilde{C} wird durch das Verbinden von speziellen Pfaden erzeugt. Hierbei bestehen die Pfade aus drei unterschiedlichen Typen:

- Falls $\vartheta(F_i) = 2$, so wähle die Kante $W_i = e_i$ mit $e_i \in E(F_i) \cap E(C^I)$ und $e_i \notin E(Z^1(G))$.
- Falls $(\vartheta(F_{i-1}), \vartheta(F_i), \vartheta(F_{i+1})) = (2, 0, 2)$, so wähle den von $E(F_i) \setminus E(C^I)$ kanteninduzierten Pfad W_i .
- Falls $(\vartheta(F_i), \vartheta(F_{i+1}), \vartheta(F_{i+2}), \vartheta(F_{i+3})) = (2, 1, 1, 0)$, so wähle für $j \in \{i+1, i+2, i+3\}$ den von

$$E(F_j) \setminus \{E(C^I)\} \cup \{(u_{i+1}, v_{i+1}), (u_{i+2}, v_{i+2})\}$$

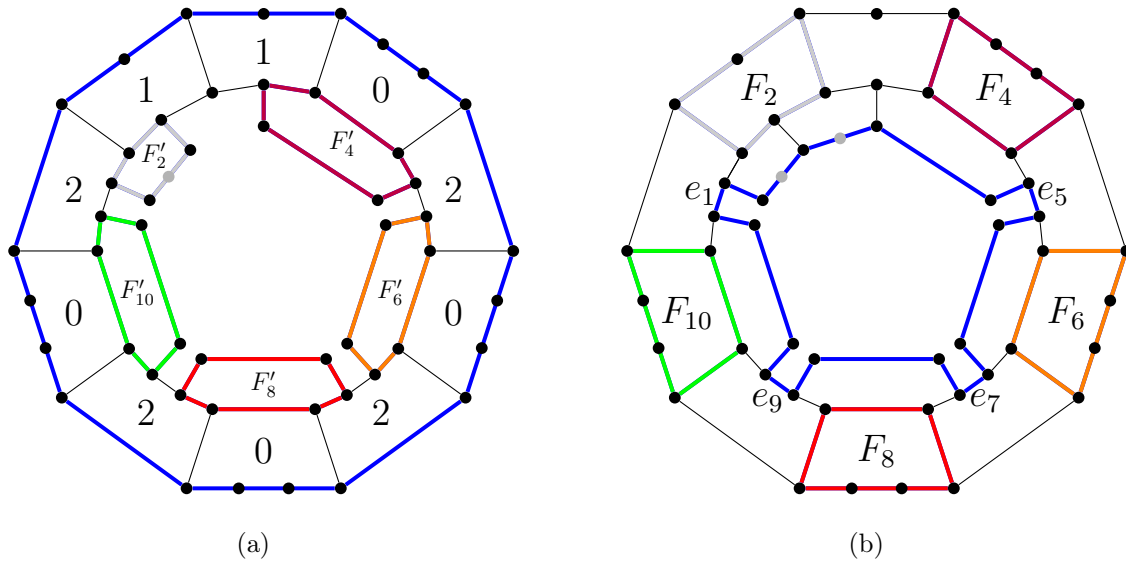


Abbildung 5.28: Beispielhafte Darstellung einer Sequenz des Typs $(2, 1, 1, 0, 2, 0, \dots, 2, 0)$ in $(\vartheta(C^*))$ mit $|V(C^*)| = 10$. Die farblich skizzierten Kanten in (a) entsprechen der Kantenmenge der Kreisen aus \mathcal{C} und C (in blau). Die farblich skizzierten Kanten in (b) entsprechen der Kantenmenge der Facettenkreise $C(F_{2j})$ sowie dem Kreis \tilde{C} (in blau) in einem Teilgraphen von G . Bemerke, innerhalb der Darstellung gibt es grau skizzierte Knoten aus $V(F'_i)$. Falls F'_i eine Sechsecksfacette ist, so existiere dieser grau skizzierte Knoten in $V(P(C))$ und sonst nicht.

(mit $u_{i+1} \in V(C^I \cap F_{i+1}), v_{i+1} \in V(P(C^I)) \setminus V(C^I)$ und $u_{i+2} \in V(C^I \cap F_{i+2}), v_{i+2} \in V(P(C^I)) \setminus V(C^I)$) kanteninduzierten Pfad W_j . Da die Facetten F'_j jeweils Fünf- bzw. Sechsecksfacetten sind, werden in diesem Fall für $j \in \{i+2, i+3\}$ ein Pfad der Länge $l \leq 2$ und für $j = i+1$ ein Pfad der Länge $l \leq 3$ definiert. Für $j \in \{i+1, i+3\}$ gilt $E(W_j) \subset E(C)$. Für $j = i+2$ ist $E(W_{i+2}) := (v_{i+1}, \dots, v_{i+2})$. Da G kubisch ist, $v_{i+1}, v_{i+2} \in V(Z'(G))$ sowie $l \leq 2$ gilt, folgt $E(W_j) \cap E(Z'(G)) = \emptyset$.

Dann ist

$$\tilde{C} := (W_1, \dots, W_{k_i})$$

offenbar ein Kreis mit $E(\tilde{C}) \cap E(Z(G)) = \emptyset$. Somit ist $Z^1(G) := Z(G) \cup \{\tilde{C}\}$ eine maximale Kreispackung mit $|Z^1(G)| = |Z'(G)|$ allerdings mit geringerer Facettenkreisen aus $Z^1(G)$ in $P(\tilde{C})$ als Facettenkreisen aus $Z'(G)$ in $P(C)$. Dies kann aber nach Wahl von $Z'(G)$ nicht sein. □

Aufgrund der Vielzahl behandelter Fallunterscheidungen wird der Vollständigkeit halber an dieser Stelle zusammenfassend auf Tabelle A.4 in Anhang A.5 verwiesen, in der alle behandelte Fälle in Abhängigkeit von $f_5(C^I)$, $k_i(C^I)$ sowie der untersuchten Sequenzen auflistet sind. Dabei wird zu jeder Kombination aus $f_5(C^I)$, $k_i(C^I)$ und Sequenz auf das Lemma verwiesen, in dem der jeweilige Widerspruchsbeweis geführt wird.

Mit Hilfe der angeführten Widerspruchsargumentation aus den in den jeweiligen Aussagen erläuterten Fallunterscheidungen aus Lemma 5.7 bis Lemma 5.20 folgt, dass es keine maximale Kreispackung $Z'(G)$ in einem Fulleren-Graph G gibt mit $|Z'(G)| > \alpha(G^*)$.

Damit gilt analog zu Halin-Graphen auch für Fulleren-Graphen G :

$$\nu(G) = \alpha(G^*),$$

also gilt die Aussage des Satzes 5.6.

Mit Hilfe des Satzes 5.6 kann $\nu(G)$ in einem Fulleren-Graphen G offenbar auf die Bestimmung von $\alpha(G^*)$ im Dual-Graphen G^* des Fulleren-Graphen G zurückgeführt werden. Dies wird im folgenden Abschnitt genutzt werden, um $\nu(G)$ für Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ mit $n \leq 70$ zu berechnen.

5.3 Obere Schranken an $\nu(G)$ mit $G \in \mathcal{F}_n$ und

$$n \leq 70$$

Zur vollständigen Angabe der oberen Schranken an $\nu(G)$ bleiben auf Basis der Ergebnisse aus Abschnitt 5.1 noch die Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ mit $n \leq 70$ zu untersuchen. Innerhalb dieses Abschnittes wird dazu auf zwei Algorithmen eingegangen:

- (I) Erzeugung der Adjazenzlisten der Dualgraphen G^* aller nicht isomorphen Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ mit $n \leq 70$.
- (II) Bestimmung maximaler unabhängiger Mengen in G^* sowie der zugehörigen Unabhängigkeitszahl $\alpha(G^*)$.

Zur Betrachtung von (I) beschreiben Brinkmann und Dress [10] einen Algorithmus zur Erzeugung sämtlicher nicht-isomorpher Fulleren-Graphen einer vorgegebenen Ordnung und bilden damit die Grundlage und den Daten-Input für die weitere Untersuchung. Die konzeptionelle Idee des Algorithmus' ist in [10] detailliert beschrieben und basiert auf der Zerlegbarkeit der Fulleren-Graphen über speziell gewählte sog. *Petrie Pfade* in zwei oder drei spezielle Patches. Der Algorithmus besteht dann im Wesentlichen aus vier Schritten:

- Auffinden aller unterschiedlichen Petrie Pfade. Diese lassen sich auf drei Pfadstrukturen beschränken und werden mit *Jordan-Kurven-Pfad* oder auch *Closed Petrie-Pfad*, *Sandwich-Pfad* sowie *Dumb-bell-Pfad* bezeichnet und unterteilen den Fulleren-Graphen in zwei bzw. drei sog. *Marked Patches*.
- Vollständige Auflistung aller Marked Patches zu einem gegebenen Petrie Pfad
- Kombination der erzeugten Marked Patches zu Fulleren-Graphen
- Isomorphieprüfung der so erzeugten Fulleren-Graphen.

Das von Brinkmann und McKay in C implementierte Programm Fullgen bietet über acht verschiedene Ausgabemöglichkeiten eine Vielfalt zur Darstellung der zu betrachtenden Fulleren-Graphen. Eine Ausgabemöglichkeit von Fullgen ist die Wahl der Adjazenzliste des Dual-Graphen, über den der zugehörige Fulleren-Graph eindeutig beschrieben ist. Unter Fullgen CODE 7 können die jeweiligen Dual-Graphen G^* erzeugt und in ein binäres Output-File geschrieben werden, das als Schnittstelle für die weitere Verarbeitung in (II) dient. Als Ergebnis liefert (I) eine Datei der Adjazenzlisten der 30.579 Graphen G^* mit $G \in \mathcal{F}_n$ und $n \leq 70$. Für technische Details zu dem Algorithmus sowie die Ein- und Ausgabemöglichkeiten sei auf Brinkmann und McKay verwiesen [9].

Nach Satz 5.6 kann $\nu(G)$ über $\alpha(G^*)$ bestimmt werden. In Schritt (II) werden die oberen Schranken an $\nu(G)$ für Fulleren-Graphen mit $n \leq 70$ durch die Bestimmung einer maximalen unabhängigen Menge innerhalb des Dual-Graphs G^* (der in Schritt (I) erzeugt wurde) ermittelt.

Eine maximale unabhängige Menge $U(G^*)$ von $V(G^*)$ (mit $|V(G^*)| = n^*$) kann bestimmt werden, indem das sog. *Maximum Independent-Set (MIS) Problem* (ein

Optimierungsproblem mit n^* binären Entscheidungsvariablen) gelöst wird. Hierbei ist die Entscheidungsvariable $x_i = 1$, falls $v_i \in U(G^*)$ und $x_i = 0$, falls $v_i \notin U(G^*)$.

Das Optimierungsproblem kann dann wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} & \max \quad \sum_{i=1}^{n^*} x_i \\ \text{u.d.N.} \quad & x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (v_i, v_j) \in E(G^*) \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, n^*\} \end{aligned}$$

Beispielsweise stellt `matlab` mit dem *Mixed Integer Linear Program (MILP)- Solver* ein Werkzeug zur Verfügung, welches das MIS Problem für die zugehörigen Dual-Graphen der Fulleren-Graphen mit $n \leq 70$ löst.

Für $n \leq 70$ und $j \in \{3, \dots, 13\}$ wird $|\{G \in \mathcal{F}_n \mid \nu(G) = j\}|$, also die Anzahl an nicht-isomorphen Fulleren-Graphen mit n Knoten und Kreispackungszahl j , innerhalb der Tabelle 5.2 aufgelistet. Ebenso ist für $n \leq 70$ die von Brinkmann und MacKay ermittelte Anzahl $|\mathcal{F}_n|$ an nicht-isomorphen Fulleren-Graphen in Tabelle 5.2 angeführt. Offensichtlich gilt: $|\mathcal{F}_n| = \sum_{j=3}^n |\{G \in \mathcal{F}_n \mid \nu(G) = j\}|$. Zudem ist die obere Schranke an $\nu(G) \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$ aus 5.1 hellgrün ausgewiesen. Diese wird für $n = 60$ (den IPR-Fulleren-Graphen zugehörig zum C_{60} - Buckyball) angenommen. Die untere Schranke an $\nu(G)$ mit $\nu(G) \geq \lceil \frac{n}{4} \rceil$, gegeben durch die Vier-Färbbarkeit von G^* (G^* ist planar) wird in hellrot ausgewiesen. Ebenso sei angeführt, dass für die in Satz 5.4 unberücksichtigten Fälle $n \in \{66, 68, 70\}$ gilt: Die Schranke aus Satz 5.4 ist bestmöglich für $n = 68$ und $n = 70$. Für $n = 66$ hingegen gilt: $\nu(G) = \frac{n}{6} + 1$.

Zusammen mit den Resultaten aus Abschnitt 5.1 für die oberen Schranken an $\nu(G)$ mit $G \in \mathcal{F}_n$ und $n \geq 70$ besteht somit eine vollständige Übersicht über bestmögliche obere Schranken an $\nu(G)$.

n	$\nu(G)$											$ \mathcal{F}_n $																		
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13																			
20	1												1																	
24		1											1																	
26			1										1																	
28				2									2																	
30					3								3																	
32						5	1						6																	
34							3	3					6																	
36								1	14				15																	
38									17				17																	
40										34	6		40																	
42											8	37	45																	
44												1	85	3	89															
46														98	18	116														
48															79	120	199													
50																2	263	6	271											
52																		400	37	437										
54																			339	240	1	580								
56																				87	820	17	924							
58																					1,118	87	1,205							
60																					1,234	575	2	1	1,812					
62																						433	1,926	26	2,385					
64																							6	3,282	175	2	3,465			
66																								3,459	1,014	5	4,478			
68																									2,234	4,022	76	6,332		
70																										136	7,636	375	2	8,149

Tabelle 5.2: Anzahlen an Fulleren-Graphen der Ordnung n sowie maximaler Kreispackungszahl $\nu(G)$ für $n \leq 70$. Für die hellgrün markierten Zellen gilt $\nu(G) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$. Die hellrot markierten Zellen gilt $\nu(G) = \lfloor \frac{f}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n+4}{8} \rfloor$. Bemerke, die obere Schranke an $\nu(G)$ mit $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2$ wird bspw. für $n = 60$ angenommen. Die untere Schranke $\nu(G) = \lfloor \frac{n+4}{8} \rfloor$ wird bspw. für $n = 52$ nicht angenommen.

5.4 Fulleren-Graphen mit “geringer“ maximaler Kreispackungszahl

Die untere Schranke $\lceil \frac{f}{4} \rceil$ an $\nu(G)$ resultiert aus der Planarität des betrachteten Graphen und basiert auf dem Vier-Farben Satz. Sie ist für kubisch, dreifach knotenzusammenhängende, planare Graphen bestmöglich. Beispielhaft gewählte kubische, polyhedrale Graphen G_k mit $\nu(G_k) = \lceil \frac{f}{4} \rceil$ die aus genau zwei Vierecksfacetten, acht Fünfecksfacetten und $4k$ Sechsecksfacetten bestehen sind in Abbildung 5.29 für $k \in \{0, 1\}$ skizziert.

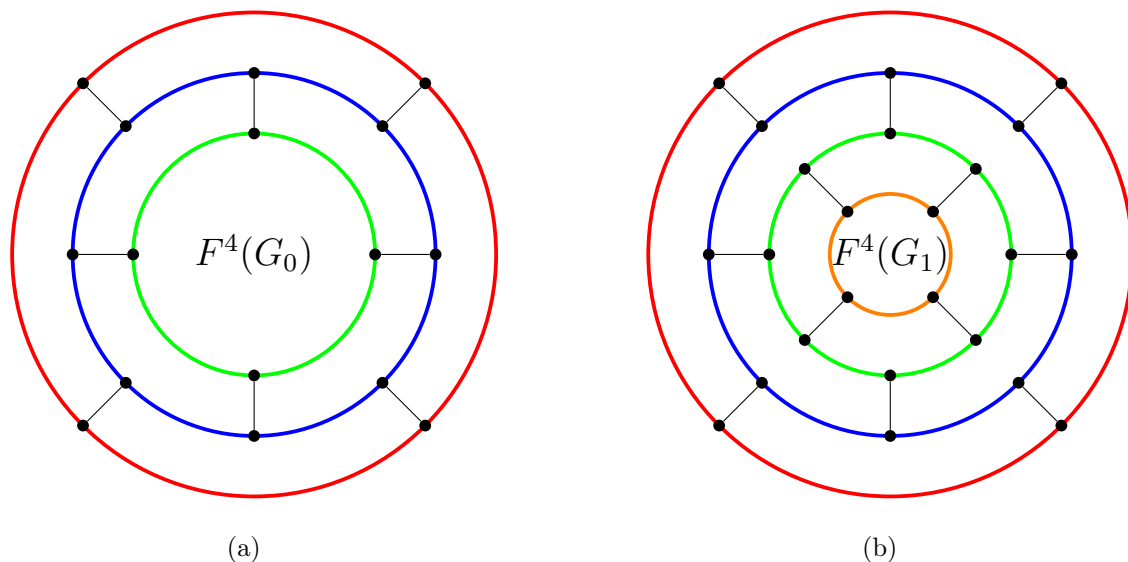


Abbildung 5.29: Zwei kubisch, polyhedrale Graphen G_k mit $k = 0$ (in (a)) und $k = 1$ (in (b)). Es gilt $\nu(G_k) = \lceil \frac{f}{4} \rceil$. Eine jeweils maximale Kreispackung ist in farblich dargestellt. Zudem besitzen beide Graphen G_0 und G_1 eine Facette $F^4(G_0)$ und $F^4(G_1)$.

Dabei ist die knotendisjunkte Kreispackung $Z(G_k)$ bestehend aus den farblich skizzierten Kreisen maximal in G_k . Für $k \in \{0, 1\}$ gilt: $\nu(G) = 3 + k$. Für $k \geq 2$ werden dann iterativ Graphen G_k ausgehend aus dem kubisch, polyhedralen Graphen G_{k-1} konstruiert, die die Eigenschaft $\nu(G_{k-1}) = 3 + (k - 1)$ erfüllen. Die Konstruktion erfolgt derart, dass

- die vier Kanten (u_i, u_{i+1}) , mit $i \in \{1, 2, 3\}$ sowie (u_1, u_4) der Vierecksfacette $F^4(G_{k-1}) \in F(G_{k-1})$ jeweils durch den Pfad (u_i, s_i, u_{i+1}) sowie (u_1, s_4, u_4) unterteilt werden

- sowie ein Kreis $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_1)$ sowie die Kanten (s_i, t_i) mit $i \in \{1, \dots, 4\}$ in $I(J(F^4(G_{k-1})))$ eingebettet wird.

Der so konstruierte Graph G_k ist kubisch und polyhedral. In [65] wird gezeigt (dort als Lemma 5.20, Seite 71-72):

$$\nu(G_k) = 3 + (k - 1) + 1 = 3 + k = \frac{12 + 4k}{4} = \left\lceil \frac{f}{4} \right\rceil.$$

Eine derartige Gleichheit gilt für Fulleren-Graphen allerdings im Allgemeinen nicht: aus der Tabelle 5.2 geht hervor, dass für $n \leq 50$ und $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ ein $G \in \mathcal{F}_n$ existiert, derart, dass $\nu(G) = \left\lceil \frac{f}{4} \right\rceil$. Für $n = 52$ gilt $\mathcal{F}_{52} \neq \emptyset$ und $\nu(G) > \left\lceil \frac{f}{4} \right\rceil$ für alle $G \in \mathcal{F}_{52}$.

Auch für

$$n \in \{58, 60, 66, 68, 72, \dots, 80\}$$

kann mit Hilfe der Lösung des MIS Problems in G^* nachgewiesen werden, dass kein Fulleren-Graph $G \in \mathcal{F}_n$ existiert mit $\nu(G) = \left\lceil \frac{f}{4} \right\rceil$.

In [31] wird bewiesen, dass $\alpha(G^*)$ und somit $\nu(G)$ für Fulleren-Graphen G mit speziellen Symmetrieeigenschaften asymptotisch proportional zu $\frac{f}{3}$ ist, d.h. für eine Folge G_k von Fulleren-Graphen mit diesen Symmetrieeigenschaften gilt: $\frac{\nu(G_k)}{|F(G_k)|} \rightarrow \frac{1}{3}$. Ferner wird dort die Frage aufgeworfen, ob diese Eigenschaft für Fulleren-Graphen im Allgemeinen zutreffend ist. Die Fragestellung wird dadurch motiviert, dass die Gebiete eines jeden Patches $P(C)$, welcher mit Ausnahme des äußeren Gebietes ausschließlich aus Sechsecksfacetten besteht, mit drei Farben gefärbt werden können.

Das Ziel des nachfolgenden Abschnittes ist es, aufzuzeigen, dass es Fulleren-Graphen gibt, die - bezogen auf die Anzahl f an Gebiete - eine "geringe" Kreispackungszahl besitzen. Dazu wird eine Folge G_k , $k = 1, 2, \dots$, von Fulleren-Graphen konstruiert mit der Eigenschaft

$$\frac{\nu(G_k)}{|F(G_k)|} \rightarrow \tau, \text{ mit } \tau \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right].$$

Im nachfolgenden Lemma 5.21 wird eine Folge von Fulleren-Graphen angegeben, welche die Eigenschaft besitzt: $\tau = \frac{3}{10}$.

Lemma 5.21. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert ein Fulleren-Graph $G_k \in \mathcal{F}_{20+20k}$ mit*

$$\nu(G_k) = \frac{3(|F(G_k)| - 12)}{10} + 3.$$

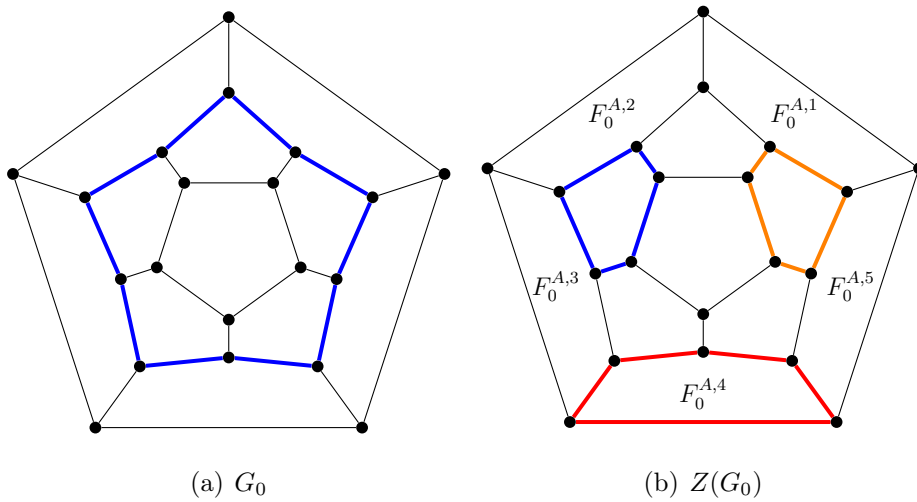


Abbildung 5.30: Die Darstellung zeigt den Fulleren-Graphen G_0 . Die blau skizzierte Kantenmenge in (a) ist die Kantenmenge eines Petriekreises der Länge 10 in G_0 . Die farblich skizzierte Kantenmenge in (b) visualisiert eine kanten- und knotendisjunkte Kreispackung $Z(G_0)$ in G_0 .

Beweis. Für $k = 0$ sei G_0 der in Abbildung 5.30(a) skizzierte Graph.

Dann erfüllt G_0 offenbar die folgenden Eigenschaften:

- $G_0 \in \mathcal{F}_{20}$ und somit $|V(G_0)| = 20$, $|E(G_0)| = 30$ und $|F(G_0)| = 12$.
- G_0 enthält einen Petriekreis C_0 der Länge 10 (blau skizzierter Kreis in Abbildung 5.30(a)).
- In G_0 gibt es fünf Fünfecksfacetten $F_0^{I,j} \in F(P^I(C_0))$, $j \in \{1, \dots, 5\}$, und $E(F_0^{I,j}) \cap E(C_0) \neq \emptyset$ sowie fünf Fünfecksfacetten $F_0^{A,j} \in F(P^A(C_0))$, $j \in \{1, \dots, 5\}$ und $E(F_0^{A,j}) \cap E(C_0) \neq \emptyset$. Dabei sei die Bezeichnung der Facetten $F_0^{I,j}$ und $F_0^{A,j}$ so gewählt, dass $E(F_0^{I,j}) \cap E(F_0^{A,j}) \neq \emptyset$ und $E(F_0^{I,j+1}) \cap E(F_0^{A,j}) \neq \emptyset$ (modulo 5). Vergleiche hierzu die in Abbildung 5.30(b) mit $F_0^{A,j}$ bezeichneten Facetten.
- Die Kreispackung

$$Z(G_0) := \{C(F_0^{I,1}), C(F_0^{I,3}), C(F_0^{A,4})\}$$

(farblich skizzierte Kreise in Abbildung 5.30(b)) ist knotendisjunkt.

- Aus Tabelle 5.2 ergibt sich, dass $\nu(G_0) = 3 = \frac{3(|F(G_0)|-12)}{10} + 3$.

Ausgehend vom Fulleren-Graph G_0 wird nun wie folgt der Fulleren-Graph G_1 konstruiert:

- (1) Betrachte die durch C_0 bestimmten Patches $P^I(C_0)$ und $P^A(C_0)$ in G_0 . Da C_0 ein Petriekreis ist, existieren in $P^I(C_0)$ und $P^A(C_0)$ jeweils genau fünf Knoten $v_i^I \in V(P^I(C_0))$ und $v_i^A \in V(P^A(C_0))$ mit $\delta(v_i^I) = \delta(v_i^A) = 2$.
- (2) Sei nun C_1 ein in der Ebene eingebetteter Kreis der Länge 10 und seien dessen Knoten $\{v_1, \dots, v_{10}\}$ derart, dass $(v_j, v_{j+1}) \in E(C_1)$ bzw. $(v_1, v_{10}) \in E(C_1)$. Dann gilt $\delta(v_j) = 2$.
- (3) Nun wird $P^A(C_0)$ in $A(J(C_1))$ und $P^I(C_0)$ in $I(J(C_1))$ eingebettet. Anschließend füge jeweils 5 Kanten (v_i^I, v_{2i}) sowie (v_i^A, v_{2i-1}) in $I(J(C_1))$ bzw. $A(J(C_1))$ ein. Bezeichne die so erzeugten 10 Sechsecksfacetten in $F(G_1)$ mit $F_1^{I,j}$ und $F_1^{A,j}$, $j \in \{1, \dots, 5\}$. Hierbei sei $F_1^{I,j} \in F(P^I(C_1))$ und $F_1^{A,j} \in F(P^A(C_1))$ sowie $E(F_1^{I,j}) \cap E(F_1^{A,j}) \neq \emptyset$ und $E(F_1^{I,j+1}) \cap E(F_1^{A,j}) \neq \emptyset$ (modulo 5).

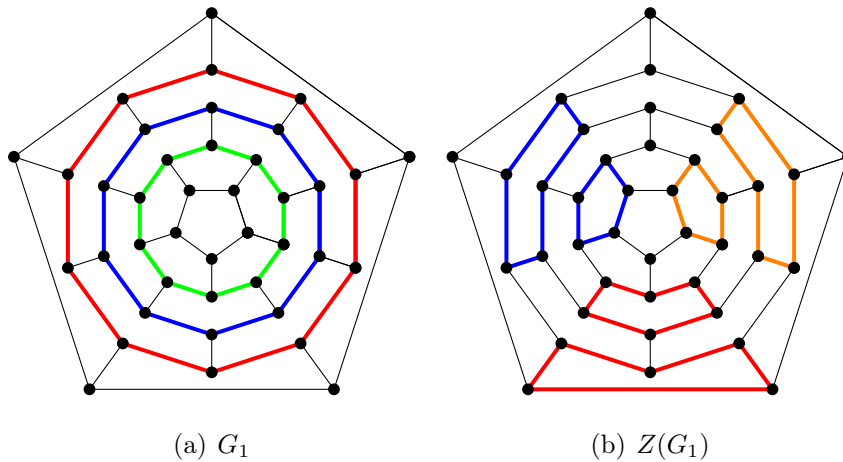


Abbildung 5.31: Die Darstellung zeigt den Fulleren-Graphen G_1 . Hierbei ist die rot, grün und blau dargestellte Kantenmenge jeweils die Kantenmenge eines Petriekreises der Länge 10 in (a). Der innere Patch des grün dargestellten Petriekreises in (a) entspricht dem inneren Patch des blau dargestellten Petriekreises in Abbildung 5.30(a). Der äußere Patch des rot dargestellten Petriekreises in (a) entspricht dem äußeren Patch des blau dargestellten Petriekreises in Abbildung 5.30(a). In (b) ist farblich eine Kreispackung $Z(G_1)$ visualisiert.

Dann erfüllt G_1 die folgenden Eigenschaften:

- G_1 ist ein Fulleren-Graph mit $|V(G_1)| = 40, |E(G_1)| = 60$ und $|F(G_1)| = |F(G_0)| + 10 = 22$.
- G_1 enthält mit C_1 einen Petriekreis der Länge 10 (blau dargestellter Kreis in Abbildung 5.31(a)). Zudem gibt es nach Konstruktion von G_1 zwei weitere Petriekreise C_0^A (in Abbildung 5.31(a) rot dargestellt) und C_0^I (in Abbildung 5.31(a) grün dargestellt) der Länge 10. Somit enthält G_1 drei Petriekreise der Länge 10. Dabei ist der Petriekreis C_0^I im Patch $P^I(C_1)$ und der Petriekreis C_0^A im Patch $P^A(C_1)$ enthalten.
- Die Patches $P^I(C_0^I)$ bzw. $P^A(C_0^A)$ in G_1 waren auch in G_0 enthalten. Nach Konstruktion entspricht $P^I(C_0^I)$ bzw. $P^A(C_0^A)$ genau dem inneren Patch $P^I(C_0)$ bzw. äußeren Patch $P^A(C_0)$ in G_0 . Vergleiche dazu Abbildung 5.30(a) und 5.31(a).
- Für $Z'(G_0) := \{C \in P^A(C_0^A) \cup P^I(C_0^I) \mid C \in Z(G_0) \text{ in } G_0\}$ in G_1 ist

$$Z(G_1) := Z'(G_0) \cup \{C(F_1^{A,1}), C(F_1^{A,3}), C(F_1^{I,5})\}$$

eine knotendisjunkte Kreispackung in G_1 . Es gilt $|Z(G_1)| = 6 = \frac{3(|F(G_1)|-12)}{10} + 3$ in G_1 (vergleiche dazu die farblich skizzierten Kreise in Abbildung 5.31(b)).

Nach Konstruktion von G_1 gilt, $P^I(C_1) = P^A(C_1)$ und $P^I(C_1)$ ist homöomorph zu G_0 . Somit ist $\nu(G_0) = \nu(P^I(C_1)) = \nu(P^A(C_1))$. Folglich ist

$$\nu(G_1) \leq \nu(P^I(C_1)) + \nu(P^I(C_1)) = 2\nu(G_0) = 6.$$

Somit $Z(G_1)$ eine maximale knotendisjunkte Kreispackung in G_1 .

Nachdem für den Graphen $G_1 \in \mathcal{F}_{40}$ verdeutlicht wurde, wie sich dieser aus G_0 ergibt, und welche Eigenschaften G_1 besitzt, soll diese Konstruktionssystematik nun induktiv angewendet werden. Es sei dazu angenommen, dass für es $k \geq 1$ einen Fulleren-Graphen $G_k \in \mathcal{F}_{20+20k}$ gibt, der die nachfolgenden Eigenschaften (6) besitzt.

- $|V(G_k)| = 20(k + 1), |E(G_k)| = 30(k + 1)$ und $|F(G_k)| = |F(G_0)| + 10k$.
- Es existiert ein Petriekreis C_k der Länge 10 in G_k , derart, dass k Petriekreise der Länge 10 sowohl in $P^I(C_k)$ als auch k Petriekreise der Länge 10 in $P^A(C_k)$ enthalten sind. G_k enthält somit $2k + 1$ Petriekreise.

- Es existiert ein Petriekreis C_0^I (bzw. C_0^A) und der innere Patch $P^I(C_0^I)$ (bzw. der äußere Patch $P^A(C_0^A)$) in G_k entspricht dem inneren Patch $P^I(C_0)$ (bzw. äußeren Patch $P^A(C_0)$) in G_0 . Vergleiche dazu Abbildung 5.30(a).
- Es gilt $\nu(G_k) = 2\nu(G_0) + 3(k-1) = \frac{3(|F(G_k)|-12)}{10} + 3$.

Nach Konstruktion erfüllt G_1 die Eigenschaften (6). Die Tatsache, dass G_k die Eigenschaft (6) besitzt, wird nun zur Konstruktion von G_{k+1} genutzt. Es sei nun G_{k+1} der wie folgt ausgehend von G_k konstruierte Graph:

- (1) Betrachte die zwei Patches $P^I(C_k)$ und $P^A(C_k)$ in G_k . Da C_k ein Petriekreis ist, existieren in $P^I(C_k)$ und $P^A(C_k)$ jeweils genau fünf Knoten $v_i^I \in V(P^I(C_k))$ und $v_i^A \in V(P^A(C_k))$ mit $\delta(v_i^I) = \delta(v_i^A) = 2$.
- (2) Sei nun C_{k+1} ein in der Ebene eingebetteter Kreis der Länge 10 und seien dessen Knoten $\{v_1, \dots, v_{10}\}$ derart, dass $(v_j, v_{j+1}) \in E(C_{k+1})$ bzw. $(v_1, v_{10}) \in E(C_{k+1})$. Dann gilt $\delta(v_j) = 2$.
- (3) Bette nun $P^A(C_k)$ in $A(J(C_{k+1}))$ und $P^I(C_k)$ in $I(J(C_{k+1}))$ ein und füge jeweils 5 Kanten (v_i^I, v_{2i}) sowie (v_i^A, v_{2i-1}) in $I(J(C_{k+1}))$ bzw. $A(J(C_{k+1}))$ ein. Bezeichne die so erzeugten 10 Sechsecksfacetten in $F(G_{k+1})$ mit $F_{k+1}^{I,j}$ und $F_{k+1}^{A,j}$, $j \in \{1, \dots, 5\}$. Hierbei sei $F_{k+1}^{I,j} \in F(P^I(C_{k+1}))$ und $F_{k+1}^{A,j} \in F(P^A(C_{k+1}))$ sowie $E(F_{k+1}^{I,j}) \cap E(F_{k+1}^{A,j}) \neq \emptyset$ und $E(F_{k+1}^{I,j+1}) \cap E(F_{k+1}^{A,j}) \neq \emptyset$ (modulo 5).

Dann erfüllt G_{k+1} die folgenden Eigenschaften:

- G_{k+1} ist ein Fulleren-Graph mit $|V(G_{k+1})| = 20(k+2)$, $|E(G_{k+1})| = 30(k+2)$ und $|F(G_{k+1})| = |F(G_k)| + 10 = |F(G_0)| + 10(k+1)$.
- G_{k+1} enthält (genau wie auch in G_k) $2k$ Petriekreise, die ungleich C_k sind, nicht aber C_k . Somit auch die Petriekreise C_0^I, C_0^A . Zudem enthält G_{k+1} drei Petriekreise C_k^I, C_k^A und C_{k+1} der Länge 10 die nach Konstruktion aber nicht in G_k enthalten sind. Folglich enthält G_{k+1} dann $2(k+1) + 1$ Petriekreise der Länge 10.
- In G_{k+1} entsprechen die Patches $P^I(C_0^I)$ bzw. $P^A(C_0^A)$ (genau wie auch in G_k) dem inneren Patch $P^I(C_0)$ bzw. äußeren Patch $P^A(C_0)$ in G_0 .

- Sei $Z(G_k)$ maximal in G_k und $Z'(G_k) := \{C \in P^A(C_k^A) \cup P^I(C_k^I) \mid C \in Z(G_k) \text{ in } G_k\}$ in G_{k+1} . Falls k eine gerade Zahl ist, dann ist

$$Z(G_{k+1}) := Z'(G_k) \cup \{C(F_{k+1}^{A,1}), C(F_{k+1}^{A,3}), C(F_{k+1}^{I,5})\}$$

eine knotendisjunkte Kreispackung mit $|Z(G_{k+1})| = \frac{3(|F(G_{k+1})|-12)}{10} + 3$ in G_{k+1} .

Sonst ist

$$Z(G_{k+1}) := Z'(G_k) \cup \{C(F_{k+1}^{I,1}), C(F_{k+1}^{I,3}), C(F_{k+1}^{A,4})\}$$

eine knotendisjunkte Kreispackung mit $|Z(G_{k+1})| = \frac{3(|F(G_{k+1})|-12)}{10} + 3$ in G_{k+1} .

Da C_{k+1} ein Petriekreis der Länge 10 ist, gilt für jede Kreispackung $Z^*(G_{k+1})$ in G_{k+1} , dass höchstens 3 Kreise $C'_i \in Z^*(G_{k+1})$, $i \in \{1, \dots, 3\}$ die Eigenschaft besitzen, dass $E(C'_i) \cap E(C_{k+1}) \neq \emptyset$. Dies gilt auch für die $2(k+1)$ Petriekreise der Länge 10 ungleich C_{k+1} in G_{k+1} . Sei $Z_{PK}(G_{k+1})$ die Kreispackung bestehend aus den $2(k+1) + 1$ knotendisjunkten Petriekreisen der Länge 10 in G_{k+1} . Sei $Z'_{PK}(G_{k+1}) := Z_{PK}(G_{k+1}) \setminus \{C_0^I, C_0^A\}$. Sei

$$V_{PK} := \{v \in V(G_{k+1}) \mid v \in V(Z'_{PK}(G_{k+1}))\}.$$

Zudem sei nun

$$P^A(C_1^I) \setminus P^A(\tilde{C}_1^A)$$

der von V_{PK} knoteninduzierte Teilgraph von G_{k+1} . Nach Konstruktion von G_{k+1} besteht $F(P^A(C_1^I) \setminus P^A(\tilde{C}_1^A))$ aus genau zwei Facetten, deren Facettenkreise die Länge 10 besitzen, und sonst ausschließlich aus Sechsecksfacetten. Die Anzahl der Sechsecksfacetten in $F(P^A(C_1^I) \setminus P^A(\tilde{C}_1^A))$ ist $10k$.

Dann gilt für G_{k+1} :

$$\begin{aligned}
\nu(G_{k+1}) &\leq \nu(P^I(C_1^I)) + \nu(P^A(C_1^I)) \\
&\leq \nu(P^I(C_1^I)) + \nu(P^A(C_1^A)) + \nu(P^A(C_1^I) \setminus P^A(C_1^A)) \\
&= 2\nu(G_0) + \nu(P^A(C_1^I) \setminus P^A(C_1^A)) \\
&\leq 2\nu(G_0) + 3k \\
&= 2\nu(G_0) + 3(k-1) + 3 \\
&= \nu(G_k) + 3 \\
&= \frac{3(|F(G_k)| - 12)}{10} + 3 + 3 \\
&= \frac{3(|F(G_{k+1})| - 12)}{10} + 3.
\end{aligned}$$

Da mit $Z(G_{k+1})$ eine Kreispackung in G_{k+1} mit $|Z(G_{k+1})| = \frac{3(|F(G_{k+1})| - 12)}{10} + 3$ existiert, ist $Z(G_{k+1})$ maximal und es gilt

$$\nu(G_{k+1}) = \frac{3(|F(G_{k+1})| - 12)}{10} + 3.$$

Folglich erfüllt G_{k+1} die Eigenschaften (6) und Lemma 5.21 ist bewiesen. □

Betrachtet man nun die Folge $G_k, k = 1, 2, \dots$ von Fulleren-Graphen so ergibt sich für $k \rightarrow \infty$, dass

$$\frac{\nu(G_k)}{|F(G_k)|} = \frac{3(|F(G_k)| + 12)}{10|F(G_k)|} + \frac{3}{|F(G_k)|} \rightarrow \tau = \frac{3}{10}.$$

Dieser Quotient kann sogar noch verkleinert werden, wenn an Stelle der Graphen G_k andere Fulleren-Graphen \tilde{G}_k aus \mathcal{F}_{36+28k} heranzieht. Auch hier werden die Graphen induktiv erzeugt. Es lässt sich zeigen:

Lemma 5.22. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert ein Fulleren-Graph $G_k \in \mathcal{F}_{36+28k}$ mit*

$$\nu(\tilde{G}_k) = \frac{4(|F(\tilde{G}_k)| - 6)}{14} + 2.$$

Beweis. Für $k = 0$ sei \tilde{G}_0 der in Abbildung 5.32(a) skizzierte Graph.

Dann besitzt \tilde{G}_0 die folgenden Eigenschaften:

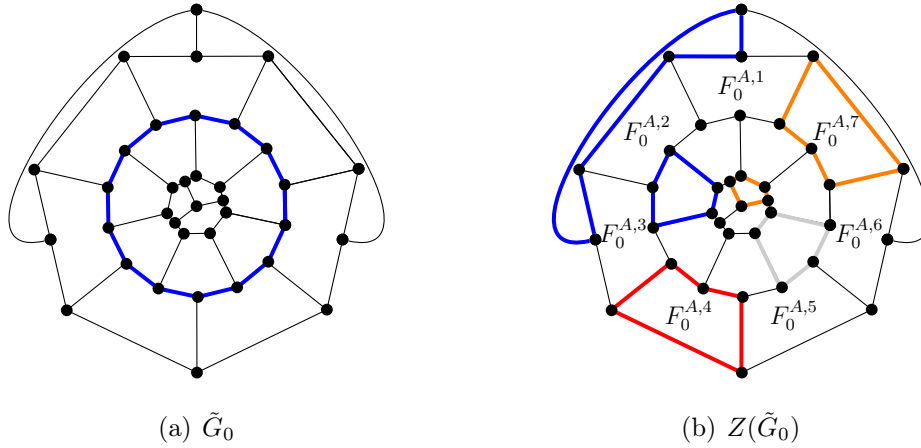


Abbildung 5.32: Die Darstellung zeigt den Fulleren-Graphen \tilde{G}_0 . Die blau skizzierte Kantenmenge in (a) ist die Kantenmenge eines Petriekreises der Länge 14 in \tilde{G}_0 . Die farblich skizzierte Kantenmenge in (b) visualisiert eine kanten- und knotendisjunkte Kreispackung $Z(\tilde{G}_0)$ in \tilde{G}_0 .

- $\tilde{G}_0 \in \mathcal{F}_{36}$, $|V(\tilde{G}_0)| = 36$, $|E(\tilde{G}_0)| = 54$ und $|F(\tilde{G}_0)| = |F(\tilde{G}_0)| = 20$.
- \tilde{G}_0 enthält mit \tilde{C}_0 (blau skizzierter Kreis in Abbildung 5.32(a)) einen Petriekreis der Länge 14.
- In \tilde{G}_0 gibt es sieben Facetten $F_0^{I,j} \in F(P^I(\tilde{C}_0))$, $j \in \{1, \dots, 7\}$ und $E(F_0^{I,j}) \cap E(\tilde{C}_0) \neq \emptyset$ sowie sieben Facetten $F_0^{A,j} \in F(P^A(\tilde{C}_0))$, $j \in \{1, \dots, 7\}$ und $E(F_0^{A,j}) \cap E(\tilde{C}_0) \neq \emptyset$. Dabei sei die Bezeichnung der Facetten $F_0^{I,j}$ und $F_0^{A,j}$ so gewählt, dass $E(F_0^{I,j}) \cap E(F_0^{A,j}) \neq \emptyset$ und $E(F_0^{I,j+1}) \cap E(F_0^{A,j}) \neq \emptyset$ (modulo 7). Vergleiche hierzu die in Abbildung 5.32(b) mit $F_0^{A,j}$ bezeichneten Facetten.
- In $P^I(\tilde{C}_0)$ existiert ein Kreis \tilde{C}^I mit $E(\tilde{C}^I) \cap E(\tilde{C}_0) = \emptyset$, $E(\tilde{C}^I) \cap E(C(F_0^{I,3})) = \emptyset$ und $E(\tilde{C}^I) \cap E(C(F_0^{I,6})) = \emptyset$. Zudem gibt es in $P^A(\tilde{C}_0)$ einen Kreis \tilde{C}^A mit $E(\tilde{C}^A) \cap E(\tilde{C}_0) = \emptyset$, $E(\tilde{C}^A) \cap E(C(F_0^{A,4})) = \emptyset$ und $E(\tilde{C}^A) \cap E(C(F_0^{A,7})) = \emptyset$. In Abbildung 5.32(b) ist \tilde{C}^I orangefarbig und \tilde{C}^A blau dargestellt.
- Dann ist die Kreispackung

$$Z(\tilde{G}_0) := \{C(F_0^{I,3}), C(F_0^{I,6}), C(F_0^{A,4}), C(F_0^{A,7})\} \cup \{\tilde{C}^I, \tilde{C}^A\}$$

(vergleiche dazu die farblich skizzierten Kreise in Abbildung 5.32(b)) knotendisjunkt in \tilde{G}_0 . Es gilt $|Z(\tilde{G}_0)| = 6$.

- Aufgrund der Symmetrie von \tilde{G}_0 ist $\nu(P^I(\tilde{C}_0)) = \nu(P^A(\tilde{C}_0))$. Es gilt

$$\nu(P^I(\tilde{C}_0)) = 3.$$

- Aus Tabelle 5.2 ergibt sich, dass $\nu(\tilde{G}_0) \leq 6$. Da $|Z(\tilde{G}_0)| = 6$ ist, folgt:

$$\nu(\tilde{G}_0) = \frac{4(|F(\tilde{G}_0)| - 6)}{14} + 2.$$

Ausgehend von \tilde{G}_0 wird nun wie folgt der Fulleren-Graph \tilde{G}_1 konstruiert:

- (1) Betrachte die zwei Patches $P^I(\tilde{C}_0)$ und $P^A(\tilde{C}_0)$ in \tilde{G}_0 . Da \tilde{C}_0 ein Petriekreis ist, existieren in $P^I(\tilde{C}_0)$ und $P^A(\tilde{C}_0)$ jeweils genau sieben Knoten $v_i^I \in V(P^I(\tilde{C}_0))$ und $v_i^A \in V(P^A(\tilde{C}_0))$ mit $\delta(v_i^I) = \delta(v_i^A) = 2$.
- (2) Sei nun \tilde{C}_1 ein in der Ebene eingebetteter Kreis der Länge 14 und seien dessen Knoten $\{v_1, \dots, v_{14}\}$ derart, dass $(v_j, v_{j+1}) \in E(C_1)$ sowie $(v_1, v_{14}) \in E(C_1)$. Offensichtlich gilt $\delta(v_j) = 2$.
- (3) Sei nun $P^A(\tilde{C}_0)$ in $A(J(\tilde{C}_1))$ und $P^I(\tilde{C}_0)$ in $I(J(\tilde{C}_1))$ eingebettet. Dann seien jeweils 7 Kanten (v_i^I, v_{2i}) sowie (v_i^A, v_{2i-1}) in $I(J(\tilde{C}_1))$ bzw. $A(J(\tilde{C}_1))$ eingefügt. Bezeichne die so erzeugten 14 Sechsecksfacetten in $F(\tilde{G}_1)$ mit $F_1^{I,j}$ und $F_1^{A,j}$, $j \in \{1, \dots, 7\}$. Hierbei sei $F_1^{I,j} \in F(P^I(\tilde{C}_1))$ und $F_1^{A,j} \in F(P^A(\tilde{C}_1))$ sowie $E(F_1^{I,j}) \cap E(F_1^{A,j}) \neq \emptyset$ und $E(F_1^{I,j+1}) \cap E(F_1^{A,j}) \neq \emptyset$ (modulo 7).

Dann erfüllt \tilde{G}_1 die folgenden Eigenschaften:

- \tilde{G}_1 ist ein Fulleren-Graph mit $|V(\tilde{G}_1)| = 64$, $|E(\tilde{G}_1)| = 96$ und $|F(\tilde{G}_1)| = |F(\tilde{G}_0)| + 14 = 34$.
- \tilde{G}_1 enthält mit \tilde{C}_1 einen Petriekreis der Länge 14. Vergleiche dazu den blau dargestellten Kreis in Abbildung 5.33(a). Zudem existieren nach Konstruktion von \tilde{G}_1 mit \tilde{C}_0^A (in Abbildung 5.33(a) rot dargestellt) und \tilde{C}_0^I (in Abbildung 5.33(a) grün dargestellt) zwei weitere Petriekreise der Länge 14. Somit enthält \tilde{G}_1 drei Petriekreise der Länge 14. Hierbei ist \tilde{C}_0^I in $P^I(\tilde{C}_1)$ und \tilde{C}_0^A in $P^A(\tilde{C}_1)$ enthalten.
- In \tilde{G}_1 gibt es mit $P^I(\tilde{C}_0^I)$ bzw. $P^A(\tilde{C}_0^A)$ zwei Patches, die genau dem inneren Patch $P^I(\tilde{C}_0)$ bzw. äußeren Patch $P^A(\tilde{C}_0)$ in \tilde{G}_0 entsprechen. Vergleiche dazu Abbildung 5.32(a) und 5.33(a).

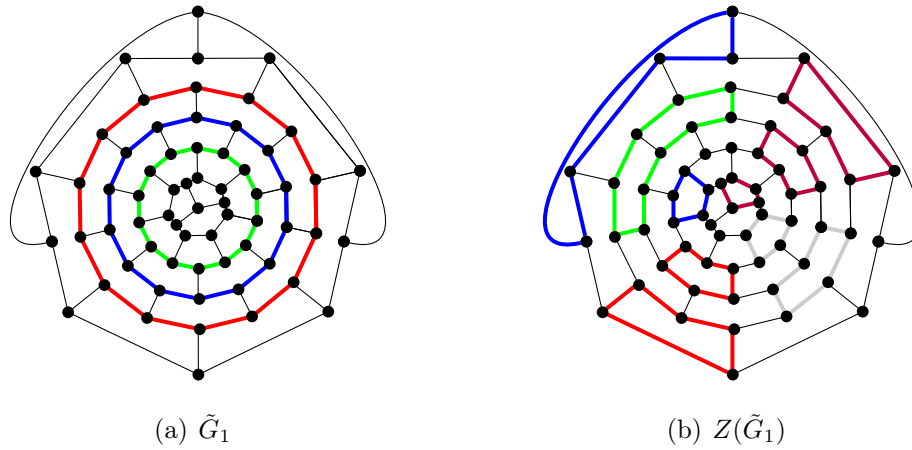


Abbildung 5.33: Die Darstellung zeigt den Fulleren-Graphen \tilde{G}_1 . Hierbei ist die rot, grün und blau dargestellte Kantenmenge jeweils die Kantenmenge eines Petriekreises der Länge 14 in (a). Der innere Patch des grün dargestellten Petriekreises in (a) entspricht dem inneren Patch des blau dargestellten Petriekreises in Abbildung 5.32(a). Der äußere Patch des rot dargestellten Petriekreises in (a) entspricht dem äußeren Patch des blau dargestellten Petriekreises in Abbildung 5.32(a). In (b) ist farblich eine Kreispackung $Z(\tilde{G}_1)$ visualisiert. Anzumerken ist hierbei, dass in $Z(\tilde{G}_1)$ ein Kreis der Länge 10 enthalten ist (hier grün gekennzeichnet).

- Ferner gibt es in \tilde{G}_1 mit $C(F_1^{A,1}, F_1^{A,2})$ einen Kreis der Länge 10, derart, dass $P^I(C(F_1^{A,1}, F_1^{A,2}))$ ausschließlich die beiden Sechsecksfacetten $F_1^{A,1}$ und $F_1^{A,2}$ enthält. Vergleiche dazu den in Abbildung 5.33(b) grün skizzierten Kreis.
- Sei $Z'(\tilde{G}_0) := \{C \in P^A(C_0^A) \cup P^I(C_0^I) \mid C \in Z(\tilde{G}_0) \text{ in } \tilde{G}_0\}$ in \tilde{G}_1 .

Dann ist die Kreispackung

$$Z(\tilde{G}_1) := Z'(\tilde{G}_0) \cup \{C(F_1^{A,1}, F_1^{A,2}), C(F_1^{A,5}), C(F_1^{I,4}), C(F_1^{I,7})\}$$

(vergleiche die farblich skizzierten Kreise in Abbildung 5.33(b)) knotendisjunkt in \tilde{G}_1 . Es gilt $|Z(\tilde{G}_1)| = 10 = \frac{4(|F(\tilde{G}_k)|-6)}{14} + 2$.

Da \tilde{C}_1 ein Petriekreis der Länge 14 ist, gilt für jede Kreispackung $Z^*(\tilde{G}_1)$ in \tilde{G}_1 , dass höchstens 4 Kreise $C'_i \in Z^*(\tilde{G}_1), i \in \{1, \dots, 4\}$ die Eigenschaft besitzen, dass $E(C'_i) \cap E(\tilde{C}_1) \neq \emptyset$. Dann gilt aber nach Konstruktion von \tilde{G}_1 :

$$\nu(\tilde{G}_1) \leq \nu(P^I(\tilde{C}_1^I)) + \nu(P^A(\tilde{C}_1^A)) + 4 = 2\nu(P^I(\tilde{C}_0)) + 4 = 10.$$

Somit ist $\nu(\tilde{G}_1) = \frac{4(|F(\tilde{G}_1)|-6)}{14} + 2 = 10$.

Da für den Graphen $\tilde{G}_1 \in \mathcal{F}_{64}$ verdeutlicht wurde, wie sich dieser aus \tilde{G}_0 ergibt, und welche Eigenschaften \tilde{G}_1 besitzt, soll diese Konstruktionssystematik nun induktiv angewendet werden. Es sei dazu angenommen, dass für es $k \geq 1$ einen Fulleren-Graphen $\tilde{G}_k \in \mathcal{F}_{36+28k}$ gibt, der die nachfolgenden Eigenschaften (7) besitzt.

- $|V(\tilde{G}_k)| = 36 + 28k$, $|E(\tilde{G}_k)| = 54 + 42k$ und $|F(\tilde{G}_k)| = |F(\tilde{G}_0)| + 14k$.
- In \tilde{G}_k existiert ein Petriekreis \tilde{C}_k der Länge 14 in \tilde{G}_k , derart, dass k Petriekreise der Länge 14 sowohl in $P^I(\tilde{C}_k)$ als auch k Petriekreise der Länge 14 in $P^A(\tilde{C}_k)$ enthalten sind. Dann enthält $2k + 1$ Petriekreise der Länge 14.
- Es existiert ein Petriekreis \tilde{C}_0^I (bzw. \tilde{C}_0^A) und der innere Patch $P^I(\tilde{C}_0^I)$ (bzw. der äußere Patch $P^A(\tilde{C}_0^A)$) in \tilde{G}_k entspricht dem inneren Patch $P^I(\tilde{C}_0)$ (bzw. äußeren Patch $P^A(\tilde{C}_0)$) in \tilde{G}_0 . Vergleiche dazu Abbildung 5.32(a).
- Sowie $\nu(\tilde{G}_k) = 2\nu(P^I(\tilde{C}_0)) + 4k = \frac{4(|F(\tilde{G}_k)|-6)}{14} + 2$.

Nach Konstruktion erfüllt \tilde{G}_1 die Eigenschaften (7). Da \tilde{G}_k die Eigenschaften (7) erfüllt, kann nun \tilde{G}_{k+1} wie folgt aus \tilde{G}_k konstruiert werden:

- (1) Betrachte die zwei Patches $P^I(\tilde{C}_k)$ und $P^A(\tilde{C}_k)$ in \tilde{G}_k . Da \tilde{C}_k ein Petriekreis ist, existieren in $P^I(\tilde{C}_k)$ und $P^A(\tilde{C}_k)$ jeweils genau sieben Knoten $v_i^I \in V(P^I(\tilde{C}_k))$ und $v_i^A \in V(P^A(\tilde{C}_k))$ mit $\delta(v_i^I) = \delta(v_i^A) = 2$.
- (2) Sei nun \tilde{C}_{k+1} ein in der Ebene eingebetter Kreis der Länge 14 und seien dessen Knoten $\{v_1, \dots, v_{14}\}$ derart, dass $(v_j, v_{j+1}), (v_{14}, v_1) \in E(\tilde{C}_{k+1})$. Es gilt $\delta(v_j) = 2$.
- (3) Bette nun $P^A(\tilde{C}_k)$ in $A(J(\tilde{C}_{k+1}))$ und $P^I(\tilde{C}_k)$ in $I(J(\tilde{C}_{k+1}))$ ein und füge jeweils 7 Kanten (v_i^I, v_{2i}) sowie (v_i^A, v_{2i-1}) in $I(J(\tilde{C}_{k+1}))$ bzw. $A(J(\tilde{C}_{k+1}))$ ein. Bezeichne die so erzeugten 14 Sechsecksfacetten in $F(\tilde{G}_{k+1})$ mit $F_{k+1}^{I,j}$ und $F_{k+1}^{A,j}$, $j \in \{1, \dots, 7\}$. Hierbei sei $F_{k+1}^{I,j} \in F(P^I(\tilde{C}_{k+1}))$ und $F_{k+1}^{A,j} \in F(P^A(\tilde{C}_{k+1}))$ sowie $E(F_{k+1}^{I,j}) \cap E(F_{k+1}^{A,j}) \neq \emptyset$ und $E(F_{k+1}^{I,j+1}) \cap E(F_{k+1}^{A,j}) \neq \emptyset$ (modulo 7).

Die Konstruktionssystematik von \tilde{G}_{k+1} ausgehend von \tilde{G}_k ist folglich identisch zu der Konstruktion von \tilde{G}_1 ausgehend von \tilde{G}_0 .

Dann erfüllt \tilde{G}_{k+1} die folgenden Eigenschaften:

- \tilde{G}_{k+1} ist ein Fulleren-Graph mit $|V(\tilde{G}_{k+1})| = 36 + 28(k + 1)$, $|E(\tilde{G}_{k+1})| = 54 + 42(k + 1)$ und $|F(\tilde{G}_{k+1})| = |F(\tilde{G}_k)| + 14 = |F(\tilde{G}_0)| + 14(k + 1)$.

- Nach der Konstruktion von \tilde{G}_{k+1} enthält \tilde{G}_{k+1} (genau wie auch in \tilde{G}_k) $2k$ Petriekreise, die ungleich \tilde{C}_k sind, nicht aber \tilde{C}_k . Somit auch C_0^I, C_0^A . Zudem enthält \tilde{G}_{k+1} drei Petriekreise $\tilde{C}_k^I, \tilde{C}_k^A$ und \tilde{C}_{k+1} der Länge 14, die nach Konstruktion aber nicht in \tilde{G}_k enthalten sind. Folglich enthält \tilde{G}_{k+1} dann $2(k+1) + 1$ Petriekreise der Länge 14.
- In \tilde{G}_{k+1} entspricht $P^I(\tilde{C}_0^I)$ bzw. $P^A(\tilde{C}_0^A)$ (genau wie auch in \tilde{G}_k) dem inneren Patch $P^I(\tilde{C}_0)$ bzw. äußeren Patch $P^A(\tilde{C}_0)$ in \tilde{G}_0 .
- Sei $Z(\tilde{G}_k)$ maximal in \tilde{G}_k und sei $Z'(\tilde{G}_k) := \{C \in P^A(C_k^A) \cup P^I(C_k^I) \mid C \in Z(\tilde{G}_k) \text{ in } \tilde{G}_{k+1}\}$ in \tilde{G}_{k+1} . Falls k eine gerade Zahl ist, dann ist

$$Z(\tilde{G}_{k+1}) := Z'(\tilde{G}_k) \cup \{C(F_{k+1}^{A,1}, F_{k+1}^{A,2}), C(F_{k+1}^{A,5}), C(F_{k+1}^{I,4}), C(F_{k+1}^{I,7})\}$$

eine knotendisjunkte Kreispackung mit $|Z(\tilde{G}_{k+1})| = \frac{4(|F(\tilde{G}_k)|-6)}{14} + 2$ in \tilde{G}_{k+1} .

Sonst ist

$$Z(\tilde{G}_{k+1}) := Z'(\tilde{G}_k) \cup \{C(F_{k+1}^{I,2}, C(F_{k+1}^{I,3}), C(F_{k+1}^{I,6}), C(F_{k+1}^{A,4}), C(F_{k+1}^{A,7})\}$$

eine knotendisjunkte Kreispackung mit $|Z(\tilde{G}_{k+1})| = \frac{4(|F(\tilde{G}_k)|-6)}{14} + 2$ in \tilde{G}_{k+1} .

Da \tilde{C}_{k+1} ein Petriekreis der Länge 14 ist, gilt für jede Kreispackung $Z^*(\tilde{G}_{k+1})$ in \tilde{G}_{k+1} , dass höchstens 4 Kreise $C'_i \in Z^*(\tilde{G}_{k+1}), i \in \{1, \dots, 4\}$ die Eigenschaft besitzen, dass $E(C'_i) \cap E(\tilde{C}_{k+1}) \neq \emptyset$. Dies gilt auch für die $2(k+1)$ Petriekreise der Länge 14 ungleich \tilde{C}_{k+1} in \tilde{G}_{k+1} . Sei $Z_{PK}(\tilde{G}_{k+1})$ die Kreispackung bestehend aus den $2(k+1) + 1$ knotendisjunkten Petriekreisen der Länge 14 in \tilde{G}_{k+1} . Sei

$$V_{PK} := \{v \in V(\tilde{G}_{k+1}) \mid v \in V(Z_{PK}(\tilde{G}_{k+1}))\}.$$

Zudem sei nun

$$P^A(\tilde{C}_0^I) \setminus P^A(\tilde{C}_0^A)$$

der von V_{PK} knoteninduzierte Teilgraph von \tilde{G}_{k+1} . Nach Konstruktion von \tilde{G}_{k+1} besteht $F(P^A(\tilde{C}_0^I) \setminus P^A(\tilde{C}_0^A))$ aus genau zwei Facetten, deren Facettenkreise die Länge 14 besitzen, und sonst ausschließlich aus Sechsecksfacetten. Die Anzahl der Sechsecksfacetten in $F(P^A(\tilde{C}_0^I) \setminus P^A(\tilde{C}_0^A))$ ist $14(k+1)$.

Dann gilt für \tilde{G}_{k+1} :

$$\begin{aligned}
 \nu(\tilde{G}_{k+1}) &\leq \nu(P^I(\tilde{C}_0^I)) + \nu(P^A(\tilde{C}_0^I)) \\
 &\leq \nu(P^I(\tilde{C}_0^I)) + \nu(P^A(\tilde{C}_0^A)) + \nu(P^A(\tilde{C}_0^I) \setminus P^A(\tilde{C}_0^A)) \\
 &= 2\nu(P^I(\tilde{C}_0)) + \nu(P^A(\tilde{C}_0^I) \setminus P^A(\tilde{C}_0^A)) \\
 &\leq 2\nu(P^I(\tilde{C}_0)) + 4(k+1) \\
 &= 2\nu(P^I(\tilde{C}_0)) + 4k + 4 \\
 &= \nu(\tilde{G}_k) + 4 \\
 &= \frac{4(|F(\tilde{G}_k)| - 6)}{14} + 2 + 4 \\
 &= \frac{4(|F(\tilde{G}_{k+1})| - 6)}{14} + 2.
 \end{aligned}$$

Da mit $Z(\tilde{G}_{k+1})$ eine Kreispackung in \tilde{G}_{k+1} mit $|Z(\tilde{G}_{k+1})| = \frac{4(|F(\tilde{G}_{k+1})| - 6)}{14} + 2$ existiert, ist $Z(\tilde{G}_{k+1})$ maximal und es gilt

$$\nu(\tilde{G}_{k+1}) = \frac{4(|F(\tilde{G}_{k+1})| - 6)}{14} + 2.$$

Folglich erfüllt \tilde{G}_{k+1} die Eigenschaften (7) und Lemma 5.22 ist bewiesen. □

Betrachtet man nun die Folge $\tilde{G}_k, k = 1, 2, \dots$ von Fulleren-Graphen so ergibt sich für $k \rightarrow \infty$, dass

$$\frac{\nu(\tilde{G}_k)}{|F(\tilde{G}_k)|} = \frac{4(|F(\tilde{G}_k)| - 6)}{14|F(\tilde{G}_k)|} + \frac{2}{|F(\tilde{G}_k)|} \rightarrow \tau = \frac{2}{7}.$$

Abschließend sei zu bemerken, dass mit Hilfe der Fulleren-Graphen \tilde{G}_k mit $f \in \{20 + 14k \mid k \geq 1\}$ gezeigt wird, dass für jedes k ein Fulleren-Graph \tilde{G}_k existiert, der eine maximale Kreispackung $Z(\tilde{G}_k)$ besitzt, die k Nicht-Facettenkreise der Länge 10 enthält.

Korollar 5.23. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert ein Fulleren-Graph \tilde{G}_k , der eine maximale Kreispackung $Z(\tilde{G}_k)$ besitzt, die k Nicht-Facettenkreise enthält.*

Beweis. Im Beweis zu Lemma 5.22 wird mit $Z(\tilde{G}_k)$ für die dort konstruierten Graphen \tilde{G}_k eine maximale Kreispackung angegeben, die k Kreise der Länge 10 enthält. □

6 Resultate und Fazit

Abschließend werden nun die in den vorausgegangenen Kapiteln erzielten Ergebnisse in den Kontext zum aktuellen Stand der Forschung gesetzt, zusammengefasst und interpretiert. Diverse, einleitend skizzierte Anwendungsbeispiele aus den Forschungsgebieten der Genforschung, der Netzwerkoptimierung und der Rundgangsplanung motivieren die Fragestellung nach dem Auffinden von maximalen knoten- bzw. kantendisjunkten Kreispackungen bzw. Kreispackungszahlen in Graphen. Diese Problemstellung ist im Allgemeinen für Graphen ohne weitere Forderung an Struktureigenschaften NP-schwer (vgl. [14]), was die Berechnungen der Kreispackungszahlen mittels Computern nur für eine sehr geringe Anzahl an Knoten ermöglicht. Der Schwerpunkt dieser Arbeit wurde auf die Bestimmung oberer Schranken an Kreispackungszahlen in speziellen polyhedralen Graphen gelegt. Anwendungsfelder dieser Graphen liegen in der anorganischen sowie organischen Chemie, der Nanotechnologie oder Energietechnik.

In Bezug auf polyhedrale Graphen konnten folgende Ergebnisse erzielt werden:

- Es gelang für Graphen $G \in \mathcal{P}[n, m]$ mit fester Ordnung n und Größe m , obere Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ anzugeben. Dazu konnte zu jedem zulässigen Paar $[n, m]$ jeweils ein Graph $G \in \mathcal{P}[n, m]$ konstruiert werden, der die Schranke an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ mit Gleichheit annimmt. Wodurch eine Verallgemeinerung der Resultate aus [60] und [65] erzielt wurde.
- Es wurde gezeigt, dass es kubische polyhedrale Graphen gibt, derart, dass die Differenz $\nu(G) - \alpha(G^*)$ bzw. $\nu'(G) - \alpha(G^*)$ beliebig groß sein kann.

In Bezug auf Halin-Graphen konnten die folgenden Ergebnisse erzielt werden:

- In Analogie zu Fragestellung aus [60] wurden auch für die Unterklassen \mathcal{HV}_n ,

$\mathcal{HE}_m, \mathcal{HF}_f$ von Halin-Graphen obere und untere Schranken an Kreispackungszahlen bestimmt. Auch hier gelang es, Graphen G zu konstruieren, die die Schranken an $\nu'(G)$ bzw. $\nu(G)$ mit Gleichheit annehmen.

- Zudem wurde für Halin-Graphen G bewiesen, dass $\nu'(G) = \alpha(G^*)$ gilt.
- Obere Schranken an $\nu'(G)$ bzw. $\nu(G)$ für Halin-Graphen aus $\mathcal{H}[n, m]$ wurden hergeleitet. Auch hier gelang es, zu jedem zulässigen Paar $[n, m]$ jeweils einen Halin-Graphen $G \in \mathcal{H}[n, m]$ anzugeben, der die oberen Schranken an $\nu'(G)$ bzw. $\nu(G)$ mit Gleichheit erfüllt.

Aufgrund der vielfältigen Anwendungsgebiete stellten Fulleren-Graphen einen wesentlichen Untersuchungsschwerpunkt dieser Arbeit dar. Folgende Ergebnisse konnten erzielt werden:

- Es wurde für Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ eine in der Ordnung n nicht monoton wachsende bestmögliche obere Schranke an $\nu(G)$ abgeleitet. Diese nicht-monoton wachsende bestmögliche obere Schranke an $\nu(G)$ verallgemeinert das in [31] formulierte Resultat $\alpha(G^*) \leq \frac{n}{6} + 2$ und $\alpha(G^*) = \frac{n}{6} + 2 \Leftrightarrow G$ ist Leapfrog-Fulleren-Graph.
- Für Fulleren-Graphen gelang es, die Gleichheit zwischen $\nu(G)$ und $\alpha(G^*)$ zu beweisen.
- Es wurde ein Zusammenhang zwischen der Kreispackungszahl $\nu(G)$ und der Fries-Zahl $\kappa(G)$ durch $\nu(G) = \alpha(G^*) \geq \frac{\kappa(G)}{2} + 2$ hergestellt (Vergleiche dazu [31]). Die Ungleichung ist mit Gleichheit für Leapfrog-Fullerene erfüllt. Hierdurch wird nach [40] und [63] eine Verbindung der Struktureigenschaften mit physikalischen und chemischen Eigenschaften wie der Stabilität hergestellt und unterstützt damit die Grundlagenforschung im Bereich der Untersuchungen von Nanopartikeln und Carbonfasern.
- Durch die Gleichheit von $\nu(G)$ und $\alpha(G^*)$ in Fulleren-Graphen konnten $\nu(G)$ sowie maximale Kreispackungen für sämtliche Fulleren-Graphen mit einer Ordnung von bis zu 70 in akzeptabler Rechenzeit bestimmt werden. Dazu wurde ein Maximum Independent-Set Problem mit Hilfe eines Mixed Integer Linear Program - Solvers in `matlab` gelöst.

- In [31] konnte $\frac{\alpha(G^*)}{|F(G)|} \sim \frac{1}{3}$ für Fulleren-Graphen mit sog. Ikosaedersymmetrie gezeigt werden. Innerhalb dieser Arbeit, wurde nachgewiesen, dass Fulleren-Graphen mit sog. C_5 -Symmetrie und $\frac{\nu(G)}{|F(G)|} \sim \frac{3}{10}$ sowie weitere Fulleren-Graphen mit $\frac{\nu(G)}{|F(G)|} \sim \frac{2}{7}$ existieren. Folglich existieren Fulleren-Graphen, die eine geringere Kreispackungszahl als die Fulleren-Graphen mit Isokaedersymmetrie aus [31] aufweisen. Ob $\frac{\nu(G)}{|F(G)|} \sim \frac{2}{7}$ im Allgemeinen für Fulleren-Graphen eine bestmögliche untere Schranke ist, bleibt offen.

Es sei bemerkt, dass für den Nachweis der Güte der Schranken an die Kreispackungszahlen ein Konstruktionsverfahren angewendet wird, mit Hilfe dessen Graphen konstruiert und eine maximale Kreispackung innerhalb dieser Graphen angegeben werden kann, die die oberen Schranken an die Kreispackungszahl mit Gleichheit erfüllt.

Abschließend lässt sich festhalten, dass über die erzielten Ergebnisse neue und bestmögliche Schranken zu speziellen polyhedralen Graphen abgeleitet wurden.

A Anhang

A.1 Polyhedrale Graphen

Innerhalb dieses Abschnittes werden die in den Beweisen zu Satz 3.1 und 3.2 sowie den Lemmata 3.3 und 3.4 ausgelassenen technischen Fallunterscheidungen zum Nachweis des 3-fachen Knotenzusammenhangs der Graphen $G'_{[n,m]}$ ausgeführt. Dazu werden bzgl. der gewählten Konstruktionssystematiken indirekte Beweise durchgeführt.

Die für die folgenden Beweise wesentlichen Definitionen des k -fachen Kontenzusammenhangs und eines $k - 1$ -Knoten-Separators aus Kapitel 2 seien an dieser Stelle wiederholend eingeführt. Ein Graph G heißt k -fach *knotenzusammenhängend*, falls für jedes Paar $u, v \in V(G)$ k Pfade $W_i(u, v)$, mit $i \in \{1, \dots, k\}$ in G existieren, so dass für $i \neq j$ gilt: $(V(W_i(u, v)) \setminus \{u, v\}) \cap (V(W_j(u, v)) \setminus \{u, v\}) = \emptyset$. Eine Knotenmenge $V' \subset V$ der Kardinalität n' heißt n' -*Knoten-Separator* von G , falls $G - V'$ nicht zusammenhängend ist. Bemerke, G ist somit k -fach knotenzusammenhängend, falls kein $k - 1$ -Knoten-Separator aber ein k -Knoten-Separator von G existiert.

Da der Graph $G_{[n,m]}$ 3-fach kontenzusammenhängend ist, werden innerhalb der drei folgenden Lemmata ausschließlich Knoten von $V(G'_{[n,m]})$ als pot. 2-Knoten-Separatoren von $G'_{[n,m]}$ betrachtet, die entweder innerhalb der jeweiligen Konstruktionssystematik zu der Knotenmenge von $V(G_{[n,m]})$ hinzugefügt wurden oder aber Knoten die adjazent zu einem solchen ‘hinzugefügten’ Knoten sind. Innerhalb der jeweiligen Konstruktionssystematik gibt es mindestens drei Knoten aus $V(G_{[n,m]})$, die adjazent zu einem ‘hinzugefügten’ Knoten sind. Folglich gibt es in $V(G'_{[n,m]} - \{u, v\})$ mindestens einen Knoten $w \in V(G_{[n,m]}) \cap V(G'_{[n,m]} - \{u, v\})$, der adjazent zu einem ‘hinzugefügten’ Knoten ist. Da $G_{[n,m]}$ aber 3-fach knotenzusammenhängend ist, gibt

es dann für jeden Knoten \tilde{v}_i mit $\tilde{v}_i \in V(G_{[n,m]}) \setminus (\{u, v, w\} \cap V(G_{[n,m]}))$ jeweils einen Pfad $W(w, \tilde{v}_i)$. Somit bleibt innerhalb der folgenden Lemmata noch zu zeigen, dass für jeden der ‘hinzugefügten’ Knoten immer auch ein Pfad zu einem solchen Knoten w existiert.

Für Satz 3.1 und Lemma 3.3 gilt:

Lemma A.1. *Sei $G'_{[n,m]}$ ein nach der Konstruktionssystematik aus Satz 3.1 bzw. Lemma 3.3 konstruierter Graph. Dann ist $G'_{[n,m]}$ 3-fach knotenzusammenhängend.*

Beweis. Angenommen, der Graph $G'_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_1$ sei nicht 3-fach knotenzusammenhängend, dann existiert nach Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ und der Eigenschaft, dass $G_{[n,m]}$ 3-fach zusammenhängend ist, ein 2-Knoten-Separator $\{u, v\}$ mit $u, v \in \{s_i, t_i, u_i, v_i, w_i\}$ und $i \in \{1, 2\}$. Es werden unter Berücksichtigung der Symmetrie von t_1 zu s_1, s_2, t_2 ohne Einschränkung die Fälle $u = t_1$ und $v \in \{s_i, t_2, u_i, v_i, w_i\}, i \in \{1, 2\}$, $u = w_1$ und $v = w_2$, $u = u_1$ und $v = u_2$ betrachtet (vgl. Abbildung 3.2).

- (a) Sei $u = t_1, v \in \{s_1, w_1, w_2\}$. Dann ist $G_{[n,m]} - \{e_1\}$ zusammenhängend. Falls $v = s_1$, so gibt es einen Pfad $W(u_2, s_2, t_2, w_2, w_1)$. Falls $v = w_1$, so gibt es eine Kante (u_1, s_1) und ein Pfad $W(v_2, t_2, w_2, s_2, u_2)$. Falls $v = w_2$, so gibt es zwei Pfade $W(u_1, s_1, w_1)$ und $W(v_2, t_2, s_2, u_2)$ in $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$. Somit ist $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend und folglich $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator in $G'_{[n,m]}$.
- (b) Sei $u = t_1, v \in \{s_2, t_2\}$. Dann ist $G_{[n,m]} - \{e_1, e_2\}$ zusammenhängend. Falls $v = s_2$, so gibt es einen Pfad $W(u_1, s_1, w_1, w_2, t_2, v_2)$ bzw. falls $v = t_2$, so gibt es einen Pfad $W(u_1, s_1, w_1, w_2, s_2, u_2)$ in $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$. Somit ist $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend und $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator in $G'_{[n,m]}$.
- (c) Sei $u = t_1, v \in \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$. Dann ist $(G_{[n,m]} - \{v\}) - \{e_1\}$ zusammenhängend. Falls $v = v_1$ oder $v = v_2$, so gibt es einen Pfad $W(u_1, s_1, w_1, w_2, t_2, s_2, u_2)$. Falls $v = u_2$, so gibt es einen Pfad $W(u_1, s_1, w_1, w_2, s_2, t_2, v_2)$. Falls $v = u_1$, so gibt es einen Pfad $W(v_2, t_2, s_2, w_2, w_1, s_1)$ in $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$. Somit ist $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend und folglich $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator in $G'_{[n,m]}$.

- (d) Seien $u = u_1$ und $v = u_2$. Dann ist $G_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend. Da zudem ein Pfad $(v_1, t_1, s_1, w_1, w_2, s_2, t_2, v_2)$ existiert, ist $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend. Somit ist $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator in $G'_{[n,m]}$. Analog folgt die Behauptung für $u = v_1$ und $v = v_2$ mit dem Pfad $(u_1, s_1, t_1, w_1, w_2, t_2, s_2, u_2)$.
- (e) Seien $u = w_1$ und $v = w_2$. Dann ist $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ homöomorph zu $G_{[n,m]}$ und somit zusammenhängend. Somit ist $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator in $G'_{[n,m]}$.
- (f) Seien $u \in \{w_1, w_2\}$ und $v = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$. Dann ist $G_{[n,m]} - \{v\}$ zusammenhängend. Falls $u = w_1$ und $v = u_1$, so gibt es zwei Pfade $W(v_1, t_1, s_1)$ und $W(v_2, t_2, w_2, s_2, u_2)$. Falls $u = w_1$ und $v = u_2$, so gibt es zwei Pfade $W(v_1, t_1, s_2, u_1)$ und $W(v_2, t_2, w_2, s_2)$. Falls $u = w_1$ und $v = v_1$, so gibt es zwei Pfade $W(u_1, s_1, t_1)$ und $W(v_2, t_2, w_2, s_2, u_2)$. Falls $u = w_1$ und $v = v_2$, so gibt es zwei Pfade $W(v_1, t_1, s_1, u_1)$ und $W(t_2, w_2, s_2, u_2)$. Falls $u = w_2$, können für die vier Fälle jeweils zwei Pfade angegeben werden. Somit ist $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend und folglich $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator in $G'_{[n,m]}$.

Somit folgt, dass ein Graph $G'_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_1$ 3-fach knotenzusammenhängend ist. Innerhalb des iterativen Vorgehens zur Bildung von Graphen $G_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_k$ bleibt die indirekte Argumentation unverändert. \square

Für Lemma 3.4 gilt:

Lemma A.2. *Sei $G'_{[n,m]}$ ein nach der Konstruktionssystematik aus Lemma 3.4 konstruierter Graph. Dann ist $G'_{[n,m]}$ 3-fach knotenzusammenhängend.*

Beweis. Angenommen, der Graph $G'_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_1$ sei nicht 3-fach knotenzusammenhängend, dann existiert nach Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ und der Eigenschaft, dass $G_{[n,m]}$ 3-fach zusammenhängend ist, ein 2-Knoten-Separator $\{u, \tilde{u}\}$ mit $u, \tilde{u} \in \{s_1, t_1, u_1, v_1, v', v\}$ (vgl. Abbildung 3.5).

- (a) Sei $u = t_1, \tilde{u} = s_1$. Dann ist $G'_{[n,m]} - \{u, \tilde{u}\}$ zusammenhängend, da $G_{[n,m]} - \{e\}$ zusammenhängend ist. Somit ist $\{u, \tilde{u}\}$ kein 2-Knoten-Separator von $G'_{[n,m]}$.
- (b) Sei $u \in \{t_1, s_1\}, \tilde{u} \in \{v_1, u_1\}$. Dann ist $G_{[n,m]} - \{v_1, u_1\}$ zusammenhängend. Da zudem in $G'_{[n,m]}$ eine Kante (s_1, v) für $u = t_1$ und eine Kante (t_1, v) für $u = s_1$

existiert ist auch $G'_{[n,m]} - \{u, \tilde{u}\}$ zusammenhängend und folglich ist $\{u, \tilde{u}\}$ kein 2-Knoten-Separator von $G'_{[n,m]}$.

(c) Sei $u \in \{t_1, s_1\}, \tilde{u} \in \{v, v'\}$. Dann ist sowohl $G_{[n,m]} - \{v_1, \tilde{u}\}$ als auch $G'_{[n,m]} - \{u_1, \tilde{u}\}$ zusammenhängend. Da zudem in $G'_{[n,m]}$ eine Kante (s_1, u_1) für $u = t_1$ und eine Kante (t_1, v_1) für $u = s_1$ existiert, ist $G'_{[n,m]} - \{u, \tilde{u}\}$ zusammenhängend. Somit ist $\{u, \tilde{u}\}$ kein 2-Knoten-Separator von $G'_{[n,m]}$.

(d) Seien $u, \tilde{u} \in \{u_1, v_1, v', v\}$ mit $u \neq \tilde{u}$. Dann ist $G_{[n,m]} - \{u, \tilde{u}\}$ zusammenhängend. Zudem existiert ein Pfad $W(t_1, s_1, v)$ für $u \neq v, \tilde{u} \neq v$, ein Pfad $W(t_1, s_1, v')$ für $u \neq v', \tilde{u} \neq v'$ und ein Pfad $W(s_1, t_1, v_1)$ für $u \neq v_1, \tilde{u} \neq v_1$. Somit ist $G'_{[n,m]} - \{u, \tilde{u}\}$ zusammenhängend und folglich ist $\{u, \tilde{u}\}$ kein 2-Knoten-Separator von $G'_{[n,m]}$.

Somit folgt, dass ein Graph $G'_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_1$ nach Konstruktion 3-fach knotenzusammenhängend ist. Auch hier bleibt durch das iterative Vorgehens zur Bildung von Graphen $G_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_k$ die indirekte Argumentation unverändert. \square

Für Satz 3.2 gilt:

Lemma A.3. *Sei $G'_{[n,m]}$ ein nach der Konstruktionssystematik aus Satz 3.2 konstruierter Graph. Dann ist $G'_{[n,m]}$ 3-fach knotenzusammenhängend.*

Beweis. Angenommen, der konstruierte Graph $G'_{[n,m]}, [n, m] \in \mathcal{M}_1$ sei nicht 3-fach knotenzusammenhängend, dann existiert nach Konstruktion von $G'_{[n,m]}$ und der Eigenschaft, dass $G_{[n,m]}$ 3-fach zusammenhängend ist, ein 2-Knoten-Separator $\{u, v\}$ mit $u, v \in \{s_i, u_i, v_i \mid i \in \{1, 2, 3\}\}$ (vgl. Abbildung 3.6).

(a) Sei $u = s_1, v \in \{s_2, s_3\}$. Dann ist $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ homöomorph zu $G_{[n,m]} - \{e_1, e_i\}$ mit $i \in \{2, 3\}$. Somit ist $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator von $G'_{[n,m]}$.

(b) Sei $u = s_1, v \in \{u_i, v_i\}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$. Da entweder ein Pfad $W(s_2, s_3, u_k)$ mit $k \neq i$ oder ein Pfad $W(s_3, s_2, u_k)$ mit $k \neq i$ existiert und $G_{[n,m]} - \{v\} - \{e_i\}$ zusammenhängend ist, ist auch $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend. Somit ist $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator von $G'_{[n,m]}$. Analog gilt dies für $u = s_2$ und $u = s_3$.

(c) Sei $u, v \in \{u_j, v_j\}$ mit $j \in \{1, 2, 3\}$. Da entweder ein Pfad $W(s_1, s_2, s_3, u_k)$ mit $u_k \neq u$ und $u_k \neq v$ oder ein Pfad $W(s_1, s_3, s_2, u_k)$ mit $u_k \neq u$ und $u_k \neq v$ oder ein Pfad $W(s_3, s_2, s_1, u_k)$ mit $u_k \neq u$ und $u_k \neq v$ existiert und $G_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend ist, ist auch $G'_{[n,m]} - \{u, v\}$ zusammenhängend. Somit ist $\{u, v\}$ kein 2-Knoten-Separator von $G'_{[n,m]}$.

Somit folgt, dass ein Graph $G'_{[n,m]}$, $[n, m] \in \mathcal{M}_1$ nach Konstruktion 3-fach knotenzusammenhängend ist. Innerhalb des iterativen Vorgehens zur Bildung von Graphen $G_{[n,m]}$, $[n, m] \in \mathcal{M}_k$ bleibt die indirekte Argumentation unverändert. \square

A.2 Halin-Graphen aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m$, und \mathcal{HF}_f

In Ergänzung zu den konzeptionell beschriebenen Graphen aus Abschnitt 4.1 werden innerhalb dieses Abschnittes Halin-Graphen G aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m$, und \mathcal{HF}_f formal angegeben, deren Kreispackungszahl die unteren bzw. oberen Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ annehmen. Die Graphen aus Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2 vervollständigen jeweils die Aussagen. In Abbildung A.1 werden sieben Halin-Graphen skizziert, die als G_0^i der zu definierenden Graphen G_j^i bzw. \tilde{G}_0^i der zu definierenden Graphen \tilde{G}_j^i verwendet werden.

Sei G_0^1 der in Abbildung A.1(a) skizzierte Halin-Graph. Sei $v_0 \in V(G) \setminus V(C^a)$ so wie in Abbildung A.1(a) dargestellt. Für $j \geq 1$ sei

$$G_j^1 = (V(G_j^1), E(G_j^1)) \text{ mit}$$

$$V(G_j^1) = V(G_{j-1}^1) \cup \{v_{j+4}^a\} \text{ und}$$

$$E(G_j^1) = E(G_{j-1}^1) \cup \{(v_{j+4}^a, v_0), (v_{j+4}^a, v_1^a), (v_{j+4}^a, v_{j+3}^a)\} \setminus \{(v_{j+3}^a, v_1^a)\}.$$

Dann gilt für G_j^1 mit $j \geq 0$, dass $G_j^1 \in \mathcal{HV}_{4+j} \cap \mathcal{HE}_{6+2j} \cap \mathcal{HF}_{4+j}$ sowie $\nu(G_j^1) = 1$ und $\nu'(G_j^1) = \lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$.

Sei G_0^2 der in Abbildung A.1(b) skizzierte Halin-Graph. Für $j \geq 1$ sei

$$G_j^2 = (V(G_j^2), E(G_j^2)) \text{ mit}$$

$$V(G_j^2) = V(G_{j-1}^2) \cup \{v_{j+4}^a\} \text{ und}$$

$$E(G_j^2) = E(G_{j-1}^2) \cup \{(v_{j+4}^a, v_0), (v_{j+4}^a, v_1^a), (v_{j+4}^a, v_{j+3}^a)\} \setminus \{(v_{j+3}^a, v_1^a)\}.$$

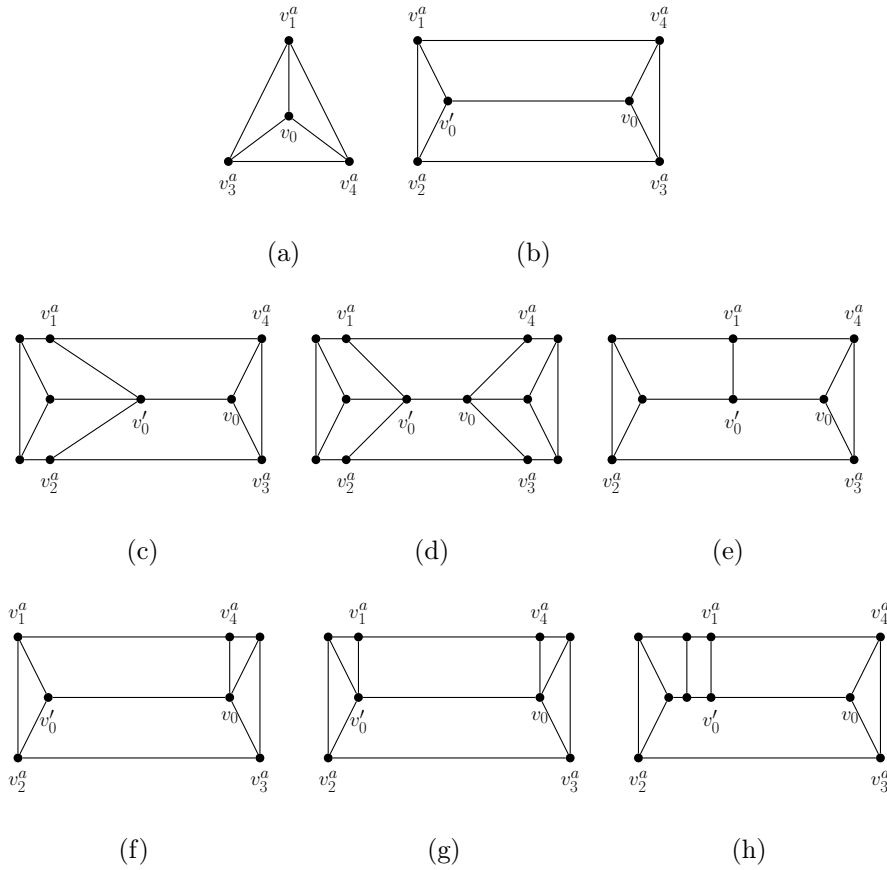


Abbildung A.1: Sieben spezielle Halin-Graphen, die jeweils als G_0^i ((a),(b),(c),(d)) bzw. \tilde{G}_0^i ((b),(e),(f),(g),(h)) innerhalb der Konstruktionssystematik verwendet werden.

Dann gilt für G_j^2 mit $j \geq 0$, dass $G_j \in \mathcal{HV}_{6+j} \cap \mathcal{HE}_{9+2j} \cap \mathcal{HF}_{5+j}$ sowie $\nu(G_j^2) = 2$ und $\nu'(G_j^2) = \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$. Somit nehmen die Graphen G_j^2 aufbauend auf den in Abbildung A.1(a) und (b) skizzierten Halin-Graphen die unteren Schranken für $\nu(G)$ und die oberen Schranken $\nu'(G)$ (in Kapitel 4 definiert als \tilde{G}_j^6 bzw. \tilde{G}_j^7) bzgl. Halin-Graphen aus \mathcal{HV}_n , \mathcal{HE}_m , und \mathcal{HF}_f an. Somit sind die angegebenen Schranken bestmöglich.

Sei \tilde{G}_0^i einer der in Abbildung A.1(b) für $i = 1$, (e) für $i = 2$, (f) für $i = 3$, (g) für $i = 4$, (h) für $i = 5$ skizzierten Halin-Graphen. Für $j \geq 1$ sei

$$\tilde{G}_j^i = (V(\tilde{G}_j^i), E(\tilde{G}_j^i)) \text{ mit}$$

$$V(\tilde{G}_j^i) = V(\tilde{G}_{j-1}^i) \cup \{v_{2j+3}^a, v_{2j+4}^a, v_j\} \text{ und}$$

$$E(\tilde{G}_j^i) = E(\tilde{G}_{j-1}^i) \cup \{(v_{2j+3}^a, v_{2j+4}^a)(v_{2j+3}^a, v_j), (v_{2j+4}^a, v_j), (v_{2j+4}^a, v_1^a), (v_{2j+3}^a, v_{2j+2}^a), (v_j, v_{j-1}), (v_j, v_0')\} \setminus \{(v_{2j+2}^a, v_1^a), (v_{j-1}, v_0')\}.$$

Dann gilt für \tilde{G}_j^1 mit $j \geq 0$ und \tilde{G}_0^1 gemäß Abbildung A.1(b), dass $\tilde{G}_j^1 \in \mathcal{HV}_{6+3j} \cap$

$\mathcal{HE}_{9+5j} \cap \mathcal{HF}_{5+2j}$ sowie $\nu(\tilde{G}_j^1) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor$. Dann gilt für \tilde{G}_j^2 mit $j \geq 0$ und \tilde{G}_0^2 gemäß Abbildung A.1(e), dass $\tilde{G}_j^2 \in \mathcal{HV}_{8+3j} \cap \mathcal{HE}_{12+5j} \cap \mathcal{HF}_{6+2j}$ sowie $\nu(\tilde{G}_j^2) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor$. Dann gilt für \tilde{G}_j^3 mit $j \geq 0$ und \tilde{G}_0^3 gemäß Abbildung A.1(f), dass $\tilde{G}_j^3 \in \mathcal{HV}_{7+3j} \cap \mathcal{HE}_{11+5j} \cap \mathcal{HF}_{6+2j}$ sowie $\nu(\tilde{G}_j^3) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor$. Dann gilt für \tilde{G}_j^4 mit $j \geq 0$ und \tilde{G}_0^4 gemäß Abbildung A.1(g), dass $\tilde{G}_j^4 \in \mathcal{HV}_{8+3j} \cap \mathcal{HE}_{13+5j} \cap \mathcal{HF}_{7+2j}$ sowie $\nu(\tilde{G}_j^4) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor$. Dann gilt für \tilde{G}_j^5 mit $j \geq 0$ und \tilde{G}_0^5 gemäß Abbildung A.1(h), dass $\tilde{G}_j^5 \in \mathcal{HV}_{10+3j} \cap \mathcal{HE}_{15+5j} \cap \mathcal{HF}_{7+2j}$ sowie $\nu(\tilde{G}_j^5) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor \frac{m+1}{5} \rfloor$.

Somit nehmen die Halin-Graphen \tilde{G}_j^i aufbauend auf den in Abbildung A.1(b),(e),(f),(g) und (h) skizzierte Halin-Graphen die oberen Schranken für $\nu(G)$ bzgl. Halin-Graphen aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m$, und \mathcal{HF}_f an. Somit sind die abgegebenen Schranken mit Ausnahme von \mathcal{HE}_{10} - hier gilt $\nu(G) = 1$ - bestmöglich.

Sei G_0^i einer der in Abbildung A.1(b) für $i = 3$, (c) für $i = 4$, (d) für $i = 5$ skizzierten Halin-Graphen. Für $j \geq 1$ und j eine ungerade Zahl sei

$$G_j^i = (V(G_j^i), E(G_j^i)) \text{ mit}$$

$$V(G_j^i) = V(G_{j-1}^i) \cup \{v_{j+4}^a, v_j\} \text{ und}$$

$$E(G_j^i) = E(G_{j-1}^i) \cup \{(v_{j+4}^a, v_2^a), (v_{j+4}^a, v_{j+2}^a), (v_{j+4}^a, v_j), (v_j, v_{j-1}), (v_j, v_0')\}$$

$$\setminus \{(v_{j+2}^a, v_2^a), (v_{j-1}, v_0')\}.$$

Für $j \geq 1$ und j eine gerade Zahl sei

$$G_j^i = (V(G_j^i), E(G_j^i)) \text{ mit}$$

$$V(G_j^i) = V(G_{j-1}^i) \cup \{v_{j+4}^a\} \text{ und}$$

$$E(G_j^i) = E(G_{j-1}^i) \cup \{(v_{j+4}^a, v_1^a), (v_{j+4}^a, v_{j+2}^a), (v_{j+4}^a, v_j)\}$$

$$\setminus \{(v_{j+2}^a, v_1^a), (v_0', v_{j-1})\}.$$

Dann gilt für G_j^3 mit $j \geq 0$ und G_0^3 gemäß Abbildung A.1(b), dass $G_j^3 \in \mathcal{HV}_{6+2j} \cap \mathcal{HE}_{9+3j} \cap \mathcal{HF}_{5+j}$ sowie $\nu'(G_j^3) = \lceil \frac{f-1}{3} \rceil = \lceil \frac{n+2}{6} \rceil = \lceil \frac{m+3}{9} \rceil$. Dann gilt für G_j^4 mit $j \geq 0$ und G_0^4 gemäß Abbildung A.1(c), dass $G_j^4 \in \mathcal{HV}_{9+2j} \cap \mathcal{HE}_{14+3j} \cap \mathcal{HF}_{7+j}$ sowie $\nu'(G_j^4) = \lceil \frac{n+2}{6} \rceil = \lceil \frac{m+3}{9} \rceil$. Dann gilt für G_j^5 mit $j \geq 0$ und G_0^5 gemäß Abbildung A.1(d), dass $G_j^5 \in \mathcal{HV}_{12+2j} \cap \mathcal{HE}_{19+3j} \cap \mathcal{HF}_{9+j}$ sowie $\nu'(G_j^5) = \lceil \frac{m+3}{9} \rceil$. Somit nehmen die Halin-Graphen G_j^i aufbauend auf den in Abbildung A.1(b),(c) und (d) skizzierten

Halin-Graphen die unteren Schranken für $\nu'(G)$ bzgl. Halin-Graphen aus $\mathcal{HV}_n, \mathcal{HE}_m$, und \mathcal{HF}_f an. Somit sind die abgegebenen Schranken mit Ausnahme von \mathcal{HE}_{13} - hier gilt $\nu'(G) = 3$ - bestmöglich.

A.3 Obere Schranken an $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ in

$$G \in \mathcal{H}[n, m]$$

In Ergänzung zu den konzeptionell beschriebenen Halin-Graphen aus Abschnitt 4.2 werden innerhalb dieses Abschnittes die Halin-Graphen $G \in \mathcal{H}[n, m]$ formal angegeben, die die oberen Schranken an $\nu(G)$ bzw. $\nu'(G)$ annehmen. Die Graphen aus Tabelle 4.3, die nicht durch die im Folgenden konstruierten Graphen $G_{n,j}$ erzeugt wurden, vervollständigen jeweils die Aussagen. Es sei $G_{n,0} \in \mathcal{H}(n, 2(n-1))$ für festes $n \geq 4$ gewählt. Bemerke, $G_{n,0} \in \mathcal{W}_n$. Dann bezeichne die Knoten $v_i^a \in V(C^a)$ mit $i \in \{1, \dots, n-1\}$ derart, dass v_i^a adjazent zu v_{i+1}^a und v_{n-1}^a adjazent zu v_1^a . Zudem sei $v_0 \in V(G) \setminus V(C^a)$. Definiere für $n \geq 5$:

$$G_{n,1} = (V(G_{n,1}), E(G_{n,1})) \text{ mit}$$

$$V(G_{n,1}) = V(G_{n,0}) \cup \{v_1\} \text{ und}$$

$$E(G_{n,1}) = E(G_{n,0}) \cup \{(v_0, v_1), (v_1, v_1^a), (v_1, v_2^a)\} \setminus \{(v_0, v_1^a), (v_0, v_2^a)\}.$$

Für den Fall, dass $n \geq 8$ eine gerade Zahl ist, definiere für $j \in \{2, \dots, \frac{n}{2} - 2\}$:

$$G_{n,j} = (V(G_{n,j}), E(G_{n,j})) \text{ mit}$$

$$V(G_{n,j}) = V(G_{n,j-1}) \cup \{v_j\} \text{ und}$$

$$E(G_{n,j}) = E(G_{n,j-1}) \cup \{(v_j, v_{2j-1}^a), (v_j, v_{2j}^a), (v_j, v_{j-1}), (v_j, v_0)\}$$

$$\setminus \{(v_0, v_{j-1}), (v_0, v_{2j-1}^a), (v_0, v_{2j}^a)\},$$

für $j = \frac{n}{2} - 1$:

$$G_{n,j} = (V(G_{n,j}), E(G_{n,j})) \text{ mit}$$

$$V(G_{n,j}) = V(G_{n,j-1}) \cup \{v_j\} \text{ und}$$

$$E(G_{n,j}) = E(G_{n,j-1}) \cup \{(v_j, v_{2j-1}^a), (v_j, v_{j-1}), (v_j, v_0)\} \setminus \{(v_0, v_{j-1}), (v_0, v_{2j-1}^a)\},$$

und für $j \in \{\frac{n}{2}, \dots, n-4\}$:

$$\begin{aligned} G_{n,j} &= (V(G_{n,j}), E(G_{n,j})) \text{ mit} \\ V(G_{n,j}) &= V(G_{n,j-1}) \cup \{v_j\} \text{ und} \\ E(G_{n,j}) &= E(G_{n,j-1}) \cup \{(v_j, v_{2j-n+4}^a), (v_j, v_{j-\frac{n}{2}+2}), (v_j, v_{j-\frac{n}{2}+3})\} \\ &\setminus \{(v_{j-\frac{n}{2}+2}, v_{j-\frac{n}{2}+3}), (v_{j-\frac{n}{2}+2}, v_{2j-n+4}^a)\}. \end{aligned}$$

Für $n = 6$ sei

$$\begin{aligned} G_{n,2} &= (V(G_{n,2}), E(G_{n,2})) \text{ mit} \\ V(G_{n,2}) &= V(G_{n,1}) \cup \{v_2\} \text{ und} \\ E(G_{n,2}) &= E(G_{n,1}) \cup \{(v_2, v_3^a), (v_2, v_1), (v_2, v_0)\} \\ &\setminus \{(v_1, v_0), (v_0, v_3^a)\}. \end{aligned}$$

Für den Fall, dass $n \geq 9$ eine ungerade Zahl ist, definiere für $j \in \{2, \dots, \frac{n-1}{2} - 1\}$:

$$\begin{aligned} G_{n,j} &= (V(G_{n,j}), E(G_{n,j})) \text{ mit} \\ V(G_{n,j}) &= V(G_{n,j-1}) \cup \{v_j\} \text{ und} \\ E(G_{n,j}) &= E(G_{n,j-1}) \cup \{(v_j, v_{2j-1}^a), (v_j, v_{2j}^a), (v_j, v_{j-1}), (v_j, v_0)\} \\ &\setminus \{(v_0, v_{j-1}), (v_0, v_{2j-1}^a), (v_0, v_{2j}^a)\}, \end{aligned}$$

für $j \in \{\frac{n-1}{2}, \dots, n-5\}$:

$$\begin{aligned} G_{n,j} &= (V(G_{n,j}), E(G_{n,j})) \text{ mit} \\ V(G_{n,j}) &= V(G_{n,j-1}) \cup \{v_j\} \text{ und} \\ E(G_{n,j}) &= E(G_{n,j-1}) \cup \{(v_j, v_{2(j-\frac{n-1}{2}+2)}^a), (v_j, v_{j-\frac{n-1}{2}+2}), (v_j, v_{j-\frac{n-1}{2}+3})\} \\ &\setminus \{(v_{j-\frac{n-1}{2}+2}, v_{j-\frac{n-1}{2}+3}), (v_{j-\frac{n-1}{2}+2}, v_{2(j-\frac{n-1}{2}+2)}^a)\} \end{aligned}$$

und für $j = n-4$:

$$\begin{aligned} G_{n,j} &= (V(G_{n,j}), E(G_{n,j})) \text{ mit} \\ V(G_{n,j}) &= V(G_{n,j-1}) \cup \{v_j\} \text{ und} \\ E(G_{n,j}) &= E(G_{n,j-1}) \cup \{(v_j, v_{2(j-\frac{n-1}{2}+2)}^a), (v_j, v_{j-\frac{n-1}{2}+2}), (v_j, v_0)\} \\ &\setminus \{(v_{j-\frac{n-1}{2}+2}, v_0), (v_{j-\frac{n-1}{2}+2}, v_{2(j-\frac{n-1}{2}+2)}^a)\}. \end{aligned}$$

Für $n = 7$ sei

$$G_{n,2} = (V(G_{n,2}), E(G_{n,2})) \text{ mit}$$

$$V(G_{n,2}) = V(G_{n,1}) \cup \{v_2\} \text{ und}$$

$$E(G_{n,2}) = E(G_{n,1}) \cup \{(v_2, v_3^a), (v_2, v_4^a), (v_2, v_0), (v_2, v_1)\} \setminus \{(v_1, v_0), (v_0, v_3^a), (v_0, v_4^a)\}.$$

und

$$G_{n,3} = (V(G_{n,3}), E(G_{n,3})) \text{ mit}$$

$$V(G_{n,3}) = V(G_{n,2}) \cup \{v_3\} \text{ und}$$

$$E(G_{n,3}) = E(G_{n,2}) \cup \{(v_3, v_4^a), (v_3, v_2), (v_3, v_0)\} \setminus \{(v_2, v_0), (v_2, v_4^a)\}.$$

Nach Konstruktion gilt $G_{n,j} \in \mathcal{H}[n+j, 2(n-1)+j] \cap \mathcal{HF}_n$. Für den Fall, dass n eine gerade Zahl ist, gilt für $j \in \{0, \dots, \frac{n}{2} - 2\} : \nu(G_{n,j}) = 1+j = 2n-m-1 \leq \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$ und für $j \in \{\frac{n}{2}, \dots, n-4\} : \nu(G_{n,j}) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor \leq 2n-m-1$. Für den Fall, dass n eine ungerade Zahl ist, gilt für $j \in \{0, \dots, \frac{n-1}{2} - 1\} : \nu(G_{n,j}) = 1+j = 2n-m-1 \leq \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$, und für $j \in \{\frac{n-1}{2}, \dots, n-4\} : \nu(G_{n,j}) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor \leq 2n-m-1$. Ferner gilt $\forall j \geq 0 : \nu'(G_{n,j}) = \lfloor \frac{f-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m-n+1}{2} \rfloor$. Somit sind die oberen Schranken für $\nu(G)$ und $\nu'(G)$ mit $G \in \mathcal{H}[n, m]$ bestmöglich.

A.4 Fulleren-Graphen mit $n \leq 70$

Innerhalb dieses Abschnittes werden Adjanzenzlisten des Dualgraphen eines Fulleren-Graphen $G \in \mathcal{F}_n$ angegeben, die die oberen Schranken an $\nu(G)$ annehmen. Somit existiert in Analogie zu Halin-Graphen und polyhedralen Graphen auch für Fulleren-Graphen eine vollständige Übersicht an bestmöglichen oberen Schranken an $\nu(G)$. Es wird im Folgenden jeweils zu jedem $20 \leq n \leq 70$ ein Fulleren-Graph angegeben, der die ober Schranke annimmt und aus dem direkt eine maximale Kreispackung abgeleitet werden kann. Beispielsweise ist für $n = 20$ eine maximale Kreispackung über die Wahl der Facettenkreise $Z(G) = \{C(F_1), C(F_7), C(F_{10})\}$ gegeben. Zudem ist die Adjazenzzliste so dargestellt, dass die in der Liste enthaltenen Kommata dazu dienen, die Listen der zu dem Knoten i adjazenten Knoten von den Listen der weiteren Knoten in der Darstellung zu separieren. Beispielsweise ist der Knoten 1

des Dualgraphen adjazent zu Knoten 2 3 4 5 6 und der Knoten 2 adjazent zu den Knoten 1 6 12 11 3.

$$n = 20, Z(G) = \{1, 7, 10\}$$

2 3 4 5 6, 1 6 12 11 3, 1 2 11 10 4, 1 3 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 12 2, 5 8 9 12 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 12 7, 8 4 3 11 9, 10 3 2 12 9, 6 7 9 11 2

$$n = 24, Z(G) = \{1, 7, 10, 13\}$$

2 3 4 5 6, 1 6 14 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 14 2, 5 8 9 14 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 14 7, 8 4 12 11 9, 10 12 13 14 9, 10 4 3 13 11, 12 3 2 14 11, 6 7 9 11 13 2

$$n = 26, Z(G) = \{1, 7, 10, 13\}$$

2 3 4 5 6, 1 6 14 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 15 14 2, 5 8 9 15 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 15 7, 8 4 12 11 9, 10 12 13 14 15 9, 10 4 3 13 11, 12 3 2 14 11, 6 15 11 13 2, 14 6 7 9 11

$$n = 28, Z(G) = \{1, 7, 10, 13\}$$

2 3 4 5 6, 1 6 14 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 16 14 2, 5 8 9 16 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 15 16 7, 8 4 12 11 9, 10 12 13 15 9, 10 4 3 13 11, 12 3 2 14 15 11, 6 16 15 13 2, 14 16 9 11 13, 15 14 6 7 9

$$n = 30, Z(G) = \{1, 7, 10, 12, 14\}$$

2 3 4 5 6, 1 6 12 13 11 3, 1 2 11 10 4, 1 3 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 16 12 2, 5 8 9 15 16 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 14 15 7, 8 4 3 11 9, 10 3 2 13 14 9, 6 16 17 13 2, 12 17 14 11 2, 13 17 15 9 11, 14 17 16 7 9, 15 17 12 6 7, 16 15 14 13 12

$$n = 32, Z(G) = \{2, 4, 6, 11, 14, 18\}$$

2 3 4 5 6 7, 1 7 17 16 3, 1 2 16 15 4, 1 3 15 13 5, 1 4 13 11 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6 8 18 17 2, 6 9 10 18 7, 6 5 11 10 8, 9 11 12 18 8, 9 5 13 12 10, 11 13 14 17 18 10, 11 5 4 15 14 12, 13 15 16 17 12, 13 4 3 16 14, 15 3 2 17 14, 7 18 12 14 16 2, 17 7 8 10 12

$$n = 34, Z(G) = \{2, 5, 9, 12, 15, 18\}$$

2 3 4 5 6, 1 6 14 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 18 14 2, 5 8 9 17 18 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 16 17 7, 8 4 12 11 9, 10 12 13 15 16 9, 10 4 3 13 11, 12 3 2 14 15 11, 6 18 19 15 13 2, 14 19 16 11 13, 15 19 17 9 11, 16 19 18 7 9, 17 19 14 6 7, 18 17 16 15 14

$$n = 36, Z(G) = \{1, 7, 10, 13, 14, 17\}$$

2 3 4 5 6, 1 6 14 15 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 19 14 2, 5 8 9

18 19 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 17 18 7, 8 4 12 11 9, 10 12 13 16 17 9,10 4 3 13 11,12 3
 2 15 16 11, 6 19 20 15 2,14 20 16 13 2, 15 20 17 11 13,16 20 18 9 11,17 20 19 7 9,18
 20 14 6 7,19 18 17 16 15 14

$n = 38, Z(G) = \{1, 7, 10, 13, 14, 17\}$

2 3 4 5 6, 1 6 14 15 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 19 14 2, 5 8 9
 18 19 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 17 18 7, 8 4 12 11 9, 10 12 13 16 17 9,10 4 3 13 11,12 3
 2 15 16 11, 6 19 20 15 2,14 20 16 13 2, 15 20 21 17 11 13,16 21 18 9 11,17 21 19 7
 9,18 21 20 14 6 7,19 21 16 15 14, 20 19 18 17 16

$n = 40, Z(G) = \{2, 4, 6, 10, 13, 16, 19\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 15 14 3, 1 2 14 13 22 4, 1 3 22 21 5, 1 4 21 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6 8 19 15
 2, 6 9 10 18 19 7, 6 5 21 11 10 8, 9 11 12 17 18 8, 9 21 22 13 12 10,11 13 14 16 17
 10,11 22 3 14 12,13 3 2 15 16 12, 7 19 20 16 14 2, 15 20 17 12 14,16 20 18 10 12,17
 20 19 8 10,18 20 15 7 8,19 18 17 16 15, 5 4 22 11 9, 21 4 3 13 11

$n = 42, Z(G) = \{1, 7, 10, 13, 14, 17, 21\}$

2 3 4 5 6, 1 6 14 15 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 19 14 2, 5 8 9
 18 19 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 17 18 7, 8 4 12 11 9,10 12 13 16 17 9,10 4 3 13 11,12 3 2
 15 16 11, 6 19 20 15 2,14 20 21 16 13 2,15 21 22 17 11 13,16 22 18 9 11,17 22 23 19
 7 9,18 23 20 14 6 7,19 23 21 15 14,20 23 22 16 15,21 23 18 17 16,22 21 20 19 18

$n = 44, Z(G) = \{2, 4, 6, 10, 13, 16, 19, 21\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 15 14 3, 1 2 14 13 23 4, 1 3 23 24 5, 1 4 24 21 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6 8
 19 15 2, 6 9 10 18 19 7, 6 5 21 11 10 8, 9 11 12 17 18 8, 9 21 22 13 12 10,11 13 14
 16 17 10,11 22 23 3 14 12,13 3 2 15 16 12, 7 19 20 16 14 2,15 20 17 12 14,16 20 18
 10 12,17 20 19 8 10,18 20 15 7 8,19 18 17 16 15, 5 24 22 11 9,21 24 23 13 11,22 24 4
 3 13, 4 23 22 21 5

$n = 46, Z(G) = \{1, 7, 10, 13, 14, 17, 21, 24\}$

2 3 4 5 6, 1 6 14 15 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 19 14 2, 5 8 9
 18 19 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 17 18 7, 8 4 12 11 9,10 12 13 16 17 9,10 4 3 13 11,12 3 2
 15 16 11, 6 19 20 15 2,14 20 21 16 13 2,15 21 22 17 11 13,16 22 23 18 9 11,17 23 24
 19 7 9,18 24 20 14 6 7,19 24 25 21 15 14,20 25 22 16 15,21 25 23 17 16,22 25 24 18
 17,23 25 20 19 18,24 23 22 21 20

$n = 48, Z(G) = \{1, 7, 10, 13, 14, 17, 22, 25\}$

2 3 4 5 6, 1 6 14 15 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 19 14 2, 5 8 9

18 19 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 17 18 7, 8 4 12 11 9,10 12 13 16 17 9,10 4 3 13 11,12 3 2
 15 16 11, 6 19 20 21 15 2,14 21 22 16 13 2,15 22 23 17 11 13,16 23 24 18 9 11,17 24
 25 19 7 9,18 25 20 14 6 7,19 25 26 21 14,20 26 22 15 14,21 26 23 16 15,22 26 24 17
 16,23 26 25 18 17,24 26 20 19 18,25 24 23 22 21 20

$n = 50, Z(G) = \{2, 4, 6, 11, 14, 17, 20, 22, 24\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 19 18 3, 1 2 18 17 27 4, 1 3 27 26 5, 1 4 26 11 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6
 8 24 19 2, 6 9 10 23 24 7, 6 5 11 10 8, 9 11 12 22 23 8, 9 5 26 13 12 10,11 13 14
 21 22 10,11 26 27 15 14 12,13 15 16 21 12,13 27 17 16 14,15 17 18 20 21 14,15 27
 3 18 16,17 3 2 19 20 16, 7 24 25 20 18 2,19 25 21 16 18,20 25 22 12 14 16,21 25 23
 10 12,22 25 24 8 10,23 25 19 7 8,24 23 22 21 20 19, 5 4 27 13 11,26 4 3 17 15 13

$n = 52, Z(G) = \{1, 7, 10, 13, 14, 17, 21, 24, 27\}$

2 3 4 5 6, 1 6 14 15 13 3, 1 2 13 12 27 4, 1 3 27 28 5, 1 4 28 8 7 6, 1 5 7 19 14 2, 5 8
 9 18 19 6, 5 28 26 10 9 7, 8 10 11 17 18 7, 8 26 12 11 9,10 12 13 16 17 9,10 26 27 3
 13 11,12 3 2 15 16 11, 6 19 20 15 2,14 20 21 16 13 2,15 21 22 17 11 13,16 22 23 18
 9 11,17 23 24 19 7 9,18 24 20 14 6 7,19 24 25 21 15 14,20 25 22 16 15,21 25 23 17
 16,22 25 24 18 17,23 25 20 19 18,24 23 22 21 20, 8 28 27 12 10,26 28 4 3 12, 4 27 26
 8 5

$n = 54, Z(G) = \{2, 4, 6, 11, 14, 17, 20, 22, 24, 27\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 19 18 3, 1 2 18 17 28 4, 1 3 28 29 5, 1 4 29 26 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6 8
 24 19 2, 6 9 10 23 24 7, 6 5 26 11 10 8, 9 11 12 22 23 8, 9 26 13 12 10,11 13 14 21
 22 10,11 26 27 15 14 12,13 15 16 21 12,13 27 28 17 16 14,15 17 18 20 21 14,15 28 3
 18 16,17 3 2 19 20 16, 7 24 25 20 18 2,19 25 21 16 18,20 25 22 12 14 16,21 25 23 10
 12,22 25 24 8 10,23 25 19 7 8,24 23 22 21 20 19, 5 29 27 13 11 9,26 29 28 15 13,27
 29 4 3 17 15, 4 28 27 26 5

$n = 56, Z(G) = \{1, 8, 11, 14, 15, 18, 22, 25, 28, 29\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 15 16 14 3, 1 2 14 13 28 4, 1 3 28 30 5, 1 4 30 29 6, 1 5 29 9 8 7, 1 6
 8 20 15 2, 6 9 10 19 20 7, 6 29 27 11 10 8, 9 11 12 18 19 8, 9 27 13 12 10,11 13 14 17
 18 10,11 27 28 3 14 12,13 3 2 16 17 12, 7 20 21 16 2,15 21 22 17 14 2,16 22 23 18 12
 14,17 23 24 19 10 12,18 24 25 20 8 10,19 25 21 15 7 8,20 25 26 22 16 15,21 26 23 17
 16,22 26 24 18 17,23 26 25 19 18,24 26 21 20 19,25 24 23 22 21, 9 29 30 28 13 11,27
 30 4 3 13, 5 30 27 9 6,29 5 4 28 27

$n = 58, Z(G) = \{3, 6, 8, 11, 15, 18, 20, 23, 27, 30\}$

2 3 4 5 6, 1 6 14 15 13 3, 1 2 13 12 4, 1 3 12 10 8 5, 1 4 8 7 6, 1 5 7 19 14 2, 5 8 9
 18 19 6, 5 4 10 9 7, 8 10 11 17 18 7, 8 4 12 11 9, 10 12 13 16 17 9, 10 4 3 13 11, 12 3 2
 15 16 11, 6 19 20 21 15 2, 14 21 22 16 13 2, 15 22 23 17 11 13, 16 23 24 18 9 11, 17 24
 25 19 7 9, 18 25 20 14 6 7, 19 25 26 21 14, 20 26 27 22 15 14, 21 27 28 23 16 15, 22 28
 29 24 17 16, 23 29 30 25 18 17, 24 30 26 20 19 18, 25 30 31 27 21 20, 26 31 28 22 21, 27
 31 29 23 22, 28 31 30 24 23, 29 31 26 25 24, 30 29 28 27 26

$n = 60, Z(G) = \{2, 4, 6, 10, 13, 16, 19, 22, 24, 26, 28, 30\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 21 20 3, 1 2 20 19 31 4, 1 3 31 32 5, 1 4 32 28 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6 8 26
 21 2, 6 9 10 25 26 7, 6 5 28 11 10 8, 9 11 12 25 8, 9 28 29 13 12 10, 11 13 14 24 25
 10, 11 29 15 14 12, 13 15 16 23 24 12, 13 29 30 17 16 14, 15 17 18 23 14, 15 30 31 19
 18 16, 17 19 20 22 23 16, 17 31 3 20 18, 19 3 2 21 22 18, 7 26 27 22 20 2, 21 27 23 18
 20, 22 27 24 14 16 18, 23 27 25 12 14, 24 27 26 8 10 12, 25 27 21 7 8, 26 25 24 23 22
 21, 5 32 29 11 9, 28 32 30 15 13 11, 29 32 31 17 15, 30 32 4 3 19 17, 4 31 30 29 28 5

$n = 62, Z(G) = \{2, 4, 6, 11, 14, 17, 20, 23, 25, 27, 31\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 19 18 3, 1 2 18 17 32 4, 1 3 32 33 5, 1 4 33 30 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6 8
 25 19 2, 6 9 10 24 25 7, 6 5 30 11 10 8, 9 11 12 23 24 8, 9 30 13 12 10, 11 13 14 22
 23 10, 11 30 31 15 14 12, 13 15 16 21 22 12, 13 31 32 17 16 14, 15 17 18 20 21 14, 15
 32 3 18 16, 17 3 2 19 20 16, 7 25 26 20 18 2, 19 26 21 16 18, 20 26 27 22 14 16, 21 27
 28 23 12 14, 22 28 24 10 12, 23 28 29 25 8 10, 24 29 26 19 7 8, 25 29 27 21 20 19, 26 29
 28 22 21, 27 29 24 23 22, 28 27 26 25 24, 5 33 31 13 11 9, 30 33 32 15 13, 31 33 4 3 17
 15, 4 32 31 30 5

$n = 64, Z(G) = \{2, 4, 6, 10, 13, 16, 19, 22, 24, 26, 30, 32\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 21 20 3, 1 2 20 19 33 4, 1 3 33 34 5, 1 4 34 30 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6 8 26
 21 2, 6 9 10 25 26 7, 6 5 30 11 10 8, 9 11 12 25 8, 9 30 31 13 12 10, 11 13 14 24 25
 10, 11 31 15 14 12, 13 15 16 23 24 12, 13 31 32 17 16 14, 15 17 18 23 14, 15 32 33 19 18
 16, 17 19 20 22 23 16, 17 33 3 20 18, 19 3 2 21 22 18, 7 26 27 22 20 2, 21 27 28 23 18
 20, 22 28 24 14 16, 18, 23 28 29 25 12 14, 24 29 26 8 10 12, 25 29 27 21 7 8, 26 29 28 22
 21, 27 29 24 23 22, 28 27 26 25 24, 5 34 31 11 9, 30 34 32 15 13 11, 31 34 33 17 15, 32
 34 4 3 19 17, 4 33 32 31 30 5

$n = 66, Z(G) = \{2, 4, 6, 10, 13, 16, 19, 22, 24, 27, 31, 33\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 21 20 3, 1 2 20 19 34 4, 1 3 34 35 5, 1 4 35 31 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6 8
 27 21 2, 6 9 10 26 27 7, 6 5 31 11 10 8, 9 11 12 25 26 8, 9 31 32 13 12, 10, 11 13 14

24 25 10,11 32 15 14 12,13 15 16 23 24 12,13 32 33 17 16 14,15 17 18 23 14,15 33 34
 19 18 16,17 19 20 22 23 16,17 34 3 20 18,19 3 2 21 22 18, 7 27 28 22 20 2,21 28 29
 23 18 20,22 29 24 14 16 18,23 29 30 25 12 14,24 30 26 10 12,25 30 27 8 10,26 30 28
 21 7 8,27 30 29 22 21,28 30 24 23 22,29 28 27 26 25 24, 5 35 32 11 9,31 35 33 15 13
 11,32 35 34 17 15,33 35 4 3 19 17, 4 34 33 32 31 5

$n = 68, Z(G) = \{3, 5, 7, 9, 12, 16, 19, 21, 24, 28, 31, 34\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 15 16 14 3, 1 2 14 13 35 4, 1 3 35 36 5, 1 4 36 33 6, 1 5 33 9 8 7, 1 6
 8 20 15 2, 6 9 10 19 20 7, 6 33 11 10 8, 9 11 12 18 19 8, 9 33 34 13 12 10,11 13 14
 17 18 10,11 34 35 3 14 12,13 3 2 16 17 12, 7 20 21 22 16 2,15 22 23 17 14 2,16 23 24
 18 12 14,17 24 25 19 10 12,18 25 26 20 8 10,19 26 21 15 7 8,20 26 27 22 15,21 27 28
 23 16 15,22 28 29 24 17 16,23 29 30 25 18 17,24 30 31 26 19 18,25 31 27 21 20 19,26
 31 32 28 22 21,27 32 29 23 22,28 32 30 24 23,29 32 31 25 24,30 32 27 26 25,31 30 29
 28 27, 6 5 36 34 11 9,33 36 35 13 11,34 36 4 3 13, 5 4 35 34 33

$n = 70, Z(G) = \{2, 4, 6, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 30, 33, 35\}$

2 3 4 5 6 7, 1 7 21 20 3, 1 2 20 19 36 4, 1 3 36 37 5, 1 4 37 33 9 6, 1 5 9 8 7, 1 6
 8 28 21 2, 6 9 10 27 28 7, 6 5 33 11 10 8, 9 11 12 26 27 8, 9 33 34 13 12 10,11 13
 14 25 26 10,11 34 15 14 12,13 15 16 24 25 12,13 34 35 17 16 14,15 17 18 23 24 14,15
 35 36 19 18 16,17 19 20 22 23 16,17 36 3 20 18,19 3 2 21 22 18, 7 28 29 22 20 2,21
 29 23 18 20,22 29 30 24 16 18,23 30 31 25 14 16,24 31 26 12 14,25 31 27 10 12,26 31
 32 28 8 10,27 32 29 21 7 8,28 32 30 23 22 21,29 32 31 24 23,30 32 27 26 25 24,31 30
 29 28 27, 5 37 34 11 9,33 37 35 15 13 11,34 37 36 17 15,35 37 4 3 19 17, 4 36 35 34 33 5

A.5 Übersichtstabellen zum Beweis von Satz 5.6

Die im folgenden angeführten Tabellen A.1, A.2 und A.3 zeigen für die Fälle $f_5(C^I) = 5$ und k_i ist eine ungerade Zahl, $f_5(C^I) = 6$ und k_i ist eine ungerade Zahl und $f_5(C^I) = 6$ und k_i ist eine gerade Zahl jeweils eine Auflistung von Sequenzen sowie die zugehörigen Lemmata, die jeweils beweisen, dass eine solche Sequenz innerhalb des betrachteten Falls nicht existieren kann. In Tabelle A.4 werden alle Fälle betrachtet.

Sequenz	Lemma
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.9
$(0, 1, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.9
$(1, 1, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.13
$(2, 1, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.13
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 1, 0)$	5.9
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 1, 1)$	5.13
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 1, 2)$	5.13
$(\vartheta(F_{j-2}), 1, 1, 1, \vartheta(F_{j+2}))$	5.13
$(\vartheta(F_{j-2}), 2, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.13
$(\vartheta(F_{j-2}), 2, 1, 1, \vartheta(F_{j+2}))$	5.13
$(\vartheta(F_{j-2}), 2, 1, 2, \vartheta(F_{j+2}))$	5.13
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 2, \vartheta(F_{j+2}))$	5.13
$(\vartheta(F_{j-2}), 1, 1, 2, \vartheta(F_{j+2}))$	5.13

Tabelle A.1: Übersicht zu Fall $f_5(C^I) = 5$ und k_i ist eine ungerade Zahl aus Satz 5.6.

Sequenz	Lemma
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.9
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 1, 0)$	5.9
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 1, 1)$	5.15
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 1, 2)$	5.15
$(0, 1, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.9
$(1, 1, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.15
$(2, 1, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.15
$(\vartheta(F_{j-2}), 1, 1, 1, \vartheta(F_{j+2}))$	5.15
$(\vartheta(F_{j-2}), 2, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.15
$(\vartheta(F_{j-2}), 2, 1, 1, \vartheta(F_{j+2}))$	5.15
$(\vartheta(F_{j-2}), 2, 1, 2, \vartheta(F_{j+2}))$	5.15
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 2, \vartheta(F_{j+2}))$	5.15
$(\vartheta(F_{j-2}), 1, 1, 2, \vartheta(F_{j+2}))$	5.15

Tabelle A.2: Übersicht zu Fall $f_5(C^I) = 6$ und k_i ist eine ungerade Zahl aus Satz 5.6.

Sequenz	Lemma
(0, 1, 1, 1, 0)	5.9
(1, 1, 1, 1, 0)	5.9
(2, 1, 1, 1, 0)	5.9
(0, 1, 1, 1, 1)	5.9
(2, 1, 1, 1, 1)	5.17
(0, 1, 1, 1, 2)	5.9
(1, 1, 1, 1, 2)	5.17
(2, 1, 1, 1, 2)	5.17
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.9
$(0, 2, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.16
$(1, 2, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.11
$(2, 2, 1, 0, \vartheta(F_{j+2}))$	5.11
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 2, 0)$	5.16
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 2, 1)$	5.11
$(\vartheta(F_{j-2}), 0, 1, 2, 2)$	5.11
(0, 2, 1, 2, 0)	5.16
(1, 2, 1, 2, 0)	5.11
(2, 2, 1, 2, 0)	5.11
(1, 2, 1, 2, 1)	5.11
(2, 2, 1, 2, 1)	5.11
(1, 2, 1, 2, 2)	5.11
(2, 2, 1, 2, 2)	5.11

Tabelle A.3: Übersicht zu Fall $f_5(C^I) = 6$ und k_i ist eine gerade Zahl aus Satz 5.6.

$f_5(C^I)$	k_i (modulo 2)	Sequenz	Widerspruch zur Wahl von $Z'(G)$
1	{0, 1}		mit $\left\lfloor \frac{k_i(C^I)}{2} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{k_i}{2} \right\rfloor$
2	{0, 1}		
3	{0, 1}		
4	{0, 1}		
5	0		
5	1	(1)	mit Tabelle A.1
5	1	(2, 2)	mit Lemma 5.11
5	1	(2, 0)	mit Lemma 5.14
5	1	(0, 2)	
5	1	(0, 0)	
6	1	(1)	mit Tabelle A.2
6	1	(2, 2)	mit k_i (modulo 2) = 1
6	1	(2, 0)	
6	1	(0, 2)	
6	1	(0, 0)	
6	0	(1, 1, 1)	mit Tabelle A.3 und Lemma 5.18
6	0	(0, 1, 0)	mit Tabelle A.3
6	0	(0, 1, 2)	
6	0	(2, 1, 0)	
6	0	(0, 1, 0)	
6	0	(1, 1, 2)	mit Lemma 5.20
6	0	(2, 1, 1)	
6	0	(1, 1, 0)	
6	0	(0, 1, 1)	
6	0	(2, 2)	mit Lemma 5.11
6	0	(0, 0)	mit Lemma 5.19
6	0	(2, 0)	
6	0	(0, 2)	

Tabelle A.4: Übersicht aller betrachteten Fälle zum Beweis von Satz 5.6.

Literaturverzeichnis

- [1] Ahmad, S. G., Liew, C. S., Rafique, M. M., Munir, E. U., und Khan, S. U.: Data-intensive workflow optimization based on application task graph partitioning in heterogeneous computing systems. *Big Data and Cloud Computing (BdCloud), 2014 IEEE Fourth International Conference*, (2014) 129-136.
- [2] Andova, V., Kardos, F. und Skrekovski, R.: Mathematical aspects of fullerenes. *Ars Math. Contemp.*, 11 (2016), 353-379.
- [3] Antonakopoulos, S. und Zhang, L.: Approximation algorithms for grooming in optical network design. *Theoretical Computer Science*, 412(29) (2011), 3738-3751.
- [4] Bafna, V. und Pevzner, P. A.: Genome Rearrangements and Sorting by Reversals. *SIAM J. Comput.*, 25(2) (1996), 272-289.
- [5] Bakry, R., Vallant, R. M., Najan-Ul-Haq, M., Rainer, M., Szabo, Z., Huck, C. W. und Bonn, G.: Medicinal applications of fullerenes. *Int. Journal of Nanomedicine*, 2(4) (2007), 639-649.
- [6] Banhart, F. und Füller, T.: In situ observation of the formation and stability of single fullerene molecules under electron irradiation. *Chemical physics letters*, 254(5-6) (1996), 372-378.
- [7] Bodlaender, H. L.: Dynamic programming on graphs with bounded treewidth. *Int. Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, 317 (1988), 105-118.
- [8] Bodlaender, H. L.: Planar graphs with bounded treewidth. *Unbekannter Veröffentlichlicher*, 88 (2004).

-
- [9] Brinkmann, G. und MacKay, B. D.: Fullgen Manual. <https://users.cecs.anu.edu.au/bdm/plantri/>, (abgerufen 28.10.2019).
- [10] Brinkmann, G. und Dress, A. W.: A constructive enumeration of fullerenes. *Journal of Algorithms*, 23(2) (1997), 345-358.
- [11] Brinkmann, G. Goedgebeur, J. und McKay, B. D.: The Generation of Fullerenes. *J. Chem. Inf. Model.*, 52(11) (2012), 2910-2918.
- [12] Brouwer, L. E. J.: *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes*. Math. Annalen Bd. 69, 1910.
- [13] Caprara, A.: Sorting permutations by reversals and Eulerian cycle decompositions. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 12(1) (1999), 149–182.
- [14] Caprara, A., Panconesi, A. und Rizzi, R.: Packing cycles in undirected graphs. *Journal of Algorithms*, 48 (2003), 239–256.
- [15] Chartrand, G. und Lesniak, L.: *Graphs & digraphs*. Chapman & Hall/CRC, 4th ed., Boca Raton, 2005.
- [16] Chen, C. L. und Chun-Yang, Z.: Data-intensive applications, challenges, techniques and technologies: A survey on Big Data. *Information Sciences*, 275 (2014) 314-347.
- [17] Cornuéjols, G., Naddef, D. und Pulleyblank, W. R.: Halin graphs and the travelling salesman problem *Journal of Algorithms*, 26 (1983), 287-294.
- [18] Daskin, M.S.: Network and Discrete Location. *John Wiley & Sons Incorporated*, New York, 1995.
- [19] De Cusatis, C.: Fiber optic data communication: Technological trends and advances. *Academic Press*, San Diego (2002).
- [20] Demaine, E. D., Demaine, M. L. und Uehara, R.: Zipper unfolding of domes and prismoids. *Canad. Conf. Comput. Geom.*, (2013), 43-48.
- [21] Dennler, G., Scharber, M. C. und Brabec, C. J.: Polymer-Fullerene bulk-heterojunction solar cells. *Advanced Materials*, 21(13) (2009), 1323-1338.

- [22] Dettmann, J.: Fullerene: die Bucky-Balls erobern die Chemie. *Springer-Verlag*, 2013.
- [23] Doslic, T. und Vukicevic, D.: Computing the bipartite edge frustration of fullerene graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 155 (2007), 1294-1301.
- [24] Duijvestijn, A. J. W.: The number of polyhedral (3-connected planar) graphs. *Mathematics of Computation*, 65(215) (1996), 1289-1293.
- [25] Duijvestijn, A. J. W. und Federico, P. J.: The number of polyhedral (3-connected planar) graphs. *American Mathematical Society*, 37(156) (1981), 523-532.
- [26] Endo, M. und Kroto, H. W.: Formation of carbon nanofibers. *J. Phys. Chem.*, 96 (1992) 6941-6944.
- [27] El-Zanati, S. I.: Maximum packings with odd cycles. *Discrete Mathematics*, 131 (1994), 91-97.
- [28] Euler, L.: Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise a aucune analyse. *Mem. Acad. Sci. Berlin*, 15 (1759), 128-140.
- [29] Fajtlowicz, S. und Larson, C. E.: Graphtheoretic Independence as a Predictor of Fullerene Stability. *Chem. Phys. Letters*, 377 (2003), 485-490.
- [30] Fowler, P. W., Manolopoulos, D. E.: *An atlas of fullerenes*. Courier Corporation, New York, 2006
- [31] Graver, J. E.: Kekule structures and the face independence number of a fullerene. *European Journal of Combinatorics*, 28(4) (2007), 1115-1130.
- [32] Graver, J. E.: The independence number of fullerenes and benzoids. *European Journal of Combinatorics*, 6 (2006), 850-863.
- [33] Graver, J. E. und Graves, C. M.: Fulleren Patches I. *Ars Mathematica Contemporanea*, 3 (1), 109-120.
- [34] Gross, J. L., Yellen, J. und Zhang, P.: *Handbook of Graph Theory Second Edition*. CRC Press, Boca Raton, 2014
- [35] Grünbaum, B.: *Convex Polytopes*. Springer, 2nd ed., New York, 2003.

- [36] Grünbaum, B. und Motzkin, T. S.: The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra. *Canadian Journal of Mathematics*, 15 (1963), 744-751.
- [37] Halin, R.: Studies on minimally n -connected graphs. *Combinatorial Mathematics and its applications*, (1971), 129-136. Halin, Rudolf. Studies on minimally n -connected graphs. *Combinatorial Mathematics and its applications* (1971): 129-136.
- [38] Harant, J., Rautenbach, D., Recht, P. und Regen, F.: Packing edge-disjoint cycles in graphs and the cyclomatic number. *Discrete Math.*, 310(9) (2010), 1456-1462.
- [39] Harant, J., Rautenbach, D., Recht, P., Schiermeyer, I. und Sprengel, E.-M.: Packing disjoint cycles over vertex cuts. *Discrete Math.*, 310(13-14) (2010), 1974-1978.
- [40] Hartung, E. J.: The Clar Structure of Fullerenes. *Dissertation*, Syracuse University, 2012.
- [41] Heath, L. S. und Vergara, J. P. C.: Edge-packing planar graphs by cyclic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 81 (1998) 169-180.
- [42] Hoffman, A. J. und Wolfe, P.: *History, in The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization* (E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnoy Kan und D.B. Shmoys, Eds.) Wiley, 1985.
- [43] Kroto, H. W.: The stability of fullerenes C_n , with $n = 24, 28, 32, 36, 50, 60$ and 70 . *Nature*, 329 (1987), 529-531.
- [44] Kroto, H. W., Heath, J. R., O'Brien, S. C., Curl, R. L. und Smalley, R. E.: C_{60} : buckminsterfullerene. *Nature*, 318(6048) (1985), 162-163.
- [45] Kroto, H. W., Heath, J. R., O'Brien, S. C., Curl, R. L. und Smalley, R. E.: Nobel prize for chemistry for 1996. *S. African Journal of Chemistry*, 50 (1997), 102-105.
- [46] Langa, F., De La Puente, F. L., und Nierengarten, J.-F.: *Fullerenes: principles*

- and applications*. Royal Society of Chemistry, 2. Auflage, Cambridge, 2007. eds. Fullerenes: principles and applications. Vol. 2. Royal Society of Chemistry, 2007.
- [47] Lenz, H.: *Grundlagen der Elementarmathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 3. Auflage, Berlin, 1975.
- [48] Meng, J., Liang, X., Chen, X. und Zhao, Y.: Biological characterizations of $[Gd@C_{82}(OH)_{22}]_n$ nanoparticles as fullerene derivatives for cancer therapy. *Integr. Biol.*, 5 (2013), 43-47.
- [49] Menger, K.: Das Botenproblem. *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, 2 (1932), 11-12.
- [50] Müller, U.: *Anorganische Strukturchemie*. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [51] Piersen, H. O.: *Handbook of Carbon, Graphite, Diamonds and Fullerenes*. Noyes Publications, New Jersey, 1993.
- [52] Prokurowski, A. and Syslo, M. M.: Efficient vertex- and edge-coloring of outer-planar graphs. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, 7(1) (1986), 131-136.
- [53] Punnen, A. P.: *The Traveling Salesman Problem and its Variants*. (G. Gutin und A.P. Punnen, Eds.) Kluwer, 2002.
- [54] Quinn, J.: Cycle packings in graphs and digraphs. *Discrete Mathematics*, 149 (1996), 325-328.
- [55] Recht, P. und Degenhardt, J.: Über maximale kantendisjunkte Kreiszerlegungen in Graphen. *Diskussionsbeiträge des Fachgebiets Operations Research und Wirtschaftsinformatik*, 25 (2002).
- [56] Recht, P. und Degenhardt, J.: On the relation between the cycle packing number and the cyclomatic number of a graph. *Diskussionsbeiträge des Fachgebiets Operations Research und Wirtschaftsinformatik*, 35 (2008).
- [57] Recht, P. und Schulte-Loh, E.-M.: Maximum cycle Packing in three families of Peterson graphs. *Diskussionsbeiträge des Fachgebiets Operations Research und Wirtschaftsinformatik*, 35 (2008).
- [58] Recht, P. und Sprengel, E.-M.: Packing Euler graphs with traces. *Operations Research Proceedings 2011*, (2012) 53-58.

- [59] Reiner, B., Siegel, E., und Carrino, J. A.: Workflow optimization: current trends and future directions. *Journal of Digital Imaging*, 15(3) (2002), 141-152.
- [60] Recht, P. und Stehling, S.: On maximum cycle packings in polyhedral graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 2(1) (2014), 18-31.
- [61] Saaty, T.: *The four-color problem: assaults and conquest*. McGraw-Hill, London, 1977.
- [62] Scharlau, R.: *Diskrete Geometrie (Version 3)*. TU Dortmund, 2011.
- [63] Schwerdtfeger, P., Wirz, L. N., Avery, J. E.: The topology of fullerenes. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Molecular Science*, 5.1 (2015), 96-145.
- [64] Sprengel, E.-M.: Maximale Kreispackungen für verallgemeinerte Peterson Graphen und die Bestimmung der Kreispackungszahl unter Verwendung von Knotenseparatoren. *Dissertation*, TU Dortmund, 2015.
- [65] Stehling, S.: Maximum Cycle Packing - Abschätzungen zu maximalen Kreispackungen in polyhedralen Graphen *Diplomarbeit*, TU Dortmund (2010).
- [66] Stone, A. J. und Wales, D. J.: Theoretical studies of icosahedral C_{60} and some related species. *Chem. Phys. Lett.*, 128 (1986), 501-503.
- [67] Withers, J. C., Loutfy, R. O., Lowe, T. P.: Fullerene Commercial Vision. *Fullerene science and technology*, 5 (1997), 1-31.
- [68] Whitney, H.: Nonseparable and planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 34 (1932), 339-362.
- [69] Yadav, B. C. und Kumar R.: Structure, properties and applications of fullerenes. *Int. Journal of Nanotechnology and Applications*, 2 Nr.1 (2008), 15-24.
- [70] Wang, W., Bu, Y., Montassier, M. und Raspaud, A. R.: On backbone coloring of graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 23 Nr.1 (2012), 79-93.
- [71] Zhang, Y. und Zhang, F.: New lower bounds on the number of perfect matchings in fullerene graphs. *Jour. of Math. Chemistry*, 30(3) (2001), 343-347.
- [72] Zhao, Y., Kim, Y-H., Dillon, A. C., Heben, M. J. und Zhang, S. B.: Hydro-

gen Storage in Novel Organometallic Buckyballs. *The American Phys. Soc.*, 94(15504) (2005), 1-4.

[73] Zhu, B. und Goddard, W.: An algorithm for outerplanar graphs with parameter. *Journal of Algorithms.*, 12(1991), 657-662.