technische universität dortmund

fakultät rehabilitationswissenschaften

Brüche inklusive

–

Eine Interventionsstudie zum Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses durch unterrichtsintegrierte Förderung im inklusiv orientierten Mathematikunterricht auch für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen

vorgelegt von

Ria-Friederike Kirchhof

als Dissertation zur Erlangung des Grades einer Doktorin

der Erziehungswissenschaften (Dr. paed.)

in der

Fakultät Rehabilitationswissenschaften

der Technischen Universität Dortmund

Dortmund

2020

Betreuer: Prof. Dr. Franz B. Wember (i.R.)

Betreuerin: Prof. Dr. Uta Häsel-Weide

DANKSAGUNG

Mit der Fertigstellung einer Arbeit wie dieser ist es an der Zeit, den Personen zu danken, die wesentlich zu dem Entwicklungs- und Entstehungsprozess beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Franz B. Wember (i.R., TU Dortmund, Fachgebiet Rehabilitation und Pädagogik bei Lernbehinderungen), der mir während der gesamten Zeit am Lehrstuhl und auch darüber hinaus zur Seite stand und sich fortwährend Zeit genommen hat, meinen Promotionsprozess mit seiner wertvollen Erfahrung, seiner beeindruckenden fachlichen und forschungsmethodischen Expertise sowie seinen konstruktiven Rückmeldungen zu bereichern und zu unterstützen. Ich danke ihm für sein Vertrauen in meine Arbeit, seine großartige Betreuung und seine ermutigenden Worte zu den richtigen Zeitpunkten.

Danken möchte ich auch meiner Doktormutter Prof. Dr. Uta Häsel-Weide (Universität Paderborn, Institut für Mathematik), die mich mit ihrer mathematikdidaktischen Expertise und ihrer konstruktiven Kritik in meinem Promotionsprozess maßgeblich vorangebracht hat.

Ebenso möchte ich Prof. Dr. Jan Kuhl (TU Dortmund, Fachgebiet Unterrichtsentwicklungsforschung mit dem Schwerpunkt Inklusion) danken, der nicht nur Teil meiner Prüfungskommission ist, sondern meine Arbeit stets mit Interesse verfolgt und mich während meiner Universitätszeiten mit seiner forschungsmethodischen Expertise unterstützt hat.

Mein Dank gilt auch meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen der Lehrstühle *Rehabilitation und Pädagogik bei Lernbehinderungen* sowie *Unterrichtsentwicklungsforschung mit dem Schwerpunkt Inklusion*, die mit der angenehmen und wertschätzenden Arbeitsatmosphäre, dem regen Austausch sowie ihren konstruktiven Rückmeldungen nach meinen Vorträgen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Bei Dr. Lena Bömelburg, Dr. Claudia Wittich und Dr. Thomas Breucker möchte ich mich in besonderem Maße für die kollegiale und freundschaftliche Zusammenarbeit und die bereichernden fachlichen Diskussionen und Anregungen bedanken. Sie haben mich in schwierigen Phasen stets durch ermutigende Gespräche aufgebaut und mich mit ihren Erfahrungswerten zum Durchhalten motiviert.

Ich danke zudem Niklas Heitmann, der mich als studentische Hilfskraft zuverlässig und sorgfältig bei der Erstellung der zahlreichen Materialien unterstützt hat.

Ein besonderer Dank gilt auch den Schülerinnen und Schülern, die motiviert an meiner Intervention teilgenommen haben und ohne die diese Arbeit nicht hätte durchgeführt werden können. Ebenso danke ich den drei Lehrerinnen, die mit großer Offenheit stets interessiert und kooperativ die Umsetzung meiner Unterrichts- und Fördereinheit unterstützt haben. Auch der Schulleitung und der didaktischen Leitung meiner Kooperationsschule danke ich für ihre Bereitschaft, mein Projekt zu unterstützen.

Mein ganz persönlicher Dank gilt schließlich meinen guten Freunden und meiner wunderbaren Familie. Ihre Unterstützung und Motivation, ihr Verständnis und ihre Geduld haben mich durch die Höhen und Tiefen meines Promotionsprozesses getragen.

Mein tiefster Dank gilt meiner Mutter, meinem Vater (†) und meinem Bruder, die in jeder Lebenslage an mich geglaubt und mir bedingungslosen Halt gegeben haben. Meiner Mutter und meinem Bruder danke ich für ihren liebevollen und unbezahlbaren Zuspruch in den herausfordernden Phasen meiner Promotion.

Ich danke Hans-Georg für seine exzellenten Korrekturarbeiten, mit denen er mich mit größter Sorgfalt und Geduld während meines gesamten Schreibprozesses unterstützt hat.

Von Herzen danke ich meinem wundervollen Mann Nico dafür, dass er immer an mich geglaubt und mich in allen Phasen meiner Arbeit bestärkt hat. Er hat mir stets den Rücken frei gehalten, mich geduldig er- und getragen und auf vielfältige Weise dazu beigetragen, dass ich diese Arbeit fertigstelle.

Unserer tollen Tochter Rahel, die nicht nur während der Kugelzeit, sondern auch danach im Tuch die ein oder andere Stunde mit mir am Schreibtisch verbracht hat, danke ich dafür, dass sie mich durch ihr strahlendes Lächeln immer wieder zum Weitermachen ermutigt und mir dabei die Bedeutung des privaten Glücks vor Augen geführt hat.

Es ist ein so großes Geschenk, euch alle fest in meinem Herzen zu tragen. Euch widme ich diese Arbeit.

Sarstedt, im November 2020

R.-F. [illegible]

INHALTSVERZEICHNIS

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

TABELLENVERZEICHNIS

1 EINLEITUNG

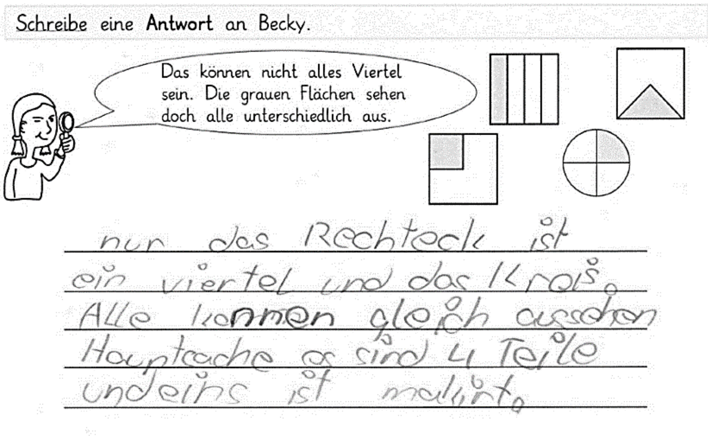


Abbildung 1: Lösung der Standortbestimmung 1 zum grundlegenden Bruchzahlverständnis von Schüler D., Klasse 5, Integrierte Gesamtschule

Ein zentrales Thema im Mathematikunterricht der Sekundarstufe stellt die Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen dar. Sowohl nationale als auch internationale empirische Studien (bspw. Fenell & Karp, 2017; Padberg, 2009; Prediger, 2008a; Wartha, 2007b sowie viele weitere) kommen immer wieder zu dem Ergebnis, dass Lernende in diesem Inhaltsbereich häufig große Schwierigkeiten zeigen. Die Aufgabenbearbeitung des Schülers D. (Abb. 1) verdeutlicht exemplarisch, dass besondere Probleme oftmals die inhaltlichen Vorstellungen zu Bruchzahlen bereiten, die als grundlegendes Bruchzahlverständnis die Basis für die kalkülhafte Bruchrechnung darstellen. Tiefergehende Analysen deuten darauf hin, dass häufig unzulänglich entwickelte Kompetenzen im Bereich des arithmetischen Basisstoffs der Grundschulzeit für diese Schwierigkeiten verantwortlich sein können (bspw. Wartha & Güse, 2009). Um allen Schülerinnen und Schülern im inklusiven Mathematikunterricht den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses ermöglichen zu können, bedarf es einerseits einer differenzierten Diagnostik der individuellen Kompetenzen sowohl im Bereich des arithmetischen Basisstoffs als auch in den zentralen Aspekten des grundlegenden Bruchzahlverständnisses. Andererseits ist ein differenziertes Unterrichts- und Fördermaterial, das ebendiese beiden Inhaltsbereiche fokussiert, unerlässlich. „Da die Interferenzen des Vorwissens offenbar eine zentrale Rolle beim Erwerb von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen spielen, ist es umso erstaunlicher, dass nur vereinzelt empirische Studien vorliegen, die dieses Vorwissen selbst zum Gegenstand machen“ (Wartha & Güse, 2009, S. 257). Sowohl bei der Entwicklung diagnostischer Instrumente als auch bei der Entwicklung geeigneter Unterrichts- und Fördermaterialien sollten diejenigen arithmetischen Inhaltsbereiche der Grundschulmathematik in den Blick genommen werden, die eine zentrale Voraussetzung für das grundlegende Bruchzahlverständnis darstellen und deren möglicherweise unzureichender Aufbau zu Lernschwierigkeiten führen kann. Voraussetzung dafür ist die theoretische stoffdidaktische Durchdringung der inhaltlichen Zusammenhänge (Wartha, 2009a, S. 174).

Das Thema Inklusion und der Umgang mit Heterogenität werden nach wie vor intensiv diskutiert und sind bildungspolitisch hochaktuell (Vom Hofe & Tiedemann, 2017, S. 2). Auch der inklusiv orientierte Mathematikunterricht stellt Lehrkräfte vor die Herausforderung, die zentralen Inhaltsbereiche für alle Lernenden einer heterogenen Lerngruppe zugänglich zu machen. Es mangelt jedoch nach wie vor an einer theoretisch fundierten Fachdidaktik, „die sowohl die fachdidaktischen als auch die sonderpädagogischen Ansprüche miteinander verknüpft“ (Werner, 2019, S. 16-17). Zwar liegen gegenwärtig vereinzelte (fachdidaktische) Konzepte und Aufgabenformate für den inklusiven (Mathematik-)Unterricht vor, jedoch existiert kein umfassendes Unterrichts- und Förderkonzept zu einer vollständigen Unterrichtseinheit, das sowohl einen aktuellen Inhaltsbereich in der Sekundarstufe I, wie den der Einführung zu den positiven rationalen Zahlen, als auch die dafür relevanten Aspekte des arithmetischen Basisstoffs berücksichtigt und für heterogene Lerngruppen differenziert aufbereitet zur Verfügung stellt. Insbesondere die Implementation spezifischer Unterstützungsmaßnahmen für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten in den allgemeinen Mathematikunterricht stellt nach wie vor ein zentrales und bisher noch nicht hinreichend genug bearbeitetes Thema dar.

Forschungsgegenstand der Arbeit

In dieser Arbeit bilden Erkenntnisse aus der Lehr- und Lernforschung, der Fachdidaktik Mathematik und der Sonderpädagogik die theoretischen und konzeptionellen Ausgangspunkte. Es wird einerseits eine explizit fachlich-didaktische Perspektive eingenommen, d.h. der Blick wird auf die fachliche Gestaltung des inklusiven Mathematikunterrichts unter besonderer Berücksichtigung der Vielfalt der Lernenden gerichtet (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017c, S. 213). Andererseits soll eine Verknüpfung mit sonderpädagogischen Theorien, Prinzipien und Methoden eine inklusiv orientierte Unterrichtsplanung begründen, denn das zentrale Forschungsinteresse dieser Arbeit liegt in der Implementierung und Evaluation eines qualitativ hochwertigen Bildungsangebots im Fach Mathematik für die Sekundarstufe I. Es soll einem weit verbreiteten Missverständnis entgegengewirkt werden, Inklusion könne konzeptneutral erfolgen (Vom Hofe & Tiedemann, 2017, S. 4). „So ist davon auszugehen, dass schulische Inklusion die Chance auf tatsächliche Verwirklichung nur hat, wenn mit und für die schulische Praxis theoretisch fundierte und praktikable Antworten auf Fragen der Unterrichtsinhalte und Unterrichtsmethoden entwickelt werden“ (Jenessen & Wagner, 2012, S. 339). Im Rahmen dieser Arbeit wird ein umfangreiches Unterrichts- und Förderkonzept zur Einführung des grundlegenden Bruchzahlverständnisses in enger Verbindung zu zentralen Aspekten des arithmetischen Basisstoffs für den inklusiv orientierten Mathematikunterricht zu Beginn der Sekundarstufe I entwickelt, erprobt und evaluiert. Inhalte aus dem regulären Mathematikunterricht werden mit einer zusätzlichen, präventiv ausgerichteten Förderung für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht verknüpft. Es handelt sich um praxisnahe Forschung, denn „die Frage nach dem Gelingen der Inklusion wird zuallererst im Unterricht selbst entschieden: Wir brauchen flexible Methoden und Arbeitsformen, aber auch ganz konkrete Aufgaben und Materialien, die sich für einen inklusiven Unterricht eignen“ (Vom Hofe & Tiedemann, 2017, S. 4-5).

Neben diesem unterrichtspraktischen Interesse zielt ein weiterer Forschungsschwerpunkt darauf ab, ein Testinstrument zu entwickeln, zu erproben und zu evaluieren, das sowohl das grundlegende Bruchzahlverständnis als auch die dafür relevanten Voraussetzungen im Bereich des arithmetischen Basisstoffs überprüft. Trotz der zunehmenden Entwicklung von Diagnostikinstrumenten und Fördermaterialien für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen lässt sich oftmals eine mangelnde Verzahnung beider Stränge feststellen. Fischer, U., Roesch und Moeller (2017) konstatieren, dass die Konzeption der Test- und Fördermaterialien „oft unabhängig voneinander geschieht: Während Fördermaterialien meist aus dem tatsächlichen Förderbedarf sowie einem didaktischen Hintergrund erwachsen, werden standardisierte Tests oft aus einer theoretischen Perspektive hergeleitet und entwickelt“ (S. 25). Mit der vorliegenden Forschungsarbeit wird das Ziel verfolgt, eine inhaltliche Verbindung zwischen der Unterrichts- und Förderkonzeption (Kap. 5) und dem Testinstrument (Kap. 7) herzustellen, die nach Schulz, Leuders und Rangel (2017) als „dringend notwendig“ (S. 396) eingeschätzt wird. Auch Moser Opitz und Nührenbörger (2015) betonen die Bedeutsamkeit der „Entwicklung und Evaluation von mathematikdidaktisch fundierten Diagnose- und

Förderinstrumenten, die Hinweise liefern für eine alltagsnahe und leistungsförderliche Verzahnung von Diagnose und Förderung“ (S. 509).

Aufbau der Arbeit

Aus übergeordneter Perspektive baut sich die vorliegende Arbeit in einem Dreischritt auf, der sich von der theoretischen Ebene über die Entwicklungsebene bis hin zur Forschungsebene erstreckt und mit den entsprechend inkludierten Kapiteln in Abbildung 2 grafisch dargestellt ist.

Teil I umfasst die Kapitel 2, 3 und 4 und bildet die Grundlagen auf *theoretische Ebene* ab, die für die Entwicklung und Erforschung relevant sind. *Kapitel 2* widmet sich dem Mathematikunterricht in heterogenen Lerngruppen. Dazu wird zunächst die aktuelle Situation mit ihren für den vorliegenden Forschungskontext zentralen Spannungsfeldern und Herausforderungen, rechtlichen Grundlagen sowie Begriffsverständnissen von Inklusion und Heterogenität näher ausgeführt. Daran anschließend erfolgt eine ausführliche Herleitung und Darstellung des dieser Arbeit zugrunde gelegten Verständnisses inklusiv orientierter Didaktik, bevor der Blick gezielter auf das gemeinsame Lernen von Mathematik in inklusiven Klassen gerichtet wird. Es werden zentrale didaktische Leitideen sowie Kriterien „guten“ inklusiven Mathematikunterrichts erarbeitet und Planungsschritte für eine differenzsensible Unterrichtsplanung entwickelt. Aktuelle Forschungsergebnisse im Überblick schließen das jeweilige Teilkapitel ab. Vor dem Hintergrund der theoretischen Ausführungen werden leitende Fragestellungen für die Interventionsstudie abgeleitet. Darauf aufbauend wird der Blick in *Kapitel 3* weiter spezifiziert und auf die Förderung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu Beginn der Sekundarstufe I gerichtet. Neben einer begrifflichen Abgrenzung sowie der Darstellung von Merkmalen mathematischer Lernschwierigkeiten und stofflichen Hürden zu Beginn der Sekundarstufe I wird die fokussierte Förderung für diese Schülerschaft erläutert und das für die vorliegende Arbeit zentrale Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung dargestellt. Anschließend werden leitende Fragestellungen für die Interventionsstudie formuliert. *Kapitel 4* richtet den Blick auf die inhaltliche Ausgestaltung der Unterrichtseinheit und Förderung und stellt die beiden für die vorliegende Arbeit zentralen Inhaltsbereiche des arithmetischen Basisstoffs sowie der

Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen ausführlich dar. Leitende Fragestellungen schließen dieses Kapitel ab.

Teil II bezieht sich auf die *Entwicklungsebene*. *Kapitel 5* stellt eine Überleitung zwischen der theoretischen Ebene und der Forschungsebene dar und konkretisiert die im ersten Teil erarbeiteten theoretischen Grundlagen in einem der beiden großen Entwicklungsprodukte dieser Arbeit: der Unterrichts- und Förderkonzeption zum Aufbau des grundlegenden Bruchzahlverständnisses im inklusiven Mathematikunterricht unter Berücksichtigung von Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen. Das Kapitel stellt die Unterrichts- und Förderkonzeption mit den vorgenommenen Adaptionen, dem Aufbau und der Strukturierung sowie den inhaltlichen und methodischen Schwerpunkten vor und erläutert diese anschaulich an ausgewählten konkreten Beispielen.

Teil III dokumentiert in den Kapiteln 6 bis 10 die Aktivitäten auf der *Forschungsebene*. Die methodologischen Entscheidungen für die vorliegende Studie werden in *Kapitel 6* dargelegt. Das Forschungsinteresse wird aufgezeigt, die für die empirische Arbeit zentralen Forschungsfragen gestellt und das Forschungsdesign konkretisiert. Neben der Darstellung der Messinstrumente und der Forschungsmethoden werden abschließend Aussagen zu erwarteten Ergebnissen getroffen. In *Kapitel 7* wird das zweite Entwicklungsprodukt der vorliegenden Arbeit vorgestellt: das Testinstrument „BruKo“ zur Erfassung grundlegender Kompetenzen des Bruchzahlverständnisses. Es werden dessen Aufbau und Struktur dargelegt, erste Aussagen zur Skalierung getroffen sowie der ausführliche Auswertungsleitfaden zur Bewertung der Testaufgaben erläutert. Darüber hinaus werden prägnante Fehlerphänomene dargestellt und erste Interpretationsmöglichkeiten aufgezeigt. *Kapitel 8* dokumentiert die quantitativen Ergebnisse einer Interventionsstudie. Neben der Präsentation zentraler Ergebnisse des „BruKos“ werden die Ergebnisse inferenzstatistischer Analysen dargestellt. In *Kapitel 9* erfolgen die Diskussion und Interpretation der Ergebnisse sowie die Darstellung forschungsmethodischer Grenzen des vorliegenden Designs. Die beiden Entwicklungsprodukte, das Testinstrument und die Unterrichts- und Förderkonzeption, werden kritisch diskutiert, bevor im letzten Kapitel dieser Arbeit ein Fazit gezogen und Implikationen für Forschung und Praxis im Kontext des inklusiv orientierten Mathematikunterrichts erläutert werden.

1. Einleitung

THEORETISCHE EBENE

2. Mathematikunterricht in heterogenen Lerngruppen

2.1 Aktuelle Situation
2.1.1 Spannungsfelder und Herausforderungen
2.1.2 Rechtliche Entwicklung und Gesetzeslage
2.1.3 Inklusion in der Sekundarstufe I
2.1.4 Inklusionsverständnis
2.1.5 Heterogenitätsverständnis
2.1.6 Aktuelle Forschungsergebnisse im Überblick

2.2 Inklusiv orientierte Didaktik
2.2.1 Didaktische Theoriebildung
2.2.2 Grundzüge aus sonderpädagogischer Perspektive
2.2.3 Grundzüge aus fachdidaktischer Perspektive
2.2.4 Inklusiv orientierte Didaktik
2.2.5 Aktuelle Forschungsergebnisse im Überblick

2.3 Gemeinsames Lernen von Mathematik in inklusiven Klassen
2.3.1 Didaktische Leitideen
2.2.2 Kriterien „guten" inklusiven Mathematikunterrichts
2.3.3 Differenzsensible Unterrichtsplanung
2.3.4 Ausgewählte empirische Erkenntnisse

2.4 Leitende Fragestellungen für die Interventionsstudie

3. Förderung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu Beginn der Sekundarstufe I

3.1 Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht
3.1.1 Begriffliche Abgrenzung Rechenstörung – Dyskalkulie – Rechenschwierigkeiten – Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten
3.1.2 Merkmale mathematischer Lernschwierigkeiten und stoffliche Hürden zu Beginn der Sekundarstufe I
3.1.3 Fokussierte Förderung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen

3.2 Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung
3.2.1 Didaktische Leitideen
3.2.2 Förderschleifen

3.3 Leitende Fragestellungen für die Interventionsstudie

4. Curriculare Bereiche

4.1 Arithmetischer Basisstoff
4.1.1 Curriculare Einordnung
4.1.2 Sachanalyse und fachlicher Kern
4.1.3 Relevanz für die Sekundarstufe I
4.1.4 Ausgewählte empirische Erkenntnisse

4.2 Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen
4.1.1 Curriculare Einordnung
4.1.2 Sachanalyse und fachlicher Kern
4.2.3 Schwierigkeiten im Verständnis von positiven rationalen Zahlen
4.1.3 Brüche als Unterrichtsthema
4.1.4 Ausgewählte empirische Erkenntnisse

4.3 Leitende Fragestellungen für die Interventionsstudie

ENTWICKLUNGSEBENE

5. Entwicklung einer Unterrichts- und Förderkonzeption

5.1 Adaption des Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung

5.2 Aufbau und Strukturierung
5.2.1 Klassenintegrierte Förderung
5.2.2 Förderschleifen

5.3 Inhaltliche Schwerpunktlegungen
5.3.1 Klassenintegrierte Förderung
5.3.2 Förderschleifen

5.4 Fachdidaktische und methodische Schwerpunktlegung
5.4.1 Klassenintegrierte Förderung
5.4.2 Förderschleifen

5.5 Ausgewählte konkrete Beispiele

5.6 Zusammenfassung

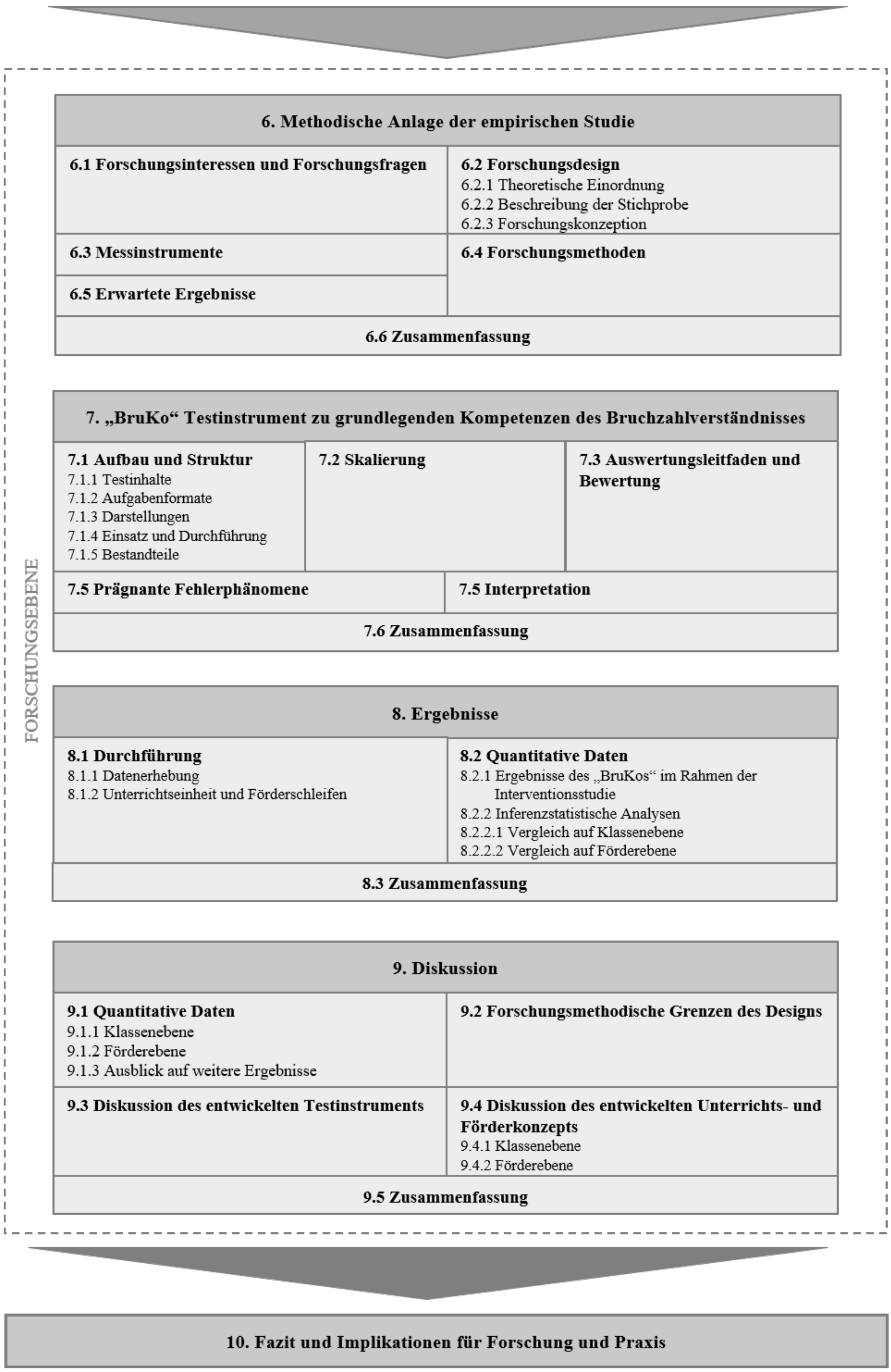


Abbildung 2:Aufbau der Arbeit (eigene Darstellung)

2 Mathematikunterricht in heterogenen Lerngruppen

Das Ziel inklusiven Unterrichts, jede Schülerin und jeden Schüler optimal und individuell zu fördern, ist bildungspolitisch hochaktuell, jedoch kein neuer Ansatz der gegenwärtigen Inklusionsdebatte. In einem historisch gewachsenen Prozess ist die bewusste Auseinandersetzung mit der Heterogenität der Lernenden sowohl auf internationaler als auch auf nationaler Ebener als vieldiskutiertes Thema in den Mittelpunkt öffentlicher, bildungspolitischer, erziehungswissenschaftlicher, fachdidaktischer und sonderpädagogischer Diskurse getreten. Bereits 1950 hebt der Pädagoge und Mathematikdidaktiker Johannes Kühnel hervor: „Dies eine dürfte keinem Zweifel mehr begegnen, dass wir unter allen Umständen die Forderung der gleichmäßigen Förderung aufgeben müssen, und dass wir an ihre Stelle die Forderung der höchstmöglichen Förderung jeder einzelnen Begabung zu setzen haben" (1966, S. 253–254). Die hier zum Ausdruck gebrachte Notwendigkeit der Auseinandersetzung mit der Verschiedenheit der Lernenden „zählt zu den Grundfragen seit Einführung der allgemeinen Schulpflicht" (Wielpütz, 1998, S. 9). Die Anerkennung der individuellen Besonderheiten einer und eines Jeden (Grosche, 2015; Prengel, 2006) sowie der Anspruch auf individuelle Förderung (Grosche, 2015; Wocken, 2015) als Leitvorstellungen wurden demnach schon lange vor der aktuellen Inklusionsdebatte formuliert, sie haben als die zwei wesentlichen Kernelemente schulischer Inklusion nach wie vor eine hohe Relevanz für die inklusive Schul- und Unterrichtsentwicklung.

Schulische Inklusion stellt sowohl in der jüngeren Vergangenheit als auch in der Gegenwart ein vieldiskutiertes Thema dar, dessen Argumentationslinien sich nach Werning (2016b, S. 153) in vier Diskussionsfeldern voneinander abgrenzen lassen, die sich in der jeweils konkret fokussierten Personengruppe sowie in ihren Bedingungen und Zielen hinsichtlich der Umsetzung von Inklusion unterscheiden:

1. global, d.h. der Diskurs ist durch die Vereinten Nationen und die UNESCO bestimmt
2. sonderpädagogisch, d.h. der Diskurs fokussiert die Förderung von Lernenden mit und ohne sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf
3. Schul- und Unterrichtsentwicklung, d.h. der Diskurs bezieht sich auf heterogene Lerngruppen
4. regional bzw. lokal, d.h. der Diskurs setzt sich mit konkret vorgegebenen Bedingungen und Strukturen an einzelnen Schulen auseinander.

Die vorliegende Arbeitet richtet sich einerseits an dem sonderpädagogischen, andererseits und stärker an dem Diskurs der inklusiven Unterrichtsentwicklung aus, wohlwissend, dass Inklusion viel weiter zu fassen ist als in der vorliegenden Arbeit vollzogenen Beschränkung auf den inklusiven Mathematikunterricht. Dabei wird Inklusion nicht vorrangig als sonderpädagogischer Auftrag verstanden, sondern innerhalb des schulischen Kontextes in einen größeren Rahmen gesetzt und als grundsätzliche Auseinandersetzung mit der Heterogenität aller Lernenden diskutiert (Werning, 2014, S. 602). Im weiteren Verlauf steht die didaktische Ebene, die nach Prengel (2013) neben der institutionellen, der professionellen, der relationalen und der bildungspolitischen Ebene eine zentrale Handlungsebene inklusiver Pädagogik darstellt, im Mittelpunkt der Betrachtung.

Das vorliegende Kapitel nimmt auf theoretischer Ebene eine sukzessive feiner werdende Annäherung und Konkretisierung des vorliegenden Forschungsgegenstandes vor. Zunächst wird die aktuelle Situation schulischer Inklusion in Kapitel 2.1 aufgezeigt. Als Grundlage für die weitere Auseinandersetzung erfolgt die Darstellung gegenwärtiger Spannungsfelder und Herausforderungen (Kap. 2.1.1). Daran anschließend werden rechtliche Entwicklungen und Gesetzeslagen auf (inter-)nationaler Ebene skizziert (Kap. 2.1.2), die in einer Darstellung der Entwicklungen des für die vorliegende Interventionsforschung relevanten Bundeslandes Niedersachsen münden. Es folgt ein Blick auf die Umsetzung der Inklusion in der Sekundarstufe I (Kap. 2.1.3). Vor diesem Hintergrund werden sowohl das begriffliche Verständnis von Inklusion (Kap. 2.1.4) als auch von Heterogenität (Kap. 2.1.5) ausführlich diskutiert und für den weiteren Verlauf dieser Arbeit konkretisiert. Abschließend wird ein Überblick über aktuelle Forschungsergebnisse gegeben (Kap. 2.1.6).

Kapitel 2.2 widmet sich der inklusiv orientierten Didaktik. Vor dem Hintergrund didaktischer Theorienbildung (Kap. 2.2.1) findet eine Gegenüberstellung zentraler sonderpädagogischer (Kap. 2.2.2) sowie fachdidaktischer (Kap. 2.2.3) Perspektiven statt, die in der vorliegenden Arbeit verknüpft werden sollen. Im Mittelpunkt des Kapitels steht die Entwicklung einer inklusiv orientierten Didaktik (Kap. 2.2.4), die als zentrale theoretische Grundlage für die folgende Entwicklungs- und Forschungsarbeit dient. Eine Übersicht aktueller Forschungsergebnisse (Kap. 2.2.5) schließt dieses Kapitel ab.

In Kapitel 2.3 erfolgt eine Konkretisierung der bisherigen Überlegungen für den inklusiven Mathematikunterricht. Zunächst werden ausführlich mathematikdidaktische Leitideen dargestellt, die für die vorliegende Unterrichts- und Förderkonzeption eine bedeutende Rolle einnehmen (Kap. 2.3.1). Daran anschließend werden Kriterien präzisiert, die richtungsweisend für die Entwicklung und Durchführung eines „guten“ inklusiven Mathematikunterrichts sind (Kap. 2.3.2). Die bisherigen Überlegungen berücksichtigend und erweiternd findet eine detaillierte Darstellung von Planungsschritten für eine differenzsensible Gestaltung inklusiven Mathematikunterrichts auf theoretischer Ebene statt (Kap. 2.3.3), die im Rahmen dieser Arbeit in der konkreten Unterrichts- und Förderkonzeption exemplarisch umgesetzt werden. Abschließend werden zentrale ausgewählte Aspekte im Kontext empirischer Erkenntnisse betrachtet (Kap. 2.3.4) und in Kapitel 2.4 leitende Fragestellungen für die vorliegende Forschungsarbeit entwickelt.

2.1 Aktuelle Situation

Gegenwärtig zeigt sich deutschlandweit eine sehr heterogene Umsetzung schulischer Inklusionsbemühungen zwischen den einzelnen Bundesländern. Insgesamt kann eine leicht steigende Inklusions- und sinkende Exklusionsquote verzeichnet werden, die mit einer gleichzeitig steigenden Förderquote einhergeht. Zeitgleich besteht aber die Tendenz einer „exklusive[n] Inklusion“ (Werning, 2017, S. 23): Lernende mit Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung werden zwar im weiteren Sinne inklusiv in allgemeinen Schulen unterrichtet, sind aber nach der Grundschule nach wie vor einem gegliederten und selektiven Sekundarschulwesen ausgesetzt (Klemm, 2015, S. 34). Der Anteil inklusiv unterrichteter Schülerinnen und Schüler im Sekundarstufenbereich ist an Schulen mit mehreren Bildungsgängen, wie der Gesamtschule, am deutlichsten ausgeprägt.

Das vorliegende Kapitel skizziert zunächst aktuelle Spannungsfelder und Herausforderungen schulischer Inklusionsbemühungen, um einen Eindruck der gegenwärtigen Situation und der Ausgangsbedingungen für die vorliegende Forschungsarbeit zu vermitteln. Darauf aufbauend werden nationale und internationale rechtliche Entwicklungen und wichtige Gesetzesveränderungen nachgezeichnet, die schließlich in einer Spezifizierung der Inklusionsbemühungen in Niedersachsen münden. Daran anknüpfend wird der Blick auf die

Umsetzung von Inklusion in der Sekundarstufe I gerichtet und es findet eine begriffliche Auseinandersetzung mit den beiden zentralen Begriffen Inklusion und Heterogenität statt, um das in dieser Arbeit vertretene Verständnis zu explizieren, bevor eine Darstellung aktueller Forschungsergebnisse das Kapitel beschließt.

2.1.1 Spannungsfelder und Herausforderungen

Das gegenwärtige Feld schulischer Inklusionsbemühungen kann als „sehr dynamisch, zum Teil widersprüchlich und durch unterschiedliche Vorgaben […] beeinflusst" beschrieben werden (Werning, 2017, S. 17). Derzeit lässt sich ein eher diffuses und wenig konkretes Inklusionsverständnis konstatieren, das mit widersprüchlichen Bedingungen einhergeht, die den Rahmen für die inklusive Entwicklung bilden und zu einer inkonsistenten Umsetzung auf schulischer Ebene führen (Krämer, Przibilla & Grosche, 2016, S. 83). Damit verbunden sind vielfältige Herausforderungen auf verschiedenen Ebenen. Die im Folgenden skizzierten Spannungsfelder beziehen sich auf die Ebene des Unterrichts. Herausforderungen, die sich bspw. auf übergeordneter Schulentwicklungsebene oder im Bereich der Aus- und Fortbildung für Lehrkräfte ergeben, werden vor dem Hintergrund des hier verfolgten Forschungsinteresses nicht berücksichtigt.

Der Inklusionsbegriff ist bisher eher vage definiert und damit verbunden sind auch die aktuellen Inklusionsdebatten „gekennzeichnet durch die Spannung zwischen einer spezifischen und einer allgemeinen Ausrichtung" (Werning, 2014, S. 605). Spezifisch in dem Sinne, dass sich schulische Inklusionsbemühungen primär auf Kinder mit Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung beziehen, allgemein dahingehend, dass inklusiver Unterricht alle Kinder in ihrer Heterogenität berücksichtigen sollte. Es lässt sich nach wie vor eine Dichotomie zwischen Förderschule und allgemeinbildender Schule feststellen. Einerseits bleibt trotz der zunehmenden Integrationsfunktion die selektive Grundstruktur und damit die Selektions- und Allokationsfunktion des Schulsystems erhalten, weil nach wie vor der Schulabschluss als Legitimation und Zutritt zu verschiedenen beruflichen Positionen dient. Andererseits werden als Folge der großen Schulleistungsuntersuchungen wie PISA Bildungsinhalte zunehmend standardisiert, gleichwohl im Zuge der Implementierung der Inklusion die Forderung nach einer stärkeren individuellen Förderung formuliert wird (Lütje-Klose & Miller, 2015, S. 25).

Bezogen auf den gegenwärtigen inklusiven (Mathematik-)Unterricht lassen sich verschiedene Spannungsfelder konstatieren, die zum Teil zu Kontroversen führen und eine Herausforderung für die Umsetzung guten inklusiven (Mathematik-)Unterrichts darstellen. Jenessen und Wagner (2012) sprechen von einem „scheinbar dichotome[n] Spannungsfeld zwischen ideologischer Überhöhung und pragmatischer Handlungsanleitung“ (S. 336), in dem sich Inklusion befinde.

Das Spannungsverhältnis zwischen Gemeinsamkeit und Differenz, zwischen Kollektivität und Individualität, zwischen einem gemeinsamen Lerngegenstand für alle Schülerinnen und Schüler und einer Zieldifferenz für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten oder (besonderen) Potentialen ist im gegenwärtigen inklusiven Unterricht signifikant ausgeprägt. Für Lehrkräfte besteht aktuell die Herausforderung in heterogenen Lerngruppen, "den Spagat [zu] schaffen, die einzelnen Kinder mit ihren je eigenen Möglichkeiten und Besonderheiten individuell zu fördern und dabei gleichzeitig das Prinzip des gemeinsamen Lernens und des voneinander Lernens nicht aus dem Auge zu verlieren" (Verboom, 2012, S. 64). Unerlässlich für das Lernen in heterogenen Lerngruppen ist die sinnvolle und ausbalancierte Abstimmung von gemeinsamem und individuellem Lernen, von allgemeiner und intensiver individueller Förderung (Wember, 2013, S. 385). Das Grundproblem integrativen Unterrichts, das Wocken bereits 1987 pointiert formuliert hat, besteht auch für den zeitgemäßen inklusiven Unterricht darin, „verschiedene Kinder gemeinsam zu fördern, und zwar so, daß [sic.] sowohl die Verschiedenheit der Kinder als auch die Gemeinsamkeit der Gruppe zu ihrem Recht kommen. Das dialektische Spannungsverhältnis von individuellen und gemeinsamen Lernsituationen muß [sic.] in ausgewogener Weise zur Geltung kommen“ (S. 75). Die Herausforderung besteht im Ausloten einer fachlichen Zielspanne, die ein zieldifferentes, aber auf einen gemeinsamen Lerngegenstand hin ausgerichtetes Lernen ermöglicht, das trotz der unterschiedlichen Verständnisebenen aus dem Fach heraus gemeinsame Lern- und Kommunikationsanlässe liefert und dabei die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und -bedingungen berücksichtigt (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 70). Dabei gilt es stets im Blick zu haben, wie viel Elementarisierung einerseits und wie viel Komplexität im Sinne individueller Vertiefungen andererseits möglich ist, um die Orientierung an der fundamentalen Idee nicht aus den Augen zu verlieren. Weiterhin besteht die Herausforderung, einerseits die Zugänglichkeit zum Lerngegenstand für alle Schülerinnen und Schüler zu erhöhen und andererseits gleichzeitig den fachlichen Anspruch beizubehalten (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 69).

> Ein Spannungsfeld bleibt stets zwischen einer Offenheit für die individuellen Möglichkeiten der Kinder und der Notwendigkeit der Begrenzung mit dem Ziel des inhaltlichen Austausches. Die Orientierung an einem gemeinsamen Gegenstand, der in der kooperativen Erarbeitung und im Gespräch auch allen als solcher deutlich werden soll, erfordert eine Begrenzung, damit alle Kinder die gemeinsame Idee zumindest punktuell teilen können. (Häsel-Weide, 2016a, S. 20)

Sowohl auf inhaltlicher als auch auf methodischer Ebene lässt sich ein Spannungsfeld zwischen Offenheit und Strukturierung feststellen: Eine inklusiv orientierte Didaktik bezieht sowohl von der Lehrkraft instruierte, didaktisch strukturierte Lernmaterialien mit ein und bietet gleichermaßen Raum für selbstständig entdeckendes Lernen der Schülerinnen und Schüler (Prengel, 2013, S. 6; Prengel & Heinzel, 2012, ohne Paginierung). Daraus erwächst eine weitere Herausforderung, nämlich die Bereitstellung angemessener Unterstützungsmaßnahmen und Hilfestellungen, die alle Lernenden mit einbeziehen, diese aber gleichzeitig nicht in ihrer Entwicklung eigenständiger Lösungswege behindern (Korff, 2012, S. 143). Es stellt sich die Frage nach einem ausbalancierten Maß an Unterstützung der Selbstständigkeit und gezielter Anleitungen. Damit geht auch die Frage nach dem angemessenen Ort der Förderung einher, die innerhalb oder außerhalb des Klassenunterrichts stattfinden kann, in gemeinsamen Lernsituationen oder in exklusiven Kleingruppen- bzw. Einzelsituationen. Es lässt sich demnach ein Spannungsfeld zwischen integrierenden und exkludierenden Maßnahmen feststellen.

Pool Mag und Moser Opitz (2014, S. 145) nennen weitere Spannungsfelder inklusiven Unterrichts, die sich in ihrer explorativen Interviewstudie mit Regelschul- und Förderschullehrkräften herauskristallisiert haben: schulische, personelle und materielle Rahmenbedingungen, Einstellungen (der Klassenlehrpersonen) zur Inklusion, Umsetzung von optimaler Förderung sowie Zusammenarbeit der Lehrkräfte. Kiel, Esslinger-Hinz und Reusser (2014) sprechen von einem ganzen „Spektrum an Implementationsproblemen“ (S. 9), das mit der Einführung der gesetzliche Inklusionsvorgaben entstanden ist.

Das Gemeinsame Unterrichten steht vor dem Dilemma, keine 'Spezialdidaktik für integrative Lerngruppen' zu fordern, aber gleichzeitig ein angemessenes Lernen für alle Schülerinnen und Schüler einer heterogenen Lerngruppe zu sichern (Hinz, A., 2008). Inklusiver (Mathematik-) Unterricht erfordert eine Bereitstellung unterschiedlicher Lernumgebungen, die unterschiedliche Ausrichtungen der genannten Spannungsfelder berücksichtigen und ausbalancieren, um einen „gelingenden und für alle lernförderlichen guten inklusiven Unterricht“ zu ermöglichen (Häsel-Weide, 2016a, S. 21). Das Ausbalancieren dieser zum Teil widersprüchlichen Anforderungen ist nicht denkbar ohne fachliches, fachdidaktisches und sonderpädagogisches Wissen auf Seiten der Lehrkräfte.

Auch die aktuelle Unterrichtsforschung bezüglich Inklusion ist durch gewisse Spannungsfelder konstituiert: die begriffliche Unschärfe geht mit einer uneindeutigen und unpräzisen begrifflichen Grundlage einher, die allerdings die Voraussetzung für eine zielgerichtete Kommunikation innerhalb des Forschungsfeldes darstellt sowie das notwendige Fundament für dessen Erforschung bildet. Empirische Studien leiden bisweilen an unklar definierten Untersuchungsgegenständen und befassen sich mit unterschiedlichen Differenzkategorien, das Forschungsfeld ist oft nicht klar abgegrenzt und es bestehen unterschiedliche methodische Herangehensweisen sowie Schnittstellen und Überschneidungen zu Forschungsbereichen, die sich nicht explizit mit Inklusion auseinandersetzen (Budde & Blasse, 2017, S. 239). Neben den unterschiedlichen bildungspolitischen Schwerpunktsetzungen der einzelnen (Bundes-)Länder, die eine internationale und nationale Vergleichbarkeit von Forschungsergebnissen erschweren, lässt sich die generelle Schwierigkeit hervorheben, die bei der Erforschung von Unterricht in seiner Komplexität und Vielschichtigkeit besteht (Budde & Blasse, 2017, S. 239). Aus forschungsmethodischer Perspektive stellen diese Spannungsfelder eine Einschränkung der Interpretierbarkeit der Forschungsbefunde dar (Krämer et al., 2016, S. 83).

Die Umsetzung schulischer Inklusion ist gegenwärtig von einer Diskrepanz zwischen den normativen Erwartungen einerseits und den tatsächlichen Möglichkeiten ihrer Realisierung andererseits gekennzeichnet (Lindmeier, B., 2017, S. 55). Die aufgezeigten Spannungsfelder verdeutlichen, dass hinsichtlich des Themas Inklusion sowohl in der Wissenschaft als auch in der Schulpraxis gegenwärtig noch viele Unklarheiten bestehen. Dessen ungeachtet stehen sowohl Lehrkräfte als auch Lernende aller Schularten schon jetzt vor der täglichen Herausforderung, mit den derzeitig vorhandenen Ressourcen und Rahmenbedingungen inklusiven (Mathematik-)Unterricht zu gestalten (Vom Hofe & Tiedemann, 2017, S. 2). Genau hier setzt die vorliegende Arbeit an, indem sie ein Unterrichts- und Förderkonzept entwickelt, das in der aktuellen schulischen Situation die vorhandenen Strukturen und Ressourcen bestmöglich nutzen und mit einer theoretisch-wissenschaftlich fundierten inklusiven Unterrichtsplanung und -durchführung verbinden will.

2.1.2 Rechtliche Entwicklungen und Gesetzeslage

Innerhalb des internationalen Diskurses wurde der Begriff Inklusion Mitte der 1990er Jahre in der von der UNESCO verabschiedeten Salamanca Erklärung (UNESCO, 1994, S. 2) als normativer Begriff eingeführt. In dieser als „Eckpfeiler der Inklusionsdebatte“ (Reich, 2012, S. 35) angesehenen Erklärung wird „die Notwendigkeit und Dringlichkeit, Kinder, Jugendliche und Erwachsene mit besonderen Förderbedürfnissen innerhalb des Regelschulwesens zu unterrichten“, zunehmend anerkannt. Zierer und Saalfrank (2017) fassen den hier zugrundeliegenden Inklusionsgedanken wie folgt zusammen:

> Inklusion bzw. eine inklusive Schule im Sinne dieser Erklärung meint eine Schule bzw. ein Schulsystem zu schaffen, das Strukturen hervorbringt, in denen alle Kinder und Jugendliche jenseits etikettierender Zuschreibungen willkommen sind und gemeinsam lernen können, wobei entsprechende Unterstützungssysteme in pädagogischer bzw. personeller sowie technischer Art installiert werden müssen. (Zierer & Saalfrank, 2017, S. 33)

Damit geht die Forderung nach einer Pädagogik einher, die den Bedürfnissen aller Kinder unabhängig von ihren physischen, intellektuellen, sprachlichen oder sozialen Voraussetzungen gerecht wird. Ebenso wird auf inklusiv orientierte Regelschulen, die das Erreichen dieses Ziels unterstützen, verwiesen. Die Salamanca Erklärung gilt als bedeutsames Dokument, das ein weites Inklusionsverständnis vertritt. Sie stellt einen wichtigen Bezugspunkt für die internationale Entwicklung einer „Pädagogik für besondere Bedürfnisse (*special needs education*)“ (Heimlich, 2016, S. 69) und die damit verbundene Bewegung zur inklusiven Pädagogik dar. Die Erklärung hatte jedoch zunächst kaum Auswirkungen auf die bildungspolitischen Diskussionen in Deutschland.

In Deutschland wurde eine Übersetzung und Gleichsetzung des hier eingeführten Inklusionsbegriffs (*inclusive education*), der den Einbezug aller Menschen in die allgemeinen Bildungsinstitutionen expliziert, viele Jahre unter dem Begriff der Integration geführt. Die unter dieser Bezeichnung bis in die 1970er Jahre zurückreichende Diskussion innerhalb der Integrationspädagogik wurde insbesondere über die gemeinsame Beschulung von Kindern mit und ohne Behinderung sowie deren schulische Förderung geführt. In der deutschen Rezeption wurde der Begriff demnach vor dem Hintergrund der Integration von Kindern mit Behinderung in die »Normalgruppe« aufgefasst (Reich, 2012, S. 36). Es wurde zunächst ein inhaltlich verengtes, mitunter verkürztes und auf den Aspekt der Behinderung begrenztes

Integrationsverständnis verfolgt, das mit einer defizitär ausgerichteten Unterrichtspraxis einherging (Lütje-Klose & Miller, 2015, S. 13). Ein zentrales Dokument dieser Zeit war die Empfehlung des Deutschen Bildungsrates „zur pädagogischen Förderung behinderter und von Behinderung bedrohter Kinder und Jugendlicher“ (1973). Hier wurde erstmals der Begriff „gemeinsamer Unterricht“ aufgeführt und damit der perspektivische Ausblick auf eine „Schule für alle Kinder“ gerichtet (Schöler, 1999), die der „bisher vorherrschenden schulischen Isolation Behinderter ihre schulische Integration entgegen [stellt]“ (Deutscher Bildungsrat, 1973, S. 15–16). Diese frühen Empfehlungen wurden auch durch das Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland [KMK] formuliert (1994). Mit den im Jahr 1994 veröffentlichten Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung konnte der sich bereits in den letzten Jahrzehnten abzeichnende Öffnungsprozess in der Heil- und Sonderpädagogik offiziell vollzogen werden. Sonderpädagogische Förderung konnte bzw. sollte nun vermehrt und gleichberechtigt auch in den allgemeinen Schulen stattfinden und war nicht mehr auf einen besonderen Förderort wie bspw. die Förderschule angewiesen. Entgegen der ursprünglichen Forderung des gemeinsamen Lernens wurde jedoch mit der Einführung des Begriffs „Sonderpädagogischer Förderbedarf“ die Verschiedenheit der Kinder 1994 auf schul- und verwaltungsrechtlicher Ebene festgeschrieben (KMK, 1994, S. 5). Damit wurde eine relationale Kategorie geschaffen, die sich an curricular definierten schulischen Leistungsnormen orientiert und anhand derer Abweichungen untersucht und klassifiziert werden können (Werner, 2017b, S. 211). Eine in diesem Zuge durchgeführte Fokussierung des Begriffs ‚sonderpädagogische Förderung‘ stellt einen Perspektivenwechsel dar und verstärkt eine Orientierung weg von der eher defizitorientierten Betrachtung der Behinderung hin zu einer verstärkten Förderorientierung (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 163). Einerseits lässt sich tendenziell eine zunehmende Minimierung von Bildungsbenachteiligungen und eine Maximierung von sozialer Partizipation vor dem Hintergrund der Leitidee der Integration hervorheben, die sich seit den 1970er Jahren in vereinzelten integrativen Schulversuchen des gemeinsamen Unterrichtens zeigten und vor dem Hintergrund ihrer positiven Erfahrungen die Ausweitung der Integration vorantrieben (Werning, 2017, S. 19). Andrerseits wurde nach wie vor ein großer Anteil von Lernenden mit sonderpädagogischem Förderbedarf in Sonder- bzw. Förderschulen und nicht in einer „Schule für Alle“ unterrichtet und es fand eine starke Fokussierung einzelner Integrationsklassen bzw. einzelner Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Förderbedarf statt (Heimlich, 2016, S. 69), sodass sich zu diesem Zeitpunkt noch keine umfassende Veränderung der schulischen Förderung von Lernenden mit Behinderung abzeichnet (Werning, 2017, S. 17).

Erst in den Anfängen der 2000er Jahre fand der Inklusionsbegriff zunehmend Eingang in die zunächst eher sonderpädagogisch geführten Diskussionen (Werning, B. & Avici-Werning, 2015, S. 15). Die zentrale Leitidee und Forderung einer gleichberechtigten gesellschaftlichen Teilhabe sowie die Konkretisierung der allgemeinen Menschenrechte für Menschen mit Behinderung wird auf internationaler Ebene im Jahr 2006 in der VN-Behindertenrechtskonvention (im Folgenden VN BRK; vgl. Deutscher Bundestag, 2008), rechtsgültig und verpflichtend festgeschrieben. Mit der Ratifizierung dieser Konvention im Jahr 2008 wird die Entwicklung eines inklusiven Bildungssystems auf allen Ebenen, die sich explizit auf die Auflösung des Förderschulsystems beziehen, sowie das Recht auf einen hochwertigen, inklusiven Unterricht für alle Menschen auf bundesdeutscher Ebene rechtsverbindlich verankert (Deutscher Bundestag, 2008, Artikel 24). Mit in Kraft treten der VN BRK im Jahr 2009 gilt auch in Deutschland das individuelle Menschenrecht auf inklusive Bildung und Erziehung für Menschen mit Behinderung (Reich, 2012, S. 37). In den 2009 von der UNESCO veröffentlichten und ins Deutsche übersetzten Leitlinien für eine inklusive Bildungspolitik heißt es “Inklusion im Bildungsbereich bedeutet, dass allen Menschen die gleichen Möglichkeiten offen stehen, an qualitativ hochwertiger Bildung teilzuhaben und ihre Potenziale zu entwickeln, unabhängig von besonderen Lernbedürfnissen, Geschlecht, sozialen und ökonomischen Voraussetzungen“ (Deutsche UNSECO-Kommission e.V., 2014, S. 9). Die öffentlichen Auseinandersetzungen mit der Idee einer „Schule für Alle“ erfahren dadurch eine neue Aktualität. Eine den inklusiven Anspruch erfüllende, an individuellen Bedürfnissen ausgerichtete Unterstützung wird künftig als Aufgabe jeder Schule verstanden, und zwar für alle Lernenden, unabhängig von offiziell festgestellten sonderpädagogischen Unterstützungsbedarfen und zugeteilten Förderschwerpunkten (Hinz, A., 2013; Lütje-Klose & Miller, 2015, S. 13).

In dem 2011 veröffentlichen Beschluss der KMK (2011) wird die gemeinsame Erziehung und Bildung von Schülerinnen und Schülern mit und ohne Behinderung als Grundlage für inklusive Bildung festgelegt. Dabei wird die Zielvorstellung der inklusiven Schule, die auf „einen gleichberechtigten Zugang zu Bildung für alle und das Erkennen sowie Überwinden von Barrieren“ (S.3) ausgerichtet ist, als ein längerfristiger Prozess beschrieben. Zwar wird

Inklusion hier als „umfassendes Konzept des menschlichen Zusammenlebens“ (S. 3) angesehen, jedoch wird zunächst ein engeres Inklusionsverständnis vertreten, das den Blick auf Lernende richtet, die bisher Sonder- bzw. Förderschulen besuchten. Die vielfältigen anderen Aspekte von Verschiedenheit, die als förderlich oder hemmend für die Bildungspartizipation angesehen werden können, finden jedoch noch keine Berücksichtigung (vgl. Werning, B. & Avici-Werning, 2015, S. 16).

In der gemeinsam veröffentlichten Empfehlung der Hochschulrektorenkonferenz [HRK] und der KMK im Jahr 2015 (KMK/HRK, 2015) wird das bis dato verwendete eher enge Begriffsverständnis schließlich auch auf nationaler Ebene durch einen weiter gefassten Inklusionsbegriff abgelöst, der über das Verständnis von Behinderung im Sinne der Behindertenrechtskonvention hinausgehend besondere Ausgangsbedingungen, die bspw. im Bereich der Sprache, der sozialen Lebensbedingungen, des Geschlechts oder besonderen Begabungen liegen können, mit einbezieht.

Die bisherigen Ausführungen zeigen, dass Inklusion eine „gesetzlich abgestützte Zielmarke“ darstellt (Kiel et al., 2014, S. 9). Es wird deutlich, dass mit zunehmender Entwicklung der Inklusion im schulischen Kontext das Ziel verfolgt wird, platzierungs- und selektionsorientierte Sichtweisen zu überwinden und stattdessen Fragen über einen grundlegenden pädagogischen und institutionellen Umgang mit der wachsenden Verschiedenheit der Lernenden in den Mittelpunkt zu stellen (Werning, B. & Avici-Werning, 2015, S. 17). Der skizzierte Entwicklungsverlauf verdeutlicht sowohl auf nationaler als auch auf internationaler Ebene die Ausrichtung der inklusiven Bildung an einer normativen Perspektive, wobei das weite Inklusionsverständnis zunehmend als Referenzrahmen an Bedeutung gewinnt, das nicht nur Kinder und Jugendliche mit Behinderungen in den Blick nimmt (Werning, 2016b, S. 154-155).

Für das Schuljahr 2016/2017, in dem die hier vorgestelle Interventionsstudie durchgeführt wurde, ließ sich auf Bundesebene ein leichter Rückgang der Schülerinnen und Schüler verzeichnen, die eine Förderschule besuchen. Klemm (2018) spricht von derzeit vier von hundert Lernenden, die im Jahr 2018 noch an einer Förderschule beschult wurden. Im Vergleich zum Schuljahr 2008/2009 lässt sich ein statistischer Rückgang von 4,9 % auf 4,3 % feststellen (S. 4). Gleichzeitig ist die Förderquote um 1,1 Prozentpunkte von 6,0 % (2008/2009) auf 7,1 % (2017/2018) angestiegen. Das lässt darauf schließen, dass die Anzahl der Lernenden, die bereits eine allgemeinbildende Schule besucht haben und bei denen im Schulverlauf ein sonderpädagogischer Unterstützungsbedarf diagnostiziert wurde, angestiegen ist. Der deutlichste Anteil derer, die mittlerweile in allen Bundesländern inklusiv unterrichtet werden, liegt bei Schülerinnen und Schülern mit dem sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf Lernen. Die Anzahl der Lernenden in diesem Förderschwerpunkt, sowohl an Förderschulen als auch an allgemeinen Schulen, konnte von 43,8% im Jahr 2008/2009 auf 36,5% im Jahr 2016/2017 verringert werden. Dabei lässt sich allerdings nach wie vor eine deutliche Spannweite zwischen den einzelnen Bundesländern erfassen, die auf unzureichend operationalisierte Definitionen und erhebliche Unterschiede in der diagnostischen Praxis zurückzuführen ist. Aus länderspezifischer Perspektive lassen sich deutlich variierende Anstrengungen hinsichtlich der Umsetzung der UN-Konvention verzeichnen, denn einige Länder haben sich dem Inklusionsziel zwischen 2008/2009 und 2016/2017 deutlich angenähert, andere Länder hingegen haben sich weiter davon entfernt (Klemm, 2018, S. 13).

Rechtliche Entwicklungen und Verankerungen in Niedersachsen

Vor dem Hintergrund der Entwicklungen auf internationaler und nationaler Ebene werden folgend markante Entwicklungslinien in Niedersachsen dargestellt, gemäß dem Forschungsinteresse dieser Arbeit beschränkt auf aktuellen Daten zum sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf Lernen.

Durch eine umfangreiche Novelle des Schulgesetzes (NSchG, Niedersächsisches Kultusministerium, 2018) wurde in Niedersachsen erst 2012 das Schulrecht an ein inklusives Schulsystems angepasst. Die Einführung der inklusiven Schule (§ 4 NSchG) ohne Aufgabe der Förderschulen (Mißling & Ückert, 2014, S. 19), die Anpassung der Aufgaben der Förderschulen und der Sonderpädagogischen Förderzentren (§ 1 NSchG) sowie die rechtliche Ausgestaltung des Schulwechsels von Lernenden mit Behinderung (§§ 59, 69 NSchG) sind die wichtigsten Änderungen. Mit der Einführung der inklusiven Schule als prägendem Leitbild für das gesamte Schulsystem im Schuljahr 2013/2014 und beginnend mit den Schuljahrgängen 1 und 5 sind alle allgemein- und berufsbildenden Schulen in Niedersachsen dazu verpflichtet, allen Schülerinnen und Schülern entsprechend § 24 der UN-Behindertenrechtskonvention eine umfassende und uneingeschränkte Teilhabe im Rahmen eines barrierefreien, gleichberechtigten und hochwertigen Unterrichts zu ermöglichen. Seitdem erfolgt die aufsteigende Erweiterung auf alle Jahrgänge, mit dem Schuljahr 2018/2019 für die Jahrgänge 1 bis 10 realisiert.

Als einzige Förderschulen laufen die Förderschulen Lernen in Niedersachsen seit dem Schuljahr 2013/2014 jahrgangsweise aufsteigend bis zum Ende des Schuljahres 2027/2028 vollständig aus. Die Förderschulen der anderen Unterstützungsbedarfe bleiben weiterhin bestehen. Die Einschulung in die fünften Klassen an Förderschulen Lernen hat zuletzt im Schuljahr 2013/2014 stattgefunden (Werning, 2017, S. 25) und kann bis zum Schuljahr 2022/2023 nur noch durch einen Antrag des Schulträgers auf befristete Weiterführung dieser Schulform ermöglicht werden. Die gemeinsame Förderung aller Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf Lernen an allgemeinen Schulen wird zunehmend priorisiert. Aktuell gibt es noch vereinzelte zusammengelegte Förderschulen, die ein Förderzentrum bilden. Darüber hinaus gibt es in Niedersachsen seit dem Schuljahr 2018/2019 mittlerweile 35 „Regionale Beratungs- und Unterstützungszentren Inklusive Schule“ (RZI), die eine gelingende Umsetzung schulischer Inklusion vor Ort unterstützen können.

Niedersachsen zählt derzeit zu einem der Bundesländer mit der niedrigsten Exklusionsquote. Für das Schuljahr 2017/2018 wurden insgesamt 29.043 Inklusionsschülerinnen und -schüler gezählt, den größten Anteil davon bildeten 14.485 Lernende mit Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung im Lernen (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland, 2019, S. 25). Die niedersächsische Exklusionsquote im Förderschwerpunkt Lernen konnte zu dem Zeitpunkt der Datenerhebung der vorliegenden Interventionsstudie (Schuljahr 2016/2017) von 2,4 % im Jahr 2008/2009 auf 1,0 % im Jahr 2016/2017 gesenkt werden (Klemm, 2018, S. 16). Eine schulartspezifische Ausweisung konkreter Daten zur Verteilung der inklusiv unterrichteten Lernenden auf die verschiedenen Schulformen liegt für Niedersachsen nicht vor (Klemm, 2015, S. 54).

2.1.3 Inklusion in der Sekundarstufe I

Die Umsetzung schulischer Inklusion wird im Primarstufenbereich bereits überwiegend vollzogen (Werning, 2017, S. 23) und es lässt sich an der Grundschule, die sich seit ihrer Gründung als Volksschule und somit als „Schule für alle Kinder“ (Behrensen, Gläser & Solzbacher, 2015, S. 1) versteht, größtenteils eine inklusive Grundeinstellung verzeichnen

(Häsel-Weide, 2015, S. 3). Die Implementierung eines inklusiven Bildungssystems betrifft jedoch zunehmend auch die weiterführenden Schulen (vgl. Gesetzeslage Nds.), aber der inklusive Fachunterricht in der Sekundarstufe muss gegenwärtig noch überwiegend als „didaktisches Niemandsland“ (Musenberg & Riegert, 2015, S. 23) beschrieben werden. Darüber hinaus lassen sich in den einzelnen Bundesländern unterschiedlich weitreichende Änderungen der Schulgesetze bzw. Maßnahmen zur inklusiven Schulentwicklung verzeichnen (Mißling & Ückert, 2014, 15). Im Gegensatz zu den heterogenitätserfahrenen Grundschulen zeigen sich für Schulen in der Sekundarstufe I andere Ausgangs- und Rahmenbedingungen, die mit besonderen Herausforderungen bei der Umsetzung einhergehen. Diese werden vor allem vor dem Hintergrund strukturell bedingter institutioneller und leistungsbezogener Selektivität und Segregation durch das dreigliedrige Schulsystem hervorgerufen. Die starke Orientierung am inhaltlichen und oftmals abstrakten Unterrichtsstoff der einzelnen Unterrichtsfächer, die damit einhergehenden Leistungsmessungen sowie das Fachlehrkraftprinzip wurden bereits 1994 von Sander und Christ im Rahmen der Diskussion um die Schwierigkeiten einer Fortführung der Integration in der Sekundarstufe als zentrale Hürden auf dem Weg zu einem verstärkt individualisierten und natürlich differenzierenden Unterricht hervorgehoben (S. 164). Vor dem Hintergrund der gegenwärtigen Inklusionsdebatten scheinen diese Erschwernisse nach wie vor aktuell. Unterricht in der Sekundarstufe I bewegt sich in einem „Spannungsfeld zwischen Abschluss- und Anschlussorientierung bzw. zwischen schulischen Standards (Bildungszertifikaten/Schulabschlüssen) und anschlussfähigen individuellen Kompetenzen“ (Werner, 2019, S. 15). Die Herausforderung inklusiver Entwicklungen in der Sekundarstufe I bestehen darin, in einem derzeit häufig noch segregierenden Schulsystem inklusiv zu denken und zu handeln.

Der Übergang von der Grundschule in die weiterführende Schule kann auf mehreren Ebenen ein „einschneidendes Erlebnis“ (Reiss, 2009, S. 119) bedeuten. Für viele Lernende erweist sich dieser Schulwechsel als eine Chance. Für andere stellt er eine Gefahr im Sinne eines kritischen Lebensereignisses dar, der eine Neuorientierung und vielfältige Anpassungsleistungen erfordert (vgl. zum Umgang mit Risiko- und Schutzfaktoren u.a. Griebel und Niesel (2004) sowie den Ansatz der Stressforschung nach Lazarus (1995)). Die Reaktionen auf die neue Lernumgebung, Veränderungen in den sozialen Beziehungen sowie veränderte Lern- und Leistungsanforderungen und -methoden („Methodenknick“; Ufer, 2009, S. 98) verlaufen individuell sehr unterschiedlich (Neubert, 2013, S. 4; Ufer, 2009, S. 90-91). Verbunden mit dem Schulwechsel können sich nicht nur neue fachliche Probleme und Lernschwierigkeiten zeigen, auch bereits bestehende Schwierigkeiten verfestigen sich nicht selten und können weitreichende negative Auswirkungen auf die weitere Lernentwicklung haben (vgl. Kap. 4.1.3). Vor diesem Hintergrund sind mögliche Lernschwierigkeiten nicht allein aus mathematikdidaktischer bzw. fachdidaktischer Perspektive zu betrachten (Reiss, 2009, S. 120), sondern in Verbindung mit vielschichtigen Faktoren auf motivationaler, emotionaler oder auch sozialer Ebene aus einer interdisziplinären Perspektive zu diskutieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Schwerpunkt vor allem auf mathematikdidaktische und sonderpädagogische Aspekte gelegt, gleichwohl die Ergebnisse der Studie in einen größeren Zusammenhang einzuordnen sind (vgl. Kap. 10). Die zu beobachtende Lerndifferenz zwischen Schülerinnen und Schülern von bis zu fünf Jahren im Vergleich zu den für den Primarstufenbereich angenommenen drei Jahren stellt zusätzlich eine Herausforderung für die Umsetzung der schulischen Inklusion im Sekundarstufen I Bereich dar (Lorenz, 2000, S. 22). Neben der inklusionsbedingten Vielfalt zeigt sich zu Beginn der Sekundarstufe I eine sehr große Heterogenität in Bezug auf die Vorerfahrungen und Kompetenzen der Lernenden hinsichtlich des aufgebauten mathematischen Basisstoffs aus der Grundschule. Einen möglichen Grund für die divergierende Leistungsentwicklung sieht Ufer (2009) in der „mangelnde[n] Kontinuität der inhaltlichen Strukturierung und Aufbereitung des Stoffs in Form von relevanten Begriffen, Grundvorstellungen, Repräsentationsformen und mathematischen Arbeitsweisen“ (2009, S. 100). Der kontinuierliche Ausbau tragfähiger inhaltlicher Kompetenzen während der Grundschulzeit ist somit zentral für einen erfolgreichen Übergang und eine anschlussfähige Lernentwicklung in der Sekundarstufe I (Neubert, 2013, S. 4). Vor dem Hintergrund der individuellen Kompetenzentwicklung, die als kontinuierlicher und längerfristiger Prozess angesehen wird, gewinnt das anschlussfähige Lernen eine bedeutsame Rolle. Die Frage der Anschlussfähigkeit stellt sich bspw. in Bezug auf kohärente Repräsentationsmittel sowie die Festigung und den Ausbau bisheriger mathematischer Konzepte. Gaidoschik (2008) sieht die Sekundarstufe in der Verantwortung, die „massiven elementar-mathematischen Defizite vieler Kinder bei Übertritt aus der Grundschule“ (S.292) differenziert zu erfassen und zentrale Konzepte und Strategien als Basis für weiteres Lernen nachhaltig zu festigen.

Eine Orientierung für die inhaltliche Anschlussfähigkeit stellen die Bildungsstandards für den Primarbereich (Kultusministerkonferenz [KMK], 2004b) und für den Hauptschulabschluss (KMK, 2004a) bzw. für den mittleren Schulabschluss (KMK, 2003) dar. Die Bildungsstandards sind aus praktischer Perspektive für den Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe jedoch nur eingeschränkt geeignet (Ufer, 2009, S. 96), da sie nicht vollständig aufeinander bezogen sind und „keine einheitliche Konzeptionierung mathematischer Kompetenzen am Übergang“ (Reiss, 2009, S. 120) existiert, die der hierarchischen Struktur der Inhalte im Fach Mathematik auf didaktisch methodischer Ebene entspricht (vgl. vertiefend Ufer, 2009). Darüber hinaus gilt es, individuelle Lernverläufe am Übergang zu analysieren, um spezifischere Gründe für mehr oder weniger erfolgreiche Lernentwicklungen auszumachen. Diese Ausführungen belegen die hohe Relevanz einer sorgfältigen Diagnostik am Übergang, d.h. sowohl am Ende der Grundschulzeit als auch zu Beginn der Sekundarstufe I, die sich sowohl mit zentralen Aspekten des mathematischen Basisstoffs als relevantes Fundament als auch individuellen Kompetenzen hinsichtlich aktueller und bevorstehender Inhaltsbereiche auseinandersetzen sollte. Wie ein anschlussfähiges Lernen zu Beginn der Sekundarstufe I erfolgen kann, wird exemplarisch im Rahmen der vorliegenden Interventionsstudie untersucht. Die Beschreibung der methodischen Überlegungen erfolgt in Kapitel 6, die Ergebnisdarstellung und Diskussion wird in den Kapiteln 8 und 9 dargelegt.

2.1.4 Inklusionsverständnis

Spätestens seit der Behindertenrechtskonvention der Vereinten Nationen wird über das Thema Inklusion sowohl öffentlich, bildungspolitisch als auch wissenschaftlich intensiv und kontrovers diskutiert. Fragt man nach der Bedeutung des Inklusionsbegriffs, erhält man je nach Perspektive facettenreiche, mitunter widersprüchliche Antworten mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen und fehlender Präzision, die ein unscharfes Begriffsverständnis sowie mangelnde Operationalisierbarkeit (Grosche, 2015, S. 17) verdeutlichen. Nicht nur zwischen verschiedenen Disziplinen, sondern auch innerhalb einzelner Disziplinen werden harte Diskurse geführt. Nach Artiles und Dyson kann Inklusion als „slippery concept“ (2009, S. 43) beschrieben werden. Wocken spricht dem Inklusionsbegriff aufgrund der hier angedeuteten begrifflichen Vielfalt sogar einen „gemeinsamen Kern“ (Wocken, 2015, S. 109) an Bedeutung ab. Nach Ellinger und Böttinger (2018, zitiert in Werner, 2019, S. 5) ist Inklusion „Utopie,

Weg, Wertbegriff, Methode und Zielvorstellung zugleich und weckt vielfältige Wünsche und Hoffnung auf Veränderung und gesellschaftliche Entwicklung“ weit über den Schulkontext hinaus. Eine einzige, konsensuale Definition von Inklusion existiert bislang jedoch nicht. Vielmehr liegt ein „eher diffuses statt konkretes Verständnis von schulischer Inklusion“ (Krämer et al., 2016, S. 83) vor. Verbunden mit dem Fehlen eines präzisen, zielbewussten und vor allem widerspruchsfreien Handlungsplans kann dies unter anderem als ein Grund für die gegenwärtig inkonsistente Implementierung sowie für deren erschwerte Erforschung angesehen werden, so dass es ratsam ist, das dieser Arbeit zugrunde gelegte Verständnis zu explizieren.
In bisherigen Erklärungsversuchen wird die skizzierte Mehrdimensionalität und Multifaktorialität innerhalb des Inklusionsverständnisses oftmals durch Rückgriff auf zwei stark vereinfachende Ebenen dargestellt (Werning, 2016b, S. 153): im Sinne eines engeren Begriffsverständnisses steht der Aspekt des „sonderpädagogischen Unterstützungsbedarfs“ im Fokus der Betrachtung. Die Unterscheidung zwischen Lernenden mit und ohne Behinderung bzw. sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf stellt dabei die relevante Differenzlinie dar. Diese für den schulischen Kontext verbreitete Auffassung von Inklusion als „der gemeinsame Unterricht von Schülerinnen und Schülern mit und ohne Förderbedarf in allgemeinen Schulen“ greift jedoch zu kurz (Grosche, 2015, S. 17). Im Sinne eines weiteren Begriffsverständnisses geht Inklusion über die Frage nach dem richtigen Lern- und Förderort für Lernende mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf hinaus. In umfassenderer Weise sind das Maximieren von sozialer Teilhabe sowie das Minimieren von Diskriminierung gemeint und es wird den unterschiedlichen Heterogenitätsdimensionen, die alle Schülerinnen und Schüler unabhängig von individuellen Unterstützungsbedarfen mit einbeziehen, Rechnung getragen (Werning, 2017, S. 19). Inklusion im weiteren Sinne wird auch von Ainscow, Booth, Dyson und Farell (2006, S. 23) in Verbindung mit übergreifenden Werten zum Ausdruck gebracht: “We articulate inclusive values as concerned with equity, participation, community, compassion, respect for diversity, sustainability and entitlement”. Darüber hinaus betonen die Autoren (2006, S. 25): “Inclusion is concerned with all children and young people in schools".

Neben dieser mitunter sehr verkürzenden und der Komplexität der Inklusion kaum gerecht werdende Unterscheidung zwischen Inklusion im engeren und im weiteren Sinne beziehen sich weitere Definitionsversuche u.a. auf die folgenden vier Vorgehensweisen (Grosche, Piezunka & Schaffus, 2017, S. 209): Erklärungen anhand von „negativen Definitionen“ (vgl. Wocken, 2014), Erklärungen in Abgrenzung zum Begriff der Integration (vgl. Hinz, A., 2002, 2004; Sander, 2004), Erklärungen vor dem Hintergrund konkreter Handlungsweisen in Form verschiedener Dimensionen und Indikatoren (Kornmann, 2015; Krämer et al., 2016; Wocken, 2010; 2011a, 2011b) sowie Erklärungen, die sich von anderen Definitionen abgrenzen (Grosche, 2015).

Zwar lassen sich in diesen Ansätzen erste Hinweise auf relevante Aspekte innerhalb eines Definitionsversuches erkennen, jedoch zeichnet sich kein eindeutiges und prägnantes Verständnisfundament ab. Um im Rahmen der vorliegenden empirischen Studie aufschlussreiche Aussagen im Forschungsfeld der schulischen Inklusion treffen zu können, stellt eine präzise Definition des Forschungsgegenstands allerdings eine erforderliche Grundlage dar (Grosche, 2015, S. 32; Grosche et al., 2017, S. 219; Krämer et al., 2016, S. 83). Ebenso ist für die systematische Auseinandersetzung sowie Konkretisierung der in dieser Arbeit vollzogenen Überwindung von Diskriminierung sowohl auf theoretischer als auch empirischer Ebene eine spezifische Definition dringend geboten. Grosche, Piezunka und Schaffus (2017) bilden mit ihrer Analyse qualitativer Expertinnen- und Experteninterviews nach dem phänomenologischen Ansatz erstmalig vier idealtypische Verständnisse von schulischer Inklusion ab, die den gegenwärtigen nationalen wissenschaftlichen Diskurs wiedergeben. Als begriffliche Bezugspunkte sollen sie künftig zu einem zielführenden und verständigungsorientierten Diskurs beitragen. Laut der Autorengruppe kann Inklusion dementsprechend

1. anhand der UN-Behindertenrechtskonvention,
2. unter pragmatischen Gesichtspunkten im Sinne von Leistungsförderung,
3. als Teilhabe/Anerkennung/Wohlfühlen oder
4. als Utopie

definiert werden. Diese voneinander unterscheidbaren Ansätze verbindet ihr konsensueller Kern der „Überwindung von Diskriminierung aufgrund sozial konstruierter Differenzlinien“ (Grosche et al., 2017, S. 207), der hierarchisch an Komplexität zunimmt. Das dieser Arbeit zugrunde gelegte Verständnis orientiert sich an der pragmatischen Definition: „Schulische Inklusion ist die bestmögliche Förderung von Lernenden durch Berücksichtigung ihrer lernbezogenen Bedürfnisse, um individuell bestmögliche Lernergebnisse zu erreichen“ (Grosche et al., 2017, S. 218). Entsprechend dieses Definitionsansatzes spielen Differenzlinien, die sich auf schulische Lernprozesse und den Erwerb akademischer Kompetenzen beziehen, eine richtungsweisende Rolle (bspw. sonderpädagogischer Unterstützungsbedarf, niedrige akademische Lernstände oder Hochbegabung). Es wird das Ziel der individuellen Leistungssteigerung sowie die Verbesserung von Unterricht und Förderung verfolgt. Alle Lernenden sollen die für sie nötige Unterstützung erhalten, die sie sowohl auf kognitiver als auch auf akademischer Ebene entsprechend ihrer individuellen Möglichkeiten bei einer optimalen Entwicklung fördern. Über eine Optimierung individueller Lernentwicklungen sollen Diskriminierung überwunden und die Teilhabechancen in der jeweiligen Klasse sowie, vor dem Hintergrund der Qualifikationsfunktion von Schule, in der Gesellschaft sichergestellt werden. Dabei steht der flexible und temporäre Umgang im Vordergrund, der von einem statischen, defizitorientiertem Gebrauch der Kategorien Behinderung bzw. sonderpädagogischer Unterstützungsbedarf abzugrenzen ist (Grosche et al., 2017, S. 214). Vor diesem Hintergrund wird im Folgenden die Annahme vertreten, dass Schwierigkeiten im Mathematiklernen nicht nur aufgrund von Behinderung bzw. sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf entstehen, sondern auch aufgrund sprachlicher, sozialer und anderer Faktoren bedingt sind. Es soll keine Unterscheidung mehr zwischen verschiedenen Gruppen von Lernenden (Regelschüler – Lernende mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf) stattfinden, stattdessen wird der Blick auf individuelle Lern- und Entwicklungsbedingungen gerichtet, unabhängig davon, „ob es sich um Kinder mit oder ohne Behinderung handelt“ (Lenze & Lutz-Westphal 2015). In der Idee der Auflösung einer „Integration von Menschen mit Beeinträchtigung in einen größeren Kontext“ (Korff, 2016b, S. 10) wird demnach ein wesentliches Potential des Inklusionsbegriffs gesehen.

2.1.5 Heterogenitätsverständnis

Seit der PISA-Debatte zu Beginn der 2000er Jahre kann eine intensive Diskussion über den Heterogenitätsbegriff in der Schulpädagogik beobachtet werden. Ähnlich wie beim Inklusionsbegriff ist auch das Diskursfeld der Heterogenität durch ein sehr uneinheitliches Begriffsverständnis sowie eine unscharfe Begriffsverwendung gekennzeichnet und es lässt sich kein kohärentes Bild konstatieren (Walgenbach, 2017, S. 25). Die aktuelle inklusive Schulentwicklung führt zu einer zunehmenden Heterogenität der Schülerschaft. Lernende mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf fügen der ohnehin bestehenden Heterogenität dabei eine „besondere Facette“ hinzu, „die eine entsprechende Weiterentwicklung des Unterrichts“ erforderlich macht (Scherer, 2015, S. 267). Dabei ist die „Diversität in einem umfassenden Sinne [ist] Realität und Aufgabe jeder Schule“ (KMK/HRK, 2015, S. 2). Das durch die Inklusionsentwicklung breiter werdende Heterogenitätsspektrum (Häsel-Weide, 2015, S. 3) in Schulklassen wird in Zeiten von Globalisierung sowie Migration und Flucht aus Kriegsgebieten zusätzlich verstärkt. Auch die unter den Ausdruck der „veränderten Kindheit“ gefassten „allgemeingesellschaftlichen Pluralisierungs- und Diversifizierungsprozesse[n]“ (Seitz, 2006, ohne Paginierung) tragen zu diesem Prozess bei. Heterogene Lerngruppen zeichnen sich demzufolge durch eine große und variierende Vielfalt von individuellen Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen sowie situativen Lern- und Entwicklungsbedingungen (Wember, 2009a, S. 89) aus.

In jeder (heterogenen) Lerngruppe bestehen per se sowohl interindividuelle als auch intraindividuelle Unterschiede. Erstere umfassen bspw. das Vorwissen, Begabungen, sprachliche Fähigkeiten, Motivation, Sozialverhalten und Selbststeuerung und stellen leistungsrelevante Merkmale für den Unterrichtskontext dar. Interindividuelle Unterschiede werden zunächst als bloße Differenzen zwischen den Lernenden und nicht vorschnell als Defizite verstanden. Dennoch gilt es nach Wember (2009a) zu berücksichtigen, dass individuelle Unterschiede nicht „gleichwertig und funktional für erfolgreiches schulisches Lernen“ (S. 92) sind, d.h. es ist essentiell, schulische Probleme auch als diese zu erkennen, zu benennen und zu versuchen zu beheben, um die Chance möglicher Hilfen zu nutzen (u.a. durch gezielte Gestaltung der schulischen Lernumwelt sowie der systematischen Individualisierung). Zusätzlich ist auch jedes Individuum innerhalb einer Lerngruppe durch vielfältige Diversitätsdimensionen geprägt. Die vermeintliche Annahme weitgehend homogener Lerngruppen, die von Terhart als „Homogenitätsfiktion“ (2010, S. 99) bezeichnet wird, stellt somit nicht nur vor dem Hintergrund aktueller Inklusionsentwicklungen eine „Illusion“ (Krauthausen & Scherer, 2010, S. 3) dar.

Nach Walgenbach (2017) lassen sich die verschiedenen Heterogenitätsaspekte innerhalb des schulpädagogischen Diskurses anhand der folgenden Bedeutungsdimensionen differenzierter darstellen:

- *evaluative Bedeutungsdimension*, d.h. Heterogenität wird als Belastung oder als Chance bewertet
- *ungleichheitskritische Bedeutungsdimension*, d.h. Heterogenität wird als Produkt sozialer Ungleichheiten betrachtet
- *deskriptive Bedeutungsdimension*, d.h. Heterogenität wird als Unterschied in Bezug auf ein oder mehrere Merkmale aufgefasst
- *didaktische Bedeutungsdimension*, d.h. Heterogenität gilt als didaktische Herausforderung.

Das dieser Arbeit zugrunde gelegte Verständnis von Heterogenität orientiert sich sowohl an der *evaluativen*, der *deskriptiven* als auch an der *didaktischen Bedeutungsdimension*. Im Folgenden analytisch dargestellt, ist die enge Wechselbeziehung zwischen den Dimensionen mitzudenken. Im Sinne der *evaluativen Dimension* wird Heterogenität einerseits als eine Art Herausforderung, d.h. als zu bewältigende Aufgabe, verstanden, die Handlungsaufforderungen impliziert. Die bereits auf Ebene der Lernenden konstatierte Vielfältigkeit nimmt Einfluss auf die Unterrichtsgestaltung (Musenberg & Riegert, 2015, S. 16; Stebler & Reusser, 2017, S. 253) und wirkt sich damit auch auf die Ebene der Lehrkräfte aus, an die neue Anforderungen gestellt werden (Scherer, 2015, S. 282). Insbesondere die Planung und Gestaltung von Unterricht hinsichtlich fachlicher Lernangebote für alle Schülerinnen und Schüler stellt die Lehrkräfte vor neue bzw. veränderte Aufgaben (Musenberg & Riegert, 2015, S. 16). Verbunden mit der an sie gestellten Herausforderung, in multiprofessionellen Teams mit Förderschul- und Regelschullehrkräften „nicht nur zusammen [zu] arbeiten, sondern zusammenzuarbeiten“ (Wember, 2013, S. 383), nimmt ebenso die Heterogenität unter den Lehrkräften zu. Entsprechend des Schwerpunktes der vorliegenden Arbeit wird der Heterogenitätsaspekt im Folgenden vor dem Hintergrund seiner Bedeutung für die Lernenden sowie für die Unterrichtsentwicklung betrachtet. Die Perspektive der Lehrkräfte wird im Rahmen der inklusiven Unterrichtsplanung mitgedacht, nicht jedoch explizit ausgeführt (für eine tiefergehende Auseinandersetzung mit der sich daraus ergebenden Herausforderung für Lehrkräfte s. u.a. Korff, 2016b). In Anlehnung an die bewertende Dimension wird Heterogenität innerhalb einer Lerngruppe aber primär als Chance und Gewinn gesehen. Bereits 1974 nahm Freudenthal einen richtungsweisenden Perspektivwechsel vor und schlug ein Verständnis von Heterogenität als Normalität vor, die sich als Vorteil für gemeinsames Lernen nutzen lässt: „Man betrachtet das [die Heterogenität, R.-F.K.] als eine Not, und aus dieser Not will ich eine Tugend machen, jedoch mit dem Unterschied, daß [sic.] die Schüler nicht neben- sondern miteinander am gleichen Gegenstand auf verschiedenen Stufen tätig sind“ (Freudenthal, 1974, S. 166). Gerade für den Mathematikunterricht kann Heterogenität als „Quelle für die Bereicherung des Unterrichts“ (Spiegel & Walter, 2005, S. 236) angesehen werden, da „erst die verschiedenen Zugangsweisen und Deutungen der Kinder“ mathematische Zusammenhänge sichtbar machen (Schulz & Schülke, 2017, S. 141) und diese „Verschiedenheit als produktive Chance für fachliche Erkenntnisse genutzt“ werden kann (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 17). Die Chancen von Heterogenität werden insbesondere in individualisierten Lernprozessen sowie kooperativen Lernformen gesehen (Walgenbach, 2017, S. 28), wobei den Anregungen der heterogenen Lernenden untereinander dabei ein besonders bedeutsamer Wert zugesprochen wird (Korff, 2012, S. 153). Nührenbörger (2011) konkretisiert das Potential von Heterogenität als Chance aus fachdidaktischer Sicht. Demnach sollten die unterschiedlichen Deutungen der Lernenden aufeinander bezogen werden, sodass sich darin zu findende Ähnlichkeiten bzw. Unterschiede herausstellen, aus denen in einem diskursiven Kontext strukturelle Argumente entwickelt werden können. Darüber hinaus lässt sich Heterogenität dann als Chance verstehen, wenn unterschiedliche Deutungen (Kommunikations-)Anlässe zum „vorausschauenden oder rückblickenden Beziehungs-Denken“ (2011, S. 116) bieten. Die Anwesenheit einer heterogenen Lerngruppe ist zwar eine wichtige, aber nicht die alleinige hinreichende Bedingung, um „das Potenzial der *Gemeinsamkeit in der Vielfalt* [Hervorheb. im Original]“ entfalten zu können (Korff, 2012, S. 139). Vielmehr stellt auch ein inklusionsorientiertes Verständnis von der Vielfalt der Lernenden als lernförderliche Ressource eine die Entwicklung unterstützende Bedingung dar. Damit knüpft das hier vertretene Verständnis von Heterogenität an Prengels vielzitierten Ansatz der „Pädagogik der Vielfalt“ (2006) an, der als „Meilenstein der Inklusionspädagogik“ (Krämer et al., 2016, S. 91) charakterisiert wird und die Idee der „egalitären Differenz“ vertritt. Ein so verstandener inklusiver Heterogenitätsbegriff beachtet die Lernenden sowohl hinsichtlich ihrer Verschiedenheit, als auch vor dem Hintergrund ihrer Vielschichtigkeit, ihrer Veränderlichkeit und ihrer Unbestimmtheit (Prengel, 2014, S. 68). Prengel verweist mit einem erweiterten Begriffsverständnis auf die Ebenen von Heterogenität, die durch Prozesse und Dynamiken der Offenheit, Veränderung und Entwicklung geprägt sind (Prengel, 2011) und eine Reduzierung von Hierarchien unterstützen.

In enger Wechselwirkung dazu steht die *deskriptive Bedeutungsdimension*, innerhalb derer der oben aufgeführte Aspekt der Unterschiedlichkeit relevant ist. Dieser zeigt sich insbesondere in der viel diskutierten Leistungsheterogenität sowie u.a. in den vielfältigen Lernstrategien und unterschiedlichen Lerntempi der Lernenden (Walgenbach, 2017, S. 37). Die besonders für den Grundschulbereich oft hervorgehobene Leistungsheterogenität zwischen den Schülerinnen und Schülern lässt sich auch für den in dieser Arbeit interessanten Beginn der Sekundarstufe I feststellen (vgl. Kap. 2.1.3). Diese Perspektive der Unterschiedlichkeit wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit, angelehnt an das zugrunde gelegte Verständnis von Inklusion, unter anderem bei der Auswahl der Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen eingenommen, die eine zusätzliche Förderung in den Förderschleifen erhalten (vgl. Kap. 6.2.2).

Innerhalb der *didaktischen Bedeutungsdimension* wird der Fokus auf einen didaktischen „Umgang mit Heterogenität“ gelegt, d.h. auf handlungspraktische Konsequenzen, die sich für die Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen ergeben (Walgenbach, 2017, S. 43). Die Diskussion über einen heterogenitätssensiblen Unterricht erhält in der gegenwärtigen Inklusionsdebatte neue Brisanz, baut aber insgesamt auf historisch gewachsene, zum Teil relativ unabhängig voneinander geführte Diskurse auf (für einen Überblick über die aktuell bestehenden Ansätze der Integrationsforschung bzw. der allgemeinen erziehungswissenschaftlichen bzw. fachdidaktischen Forschung vgl. Korff, 2016b).

Dass es im Mathematikunterricht keine homogenen Lerngruppen gibt, sondern Kinder mit besonderen Schwierigkeiten und Hochbegabung gemeinsam unterrichtet werden, ist nicht erst in jüngster Vergangenheit Realität (Hattermann, Meckel & Schreiber, 2014, S. 202). Auch die damit verbundene Auseinandersetzung über den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht ist keineswegs neu und wurde bereits vor der aktuellen Inklusionsdebatte von Schipper (1996) und Röthlisberger (1999) beschrieben. Schipper (1996) betont, dass das Ziel nicht darin liege, Heterogenität zu reduzieren, sondern die verschiedenen Lösungen einer Aufgabe, die als „Repräsentanten von Schematisierungen auf unterschiedlichem Niveau“ (1996, S. 15) angesehen werden können, bewusst zu akzeptieren und als Ausgangspunkt für Unterrichtsgespräche zu nutzen. Bezugnehmend auf den inklusiven (Mathematik-) Unterricht können die Dimensionen des bisherigen Heterogenitätsverständnisses, insbesondere die deskriptive Dimension, erweitert werden um „zwei Richtungen“, in denen Heterogenität im

Unterricht zum Ausdruck kommt (Selter & Spiegel, 1997). Nach Spiegel und Walter (2005) drücken sich in Form der „horizontalen Heterogenität“ die unterschiedlichen Vorgehens- und Denkweisen der Kinder untereinander aber auch unterschieden von denen der Erwachsenen aus. Bereits 1997 haben Selter und Spiegel diese Vielfalt mit dem einfachen, aber aussagekräftigen Motto „Kinder rechnen anders“ beschrieben. Die zweite Richtung der Heterogenität wird unter dem Stichwort „vertikale Heterogenität“ gefasst und meint die Verschiedenheit der Lernenden hinsichtlich ihrer Kompetenzen beim Mathematiklernen, die sich auf einer Spanne von besonderen Schwierigkeiten bis hin zu besonderen Begabungen zeigen können. Ein ungünstiger Umgang mit der horizontalen Heterogenität der Lernenden im Unterricht kann u.a. auch einen Grund für die Entstehung bzw. Verstärkung der vertikalen Heterogenität in Form von Leistungsunterschieden darstellen (Spiegel & Walter, 2005, S. 220). Beide Richtungen werden im Zuge der inklusiven Entwicklungsprozesse breiter, sodass von einer Erweiterung der individuellen Vorgehens- und Denkweisen einerseits sowie einer parallel dazu wachsenden Kompetenzspanne andererseits ausgegangen werden kann. Leuders und Prediger (2016) fassen die vielfältigen, für den (Mathematik-)Unterricht relevanten Heterogenitätsaspekte zusammen und unterscheiden zwischen denjenigen Aspekten, die unmittelbar durch den Mathematikunterricht verändert bzw. beeinflusst werden können und denjenigen, auf die der Mathematikunterricht keinen direkten Einfluss nehmen kann (vgl. Leuders & Wittmann, 2017, S. 185-186).

Heterogenitätsaspekte, auf die der Mathematikunterricht unmittelbar Einfluss nehmen kann:

- Heterogenität hinsichtlich der Mathematikleistung in übergreifenden bzw. spezifischen Kompetenzbereichen, sowohl inhalts- als auch prozessbezogen
- Heterogenität hinsichtlich der Zugangsweisen zu mathematischen Konzepten, themenspezifischen Lösungswegen, Vorstellungen und Strategien
- Heterogenität hinsichtlich übergreifender Zugangsweisen und Denkstile
- Heterogenität hinsichtlich affektiver Faktoren wie Motivation, Selbstwirksamkeit, Selbstregulation und mathematischem Selbstbild
- Heterogenität hinsichtlich der Sprachkompetenz

Heterogenitätsaspekte, auf die der Mathematikunterricht keinen unmittelbaren Einfluss nehmen kann:

- Heterogenität hinsichtlich herkunftsbedingter Ungleichheiten wie bspw. sozioökonomischer Status oder Bildungsnähe der Eltern
- Heterogenität hinsichtlich Behinderungen bzw. attestierter sonderpädagogischer Unterstützungsbedarfe
- Heterogenität hinsichtlich genderbezogener Unterschiede, sowohl leistungsbezogene als auch affektive Merkmale

Die Zusammenstellung der vielfältigen Heterogenitätsaspekte zeigt, dass jede Lerngruppe in „vielerlei Hinsicht bunt“ (Leuders & Prediger, 2016, S. 58) ist. Heimlich (2016) sieht die Aufgabe inklusiver Schulen auf unterrichtlicher Ebene vor diesem Hintergrund darin, „alle Schülerinnen und Schüler in ihren individuellen Bedürfnissen in das Unterrichtsgeschehen mit einzubeziehen und dabei von vornherein auf jegliche Form der Aussonderung zu verzichten. Von daher verbieten sich Kategorisierungen, wie "behinderte" und "nichtbehinderte" Kinder oder Schüler mit und ohne sonderpädagogischen Förderbedarf“ (S. 77). Inklusiver (Mathematik-) Unterricht sollte demnach „dem Zusammenspiel sehr unterschiedlicher sozialer, emotionaler und kognitiver Fähigkeiten, Bedürfnisse und Entwicklungsmöglichkeiten“ (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 154) Rechnung tragen und den Lernenden Raum geben, ihre Individualität zum Ausdruck bringen zu können sowie dieser gleichzeitig mit einer anerkennenden Haltung gegenüberzutreten (Häsel-Weide, 2015, S. 3). Dazu ist auf Seiten der Lehrkräfte eine „Heterogenitätskompetenz“ (Spiegel & Walter, 2005, S. 235) eine erforderliche Voraussetzung für die Unterrichtsplanung.

Die vorangegangen Darstellungen haben gezeigt, dass Unterricht auf sehr unterschiedliche Heterogenitätsaspekte reagieren muss. Von hoher Relevanz für die vorliegende Arbeit ist die Frage, wie auf unterrichtlicher Ebene, also durch die gezielte Gestaltung und Umsetzung des Unterrichts, mit der festgestellten Heterogenität umgegangen werden kann. Gleichwohl der Fokus insbesondere aus didaktischer Sicht auf die vielfältigen Lern- und Entwicklungsbedingungen gelegt wird, spielt für die Weiterentwicklung inklusiver Didaktik insgesamt die konzeptionelle Verbindung verschiedener Heterogenitätsansätze (Mehrsprachigkeit, Gender, Milieu, Kulturalität) bzw. die Reflexion aller

Bedeutungsdimensionen eine wichtige Rolle (Walgenbach, 2017, S. 43). Um das mit der vorliegenden Arbeit verfolgte Ziel der Entwicklung eines inklusiven Mathematikunterrichts im Schnittfeld von Sonderpädagogik und Fachdidaktik fokussieren zu können, wird die Komplexität der vielschichtigen Heterogenitätsdimensionen im Unterrichtsversuch auf Kinder mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen reduziert. Der Blick wird auf Kinder mit und ohne (besondere) Schwierigkeiten im Mathematiklernen gerichtet, ohne dabei jedoch eine abgestufte Klassifizierung nach Leistung zu implizieren. Vielmehr werden die individuellen Kompetenzen und Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf einen mathematischen Inhalt in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellt (vgl. Häsel-Weide, 2015, S. 3). Der Autorin ist bewusst, dass die im realen Unterrichtsgeschehen zum Tragen kommende Heterogenität zwar aspekthaft realisiert wird, aber eine explizite Fokussierung aller Heterogenitätsaspekte wird im Rahmen dieser Arbeit als nicht zielführend erachtet. Einerseits soll auf die inhaltlichen und didaktisch-methodischen Ausgrenzungsprozesse der Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten aufmerksam gemacht werden, andererseits soll ein gezielter Ansatz entwickelt und erprobt werden, um eben diesen Schülerinnen und Schülern eine bestmögliche Förderung im inklusiven Unterricht zu ermöglichen.

2.1.6 Aktuelle Forschungsergebnisse im Überblick

Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit integrativem und zunehmend auch inklusivem Unterricht beruht in Deutschland auf einer langen Forschungstradition (Lütje-Klose & Miller, 2015). Dennoch lässt sich auch trotz mittlerweile langjähriger Inklusionsbestrebungen in vielen Bereichen ein großer Handlungsbedarf und damit einhergehend die Forderung nach weiteren empirischen Untersuchungen feststellen, die explizit die gegenwärtigen Inklusionsbedingungen in den Blick nehmen.

Der Übergang von der Grundschule in die weiterführende Schule weist auf unterschiedlichen Ebenen (räumliche, qualitative, d.h. akademische bzw. schulische sowie soziale Ebene) eine differenzierte Forschungslage auf (Käter, 2017, S. 33). Auf der für den vorliegenden Kontext relevanten qualitativen Ebene weisen zahlreiche Studien (bspw. McGee, Ward, Gibbons & Harlow, 2003; Sirsch, 2000) auf eine Verschlechterung der Noten beim Übergang von der vierten in die fünfte Klasse hin, die auf vielfältige Gründe zurückzuführen ist. Weissbach spricht in diesem Zusammenhang bereits (1986) von einem „Sekundarstufenschock“. Dem gegenüber stehen Studien, die von keiner Verschlechterung der Leistungen zu Beginn der Sekundarstufe I ausgehen (Andermann & Midgley, 1997; Sirsch, 2000). Die Aussagekraft dieser Daten ist jedoch begrenzt, da häufig eine leistungsbezogene Perspektive eingenommen und Noten zugrunde gelegt wurden, die keinen sicheren Indikator für die Kompetenzentwicklung darstellen. Dass der Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe für viele Kinder eine kritische Phase mit Auswirkungen auf verschiedensten Ebenen, auch auf Ebene der Kompetenzentwicklung, darstellt, konnte aus Forschungsperspektive abgesichert werden (Ufer, 2009, S. 94).

Nach Ufer (2009, S. 92) ist die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen an der Schnittstelle zwischen Primar- und Sekundarbereich sowie über den Übergang hinaus weder national noch international erschöpfend erforscht. Zentrale Fragen des Lehrens und Lernens am Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe I werden insbesondere aus fachdidaktischer Sicht nur in Ansätzen untersucht (Ufer, 2009, S. 99). In diesem Zusammenhang hebt Ufer das Fehlen deskriptiver längsschnittlich angelegter Studien hervor, die die Lernenden vor und nach dem Übergang in die Sekundarstufe begleiten, um „somit eine Basis für eine empirisch fundierte Validierung kohärenter Kompetenzstruktur- und -entwicklungsmodelle“ (Ufer, 2009, S. 99) zu liefern, die wiederum Aussagen zu prädikativen Faktoren für ein anschlussfähiges und nachhaltiges Weiterlernen in der Sekundarstufe I bereitstellen. Forschungsbedarf besteht nach Ufer (2009, S. 100) in diesem Kontext auf drei Ebenen: erstens bezüglich des individuellen Lernens, das die konsequente Beschreibung der mathematischen Kompetenzentwicklung, die Überprüfung der Nachhaltigkeit und Tragfähigkeit erworbener mathematischer Vorstellungen und Konzepte sowie die Erfassung problematischer Vorstellungen bei den Lernenden beinhaltet. Zweitens sieht er Forschungsbedarf hinsichtlich des Lehrens in Bezug auf die deskriptive Identifikation von Brüchen in der Unterrichtsgestaltung sowie der Diagnostik problematischer Entwicklungen bzw. individueller Vorstellungen. Drittens erfordert die Entwicklung konkreter Materialien und Interventionen, die sich aus dem Veränderungsbedarf der Ergebnisse der vorherigen Ebenen ergibt, weiterer Forschung. Auch Reiss (2009, S. 120) sieht ein großes Forschungsdesiderat bezüglich der abgestimmten Beschreibung und der wechselseitigen Zusammenhänge zwischen inhaltlichen und prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen am Übergang von Primarstufen- zu Sekundarstufenbereich. Trotz zunehmender Bemühungen einer engeren

Zusammenarbeit stellt ein inhaltlich sowie methodisch zusammenhängender, aufeinander abgestimmter und verzahnter Übergang mathematischer Lernprozesse zwischen Primarstufe und Sekundarstufe mit entsprechend empirisch abgesicherter Basis ein Forschungsdesiderat dar (Neubert, 2013, S. 4; Reiss, 2009, S. 120; Ufer, 2009). Zwar liegen derzeit bereits einige Vorschläge zu Unterrichtskonzepten und -materialien vor, jedoch beziehen sich diese überwiegend auf den Primarstufenbereich und sind nicht ohne Weiteres auf die Sekundarstufe zu übertragen.

Die in Kapitel 2.1.3 dargestellte disparate Ausgangslage bezüglich der schulischen Umsetzung von Inklusion in der Sekundarstufe zeigt sich auch in den wenigen empirischen Forschungsergebnissen, die derzeit für diesen Bereich vorzufinden sind (Kiel & Weiß, 2016, S. 279). Kiel und Weiß (2016, S. 280) weisen auf methodische Probleme hin wie bspw. Stichproben von geringer Größe($n < 20$) oder unklarer Zusammensetzung. Studien, die sich explizit mit dem Übergang von der Grundschule in die weiterführende Schule beschäftigen und dabei im Sinne des anschlussfähigen Lernens die mathematische Kompetenzentwicklung in den Blick nehmen, liegen derzeit nicht vor. Für den deutschsprachigen Raum lassen sich exemplarisch Studien betrachten, welche die mathematische Kompetenzentwicklung kurz nach dem Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe untersuchten.

Die Hamburger Studie zur Lernausgangslage (LAU-Studie; Lehmann & Peek, 2011) untersuchte mehr als 550 Klassen an Hamburger Schulen aller Schulrichtungen hinsichtlich ihrer mathematischen Kompetenzen zu Beginn des fünften und zum Ende des sechsten Schuljahres. Untersuchungsgegenstand waren die Bereiche Arithmetik, Algebra und Geometrie. Die Autoren konnten einen mittleren Kompetenzzuwachs (d = .68) für die Mathematikleistung im Verlauf der zwei Jahre feststellen. In der Studie zeigten sich divergente Entwicklungstendenzen zwischen den beteiligten Schulformen. Gymnasiasten verzeichneten den größten Lernzuwachs (d = .78), Gesamtschülerinnen und Gesamtschüler einen mittleren Lernzuwachs (d = .65) und der geringste Lernzuwachs ließ sich bei Lernenden an Haupt- und Realschulen feststellen (d = .58). Die bayrische Längsschnittstudie PALMA (Pekrun et al., 2006) konnte bezüglich der (mathematischen) Entwicklungsverläufe deutlich höhere Leistungszuwächse für den Beginn der Sekundarstufe festmachen (Pekrun et al., 2006, S. 31) und dabei wesentliche Unterschiede in den Entwicklungstendenzen zwischen den Schulformen feststellen. Die Längsschnittstudie „EWIKO“ (Entwicklung metakognitiven Wissens und bereichsspezifischen Vorwissens bei Schülern der Sekundarstufe; Artelt, Neuenhaus, Lingel & Schneider, 2012; Lingel, Neuenhaus, Artelt & Schneider, 2014) befasst sich mit inter- und intraindividuellen Entwicklungen und Interaktionen inhaltlichen und metakognitiven Wissens und untersucht u.a. deren Auswirkungen auf den mathematischen Entwicklungsverlauf in der frühen Sekundarstufe. Die Testaufgaben bezogen sich auf die Leitideen Zahl, Messen, funktionaler Zusammenhang sowie Daten und Zufall, deren Lösung prozessbezogene Kompetenzen erforderte. Die Studie hat mit einer mittleren Effektstärke (d = .64) gezeigt, dass die Mathematikleistungen im Verlauf des fünften Schuljahres statistisch signifikant zugenommen haben. Weiterhin entwickelten sich die mathematischen Leistungen relativ stabil, was für eine nur geringfügige Veränderung der Lernenden innerhalb der Stichprobe in dem untersuchten Zeitraum sowie dem damit einhergehenden großen Einfluss des Vorwissens zu Beginn der Sekundarstufe I auf die spätere Lernentwicklung spricht (Schneider, Küspert & Krajewski, 2016, S. 127). Insgesamt zeigt dieser Blick in exemplarische Studien, dass die Entwicklung grundlegender mathematischer Kompetenzen, deren Erwerb schwerpunktmäßig in der Grundschule zu verorten ist, nach der Transition in die Sekundarstufe weitergeht und keinesfalls abgeschlossen ist (vgl. Kap. 4.1.3).

2.2 Inklusiv orientierte Didaktik

Mit den bislang beschriebenen Entwicklungen geht die Frage nach geeigneten Mitteln und Wegen einher, mithilfe derer die aktuellen (Heraus-)Forderungen im Kontext von Schule und Unterricht erfüllt werden können. Sowohl auf bildungstheoretischer, schulorganisatorischer und politischer Ebene lässt sich gegenwärtig ein äußerst vielschichtiger, intensiver Diskurs über eine inklusive Didaktik verzeichnen (u.a. Feuser, 2011; Prengel, 2013; Reich, 2014; Seitz, 2006; Werning, R. & Lütje-Klose, 2016). Dabei wird über eine Didaktik diskutiert, die sowohl den Rahmen für „die Gestaltung eines wissenschaftlich fundierten Fachunterrichts" liefert, als auch „die Sicherung der Teilhabe und Partizipation aller Schüler" (Werner, 2019, S. 13) gewährleistet.

Zwar umfasst Inklusion einen Entwicklungsprozess auf allen Systemebenen und beinhaltet bedeutend mehr als nur eine Umstellung auf unterrichtsmethodischer Ebene (Carle, 2017, S. 15), gleichwohl findet hinsichtlich des vorliegenden Forschungsinteresses eine fokussierte Verengung des Blick auf spezifische inklusionsrelevante Aspekte des (Mathematik-)

Unterrichts statt. In Anlehnung an das in Kapitel 2.1.2 dargelegte Inklusions- und Heterogenitätsverständnis erfolgt in diesem Kapitel vor dem Hintergrund didaktischer Theoriebildung eine Annäherung an ein Begriffsverständnis inklusiv orientierter Didaktik in der Sekundarstufe I. Die Ausführungen basieren auf verschiedenen interdisziplinären Forschungssträngen aus Bildungstheorie, allgemeiner Didaktik, Erziehungswissenschaft, Sonderpädagogik, Fachdidaktik, empirischer Lehr-Lernforschung, Integrations-/ Inklusionsforschung und reformpädagogischer Forschung und konzentrieren sich auf Aspekte, die für die vorliegende Arbeit relevant sind. Konkretisiert am Unterrichtsfach Mathematik sollen Fragen der sonderpädagogischen Förderung und fachdidaktische Überlegungen aufeinander bezogen und für eine inklusiv orientierte Didaktik und Unterrichtsentwicklung verknüpft werden. „Dabei ist die Frage, wie fachdidaktische und sonderpädagogische Expertise bei der Gestaltung differenzierter Lernangebote miteinander verknüpft werden können, bislang [sowohl] empirisch wenig untersucht“ (Riegert, Rink & Wachtel, 2017, S. 178).

Der Blick richtet sich zunächst auf die bisherige Gestaltung sonderpädagogisch bzw. fachdidaktisch ausgerichteter Didaktik, um darauf aufbauend nach gegenwärtigen Gestaltungsmöglichkeiten, -voraussetzungen aber auch -grenzen für den inklusiven Unterricht zu fragen und ihren inklusivdidaktischen Stellenwert zu diskutieren. Dabei geht es um die Neubetrachtung und Überprüfung bereits bestehender sonderpädagogischer, allgemeindidaktischer und fachdidaktisch orientierter Konzeptionen und Methoden auf der Grundlage einer Wertschätzung von Verschiedenheit und Gemeinsamkeit und nicht um die Entwicklung völlig neuer Konzeptionen (Platte, 2014, S. 82).

2.2.1 Didaktische Theoriebildung

Setzt man sich mit dem Begriff der (allgemeinen) Didaktik auseinander, stehen traditionell Grundfragen nach den Möglichkeiten oder Unmöglichkeiten des Lehrens, nach Zusammenhängen des Lehrens und Lernens sowie deren Zielen, Inhalten, Methoden und institutionellen Rahmungen im Mittelpunkt der Betrachtung (Hericks & Kunze, 2008, S. 747). Im deutschsprachigen Raum gibt es mittlerweile eine überschaubare Anzahl von Konzepten, die sich mehr oder weniger deutlich als theoretisch fundierte didaktische Ansätze für den inklusiven Unterricht verstehen lassen und die sich auf individualisierende Grundsätze sowie die Anerkennung der Vielfalt der Lernenden bei der Unterrichtsgestaltung beziehen. Dazu zählen die ‚*Allgemeine Pädagogik und entwicklungslogische Didaktik*' von Feuser (2009), die ‚*Inklusive Didaktik*' von Seitz (u.a. 2006) sowie von Reich (2014), der ‚*Index für Inklusion*' (Boban & Hinz, 2003) und das auf dem RTI-Modell basierende ‚*Rügener-Inklusionsmodell*' (Mahlau et al., 2014). Eine ausführlichere Übersicht sowie Gegenüberstellung aller bisher genannten Konzeptionen lässt sich bei Moser Opitz (2014) finden. Weiterhin werden die ‚*Didaktik der Vielfalt*' von Wocken (1998b, 2015), der Ansatz ‚*Inklusionsdidaktischer Netze*' von Kahlert und Heimlich (2012), das ‚*präventiv orientierte Modell schulischen Lernens*' von Wember (2013) sowie in Ansätzen die von Jenessen und Wagner (2012) geforderten verschiedenen Lernsituationen zu den didaktischen Konzeptionen inklusiven Unterrichts gezählt.

Als grundlegende Rahmung für die vorliegende Arbeit erfolgt eine Konzentration auf diejenigen Ansätze und ihre jeweiligen Kernelemente, die eine unmittelbare Bedeutung für das hier vertretene Verständnis inklusiven Unterrichts tragen und wesentlichen Einfluss auf die Gestaltung der Unterrichts- und Förderkonzeption nehmen. Es werden sowohl die Ansätze Feusers und Seitz' hinsichtlich einer „Gemeinsamkeit in der Vielfalt" sowie der Ansatz Wockens hinsichtlich einer „Vielfalt der Gemeinsamkeit" (Korff, 2016b, S. 45) näher ausgeführt. Darüber hinaus werden aus inklusionsdidaktischer Perspektive abschließend die von Jenessen und Wagner (2012) geforderten verschiedenen Lernangebote als Weiterentwicklung der Idee Wockens dargestellt. Die mitunter komplexen Theoriebezüge werden im Folgenden nicht in aller Ausführlichkeit behandelt, sie können vertiefend bei den jeweiligen Autorinnen und Autoren nachgelesen werden.

Allgemeine (integrative) und entwicklungslogische Didaktik nach Feuser

Die ‚Allgemeine (integrative) und entwicklungslogische Didaktik' Georg Feusers (1989, 1998, 2005, 2009) stellt eine der prominentesten Konzeptionen dar, die wesentliche Bedeutung für die gegenwärtige Entwicklung inklusiver Didaktik trägt. Feuser tituliert seinen Ansatz ausdrücklich nicht als ‚inklusiv', sondern beschreibt ihn vielmehr als ein Gesamtkonzept der Allgemeinen Pädagogik und Didaktik, das auf die Überwindung der Chancenungleichheit durch ein vertikal gegliedertes Bildungssystem und die Überwindung von Selektion und Segregation in Schule und Unterricht zielt (Feuser, 1998, S. 22, 2013). In Weiterentwicklung der kritisch konstruktiven Didaktik Klafkis sieht Feuser die Allgemeine (integrative) Pädagogik in der Verantwortung, allen Lernenden innerhalb einer sozialen Gruppe Zugang zu allen Lerninhalten zu gewähren und dafür entsprechende Unterstützungsmaßnahmen zur Verfügung zu stellen (Feuser, 2005, S. 173). Die Zielperspektive stellt demnach ein zieldifferentes Lernangebot dar, das sowohl in einer inhaltlich als auch sozial gemeinsamen Lernsituation auf der Grundlage von Kommunikation und Kooperation realisiert wird (Feuser, 1995, S. 171). Das didaktische Fundament bilden zwei maßgebliche Begriffspaare, die als zentrale konstitutive Bezugspunkte des Unterrichts gelten: einerseits eine durch (entwicklungsbezogene) „*Individualisierung*“ zu realisierende „*Innere Differenzierung*“ sowie andererseits die „*Kooperative Tätigkeit*“ an einem „*Gemeinsamen Gegenstand*“ (Feuser, 1995, S. 172). Die Idee dieses Grundprinzips meint, dass „alle Kinder in der Kooperation miteinander auf ihrem jeweiligen Entwicklungsniveau nach Maßgabe ihrer momentanen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungskompetenzen in Orientierung auf die "nächste Zone der Entwicklung" an und mit einem "Gemeinsamen Gegenstand“ spielen, lernen und arbeiten [Anführungsstriche im Original]“ (Feuser, 2009, S. 283). Grundlegend ist die Annahme vom Lernen als aktivem Austausch- und Aneignungsprozess, der von einer „doppelseitigen Erschließung eines Subjekts für seine Welt und der Welt durch und für dieses Subjekt“ (Feuser, 1989, S. 33) ausgeht. Es soll eine innere Differenzierung ermöglicht werden, die die heterogenen Lern- und Entwicklungsbedürfnisse sowie vielfältigen Lernziele und -zugänge aller Kinder berücksichtigt und dabei einen gemeinsamen Lerninhalt in den Mittelpunkt stellt. Die innere Differenzierung bezieht sich primär auf eine entwicklungsbezogene und weniger auf eine stoffbezogene Individualisierung. Hervorgehoben wird dabei das Erfordernis gleicher Inhalte, jedoch versteht Feuser darunter nicht im engeren Sinne wirklich gleiche Unterrichtsinhalte, sondern vielschichtige, logisch zusammenhängende Themenkomplexe. Dabei ist „*der* >gemeinsame Gegenstand< *integrativer Pädagogik [ist]* nicht das materiell Faßbare [sic.], *das letztlich in der Hand des Schülers zum Lerngegenstand wird,* sondern der zentrale Prozeß [sic.], *der hinter den Dingen und beobachtbaren Erscheinungen steht und sie hervorbringt* [Hervorheb. im Original]“ (Feuser, 1989, S. 32).

Lernen am Gemeinsamen Gegenstand bedeutet im Sinne dieses didaktischen Ansatzes die gemeinsame und gleichzeitige Beschäftigung aller Schülerinnen und Schüler mit einem spezifischen Unterrichtsinhalt. Im Vordergrund steht jedoch nicht der Gegenstand an sich, sondern der Umgang mit diesem sowie die dabei zu erlernenden Kompetenzen. Zur Ausdifferenzierung dieses gemeinsamen Gegenstands schlägt Feuser (1995) individualisierte Curricula vor. Die Individualisierung eines (gemeinsamen) Curriculums macht im Gegensatz zu äußerlich differenzierenden individuellen Curricula „allen Kindern auf ihrem jeweiligen Entwicklungs- und Handlungsniveau ein[en] gemeinsamer[en] Inhalt zugänglich" (Korff, 2016b, S. 41). Dabei wird von Feuser betont, dass die individualisierten Curricula sowie die damit verbundenen erforderlichen didaktischen Aufarbeitungen stets auf Grundlage der Verbindung zwischen der Sachebene (Sachstrukturanalyse) und den Perspektiven und Entwicklungsbedingungen der Kinder (Tätigkeitsstruktur- und Handlungsstrukturanalyse) zu entwickeln sind (weitere Ausführungen zur Sach-, Tätigkeits- und Handlungsstrukturanalyse finden interessierte Leserinnen und Leser bei Feuser, 1995, S. 175 ff. und 1998, S. 30). Ein in diesem Sinne verstandener Unterricht bedarf laut Feuser der Planung von „*unten nach oben* [Hervorheb. im Original]" (Feuser, 2009, S. 290), d.h. einer vertikal strukturierten Planung, die von dem basalsten Entwicklungsniveau ausgeht. Die favorisierte Form der unterrichtlichen Umsetzung zur Ermöglichung des gemeinsamen Lernens stellt die durchgehende Orientierung am Projektunterricht dar.

Eine konkretere Bestimmung dessen, was unter dem Begriff des gemeinsamen Gegenstands verstanden werden kann, bleibt ebenso wie eine nähere Beschreibung seines Verhältnisses zu dem jeweiligen Unterrichtsthema offen (Korff, 2016b, S. 45-46). Fraglich ist weiterhin, ob und in welcher Form innerhalb der angestrebten kooperativen Erarbeitung des gemeinsamen Gegenstands Lernanteile im Sinne eines individuellen Curriculums berücksichtigt werden könnten. Darüber hinaus wird die definitorische Bedeutung des Lernens mit und an einem gemeinsamen Gegenstand, das als feste Stufenfolge der Entwicklung angesehen wird (Musenberg & Riegert, 2015, S. 19), als zu eng für die praktische Umsetzung eines inklusiven Unterrichts kritisiert. Auch die „starr und sehr lehrergesteuert erscheinenden Planungsprozesse" (Korff, 2012, S. 146) werden bemängelt. Weiterhin lässt sich zwar der Aspekt der Kindorientierung innerhalb der entwicklungslogischen Didaktik wiederfinden, jedoch nur unzureichend präzisiert. Es bleibt offen, ob diese lediglich im Zuge der Berücksichtigung der kindlichen Entwicklungsbedingungen innerhalb der von der Lehrkraft durchgeführten Unterrichtsplanungen Beachtung finden oder ob sich die Kinder auch aktiv bei der Konstruktion eines gemeinsamen Gegenstands beteiligen können. Ebenso lässt sich keine eindeutige Berücksichtigung der Gemeinsamkeiten zwischen den Lernenden in der Gegenstandsanalyse ausmachen (Korff, 2016b, S. 42). Die einseitige Beschränkung auf den Projektunterricht und einer damit einhergehenden fehlenden Ausdifferenzierung von Handlungsformen wird insbesondere für Lernende mit besonderen Unterstützungsbedarfen kritisch eingeschätzt (Moser Opitz, 2014, S. 56). Müller (1988) befürchtet darüber hinaus, dass der ständige Versuch, den Unterricht an der von Feuser geforderten Kooperation am gemeinsamen Gegenstand auszurichten, einerseits zu einer Überforderung der Lehrkräfte führe und andererseits aufgrund vernachlässigter Individualisierung der Heterogenität der Lernenden nicht gerecht werde. Explizite Kritik erfährt Feusers Ansatz auch durch Wocken, der mit seiner ‚Didaktik der Vielfalt' (2015) eine Gegenposition einnimmt (vgl. Ausführungen unten). Ungeachtet der bereits früh aufkommenden Kritik innerhalb der Integrationsforschung in den 1980er und 90er Jahren stehen demnach sowohl eine praxisbezogene Konkretisierung der Kernelemente als auch (empirische) Belege der praktischen Verwirklichung knapp 30 Jahren nach den Entwicklungsanfängen dieser Konzeption noch aus. Gleichwohl gilt die von Feuser geprägte Idee des kooperativen Lernens am gemeinsamen Gegenstand bis heute als wegweisendes Fundament für die Entwicklung inklusiver Didaktik und inklusiven Unterrichts.

Inklusive Didaktik nach Seitz

Feusers Idee des Gemeinsamen Gegenstands greift Simone Seitz in ihrem für die Fachdidaktik Sachunterricht entwickelten Ansatz der ‚Inklusiven Didaktik' (2005, 2008) auf und setzt sie in eine neue didaktische Rahmung. Seitz konkretisiert die wesentlichsten Aspekte ihrer didaktischen Überlegungen in fünf Leitlinien (2005, 2008). Diese lassen sich nach den Strukturmomenten Inhalt und Perspektiven, Handlungsmuster und Beziehungen sowie Raum und Zeit zusammenfassen und stehen in einer wechselseitigen, voneinander abhängigen Beziehung zueinander:

1. Leitlinie: Potenziale der Kinder in den Blick nehmen,
2. Leitlinie: Auf Spuren von Gemeinsamkeit und Verschiedenheit achten,
3. Leitlinie: Kinder lernen von Kindern,
4. Leitlinie: Mit den Kindern zum Kern der Sache kommen,
5. Leitlinie: Beobachten, Reflektieren und Handeln verknüpfen.

Im Zentrum steht die Gemeinsamkeit in der Vielfalt der Lernenden, die als Kern der Sache signifiziert wird (Seitz, 2006). Anders als Feuser sieht Seitz die didaktischen und fachwissenschaftlichen Strukturierungen als bewegliche und dynamische Prozesse an, die sich durch die unterschiedlichen Perspektiven der Lernenden auf ein gemeinsames Unterrichtsthema herausbilden und deren Bedeutung in jedem Unterricht entlang der kindlichen Deutungsweisen wieder neu konstruiert werden muss (Seitz, 2005, S. 170, 2006, ohne Paginierung). Hervorgehoben werden offen gestaltete Lernangebote, die es den Kindern ermöglichen, „diese Momente im Unterricht selbst [zu] entdecken und dabei handelnd zeigen [zu] können, was für sie der ‚Kern der Sache' ist“ (Seitz, 2006, ohne Paginierung). Damit rücken bei Seitz der Aspekt der Kindorientierung sowie die „individuell einzigartigen und unterschiedlichen Perspektiven der Kinder auf die Sache“ (Korff, 2016b, S. 47) in den Mittelpunkt ihrer inklusiven Didaktik. Die Schülerinnen und Schüler werden als die „bedeutsamste Ressource inklusiven Unterrichts“ angesehen (Seitz & Scheidt, 2012, ohne Paginierung). In Abgrenzung zum traditionellen „Regelunterricht“ einerseits und zur traditionellen „Sonderpädagogik“ (Seitz, 2008, S. 227) andererseits soll eine Balance zwischen Offenheit und Strukturierung vorgenommen werden. Der Kern der Sache wird zwar als grundlegend, gleichzeitig aber auch als komplex verstanden. Dessen wesentliche Inhalte werden nicht im Vorfeld von der Lehrkraft festgelegt, sondern von den Kindern selbst konstruiert und anhand ihrer individuellen Bedeutungszuweisungen erschlossen. Dabei spielt der Aspekt der kooperativen und kommunikativen Erarbeitung und inhaltlichen Auseinandersetzung der Kinder über den Kern der Sache, der den didaktischen Prozess strukturiert, eine entscheidende Bedeutung (Seitz, 2008, S. 229).

Kommunikation und Kooperation zwischen den Kindern stellen demnach ein integrales Element des eigentlichen Lernprozesses dar, die gemeinsame Erarbeitung des Kerns der Sache ist aber nicht die alleinige Lernform inklusiven Unterrichts. Auch die Differenzierungsmaßnahmen werden im Sinne der Inklusiven Didaktik selbst von den Kindern (mit-)bestimmt (Seitz, 2008, S. 228). In Anlehnung an Prengels „Pädagogik der Vielfalt“ (2006) wird ein bewegliches Verhältnis von Verschiedenheit und Gemeinsamkeit angenommen, das sich in einem „dichten und beweglichen Geflecht unterschiedlicher Dimensionen“ (Seitz, 2006, ohne Paginierung) ausdrückt. Ähnlich wie bei Feuser wird in der vorliegenden Konzeption der Lernprozess als ein aktiver Austausch sowie eine aktive Aneignung verstanden, der „perspektivgebundene[n] und dynamische[n]

Kinderkonstruktionen“ (Seitz, 2006, ohne Paginierung) hervorbringt, die es von den Lehrkräften zu deuten gilt. Diese konstituieren sich in jeder Lerngruppe neu und stellen das verbindende Moment auf didaktischer Ebene dar. Im Gegensatz zu Feusers theoriegeleiteter Erschließung des Gemeinsamen Gegenstands als Subjekt-Objekt-Konstellation sieht Seitz das Verhältnis zwischen Lernenden und Lerninhalten als selbstbezügliche Konstruktionsprozesse (Seitz, 2008, S. 230) an, die eine schrittweise Verbindung der kindlichen Perspektiven mit fachwissenschaftlichen Ideen ermöglichen sollen. Anhand des Bildes der selbstähnlichen, fraktalen Muster beschreibt Seitz die zugrunde gelegte Annahme der veränderlichen Heterogenitäts- und Homogenitätsstrukturen im Lernen der unterschiedlichen Kinder (Seitz, 2005, S. 157). Um einen Zugang zu dem Kern der Sache zu erlangen, diesen gemeinsam weiter zu entwickeln und didaktische Ausdifferenzierungen umzusetzen, werden die individuellen Kinderperspektiven und die darin enthaltenen selbstähnlichen Strukturen als zentraler Ausgangspunkt angesehen (Musenberg & Riegert, 2015, S. 19). Seitz geht von „einzigartige[n] und unverwechselbare[n] Ausformungen eines Grundmusters“ (2008, S. 229) in den Lernausgangslagen der unterschiedlichen Lernenden aus, die sowohl individuell und einzigartig, zugleich aber auch ähnlich sind. Über das Gemeinsame in den individuellen Lernzugängen soll ein inhaltlicher Austausch der Kinder ermöglicht werden. Dabei stehen die Individualitäten und Gemeinsamkeiten in einem engen Zusammenhang und unterstützen die praktische Umsetzung der von Prengel geprägten „egalitären Differenz“ (Prengel, 2006) sowie des damit einhergehenden pädagogischen Anspruchs, „Gemeinsamkeit und Vielfalt auf der Basis von Gleichwertigkeit zu denken“ (Prengel, 2006; Seitz, 2008, S. 229).

Aufgabe der Lehrkraft bei der Unterrichtsplanung und -durchführung ist es, „eine den Unterricht begleitende Perspektivenanalyse der veränderlichen kindlichen und fachlichen Konstruktionen zu einem Themenfeld“ (Seitz, 2008, S. 230) vorzunehmen. Diagnostische Anteile sowie die unterrichtsbegleitende Überprüfung und Anpassung stellen vor diesem Hintergrund einen weiteren wichtigen Moment inklusiven Unterrichts dar. Die von Seitz geprägte „Didaktik der Potentialität“ ermöglicht es allen Kindern, „ihre individuellen Begabungsreserven auszuschöpfen und sich selbst in sozialer Eingebundenheit an der ‚Sache‘ weiterzuentwickeln [Hervorheb. im Original]“ (Seitz, 2006, ohne Paginierung) und kann als „allgemeine Didaktik, in deren Kern der volle Ertrag inklusiver Pädagogik und Didaktik eingelassen ist“ (Seitz, 2006, ohne Paginierung), verstanden werden.

Im Gegensatz zu Feusers Ansatz basieren die theoretischen Überlegungen von Seitz auf einer eigenen empirischen Untersuchung zum Unterrichtsthema „Zeit“ und wurden unter Einbezug der Fachdidaktik unmittelbar aus der praktischen Arbeit mit den Perspektiven der Lernenden gewonnen. Heimlich (2016), der ein „didaktische[s] Grundproblem“ (S.77) in der Strukturierung eines Lerngegenstands nach den individuellen Voraussetzungen von Lernenden sieht, erkennt in Seitz‘ Ansatz keine Lösungsvorschläge für dieses Problem. Auch Moser Opitz (2014, S. 61) merkt kritisch an, dass keine Auswahlkriterien für die inhaltlichen Themen gegeben werden und eine Konkretisierung dessen, was die Lehrkraft als Kern der Sache verstehen kann, ausbleibt. Das impliziere die Gefahr, aus den Beobachtungen des kindlichen Handelns Zielsetzungen abzuleiten, ohne dass die dahinterliegenden Grundannahmen ausgemacht werden.

Beide Ansätze stellen zwar unterschiedliche theoretische Bezugspunkte in den Mittelpunkt und nehmen eine unterschiedliche Akzentuierung des „Gemeinsamen“ vor. Die grundsätzliche Annahme der Didaktik als „Vermittlungsaufgabe zwischen Sach- und Tätigkeitsstruktur, zwischen Fach- und Kinderperspektive, […] [allgemeingesagt] zwischen Sache und Subjekt“ (Musenberg & Riegert, 2015, S. 20) teilen sie jedoch. In Bezug auf die Hervorhebung der gemeinsamen Lerninhalte, d.h. der inhaltlichen Ebene von Kooperation und Gemeinsamkeit, verfolgen beide Konzeptionen das Ziel, für jedes Kind individuelle Schwerpunkte zu setzen und dabei die jeweilige Orientierung an dem gemeinsamen Gegenstand bzw. dem Kern der Sache als Möglichkeit zum Austausch über diese unterschiedlichen Zugänge zu nutzen (Korff, 2012, S. 147). Durch die vielfältigen Zugangsweisen wird der Blick für den „didaktischen Reichtum“ (Seitz & Scheidt, 2012, ohne Paginierung) des Gemeinsamen eröffnet. Eine bewusste Förderung der Kooperation auf inhaltlicher Ebene findet jedoch in beiden Ansätzen kaum Beachtung (Korff, 2012, S. 149).

Didaktik der Vielfalt nach Wocken

Mit der ‚Didaktik der Vielfalt‘(1998b, 2015) entwirft Hans Wocken eine Gegenposition zu Feusers und letztlich auch Seitz‘ Ansatz, die den Fokus auf Differenzierung legt und eine „Balance von gemeinsamen und differentiellen“ Lernsituationen (Wocken, 2015, S. 124) postuliert. Wocken kritisiert den Ausschließlichkeitsanspruch Feusers, dass nur die kooperative Tätigkeit auf der einen und der gemeinsame Gegenstand auf der anderen Seite als integrative und gemeinschaftsstiftende didaktische Elemente Wirkung zeigen. Als „konzeptionell wichtige und notwenige Erweiterung“ (Jenessen & Wagner, 2012, S. 341) fordert er einen heterogenitätsadaptiven Unterricht, der sich durch „eine breite Variation von Lehr- und Lernformen“ auszeichnet und nicht nur ziel- und inhaltsdifferentes, sondern auch „wegdifferent[es]“ Lernen ermöglicht (Wocken, 2015, S. 124). „Eine vielfältige Kindergruppe braucht gewiss auch einen „gemeinsamen Gegenstand“, aber sie sollte nicht dogmatisch auf diese Verpflichtung festgenagelt werden [Anführungsstriche im Original]“, schreibt (Wocken, 2015, S. 124) und fordert, nicht nur die Lernziele und Lernmethoden zu differenzieren, sondern ebenso die Lerninhalte und Lernwege zu individualisieren, um jeder Schülerin und jedem Schüler eine optimale Lernentwicklung ermöglichen zu können. „Im gemeinsamen Unterricht Unterschiede zwischen den Kindern zu machen, ist weder etwas Anrüchiges noch etwas Sträfliches noch eine Notlösung, sondern eine notwendige und sinnvolle didaktische Maßnahme“ (Wocken, 1998b, S. 43). Die „Vielfalt in der Gemeinsamkeit“ rückt somit in den Mittelpunkt dieser Konzeption. Das Grundproblem, dessen Wocken sich bereits in den 1980er Jahren angenommen hatte und das auch derzeit hochgradige Aktualität erfährt, stellt das Spannungsverhältnis zwischen individuellen und gemeinsamen Lernsituationen dar (Wocken, 1987, S. 75). Nach Ansicht von Wocken gilt es, „die Balance zu wahren zwischen individuellen Lernangeboten einerseits, damit jedes Kind zu seinen Möglichkeiten findet, und gemeinsamen Lernsituationen andererseits, damit die soziale Integration der Kindergruppe gefördert wird“ (Wocken, 1998a, S. 40). Sowohl in der Literatur zum integrativen Unterricht als auch zur gegenwärtigen Inklusionsentwicklung wird die von Wocken geprägte „Theorie gemeinsamer Lernsituationen“ (1998a, S. 51) vielfach zitiert und als unterrichtliche Planungsgrundlage herangezogen. Die bereits existierende Vielfalt an Lernsituationen im integrativen Unterricht in den Blick nehmend sowie anknüpfend an die Theorie der Integrativen Prozesse (Reiser, Klein, Kreie & Kron, 1986) konkretisiert Wocken (1998b) zentrale Lernsituationen, die er als idealtypisch und relevant für einen integrativen Unterricht ansieht und entsprechend ihres Verhältnisses von inhalts- und beziehungsbezogenen Aspekten erläutert:

- In *koexistenten Lernsituationen* werden die Sache und die damit verknüpften individuellen Ziele der Einzelnen (Inhaltsaspekt) in den Vordergrund gestellt, wohingegen soziale Austauschprozesse (Beziehungsaspekt) eher nachrangig sind. Die Lernenden nehmen sich zwar in Koexistenz zueinander wahr, treten aber in keinen inhaltlichen oder sozialen Bezug zueinander. Gemeinsamkeit zwischen den Lernenden entsteht allein durch eine „raumzeitliche Gemeinsamkeit“ (Wocken, 1998b, S. 42-43), unabhängig von einem gemeinsamen Gegenstand und wechselseitigem sozialen Austausch.

- *Kommunikative Lernsituationen* zeichnen sich durch eine Fokussierung auf die Interaktionen (Beziehungsebene) zwischen den Lernenden aus, wohingegen „die Sache kaum noch eine Rolle“ (Wocken, 1998b, S. 43) spielt. Informelle Gesprächssituationen auf rein sozialer Ebene, unabhängig von inhaltlichen Aspekten, stellen einen bedeutsamen gemeinschaftsstiftenden Moment dar, aus dem gemeinsame Themen der Kinder erwachsen können.
- In *subsidiären Lernsituationen* werden sowohl inhalts- als auch beziehungsbezogene Aspekte berücksichtigt. Der unterstützende Charakter steht im Vordergrund, wobei das Verhältnis zwischen den Lernenden durch Asymmetrie gekennzeichnet ist. Die Lernenden agieren in jeweils getrennten Rollen als „Helfer“ bzw. „Hilfsbedürftige“ (Wocken, 1998b, S. 47) und es werden sowohl unterschiedliche soziale als auch individuelle fachliche Ziele verfolgt. Die unterstützenden Hilfen können eher episodisch und beiläufig (unterstützende Lernsituationen) oder längerfristig und gezielt (prosoziale Lernsituationen) erfolgen.
- *Kooperative Lernsituationen* sind gekennzeichnet durch eine den inhaltlichen Austausch umfassende Gemeinsamkeit und einen verbindlichen Zusammenhang zwischen Arbeitsinhalten und –prozessen der beteiligten Lernenden. Entsprechend einer unterschiedlichen Intensität dieses Zusammenhangs kann zwischen komplementären Lernsituationen (aufeinander bezogene, aber nicht unmittelbar verbundene Ziele) oder solidarischen Lernsituationen (gemeinsame Bearbeitung gemeinsamer Ziele) unterschieden werden. Letztere gelten als „höchste[n] und reinste[n] Form“ kooperativer Lern- und Arbeitssituationen, in denen Aufgaben und Ziele aufeinander bezogen und Tätigkeiten und Arbeitsprozesse gemeinsam „koordiniert und wechselseitig abgestimmt“ werden (Wocken, 1998b, S. 50).

Nach Wocken sollten diese verschiedenen Lernsituationen gleichberechtigt umgesetzt und nicht nur zwischen den einzelnen Unterrichtsstunden, sondern auch innerhalb einer Stunde in verschiedenen Unterrichts- bzw. Arbeitsphasen variiert werden. Die als „Sternstunden“

bezeichneten kooperativen, solidarischen Lernsituationen sollten zwar als feste Bestandteile integrativen Unterrichts gelten, nicht jedoch als „alltägliche Minimalnorm“ (Wocken, 1998b, S. 50) idealisiert werden. Vielmehr geht es darum, ein ausgewogenes Verhältnis zwischen differentiellen und gemeinsamen Lernsituationen herzustellen.

Korff (2016b, S. 39) merkt kritisch an, dass sich Wocken auf didaktisch-methodische Aspekte beschränke und die inhaltliche Ausgestaltung der Kooperation zwischen den Lernenden nicht berücksichtige. Um eine Balance zwischen individuellem und gemeinsamem Lernen zu erreichen, gilt es nach Ansicht Korffs, die soziale Eingebundenheit von Lernprozessen nicht nur auf die soziale Teilhabe zu reduzieren, sondern neben der fachdidaktischen auch die fachliche und inhaltsbezogene Ebene einzubeziehen. Ebenso fehle die Konkretisierung eines didaktischen Gesamtkonzepts. Ungeachtet dessen spielen die hier dargestellten gemeinsamen Lernsituationen eine zentrale Rolle für das Unterrichts- und Förderkonzept auf didaktisch-methodischer Ebene (Kap. 5). Es gilt jedoch zu berücksichtigen, dass das kooperative Arbeiten und Lernen in gemeinsamen Lernsituationen keinem Automatismus unterliegt, sondern entsprechende Erfahrungen auf Seiten der Lernenden sowie unterstützende Anregungen und Begleitung durch die Lehrpersonen erfordert (Scherer, 2015, S. 280).

Lernangebote für einen hochwertigen inklusiven Unterricht nach Jenessen und Wagner

Angesichts der in Kapitel 2.1.2 dargelegten Heterogenität in inklusiven Lerngruppen wird der Bedarf an vielseitigen und komplementär angelegten Unterrichtssituationen ersichtlich. Jenessen und Wagner (2012) fordern vor diesem Hintergrund Lernangebote, die neben den unterschiedlichen Situationen des gemeinsamen Lernens nach Wocken (1998b) auch solche Situationen umfassen, die durch ein „hohes Maß an Individualisierung bis hin zum Setting einer Einzelsituation“ (2012, S. 341) gekennzeichnet sind. Demnach sollte ein hochwertiger inklusiver Unterricht Lernangebote umfassen, in denen die Lernenden

- in heterogenen Gruppen am gemeinsamen, reichhaltigen Gegenstand zieldifferent lernen können (Jenessen & Wagner, 2012, S. 341), sodass ein kooperatives Lernen auf unterschiedlichen Niveaus ermöglicht wird (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 15),
- in heterogenen und/oder homogenen Gruppen oder individuell an verschiedenen Gegenständen zieldifferent lernen können (Jenessen & Wagner, 2012, S. 341), sodass

zwar räumlich gemeinsam, jedoch inhaltlich individuell orientiert gelernt wird und eine Teilung der Lerngruppe möglich ist (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 15),

- in exklusiv-individuellen Einzel- oder Kleingruppensituationen zieldifferent lernen können (Jenessen & Wagner, 2012, S. 341), sodass eine zusätzliche Förderung einzelner oder mehrerer Lernender möglich ist (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 15).

Im Sinne des sozial-konstruktivistischen Lernverständnisses bieten sich im inklusiven Unterricht Handlungs- und Sozialformen an, die sowohl die individuelle, eigenaktive Erarbeitung von Inhalten ermöglichen, als auch Raum für die Begegnung und den inhaltlichen Austausch der unterschiedlichen Schülerinnen und Schüler untereinander eröffnen. Hochwertiger inklusiver Mathematikunterricht, wie er im Rahmen dieser Arbeit verstanden und verfolgt wird, zeichnet sich durch die gleichwertige Berücksichtigung der verschiedenen Lernsituationen aus und setzt sie entsprechend ihrer je spezifischen Bedeutsamkeit ein (vgl. Kap. 2.2.4 und Kap. 5).

2.2.2 Grundzüge aus sonderpädagogischer Perspektive

Im Folgenden findet eine Konzentration auf ausgewählte, unterrichtsrelevante Annahmen der klassischen Hilfsschul- bzw. Sonderpädagogik statt. Vor dem Hintergrund des in dieser Arbeit verfolgten Forschungsinteresses wird insbesondere der Mathematikunterricht für Schülerinnen mit Lernbehinderungen bzw. Lernschwierigkeiten betrachtet. Auf eine ausführliche Darstellung der historischen Entwicklung der klassischen Hilfsschul- und Sonderpädagogik über die integrative Didaktik bis hin zu aktuellen inklusiv orientierten Ansätzen wird an dieser Stelle verzichtet, interessierte Leserinnen und Leser können sie u.a. bei Bleidick und Heckel (1970), Heimlich (2016), Möckel (2001) und Prengel (2006) nachlesen. Eine differenzierte Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Aspekten der sonderpädagogischen Professionalität im Rahmen inklusiver Bildungsentwicklungen wird bei Lindmeier und Weiß (2017) dargestellt, auch Wember (2013) widmet sich dem sonderpädagogischen Tätigkeitsfeld.

Die schulische Heil- und Sonderpädagogik ist als Folge mangelnder Förderung und damit einhergehendem ausbleibendem schulischem Lernerfolg von Kindern mit schwerwiegenden kognitiven, motorischen bzw. sensorischen Funktionseinschränkungen entstanden (Wember, 2009a, S. 90). Im traditionellen Sinne verstand sie sich als „institutionelle Antwort auf die

Besonderheiten des Hilfsschulkindes“ (Wember, 2009a, S. 95), die in Form der Hilfs- bzw. Sonder- und heute Förderschulen „effektive schulische Hilfe bei bereites manifestem oder drohendem Schulversagen“ (Wember, 2009a, S. 90) bereitstellt.

Der (Mathematik-)Unterricht in Sonder- bzw. Förderschulen, insbesondere auch in der Schule für lernbehinderte Schülerinnen und Schüler, wurde vor dem Hintergrund der Hilfsschulpädagogik systematisch mit bestimmten Merkmalen des sogenannten Hilfsschulkindes verknüpft. Ziel war es, der in den Mittelpunkt gestellten Verschiedenheit der Lernenden sowie ihren Funktionseinschränkungen und fehlenden Lernvoraussetzungen durch spezifisch angepasste Hilfen zu entsprechen. Lange Zeit fand eine Ausrichtung auf mechanisches und passives Lernen statt, um den angenommenen eingeschränkten Fähigkeiten der Lernenden gerecht zu werden (Scherer, 1994, S. 761). Aufgrund der verbreiteten Annahme, dass höhere Anforderungen für Kinder mit Lernschwierigkeiten eine Überforderung darstellen, wurden die unterrichtlichen Ansprüche und kognitiven Anforderungen deutlich verringert und auf die elementarsten Grundlagen reduziert (Scherer & Moser Opitz, 2010). Komplexere Inhalte, die auf Einsicht und Verständnis ausgerichtet sind und die Problemlösefähigkeit der Lernenden erfordern, wurden weitestgehend isoliert, um mögliche Fehler zu vermeiden und die Lernenden nicht zu überfordern. Stattdessen sollten meist vorgegebene Lösungswege mit festgelegten Notationen geübt werden. Damit gingen ein verlangsamtes unterrichtliches Vorgehen sowie eine Überbetonung der Anschaulichkeit, der Handlungsorientierung sowie des Lebensweltbezugs einher, um sowohl dem geringen Lerntempo als auch der vermuteten Abstraktionsschwäche der Lernenden gerecht zu werden (Scherer, 1994, S. 762). Wember (2009b) fasst dieses empiristisch geprägte Verständnis des Mathematikunterrichts, in dessen Tradition die klassische Hilfsschulpädagogik steht, für Lehrkräfte folgendermaßen anschaulich zusammen:

> Zerlege den Lehrstoff in viele, möglichst kleine Teile. Erarbeite diese Teile sukzessive in kleinen Schritten. Isoliere mögliche Verständnisschwierigkeiten und leite deine Kinder sorgfältig durch den Lehrgang. Verwende möglichst häufig und am besten grobsinnliche Veranschaulichungsmittel. Beschränke dich auf die zentralen und wenig komplexen Inhalte, aber sichere diese durch beständiges Üben. (S. 230)

Deutlich wird, dass diese Konzeption eine aktive Rolle primär auf Seiten der Lehrkräfte sieht und den Lernenden eher eine passive, aufnehmende Rolle zuschreibt.

Bereits seit den Anfängen der „Hilfsschulbewegung“ zu Beginn des 19. Jahrhunderts (Heimlich, 2016, S. 71) und verstärkt durch die Bildungsreform in den 1970er Jahre gerät ein Unterricht, der nach den beschriebenen heilpädagogischen Prinzipien „im Kern ein Weniger an Inhalt und ein Mehr an einseitiger methodischer Hilfe bei ziemlichem pädagogischem Pessimismus“ fordere, zunehmend als „reduktiv und bestehende Behinderungen geradezu fixierend“ (Wember, 2016a, S. 82) in die Kritik. Kanter (1970), Klein (1971) oder Wocken (1978) (zitiert in Wember 2001, S. 162) heben zwar die geforderten unterrichtlichen Differenzierungsprinzipien hervor, bemängeln jedoch die fehlende Bereitstellung individuell angepasster Hilfen sowie die starke defizitorientierte Ausrichtung und medizinisch geprägte Sichtweise von ‚Behinderung‘ bzw. interindividuellen Unterschieden der Lernenden sowie die damit einhergehende Legitimation besonderer Schulformen. Die Bedenken, dass bei den Lernenden durch einen derart gestalteten Unterricht die Entwicklung ineffektiver Strategien provoziert und Lernschwierigkeiten langfristig manifestiert werden, rücken die ursprünglich erhoffte Lernerleichterungen zunehmend in den Schatten (Korff, 2016b, S. 79-80; Scherer, 1994, S. 765; Wember, 2001, S. 162). Wember (2009a) konstatiert, dass „Versuche einer spezifischen Passung der Inhalte und Methoden des Unterrichts“ für diese Gruppe von Lernenden grundsätzlich der Gefahr ausgesetzt sind, „in reduktionistischer Weise Lern- und Entwicklungsmöglichkeiten einzuschränken und bestehende Schwierigkeiten zu verfestigen statt sie zu beheben oder doch zumindest zu mildern“ (S. 96; vgl. auch Klein 1971). Zwar erlauben diese „Simplifizierungsstrategien“ (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 172) aus heutiger Sicht auf kurze Zeit und oberflächlich betrachtet eine reibungslosere Unterrichtsdurchführung, langfristig gesehen wird „den Lernenden die für sie notwendige Förderung, mit der sie die Verstehensgrundlagen aufbauen können“ (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 172), jedoch entzogen. Ausgehend von dieser kritischen Kontroverse um die geeignete schulische Förderung von Kindern mit Beeinträchtigungen entstand bereits seit den frühen Anfängen der traditionellen Hilfsschulpädagogik die Forderung eines gemeinsamen Unterrichts (Heimlich, 2016, S. 71).

Die historisch gewachsene, durch Inferiorisierung und Isolation (Prengel, 2006, S. 151) geprägte Ausrichtung wird im Zuge der Integrationsentwicklungen zunehmend ersetzt durch lern- und entwicklungspsychologische Ansätze. Im Gegensatz zu einer reduktiven, auf minimalistische Ansprüche beschränkten Didaktik vertreten diese eine neutrale, mitunter positive Perspektive, in der „interindividuelle Unterschiede als bloße Differenzen bewertet und die Kompetenzen eines und einer jeden Heranwachsenden betont“ (Wember, 2009a, S. 90) werden. Diese Kompetenzorientierung gilt als konstitutiv für die moderne Sonderpädagogik (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 165), sie soll statische bzw. medizinische Modelle von ‚Behinderung‘ überwinden.

Damit verbunden ist ein ganzheitlicher Zugang zu unterrichtlichen Inhalten auch für Kinder mit Lernschwierigkeiten Scherer (1997). Es liegt ein konstruktivistischer Ansatz zugrunde, in dessen unterrichtlicher Tradition die reformpädagogischen Ansätze der Individualisierung und Öffnung des Unterrichts stehen (Wember, 2009b, S. 244). Die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler, deren subjektgesteuerten aktiven Aneignungsprozesse sowie die Unterstützung von Seiten der Lehrkräfte werden betont. Eng damit verbunden ist das entdeckende Lernen. Unterrichtsinhalte sollen nicht länger losgelöst aus ihren größeren Zusammenhängen in kleinen Teilen erarbeitet, sondern als ganzheitliches Lernangebot in ihrer umfänglichen Komplexität zugänglich gemacht werden. Dabei soll die sonderpädagogische Förderung sowohl einen fachlich-curricularen als auch einen individuell-entwicklungsbezogenen Anspruch erfüllen, um einerseits Schwierigkeiten, bedingt durch inhaltliche Anforderungen, und andererseits individuellen Förderbedarfen in basalen Kompetenzen Rechnung tragen zu können (vgl. Kahlert & Heimlich, 2012, S. 163). Anzustreben ist eine Balance zwischen der Erarbeitung generalisierbarer Erkenntnisse und Zusammenhänge auf „logisch-formaler Art“ (Wember, 2009b, S. 233) sowie einer adäquaten Anschaulichkeit. Wember (1988) formuliert für das schulische Lehren und Lernen von Kindern mit Lernschwierigkeiten die Leitkonzeption, dass diese "ebenso wie erwachsene [alle, R.-F.K.] Lernende auch bemüht sind, kognitive Probleme aktiv, praxisbezogen und einsichtsvoll zu lösen, weil sie ebenso wie Erwachsene [ihre Mitschülerinnen und Mitschüler, R.-F.K.] zu sinnvoll empfundenen Lernerfahrungen gelangen möchten" (S. 162). Alle Lernenden sollen demnach die zentralen mathematischen Begriffe als Repräsentanten für reale Objekte sowie die mathematischen Operationen als Repräsentanten für reale Handlungen erfassen können. Auf diese zentrale These beziehen sich auch seine folgenden, bereits 1988 formulierten Prinzipien, die den neueren lern- und entwicklungspsychologisch legitimierten Ansatz innerhalb der Sonderpädagogik charakterisieren und eine Grundkonzeption schulischen Lernens darstellen, dessen Einfluss auch gegenwärtig noch wahrzunehmen ist. Die ersten drei lassen sich als curriculare, die weiteren vier als methodische Prinzipen der Unterrichtsplanung und -durchführung einordnen:

1. *Praktischer Problembezug*, d.h. eine Ausrichtung der unterrichtlichen Anforderungen an für die Lernenden inhaltlich sinnvollen und lebensnahen Problemen
2. *Sprache des Schülers*, d.h. zunächst Einbezug der Sprache der Lernenden, daran anknüpfend Einführung der Fachsprache
3. *Entwicklungsgemäße Sequenzierung von Unterrichtsinhalten und Lehrzielen*, d.h. Orientierung der Inhalte und Ziele des Unterrichts sowohl an individuellen, kognitiven Entwicklungsständen als auch an curricular vorgegebenen Entwicklungen
4. *Aktives und handelndes Lernen*, d.h. geistige Aktivierung der Lernenden sowie zielgerichtetes selbstständiges Handeln
5. *Schrittweise Verinnerlichung*, d.h. Verbindung der konkreten Handlung mit ikonischen Darstellungen sowie dem Aufbau abstrakt-symbolischer Vorstellungen (vgl. Repräsentationsmodi nach Bruner 1974)
6. *Operative Übungen*, d.h. verständnisorientierter Einsatz variierender und vielfältiger Aufgabenformate sowie in Beziehung setzen verschiedener Operationen
7. *Sozialkooperative Erarbeitung*, d.h. eigenständiges Problemlösen im Rahmen von Partner- oder Gruppenarbeiten

In einem Unterrichtsversuch hat Scherer 1995 eindrucksvoll dargelegt, dass ein Mathematikunterricht, der an der klassischen Hilfsschulkonzeption ausgerichtet ist, zu einem zu stark passiven Lernen und direktem Lehren führt und dass auch Kinder mit Lernschwierigkeiten im Gegensatz dazu produktiv und aktiv entdeckend Lernen können. „Mehr noch: Gerade diese Schüler_innen [mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen, R.-F.K.] können in besonderer Weise von einem Unterricht profitieren, der auf das Verständnis mathematischer Zusammenhänge abzielt und mit mathematischen Ganzheiten arbeitet“ (Korff, 2016b, S. 79). Das Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens war in der Sonderpädagogik lange Zeit unbedeutend und wurde kaum berücksichtigt, da man glaubte, lernschwache Schülerinnen und Schüler würden nur wenig davon profitieren. Scherer konnte die für den Grundschulbereich unumstrittene Bedeutung des aktiv-entdeckenden Lernens (vgl. fachdidaktische Ausführungen Kap. 2.2.1) als wirkungsvolles Unterrichtsprinzip auch für Schülerinnen und Schüler mit Lernbeeinträchtigungen nachweisen (vgl. Scherer & Moser Opitz 2010, u.a. S. 10). „Aktiv-entdeckendes Lernen meint nicht ausschließlich anspruchsvolle Problemlöseaktivitäten, sondern aktive Erarbeitung und Aneignung von Wissen im Gegensatz zu passiver Aufnahme“ (Scherer, 1994, S. 761). Wember (2009b) hebt für Kinder mit Lernschwierigkeiten hervor, „sie sollten, wo und wann immer möglich, entdecken und produktiv tätig sein können, aber sie sollten in ihrem Lernen auch diagnostisch begleitet und präskriptiv unterstützen werden“ (S. 245).

Aus sonderpädagogischer Perspektive kann ein solcher (Mathematik-)Unterricht als eine „subsidiäre Angelegenheit“ (Wember, 2009b) bezeichnet werden. Ein entsprechendes Verständnis aus Sicht der Lehrkräfte formuliert Wember (2009b) anschaulich:

> Als Lehrerin bzw. Lehrer helfe ich den Kindern, sich ihre Mathematik konstruktiv aufzubauen. Ich halte mich zurück, solange die Kinder ohne meine Hilfe auskommen, denn den aufrechten Gang ohne Gehhilfen erlernen Kinder auch im Lernbereich Mathematik nur, wenn sie Gelegenheit erhalten, eigene Schritte zu gehen. Ich biete gezielte Hilfen an, wenn die Kinder diese brauchen, indem ich ihre Teillösungen und Fehllösungen analysiere und die Inhalte und Methoden der unterrichtlichen Erarbeitung an den individuellen Strategien der Kinder ausrichte. Dabei muss ich mir immer wieder klarmachen, was Mathematik eigentlich ist und wie Kinder sich ihre Mathematik erarbeiten. Ich darf mir den Lernprozess nicht zu simpel, zu kleinschrittig, zu passiv vorstellen, denn dann drohen meine Lehrbemühungen von subsidiären zu subversiven Aktivitäten zu werden – ich kann durch falsches Lehren das Lernen untergraben, nicht nur, aber auch bei Kindern mit Lernschwierigkeiten. Ich muss versuchen, den Kindern mit all meiner Fantasie und Vorstellungskraft zu helfen, aber ich muss von ihnen aktives Lernen fordern. Kein Lehrender kann den Lernenden das Lernen abnehmen. (S. 245)

Die reform- und sonderpädagogisch geprägte normative Setzung „Jedes Kind ist bildbar“ und „individuell spezifisch lernfähig“ (Rehle, 2009, S. 183) lässt sich als zentrale „Betriebsprämisse“ (Ternoth, 2010, S. 18) bezeichnen, die in der gegenwärtigen Inklusionsentwicklung nach wie vor von richtungsweisender Bedeutung ist. Vor dem Hintergrund der sonderpädagogischen Perspektive geht der inklusive Unterricht von „uneingeschränkten Lern- und Entwicklungsmöglichkeiten jedes Menschen aus. Jeder Mensch kann – unabhängig von seinen Lern- und Entwicklungsmöglichkeiten – (nicht nur mathematische) Kompetenzen erwerben“ (Werner, 2017b, S. 212). Aus sonderpädagogischer Sicht werden die förderschwerpunktspezifischen Unterstützungsmaßnahmen als unterstützende, den Unterricht begleitende und adaptive Maßnahmen angesehen, die eine Teilhabe aller Lernenden in allen Phasen des Unterrichts sichern sollen (Werner, 2017b,

S. 212). Dabei gilt es im Sinne einer multidimensionalen Ausgestaltung des Unterrichts sowohl auf inhaltlicher als auch auf methodischer Ebene die verschiedenen Entwicklungsbereiche aller Schülerinnen und Schüler zu berücksichtigen (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 175).

Sonderpädagogische Förderung kann nach Kahlert und Heimlich (2012, S. 164 ff.) als ein Prozessmodell beschrieben werden, das zu einem richtungsweisenden pädagogischen Handlungskonzept wird, sobald die folgenden, in enger Beziehung zueinander stehenden Komponenten in einen systematischen Begründungszusammenhang gebracht werden: sonderpädagogische Förderdiagnostik, sonderpädagogische Intervention, sonderpädagogische Evaluation sowie sonderpädagogische Beratung. Die verschiedenen Komponenten sonderpädagogischer Förderung ordnen sie in drei Begründungszusammenhänge ein, anhand derer die Effektivität und die Legitimation sonderpädagogischer Maßnahmen belegt werden können: dem *materialistischen Paradigma*, das sich an der „Zone der nächsten Entwicklung" i.S. Vygotskijs (2002 (russ. Originalausgabe 1934)) als Basis sonderpädagogischer, entwicklungsorientierter Interventionen orientiert; dem *interaktionistischen Paradigma*, das die Bedeutung sozialer Beziehungen und den Dialog in den Mittelpunkt stellt und dadurch Etikettierungen und Stigmatisierung aufbrechen will, sowie dem *ökologischen Paradigma*, das die Relevanz des Umfeldes betont und im Rahmen von sensorisch multifunktionalen Lernumgebungen die individuellen Förderbedürfnisse berücksichtigen will (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 168-169).

Aus fachdidaktischer Sicht wird eine fehlende Fachlichkeit bzw. nur langsam voranschreitende Aufnahme fachdidaktischer Konzeptionen innerhalb der schulischen Sonderpädagogik kritisiert (Korff, 2016b, S. 80), sodass die Frage nach der inhaltlichen Gestaltung des Unterrichts offen bleibt. Korff bemängelt einerseits die fehlende Orientierung an mathematischen Strukturen und Zusammenhängen, die sich insbesondere auch auf die Erarbeitung des relevanten mathematischen Basisstoffs bezieht. Andererseits sieht sie das mathematische Potential des Alltagsbezugs, das bedeutsam für die Entwicklung mathematischen Denkens ist, durch eine Überbetonung der Lebenspraxis gefährdet. Zwar nimmt die zentrale Fokussierung der Subjekt- und Kompetenzperspektive eine bedeutsame Rolle ein, für die Planung und Durchführung eines hochwertigen Fachunterrichts kann sie aber nicht die alleinige hinreichende Antwort darstellen. Die Frage nach zentralen Inhalten sowie der unterrichtlichen Passung zwischen Lernenden und fachlichen Unterrichtsgegenständen gilt es ebenso zu berücksichtigen. Die Frage, wie eine Vermittlung zwischen fachlichen Inhalten und Lernenden aussehen kann, erfährt insbesondere in der Sekundarstufe besondere Bedeutung, da der steigende fachliche Anspruch mit grundlegenden didaktischen Herausforderungen einhergeht (Musenberg & Riegert, 2015, S. 17-18).

2.2.3 Grundzüge aus fachdidaktischer Perspektive

Als Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik erforscht und beschreibt die Fachdidaktik Mathematik mathematische Lern- und Lehrprozesse „in allen Altersstufen einschließlich seiner Voraussetzungen, Zielsetzungen und Rahmenbedingungen“ (Wittmann, E. Ch., 1998a, S. 330), um diese daraufhin verstehen und erklären zu können. Aus fachlicher Sicht wird Mathematik als Wissenschaft von Mustern verstanden, die sich mit Begriffen, ihren spezifischen Eigenschaften sowie den Beziehungen zwischen den Begriffen und Eigenschaften auseinandersetzt (Vollrath & Roth, 2012, S. 25). Historisch gesehen wurzelt die Mathematik in der Lehre von Figuren und Zahlen, gleichwohl eine ständige Weiterentwicklung stattfindet. Die Mathematikdidaktik ist in vielfältiger Weise mit verschiedenen Bezugswissenschaften und ihrem schulischen Anwendungsgebiet verknüpft: “Like the didactics of other subjects mathematics education requires the crossing of boundaries between disciplines and depends on results and methods of considerably diverse fields, including mathematics, general didactics, pedagogy, sociology, psychology, history of science and others” (Wittmann, E. Ch., 1995b, S. 365). Eine zentrale Bedeutung nimmt jedoch der Kernbereich, d.h. der reale Unterricht, in der Mathematikdidaktik als angewandte Disziplin ein. Die Bezugsbereiche sind zwar unerlässlich, jedoch basiert die Fachdidaktik zu großen Teilen auf dem Wissen ihrer wichtigsten Bezugsdisziplin, der Mathematik. Dabei stellt die Bildung von Theorien sowie Theoriegerüsten in Verbindung mit der Entwicklung und empirischen Untersuchung von Unterrichtskonzepten nach Wittmann eine zentrale Komponente dar (Wittmann, E. Ch., 1992, S. 57; vgl. Freudenthal, 1987): „The most important results of research in the mathematics education are sets of carefully designed and empirically studied teaching units that are based on fundamental theoretical principles“ (Wittmann, E. Ch., 1995b, S. 369). Die Didaktik des Mathematikunterrichts ist durch eine „betonte Anwendungsorientierung und Praxisbezogenheit“ charakterisiert (Wittmann, E. Ch., 2009, S. 3). Ende der 1980er Jahre vollzog sich ein Perspektivwechsel, der auf die Wiederentdeckung reformpädagogischer Ideen des frühen zwanzigsten Jahrhunderts zurückzuführen ist. Anstelle eines eher rezeptiv orientierten Mathematikunterrichts, der auf einem Verständnis von „Lernen als Abbilden“ im Sinne des Behaviorismus fußte, trat zunehmend eine konstruktivistisch geprägte Sichtweise auf die Mathematikdidaktik und den Mathematikunterricht, die „Lernen als Konstruieren“ auffasste (Wessel, 2015, S. 11).

Im schulischen Kontext stellt Mathematik als immanenter Bestandteil der gesamten Schullaufzeit ein allgemeinbildendes Fach dar, das neben der Vermittlung fachlicher Inhalte sowohl zur Entfaltung der Persönlichkeit, zur Umwelterschließung, zur Teilhabe an der Gesellschaft sowie zur Vermittlung von Normen und Werten beitragen soll (Vollrath & Roth, 2012, S. 10). Weiterhin ist es auch ein qualifizierendes Fach, das sich auf fachliche Fähigkeiten und Kenntnisse, die eine zentrale Bedeutung für das schulische Lernen und darüber hinaus einnehmen, fokussiert.

Im Kern orientiert sich die Fachdidaktik Mathematik auch für den inklusiven Mathematikunterricht an der Entwicklung der inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen, die seit jeher die zentrale Grundlage für das schulische Mathematiklernen darstellen. Der Zugang zum jeweiligen Lerngegenstand wird „aus der fachlichen Logik der Sache „Mathematik“ abgeleitet“ (Werner, 2019, S. 137) und eine Betrachtung des gemeinsamen Unterrichts erfolgt vorrangig vor dem Hintergrund des gemeinsamen mathematischen Gegenstands. Inklusion kann aus fachdidaktischer Sicht als positive Herausforderung aufgefasst werden, die es erforderlich macht, "sich mit der Frage nach dem fachdidaktischen Kern, nach essenziellen Inhalten, Zielen und Kompetenzen des jeweiligen Unterrichtsfachs auseinanderzusetzen" (Musenberg & Riegert, 2015, S. 25). Die Mathematikdidaktik hält bereits grundlegende Prinzipien bereit, die für einen inklusiven Mathematikunterricht eine hohe Anschlussfähigkeit aufweisen. Inklusiver Mathematikunterricht wird zunehmend verstanden als ein Lernen im sozialen Miteinander, in dem sich alle Lernenden einem Lerngegenstand zuwenden und die Verschiedenheit der Lernenden als fruchtbare Gemeinsamkeit angesehen wird (Korff, 2012). Auch die fachlich-hierarchischen Strukturen des Unterrichtsfachs Mathematik, die vielen Lehrerinnen und Lehrern zunächst als nicht geeignet für den Gemeinsamen Unterricht erscheinen, ermöglichen gerade durch ihre fachliche Tiefe und Vernetzung vielfältige Anlässe und Chancen für die kooperative Auseinandersetzung am gemeinsamen Lerngegenstand (vgl. Kap. 2.3.1 und 2.3.2). Im Zuge der inklusiven

Unterrichtsentwicklung besteht die Herausforderung, bewährte Konzepte zu hinterfragen, bisherige Aufgabenstellungen zu erweitern und den Blick auf differenzsensible Bereiche zu richten. Im Vordergrund sollte die „Entwicklung eines zieldifferenten, zielführenden Mathematikunterrichts sowie dessen Erprobung und Evaluation“ (Korff & Schulz, 2017, S. 118) stehen, die an Erkenntnisse aus der Integrations- und Inklusionsforschung anknüpfen kann und sollte. Dabei spielt die enge Verbindung von Wissenschaft und Praxis eine besondere Bedeutung: „The specific tasks of mathematics education can only be actualized if research and development have specific linkages with the practice at their *core* and if the improvement of practice is merged with the progress of the field as a whole“ [Hervorheb. im Original] (Wittmann, E. Ch., 1995b, S. 356). Darüber hinaus gründet sich die Mathematikdidaktik auch auf theoretischen Reflektionen praktischer Unterrichtserfahrungen sowie auf Ergebnissen empirischer didaktischer Forschung (Vollrath & Roth, 2012, Einleitung). Sie basiert demnach auf normativen, deskriptiven und empirischen Grundlagen. Die Forderung Wittmanns ist auch gegenwärtig hoch aktuell und richtungsweisend für die Entwicklung, Erprobung und Gestaltung inklusiven Mathematikunterrichts. Zielsetzungen, die gleichzeitige Herausforderungen bedeuten, liegen in der Berücksichtigung aller individuellen Lernwege und Lernziele sowie der Nutzung der unterschiedlichen Perspektiven und Lernwege als „Ressource für die gegenseitige Anregung von Lern- und Entwicklungsprozessen“ (Korff, 2012, S. 139). In Anlehnung an das im Rahmen der Pädagogik der Vielfalt von Prengel geprägte differenzierte Verständnis von Gleichheit und Verschiedenheit wird in der Mathematikdidaktik die Annahme verfolgt, dass „jede Lerngruppe heterogen ist und die Lernenden von dieser Vielfalt profitieren können“ (Korff, 2016b, S. 23) und „Verschiedenheit als produktive Chance für fachliche Erkenntnisse“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 17) angesehen werden kann (vgl. vertiefende mathematikdidaktische Ausführungen zum Heterogenitätsverständnis in Kapitel 2.1.5). In theoretischer Hinsicht werden damit strukturell selektierende Maßnahmen überflüssig. Gegenwärtig fehlt es allerdings sowohl in der Praxis als auch in der Forschung an einer konsequenten Auflösung der Lernzielgleichheit hin zu einer Lernzieldifferenz.

Aus fachdidaktischer Sicht lassen sich drei zentrale Argumente formulieren, die die Grundlage für einen guten Mathematikunterricht bilden (Korff, 2016b, S. 59 ff.):

1. Lernen ist ein konstruktiver, eigentätiger und sozial situierter Prozess.

Durch die Verbindung lehr-/lerntheoretischer Erkenntnisse mit dem Fachverständnis der Mathematik als „Wissenschaft der Muster“ haben sich fachdidaktische Ansätze entwickelt, die eine aktive, selbstverantwortliche Aneignung und Konstruktion von Wissen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler fokussieren, ihre Eigenaktivität unterstützen und die Bedeutsamkeit des sozialen Lernens hervorheben (Korff, 2016b, S. 101). Mathematiklernen wird als ein „individueller, sozial vermittelter Prozess der eigenen Konstruktion von Wissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten“ (Schipper, 2009a, S. 33) angesehen. Orientiert an einem konstruktivistischen Grundverständnis wird ein dynamisches Bild von Mathematikunterricht verfolgt (Korff, 2016b, S. 108). Als entscheidend für die mathematische Lernentwicklung können die „fachliche Rahmung, die fachlich geprägte konstruktive Aktivität der Kinder und die fachlich geprägte soziale Interaktion“ (Wittmann, E. Ch., 2015, S. 204) angesehen werden. Ungeachtet der großen Relevanz des Verständnisses mathematischer Strukturen und Beziehungen gilt es, gewisse Regeln und Konventionen, die im Sinne der Formalsprache der Mathematik als „feste Vereinbarungen“ (Korff, 2016b, S. 61) bestehen, nicht außer Acht zu lassen.

2. Wissen ist bereichsspezifisch und Lernen findet stets auf Grundlage der bisherigen Erfahrungen statt.

Die Aneignung mathematischer Inhalte variiert zwischen den Lernenden sowohl in ihrem unterschiedlich ausgeprägten Fachwissen, als auch in deren Art der Aneignung und kognitiven Denkentwicklung, die stets bereichsspezifisch ausgebildet sind (Korff, 2016b, S. 60). In Anlehnung an Bauersfeld (1983) wird in der Mathematikdidaktik in diesem Zusammenhang von subjektiven (mathematischen) Erfahrungsbereichen (SED) gesprochen, die sowohl alltagsmathematische als auch schulmathematische Aspekte umfassen. Von grundlegender Bedeutung ist einerseits die zunehmende Vernetzung und Verallgemeinerung dieser zunächst getrennten Bereiche, andererseits deren Erweiterung und Transfer auf neue Erfahrungsbereiche (Bauersfeld, 1983, S. 53). Eng verbunden ist damit die Annahme, dass Lernen nicht nur kognitiv bestimmt ist, sondern auch individuellen sozialen und emotionalen Einflüssen unterliegt. Vor dem Hintergrund einer immanenten Prozessdiagnostik bietet guter Mathematikunterricht den Lernenden in Form von substantiellen Lernumgebungen vielfältige Anknüpfungspunkte, um die bisherigen individuellen Erfahrungsbereiche weiterzuentwickeln und auf größere (mathematische) Sinnzusammenhänge übertragen zu können (Korff, 2016b, S. 60-61). Im Vordergrund sollten hier Erfahrungen des selbsttätigen Lernens stehen, innerhalb derer die Lernenden an ihre individuellen Vorerfahrungen anknüpfen können. „Nur, wenn eine tragfähige Verbindung zwischen eigenen Strategien und Konventionen geschaffen wird, besteht die Chance, Flexibilität im Mathematikunterricht zu entwickeln und zu erhalten, und konventionelle Verfahren werden erfolgreicher angewendet, wenn sie mit dem Wissen und den Erfahrungen der Kinder verbunden werden. Dies gilt für jede Art von Lernen“ (Scherer, 2008, S. 279).

Ergänzend lässt sich an dieser Stelle die Verstehensorientierung und damit einhergehende Fokussierung des inhaltlichen Denkens hervorheben, die Wessel (2015, S. 13 ff.) als ein Grundprinzip der mathematikdidaktischen Verortung anführt. Die zuvor genannten individuellen Lernerfahrungen sollten auf einen verständigen Umgang mit mathematischen Begriffen und die Entwicklung eines tragfähigen inhaltlichen Denkens abzielen. Dem zugrunde liegt das Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül“ (Prediger, 2009). Prediger schreibt dem inhaltlichen Denken für den mathematischen Lernprozess eine sehr große Relevanz und auch zeitlich-chronologische Priorität gegenüber dem Kalkül zu, „weil ein Kalkül ohne inhaltliche Grundlage für die Anwendung von Mathematik bedeutungslos ist“ (2009, S. 223). Während des gesamten Mathematiklernens sollte immer wieder das inhaltliche Denken und die Verknüpfung mit inhaltlichen Denkweisen in den Mittelpunkt gestellt werden (Prediger, 2009, S. 226). Vor dem Hintergrund der konstruktivistischen Auffassung von Lernen sind dazu reichhaltige Lernsituationen und gehaltvolle inner- und außermathematische Kontexte erforderlich.

3. Mathematik ist als Wissenschaft der Muster zu verstehen.

Das Unterrichtsfach Mathematik ist gekennzeichnet durch klare fachliche Muster und Strukturen, die eine hierarchische Struktur aufweisen. Diese sind in allen Inhaltsbereichen vorzufinden und durch aufeinander aufbauende und strukturell miteinander verbundene Grundideen geprägt, die in enger Verbindung zu den allgemeinen Lernzielen stehen. Die fachlichen Gesetzmäßigkeiten bieten trotz der immanenten Vorgaben Spielräume für ein aktives Entdecken ihrer Zusammenhänge. Dabei ist eine fachliche Rahmung für alle Lernenden auf ihren je individuellen Lernstufen zentral, um „mathematische Strukturen nicht nur als „Gegen-stand“ zu sehen, die ihnen beim Lernen Widerstand entgegensetzen, sondern auch als effektive Lernhilfe“ (Wittmann, E. Ch., 2015, S. 201). Zeitgemäßer Mathematikunterricht will das mathematische Denken der Lernenden auf diese Weise fördern, sowohl in der Primar- als auch in der Sekundarstufe. Dabei steht die Unterstützung individueller konzeptueller Erkenntnisse sowie die Entwicklung mathematischen Denkens durch aktive und eigenständige Konstruktionen auf Seiten der Lernenden im Mittelpunkt (Schipper, 2009a, S. 33). Hilfreich erweisen sich dafür eine „Offenheit vom Fach“ aus (Wittmann, E. Ch., 1996) sowie eine „Offenheit mit Zielorientierung“ (Schipper, 2009a, S. 39), um Mathematik als „Wissenschaft der (flexiblen) Muster zu begreifen und weder als starres, undurchschaubares Regelwerk zu initiieren noch der Beliebigkeit preiszugeben“ (Korff, 2016b, S. 64)

Vor dem Hintergrund einer inklusionsspezifischen Sichtweise auf die dargestellten fachdidaktischen Perspektiven sowie die verfügbaren Ansätze und Materialien lässt sich an vielen Stellen noch eine zu starke Orientierung an (grund-)schulmathematischen Zielen, Inhalten und Schwierigkeiten kritisieren (Korff, 2016b, S. 80-81), die sich primär auf eine Adaption herkömmlicher mathematikdidaktischer Zugänge beschränken (Werner, 2019, S. 17). Werner (2019) spricht in diesem Zusammenhang von einem „derzeit vorherrschende[n] Primat der fachlich-kognitiven Zugänge“ (S. 138). Die bisherige mathematikdidaktische Forschung lässt den Einbezug der Lernprozesse wirklich aller Kinder vermissen, insbesondere in Bezug auf Sinnesbeeinträchtigungen, komplexe Behinderungen sowie der Berücksichtigung mathematischer Basiskompetenzen und sozio-ökonomischer Aspekte (Korff & Schulz, 2017, S. 119). Im inklusiven Mathematikunterricht findet noch zu häufig anstelle eines zeitgleichen, aktiv-entdeckenden Lernens ein paralleles Abarbeiten von eher kleinschrittigen Rechenprozeduren statt (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 59). Es gilt zukünftig, die uneingeschränkte Teilhabe für alle Lernenden in einem inklusiven Mathematikunterricht zu ermöglichen.

2.2.4 Inklusiv orientierte Didaktik

„Inklusiver Mathematikunterricht ist eine Herausforderung, die aus vielerlei Perspektiven betrachtet und angegangen werden kann“ (Häsel-Weide, 2017, S. 26). Die in dieser Studie verfolgte inklusive Unterrichtsplanung bezieht sowohl allgemeindidaktische, sonderpädagogische als auch spezifische fachdidaktische Fragen ein. Sie trägt somit zu der vielfach bemängelten noch ausstehenden Verbindung der Integrations- und Inklusionsforschung mit fachdidaktischen Forschungsansätze bei (Korff, 2012, S. 138; Riegert et al., 2017, S. 178). Die Verknüpfung der unterschiedlichen Perspektiven aus der Mathematikdidaktik und der Sonderpädagogik zu einem inklusiven Mathematikunterricht bietet aus Sicht der Autorin besonderes Potenzial für einen qualitativ hochwertigen Unterricht für alle Lernenden (vgl. auch Musenberg & Riegert, 2015, S. 24). Jede Perspektive einzeln betrachtet weist ein eher verkürztes Verständnis von inklusiv gedachter Didaktik und inklusivem Unterricht auf. Fachdidaktik und Sonderpädagogik werden im Kontext des inklusiven Diskurses nicht länger als ein Gegensatzpaar angesehen, vielmehr steht die gewinnbringende Annäherung zweier Professionen im Mittelpunkt, die „ein und dieselbe Situation aus jeweils unterschiedlicher Perspektive" (Werner, 2019, S. 149) betrachten. Die in dieser Arbeit verfolgte Perspektive fragt nach differenzierten Inhalten, deren fachdidaktischen und methodischen Aufbereitung sowie konzeptuellen Ansatzpunkten, um allen Schülerinnen und Schülern sowohl individuelle als auch gemeinsame Lernprozesse im Rahmen einer fachlichen und sozialen Partizipation im inklusiven Mathematikunterricht zu ermöglichen. Feuser hat bereits 1995 Wert darauf gelegt, dass eine inklusive Didaktik nicht als spezifische Didaktik, sondern als „gute allgemeine Didaktik" verstanden wird. Die in dem vorliegenden Kontext als inklusiv zu bezeichnende

> Allgemeine […] Pädagogik [bedarf, R.-F.K.] durch ihre Subjektorientierung und eine am jeweiligen Entwicklungsniveau eines Schülers ansetzende Praxis mit dem Ziel, durch Erziehung und mittels der Inhalte des Unterrichts die Entwicklung eines Kindes oder Schülers im Bereich der ‚Zone der nächsten Entwicklung' in kooperativen Prozessen voranzubringen, keiner bestimmten Schulformen oder –stufen. (Feuser, 1995, S. 213).

Auch Werning und Baumert (2013) sehen in Bezug auf die inklusive Unterrichtsforschung „keine Evidenz für eine spezielle inklusive Didaktik" (S. 41). Ziemen (2017) beschreibt inklusive Didaktik als "Allgemeine Didaktik, die Gültigkeit für alle Kinder und Jugendliche unabhängig von ihren Fähigkeiten, Kompetenzen und Entwicklungsmöglichkeiten beansprucht" [Hervorheb. im Original] (S.107). "Practical pedagogies for those with special educational needs might look different from dominant mainstream pedagogies, but these are differences […] at the level of concrete programs, materials and perhaps settings. They are not differences in the principles of curriculum design and pedagogy strategy" (Lewis & Norwich, 2005, S. 220). Rehle (2009) verschärft diese Grundannahme, indem sie provokativ formuliert:

„Eine „inklusive“ Didaktik an sich existiert nicht“ (S. 183). Einen Überblick über verschiedene Positionen innerhalb des gegenwärtigen Inklusionsdiskurses liefern Kiel et al. (2014).

Inklusiver (Mathematik-)Unterricht soll vor diesem Hintergrund „normaler Unterricht“ sein. Zugleich ist er aber auch „besonders“ (Pool Maag & Moser Opitz, 2014, S. 134), weil es nicht ausreichend ist, übliche Formen der inneren Differenzierung konsequenter umzusetzen als bisher. Eine im Rahmen der vorliegenden Arbeit beschriebene inklusiv orientierte Didaktik lässt sich als eine Didaktik verstehen, die spezifische Traditionen gezielt aufgreift und verstärkt die Verbindung von Fachdidaktik und Sonderpädagogik in den Fokus ihrer Aufmerksamkeit stellt. Dabei wird das von Korff herausgearbeitete Verständnis inklusiv orientierter Allgemeiner Didaktik zugrunde gelegt. Im Mittelpunkt steht die Frage danach, wie unterstützt werden kann, dass „alle Lernenden alles für sie an dem jeweiligen Gegenstand Wichtige lernen können“ (2016b, S. 37). In diesem Zusammenhang spielt auch das jeweilige Verhältnis von Gemeinsamkeit und Verschiedenheit eine zentrale Rolle, das sich aus einer engen Verknüpfung der didaktischen Kernfrage mit Fragen nach geeigneten Methoden konstituiert. „Diese [Verbindung des Blicks auf einzelne Kinder, die gesamte Lerngruppe und den Inhalte, R.-F.K.] sucht nicht einfach nach einer Balance zwischen individuellen Zugängen und Gemeinsamkeit, sondern begreift beide Aspekte als wechselseitig aufeinander bezogen“ (Korff, 2016a, S. 38).

Die Ausführungen aus fachdidaktischer Perspektive verdeutlichen, dass Inklusion „demnach nicht nur ein Thema der Sonderpädagogik“ (Jenessen & Wagner, 2012, S. 336) ist. Gleichzeitig kann inklusiver Mathematikunterricht nicht losgelöst von zentralen Aspekten der Sonderpädagogik betrachtet und verwirklicht werden, „weil Sonderpädagogik schon immer die möglichst effektive Förderung eines jeden einzelnen Kindes angestrebt hat, egal wie gut oder schlecht die Lernvoraussetzungen entwickelt waren“ (Wember, 2001, S. 166). Um das Ziel der inklusiven Bildung erreichen zu können, gilt es, „die sonderpädagogische Förderung nach Absicherung von hochwertigen inklusiven Angeboten systematisch in die allgemeine Schule zu verlagern und gesonderte Strukturen der Förderung schrittweise auslaufen zu lassen“ (Mißling & Ückert, 2014, S. 6). Selektierende und separierende Strukturen müssen abgebaut werden, sodass sonderpädagogische Förderung implizit im inklusiven Unterricht stattfindet und eine zentrale konstitutive Komponente inklusiven Unterrichts darstellt. Es ist nicht ausreichend, lediglich die sonderpädagogische Förderung in den inklusiven Unterricht zu integrieren, sondern es geht vielmehr darum, „die individuelle Verschiedenheit der Lernenden zum

Ausgangspunkt für die Unterrichtsgestaltung zu machen“ (Vom Hofe & Tiedemann, 2017, S. 3). Dabei sollen sonderpädagogische bzw. förderschwerpunktspezifische Unterstützungsmaßnahmen als förderliche, den Unterricht begleitende, adaptive Maßnahmen verstanden werden, die eine Teilhabe am Unterricht sichern (Werner, 2019, S. 15). Ebenso zeigen die dargelegten inklusionsdidaktischen Erläuterungen „eine interessante Nähe […] zu aktuellen fachdidaktischen Konzeptionen, in denen ebenfalls die Wertschätzung vielfältiger Herangehensweisen und der Austausch unterschiedlicher Lerner_innen in offenen und herausfordernden Situationen im Fokus stehen“ (Korff, 2012, S. 141).

Inklusive Didaktik setzt sich mit grundlegenden Fragen von Lern- und Lehrprozessen auseinander, die darauf ausgerichtet sind, die elementare Heterogenität der Lernenden wertzuschätzen und für individuelle und gemeinsame Lernprozesse nutzbar zu machen. Die bereits ausführlich beschriebene Heterogenität einer Lerngruppe anzuerkennen, gilt als Grundbedingung des Lehrens und Lernens in inklusiven Klassen. Dahinter steht die Grundüberzeugung, dass „jedes Kind individuell spezifisch lernfähig“ (Rehle, 2009, S. 183) ist. Korff (2016b, S. 53) hebt diesbezüglich zwei zentrale Herausforderungen hervor, die für die weitere Entwicklung inklusiver didaktischer Konzeptionen relevant sind: Der Einbezug aller Schülerinnen und Schüler, d.h. es bedarf einer angemessenen Berücksichtigung aller Lernausganslagen sowie Lern- und Entwicklungsbedürfnisse. Dabei sollte diese elementare Vielfalt der Lernenden als Potenzial für das Lernen einzelner Kinder aber auch der gesamten Lerngruppe im Rahmen eines (ziel-)differenten mit- und voneinander Lernens anerkannt und genutzt werden. Inklusive Didaktik, die auf dieser Annahme beruht, erfordert einen ganzheitlichen Zugang zu unterrichtlichen Inhalten mit spezifischen Unterstützungsmaßnahmen für alle Kinder. Es gilt, die fachdidaktischen Ansprüche in Beziehung zu den individuellen Bildungsbedarfen, Lernausgangslagen sowie Lernbedingungen der Schülerinnen und Schüler zu setzen (Werner, 2019).

Heß und Nührenbörger (2017, S. 275) erachten (inklusiven) Fachunterricht stets als „förderndder[n] Unterricht, denn er unterliegt der Prämisse der „individuellen Förderung“: Jedes Kind soll mit seinen individuellen Stärken und Schwierigkeiten, spezifischen Begabungen und Unterstützungsbereichen beachtet, wertgeschätzt und fachlich gefördert werden“. Inklusiver Mathematikunterricht erfordert eine gewisse Offenheit auf verschiedenen Ebenen: für das unterschiedliche Denken der Kinder, für divergente Vorgehensweisen und Lerntempi, bezüglich Organisation und Methodik und durchaus auch bezüglich der Auswahl der Lerninhalte. Diese Offenheit „kann durch die fachliche und fachdidaktisch begründete Auswahl von Lerninhalten und Arbeitsmitteln sowie durch eine geeignete Lernbegleitung erfolgen“ (Krähenmann, Labhart, Schnepel, Stöckli & Moser Opitz, 2015, S. 55). Dabei bedarf es nicht der Bearbeitung prinzipiell anderer Inhalte, sondern einer Konzentration auf die zentralen, an der fundamentalen Idee orientierten Inhalte auf unterschiedlichen Niveaus (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 13; vgl. Kap. 2.3.1). Dies setzt sowohl eine Individualisierung als auch eine Flexibilisierung des Lernens voraus, die bisher verstärkt in der Reformpädagogik und Sonderpädagogik denkbar erschien (Lindmeier, B., 2017, S. 54). Ein inklusiver Mathematikunterricht steht demnach vor der Aufgabe, die fachdidaktischen Ansprüche mit den je individuellen Bildungsansprüchen, den variierenden Lernausgangslagen und den heterogenen Lernmöglichkeiten zu verbinden (Werner, 2017b, S. 212).

> Dabei ist es hilfreich, aber nicht ausreichend, sich an den aus der Reformpädagogik stammenden Prinzipien zu orientieren. Denn es gilt darüber hinaus zu berücksichtigen, wie bestimmte fachbezogene Inhalte und Kompetenzen - insbesondere im inklusiven Sekundarbereich - für alle Schülerinnen und Schüler erfahrbar oder generierbar werden. (Musenberg & Riegert, 2015, S. 23)

Inklusiver Unterricht, der als gemeinsamer Unterricht verstanden wird, verfolgt in Bezug auf die schulische Leistungsentwicklung die Annahme, dass „es sinnvoll ist, alle Lernenden – auch die mit Lernschwierigkeiten und Funktionseinschränkungen – mit den anspruchsvollen inhaltlichen Erwartungen des allgemein bildenden Curriculums zu konfrontieren, um Unterforderung zu vermeiden und um Anschlussfähigkeit zu erhalten“ (Wember, 2013, S. 385). Jener Unterricht zielt darauf ab, „die optimale ‚Förderung‘ jedes einzelnen Kindes zu gewährleisten und dabei die Vielfalt der Lerngruppe zu wertschätzen, wobei diese zugleich als Ressource für das Lernen der_des Einzelnen genutzt werden soll“ (Korff, 2016b, S. 1). Seitz und Scheidt (2012) sprechen in diesem Zusammenhang von einer „Didaktik der Potenzialität“ (ohne Paginierung), was bedeutet, dass ein inklusiver Unterricht alle Leistungen berücksichtigt, die der Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten gleichermaßen wie die der Lernenden mit (besonderen) Potentialen. Darüber hinaus sollen „individuelle Lernfortschritte und subjektiv sinnvolle Teilhabe an gemeinschaftlich erlebten Unterrichtsangeboten“ (Musenberg & Riegert, 2015, S. 24) ermöglicht werden.

Beide hier beschriebenen Disziplinen stellen ihre immanenten Prinzipien bereit, die für die Entwicklung inklusiver Lernangebote essentiell sind und das gemeinsame und individuelle Lernen von Kindern in äußerst heterogenen Kontexten sicherstellen sollen. Um aus beiden Ansätzen möglichst umfangreiche und zielführende Synergieeffekte gewinnen zu können, ist es von besonderer Relevanz, die in beiden Disziplinen vorzufindenden Beschränkungen (Aufnahme fachdidaktischer Konzeptionen mit massiver Verzögerung in sonderpädagogischen Diskursen sowie eine zu starke Orientierung der fachdidaktischen Entwicklungen an (regel-) schulmathematischen Inhalten (Korff, 2016b, S. 80)) zu überwinden und die fachwissenschaftliche und fachdidaktische Fundierung auf das Engste mit zentralen Aspekten der sonderpädagogischen Unterstützung zu verknüpfen. Die mathematikdidaktischen Erkenntnisse zum Umgang mit Heterogenität sollten mit sonderpädagogischen Leitlinien zur sozialen und fachlichen Partizipation an gemeinsamen Lernprozessen verbunden werden. Das bedeutet, dass fachliche und sonderpädagogische Förderung parallel und wechselseitig aufeinander bezogen stattfinden, um mögliche Lern- und Verständnisschwierigkeiten, die sich im fachlichen Unterricht ergeben, unmittelbar aufgreifen und bearbeiten zu können. Die Verbindung stoffdidaktischer und sonderpädagogischer Aspekte scheint überaus förderlich für die Zielsetzung des inklusiven Mathematikunterrichts, „da das Denken der Lernenden in seiner Vielfalt im fachdidaktischen Entwicklungsprozess eine zentrale Rolle spielt“ (Korff, 2016a, S. 27). Durch die in der vorliegenden Arbeit auf Engste vollzogene Verbindung zwischen einer fachlich fachdidaktischen und sonderpädagogischen Förderung entsteht das Potenzial „zu einer wechselseitigen Bereicherung und Vertiefung der bislang getrennt voneinander entwickelten Fachlichkeit“ (Musenberg & Riegert, 2015, S. 25). Eine inklusiv orientierte Didaktik, die den hier genannten Ansprüchen folgt, macht einen Perspektivenwechsel erforderlich, der nicht länger nach Lernschwierigkeiten fragt, die ein Kind „hat“, sondern der die Lern- und Entwicklungsbarrieren des Unterrichts auf fachlicher und methodischer Ebene hinterfragt (Seitz & Scheidt, 2012, ohne Paginierung). Der Blick wird gelöst von der personenbezogenen Betrachtung einzelner Kinder und dadurch geöffnet für die Gestaltungs- und Handlungsmöglichkeiten im Unterricht.

Trotz aller aktuellen Bemühungen, die Entwicklung inklusiven Unterrichts voranzutreiben, bleibt zu berücksichtigen, dass Vieles „bei der inklusiven Didaktik gegenwärtig ohne Zweifel noch Postulat und stark normativ bestimmt“ (Heimlich, 2016, S. 77) sei. Die

Zusammenführung der Erkenntnisse zur Unterrichtsentwicklung und -gestaltung aus sonderpädagogisch geprägter Integrations- und Inklusionsforschung mit Erkenntnissen der Mathematikdidaktik zeigen zwar wie dargestellt keine durchgängige Deckungsgleichheit, dafür aber unmittelbare Parallelen und vielversprechende Anknüpfungspunkte auf. Das bedeutet aber auch, dass sich beide Disziplinen sehr differenziert mit der gegenwärtigen Lehr- und Lernsituation in inklusiven Klassen auseinandersetzen und eventuell neu auszurichten haben. Trotz aller Annäherung und Verbindung kommt es in gewisser Weise zugleich darauf an, dass „beide Seiten, Fachdidaktik und Sonderpädagogik, ihren [je, R.-F. K.] spezifischen Blickwinkel beibehalten" (Musenberg & Riegert, 2015, S. 24).

2.2.5 Aktuelle Forschungsergebnisse im Überblick

Nach Heimlich (2014) handelt es sich bei didaktischen Ansätzen und Unterrichtskonzeptionen für inklusive Bildung nach wie vor um eine „konzeptionelle[n] Suchbewegung" (S. 4). Moser Opitz (2014) hebt hervor, dass die überschaubaren vorliegenden Studien vorwiegend aus dem englischsprachigen Raum stammen und das in Deutschland gegenwärtig beklagte Fehlen empirischer Untersuchungen von didaktischen Konzeptionen u.a. auf die für die Entwicklung der Inklusionspädagogik wichtige Sonderpädagogik zurückzuführen sei, die sich in den letzten Jahren „nur vereinzelt mit Unterrichtsforschung" (Moser Opitz, 2014, S. 53) auseinandergesetzt hat. Eine evidenzbasierte, inklusive Didaktik ist in Deutschland gegenwärtig erst im Entstehen (Amrhein & Reich, 2014, S. 32).

Hinsichtlich einer Verknüpfung sonderpädagogischer und fachdidaktischer Aspekte lassen sich vorrangig Überlegungen für den Primarstufenbereich finden (Werner, 2019, S. 16). „Weniger erforscht und ausdifferenziert ist eine sonderpädagogische Fachdidaktik im Sekundarbereich I" (Werner, 2017b, S. 213). Die zentrale Frage nach einer zielführenden Verknüpfung fachdidaktischer und sonderpädagogischer Expertise wurde für die Gestaltung differenzierter Lernangebote „bislang […] empirisch wenig untersucht" (Riegert et al., 2017, S. 178). Seitz hebt die Notwendigkeit interdisziplinär angelegter Forschungsdesigns hervor, die sonderpädagogische, „allgemeindidaktische und fachdidaktische Überlegungen im Hinblick auf die Didaktik einer inklusiven Schule zusammenbringen" (Seitz, 2008, S. 232). Eine Beschreibung inhaltlicher und konkreter Aspekte für eine inklusiv orientierte Didaktik „erfolgt jedoch nur in Ansätzen und ist ein konzeptionelles Desiderat, das es zu schließen gilt“ (Melzer, Meyer, Ehlscheid & Schlicht, 2016, S. 192). Moser Opitz (2018) sieht vieles in bereits vorhandenen Ansätzen inklusiver Fachdidaktik nach wie vor als ein „Postulat“ (S. 230). Damit geht für sie ein großer Entwicklungsbedarf hinsichtlich einer inklusiven Fachdidaktik einher, „die ein *Differenzierungsangebot für alle Schüler*innen* macht, *spezifische Förderangebote* sowie das Lernen am *gemeinsamen Gegenstand* berücksichtigt“ [Hervorheb. im Original] (S. 230). Auch Heinrich, Urban und Werning (2013) bemängeln das Fehlen fundierter Forschungsergebnisse über „die Modalitäten und Bedingungen der Verknüpfungen von fachlichem, fachdidaktischem und sonderpädagogischem Wissen für die Planung und Umsetzung eines qualitativ hochwertigen Unterrichts in inklusiven Lerngruppen“ (S. 85). Nach Korff (2012) stellt die „*inhaltliche* Dimension der *Gemeinsamkeit in der Vielfalt* […] das noch unzureichend bearbeitete Kernelement inklusiver Didaktik dar“ [Hervorheb. im Original] (Korff, 2012, S. 138) und zeigt gleichzeitig den „erheblicher[n] Bedarf an fachdidaktisch fundierten inklusivdidaktischen Entwicklungen“ (Korff, 2012, S. 153) auf. Zwar werden in vorliegenden konzeptuellen Arbeiten unterschiedliche Heterogenitätsebenen und Differenzlinien berücksichtig, jedoch fehlen darüber hinaus auch eng verknüpfte Kooperationen zwischen der sonderpädagogischen Disziplin und der Mathematikdidaktik, die über den Förderschwerpunkt Lernen hinausgehen (Lütje-Klose & Miller, 2015) und basale Unterstützungsbedarfe berücksichtigen.

Trotz des gegenwärtig bestehenden großen Forschungsdesiderats liegen in der jüngsten Vergangenheit erste interdisziplinär angelegte Forschungsarbeiten vor, die sich mit fach- sowie inklusionsdidaktischen Fragestellungen auseinandersetzen und erste Konkretisierungen für lernbereichsspezifische Ansatzpunkte für den inklusiven Fachunterricht erarbeiten. Für den Kontext der vorliegenden Arbeit sei an dieser Stelle die Forschungsarbeit von Korff (2012, 2016b) für die inklusive Mathematikdidaktik im Grundschulbereich hervorgehoben. Die Kernelemente aus der Grundschuldidaktik werden im Folgenden auf den frühen Sekundarstufen I Bereich übertragen (vgl. Krauthausen, 2018) und falls erforderlich erweitert. Aber auch das von Seitz (2005) entwickelte Konzept für den inklusiven Sachunterricht liefert erste vielversprechende Ansätze für die inklusive Unterrichtsentwicklung. Werner (2019) bemängelt jedoch, dass die bisherigen Überlegungen noch keine „fundierte, empirisch abgesicherte Theoriebildung für eine inklusive Fachdidaktik“ darstellen (S. 14).

In Anbetracht des in Kapitel 2.3.4 dargelegten grundsätzlich positiven Potentials inklusiven Unterrichts für alle Schülerinnen und Schüler erscheint eine kritische Auseinandersetzung mit spezifischen lern- und entwicklungsförderlichen Bedingungen in der schulischen Praxis als unerlässlich. „So ist davon auszugehen, dass schulische Inklusion die Chance auf tatsächliche Verwirklichung nur hat, wenn mit und für die schulische Praxis theoretisch fundierte und praktikable Antworten auf Fragen der Unterrichtsinhalte und Unterrichtsmethoden entwickelt werden“ (Jenessen & Wagner, 2012, S. 339).

Mit der vorliegenden Arbeit wird das Ziel verfolgt, anhand eines praxisnahen Unterrichtsversuchs das Potenzial einer engen wechselseitigen Verknüpfung zwischen fachlich und fachdidaktisch fundierter und sonderpädagogisch orientierter Förderung aufzuzeigen. Innerhalb eines exemplarischen Inhaltsbereichs wird der Blick einerseits auf fachliche, anderseits auf fachdidaktische bzw. methodische Schwerpunkte gelegt, die als zentrale Gestaltungsprinzipien inklusiven Unterrichts mögliche Lern- und Entwicklungsbarrieren überwinden sollen.

2.3 Gemeinsames Lernen von Mathematik in inklusiven Klassen

Die bisherigen Ausführungen zu den Entwicklungen, Grundzügen und Herausforderungen inklusiver Didaktik im Allgemeinen werden als Annäherung an die Entwicklung einer inklusiv orientierten Mathematikdidaktik verstanden und stellen die Grundlage dar, um sowohl sonderpädagogische, mathematik- als auch inklusionsdidaktische Anforderungen an einen inklusiven Mathematikunterricht zu formulieren. Es ist deutlich geworden, dass eine inklusive Schule nicht die Platzierung von Lernenden mit Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung in den Mittelpunkt stellt, sondern vielmehr die Entwicklung inklusiver Schul- und Unterrichtsstrukturen fordert (u.a. Ainscow et al., 2006; Löser & Werning, 2013). Im Fokus dieses Kapitels stehen inklusionsrelevante Aspekte und konzeptionelle Grundlagen eines guten (inklusiven) Mathematikunterrichts. Vor dem Hintergrund der in Kapitel 2.2.4 entwickelten Gedanken zu einer inklusiv orientierten Didaktik werden Ansätze der Integrativen Didaktik mit zentralen mathematikdidaktischen und sonderpädagogischen Prinzipien verknüpft. Das Ziel soll sein, dass möglichst alle Lernenden von einem inklusiven Mathematikunterricht profitieren und individuelle Lernfortschritte machen können.

Die nachfolgenden Darlegungen entstammen zwar in erster Line dem primarstufenbezogenen Diskurs inklusiver (Fach-)Didaktik, aber es wird angenommen, dass diesen auch für den Sekundarstufenbereich grundlegende Gültigkeit zukommt (Korff, 2016b, S. 58). Zunächst werden wesentliche mathematikdidaktische Leitideen dargestellt, die für den Kontext der vorliegenden Forschungsarbeit relevant sind. Auf dieser Grundlage erfolgt eine Spezifizierung von Merkmalen guten inklusiven Mathematikunterrichts, denn die „Zielperspektive schulischer Inklusion ist nicht zuletzt mit grundlegenden didaktischen bzw. fachdidaktischen Fragen verknüpft, die die Planung und Gestaltung von Lernumgebungen in inklusiven Settings betreffen“ (Riegert et al., 2017, S. 177). Daraufhin werden Planungsschritte für eine differenzsensible Unterrichtsplanung konkretisiert. Dabei steht nicht die Absicht im Vordergrund, einfach zu übertragende „pädagogische Fertigware zu liefern, die auch dann nicht individuell ist, wenn sie in Form von Differenzierungsvorschlägen einzeln verpackt wird“ (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 161). Vielmehr geht es im Folgenden darum, wissenschaftlich fundierte Bausteine und erfolgsversprechende Ansätze qualitativ hochwertigen (inklusiven) Unterrichts aufzuzeigen, die hohes Potenzial für die inklusive Unterrichtsgestaltung einnehmen und als „Ausgangspunkt für Reflexions- und Entwicklungsprozesse“ (Arndt, A.-K., Stenger & Werning, 2014, S. 8) angesehen werden können. Inklusion wird dabei nicht als ein fester Zustand angesehen, sondern als fortlaufender dynamischer Prozess, den es auf den verschiedenen Ebenen kontinuierlich auszugestalten gilt. Mit den Worten Ainscows (2010) formuliert: „inclusion has to be seen as a never-ending search to find better ways of responding to diversity“ (S. 9). Darüber hinaus gilt es zu berücksichtigen, dass erfolgreicher (inklusiver) Mathematikunterricht von vielfältigen Faktoren und deren gelingenden Interaktionen abhängig ist, wie bspw. der Wechselbeziehung zwischen den Lernenden und der Lehrkraft sowie zwischen methodischen, didaktischen und Lerngegenstandsspezifischen Aspekten (Freesemann, 2014, S. 16).

2.3.1 Didaktische Leitideen

Die im Folgenden formulierten didaktischen Leitideen stellen „den "Kern der Unterrichtsvorbereitung" dar. Sie sind Bezugspunkt der Planung, Durchführung, Kontrolle und Revision fortlaufender Unterrichtsprozesse“ (Feuser, 1998, S. 19). Sie gelten als elementare pädagogisch und wissenschaftlich begründete Handlungsorientierungen für das Unterrichtsfach Mathematik, die auf normativen Vorstellungen und kausalen Zusammenhängen basieren.

Theoretisch-deduktiv oder empirisch induktiv gewonnen (Wember, 2016a, S. 93) nehmen didaktische Leitideen als Ansatzpunkte für die Gestaltung und Beurteilung von Unterricht eine Vermittlerrolle zwischen theoretischer Wissenschaft und praktischer Pädagogik ein. Es besteht eine Interdependenz zwischen normativen Zielsetzungen der Mathematikdidaktik und empirisch spezifizierten Merkmalen guten Mathematikunterrichts aus Sicht der empirischen Unterrichtsforschung (Freesemann, 2014, S. 18-19). Inhaltsunabhängig formuliert gelten sie als „durchgängige Leitideen des Lernens und Lehrens“ (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 132). Für den Mathematikunterricht stellt jedoch ihre inhaltsverbundene Anwendung eine zentrale Voraussetzung dar (Scherer & Weigand, 2017, S. 40). Aufgrund der immanenten Multivalenz und Kontextabhängigkeit sollen die didaktischen Leitideen in der praktischen Arbeit als richtungsweisende Orientierungspunkte gelten, ohne dabei Anspruch auf Allgemeingültigkeit zu erheben (Wember, 2016a, S. 93). Bei der Anwendung dieser Prinzipien gilt es stets die „Wechselbeziehung zu Zielen, Wissen und Können der Lernenden zu beurteilen“ (Scherer & Weigand, 2017, S. 28), sowie mögliche Wechselwirkungen und Konflikte zu anderen Prinzipien zu berücksichtigen. Grundsätzlich stellt die wechselseitige Abhängigkeit der Prinzipien nach Wember (1988) keinen Nachteil dar. Vielmehr sind sie „Ausdruck einer Grundkonzeption, die schulisches Lernen als praxisorientiertes, aktives, oft konkret-handelndes, selbstentdeckendes Lösen von bedeutungsvollen Problemen in sozialen Handlungsbezügen“ (Wember, 1988, S. 162) versteht und jede dieser Leitideen hebt einen zentralen Aspekt dieser Grundkonzeption hervor. „Im Unterrichtsablauf kommt es immer wieder zu Situationen, in denen sich verschiedene Prinzipien entgegenstehen, obwohl jedes Prinzip, für sich betrachtet, >richtig< ist. Es ist dann der Urteilsfähigkeit des Lehrers überlassen, welchem Prinzip er in der jeweiligen Situation den Vorrang geben muss“ (Oehl, 1965, S. 42). Um den Mathematikunterricht inhaltlich zielgerichtet gestalten und die Prinzipien zieladäquat einsetzen zu können, bedarf es auf Seiten der Lehrkräfte eines umfassenden mathematischen, pädagogischen und auch psychologischen Wissens (Scherer & Weigand, 2017, S. 41). Berücksichtigt werden muss allerdings, dass die Auswahl geeigneter didaktischer Leitideen nicht unabhängig von den pädagogischen Zielen getroffen werden kann und die Wahl des didaktischen Mittels bereits im Vorfeld mögliche Ziele auf Unterrichtsebene präjudiziert (Wember, 2015, S. 468).

Die fachdidaktische Literatur liefert verschiedene Ausführungen zu didaktischen Prinzipien und Leitideen (u.a. Müller, G. N. & Wittmann, 1984; Wittmann, E. Ch., 1981). Die in der nachfolgenden Übersicht (Abb. 3) dargestellten und im weiteren Verlauf skizzierten mathematikdidaktischen Leitideen bilden den didaktischen Rahmen für das vorliegende Forschungsprojekt und sind feste Bestandteile für die Entwicklung und Durchführung der Unterrichts- und Förderkonzeption. Die in Kapitel 2.3.2 spezifizierten Konkretisierungen für einen inklusiven Mathematikunterricht bauen auf diese didaktischen Leitideen auf.

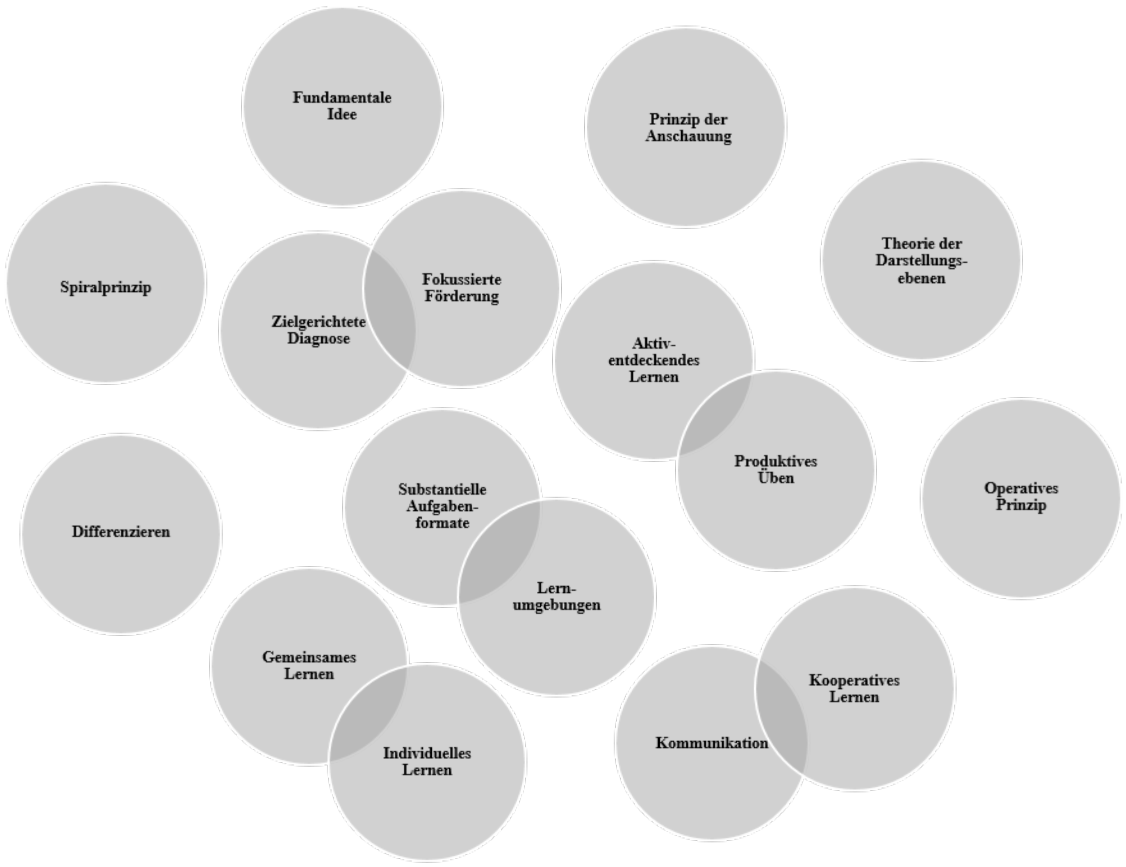


Abbildung 3: Mathematikdidaktische Leitideen (eigene Darstellung)

Die sogenannte *fundamentale Idee*, die zu der Bestimmung einer geeigneten und begrenzten Auswahl an Lerninhalten eines Unterrichtsfaches dient, wird 1960 erstmals von dem amerikanischen Entwicklungs- und Kognitionspsychologen Jerome Bruner (1915-2016) erörtert. Bruner hebt die tragenden Ideen der wissenschaftlichen Disziplin eines jeden Schulfaches hervor, die im Unterricht vermittelt werden sollen. Damit stellt er die Struktur der Unterrichtsfächer in den Mittelpunkt, weniger deren Fakten. Allgemeindidaktisch formuliert sollen fundamentale Ideen eines Faches zu dessen besserem Verständnis beitragen und den Fokus auf zusammenhängende Gesamtkonzepte richten. Sie stellen gleichermaßen einen Ausgangspunkt dar, um geeignete Gegenstände für das gemeinsame Lernen festzulegen. Bei der fundamentalen Idee geht es um die Auswahl von Inhalten, die über die Jahrgangsgrenzen hinaus fortlaufend Beachtung finden sollen und die „das Denken in einer Weise schulen, die sich auch in der Zukunft als tragfähig erweisen wird" (Rezat, 2013, S. 814). Durch Fokussierung auf die fundamentalen Ideen eines mathematischen Inhalts ergeben sich die inhaltlichen Bereiche,

> die für alle Lernenden für die mathematische Entwicklung grundlegend sind sowie aufeinander aufbauend immer wiederkehrend von unterschiedlichen Niveaus aus vom einzelnen Kind erkundet und weiterführend verstanden werden können. Darüber hinaus eröffnen sie auch inhaltlichen Raum für fakultative Vertiefungen für einzelne Kinder, die die Arbeit am gemeinsamen Kerninhalt ergänzen. (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 13)

Nach Winter (2001) lassen sich fundamentale Ideen wie Magnetfelder beschreiben: Sie helfen dabei, die inhaltliche Vielfalt des Faches zu strukturieren und übersichtlich zu ordnen. Es handelt sich jedoch nicht um klar abgrenzbare Bereiche, sondern es gilt immer wieder fundiert zu ergründen, welche Inhaltsbereiche von besonderer Relevanz sind, um „den strukturellen Kern der Mathematik zu erschließen" (Winter, 2001, S. 1). Die Orientierung an den fundamentalen Ideen der Mathematikdidaktik begünstigt somit die Auswahl von Inhalten, die für alle Lernenden relevant sind (Häsel-Weide, 2017, S. 21) und als „unverzichtbares Gerüst des Mathematikunterrichts" (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 134) gelten. Sie hilft, zu elementarisieren, ohne dabei die immanente Besonderheit sowie den fachlichen Anspruch zu verlieren (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 50). Das bedeutet, dass inklusiver Mathematikunterricht nicht „zu einem Mehr an Inhalten, sondern zu einer Konzentration auf Wesentliches" (Häsel-Weide, 2015, S. 4) führt. Durch Fokussierung auf die mathematische Substanz wird ermöglicht, dass alle Kinder auf unterschiedliche Weise am selben Lerngegenstand arbeiten können (Selter, 2006, S. 142), denn das „Wesen einer fundamentalen Idee ist, dass sie auf verschiedenen Niveaus aufzeig- und vermittelbar ist" (Häsel-Weide, 2016a, S. 12). Dadurch nimmt die Orientierung an den fundamentalen Ideen für den inklusiven Mathematikunterricht einen besonderen Stellenwert ein. Die verständige Einsicht in grundlegende mathematische Strukturen bildet die Basis für eine weiterführende, spezifizierende Automatisierung der Inhalte, „ohne dass hohe Anforderungen an die Gedächtnisleistung gestellt werden“ (Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich, 2014, S. 33).

Das Verständnis der fundmentalen Ideen ist von elementarer Bedeutung für das Mathematiklernen, das durch eine enge Verknüpfung der mathematischen Inhalte, Tätigkeiten und fachtypischen Einstellungen gekennzeichnet ist. „Fundamentale Ideen sollten daher die Vernetzungen zwischen Inhalten, deren Repräsentationen, Aktivitäten mit und über Inhalte, deren historischer Genese und der Person des Mathematiktreibenden erkennen lassen“ (Werner, 2019, S. 36). Die ausgewählten Inhalte stellen aber auch kritische Stellen in der mathematischen Lernentwicklung dar und bedürfen besonderer Beachtung. Als zentrale voraussetzungsvolle Ankerpunkte für die mathematische Lernentwicklung hat ihr Nichtverstehen weitreichende Folgen (Meyerhöfer, 2011, S. 411). Korff (2016b) gibt allerdings zu bedenken: „Selbst an einem gemeinsamen Gegenstand oder einem Kern der Sache lernen niemals alle Lernenden das Gleiche, sondern vielmehr jeweils das für sie Relevante“ (S. 54). Für den inklusiven Mathematikunterricht gilt es, „die Grundideen derart aufzufächern, dass sie jedem Kind zugänglich sind“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017a, S. 13). Folglich ist es unerlässlich, einen inhaltsbezogenen Fokus sowohl bei der Planung und Durchführung, als auch bei der Evaluation inklusiven Unterrichts zu setzen, um das volle Potential des von- und miteinander Lernens nutzen zu können (Korff, 2012, S. 153).

Die nachfolgend abgebildeten Grundideen dienen als fachlich-strukturierendes Konzept für eine systematische Gliederung der Inhalte des Unterrichtsfachs Mathematik und stellen eine wesentliche Leitidee der Mathematikdidaktik dar. Auf die Darstellung ihrer Entwicklung sowie einer umfangreichen Erläuterung der zum Teil übereinstimmenden, zum Teil unterschiedlichen Ausführungen verschiedener Autoren wird an dieser Stelle verzichtet (vgl. u.a. Winter, 2001; Wittmann, E. Ch., 1998b). Eine konsensuale Übereinstimmung über klar abgrenzbare Charakteristika fundamentaler Ideen steht gegenwärtig noch aus (Werner, 2019, S. 24).

Hans Werner Heymann legte 1996 einen Katalog fundamentaler Ideen vor, der spätere Grundlage für die KMK-Standards sein sollte. Zentrale Inhaltsbereiche stellen nach Heymann die Idee der Zahl, die Idee des Messens, die Idee des räumlichen Strukturierens, die Idee des funktionalen Zusammenhangs, die Idee des Algorithmus sowie die Idee des mathematischen

Modellierens dar. Diese werden von den KMK-Standards weitestgehend übereinstimmend für den Primarbereich, die Sekundarstufe I sowie die Oberstufe aufgegriffen und anhand allgemeiner Kompetenzen und Leitideen sowie inhaltsbezogener Kompetenzen für den schulischen Mathematikunterricht konkretisiert. Die Leitideen der Bildungsstandards sollen die inhaltsbezogenen mit den prozessbezogenen Kompetenzen „zu einem stimmigen Gesamtkonstrukt vernetzen" (Werner, 2019, S. 24). Beide Kompetenzbereiche sind sowohl in der Planung und Durchführung als auch in der Reflektion von Unterricht untrennbar und gleichermaßen zu berücksichtigen.

Das *Spiralprinzip* gilt als unumstrittene Grundlage für die Planung des Mathematikunterrichts (Büchter, 2014, S. 3). Es geht auf den amerikanischen Entwicklungs- und Kognitionspsychologen Jerome Bruner zurück. Dieser legt die Hypothese zugrunde, jedem Kind könne jeder Lehrgegenstand auf jeder Entwicklungsstufe „in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden" (Bruner, 1970, S. 44). Als intellektuell ehrlich erachtet Bruner die Elementarisierung eines grundlegenden Lerngegenstands im Sinne einer Vereinfachung, nicht jedoch einer Verfälschung des Inhalts. Das sogenannte Spiralprinzip berücksichtigt systematisch den innermathematischen hierarchischen Aufbau des Faches, der insbesondere für den zentralen Lernbereich der Arithmetik eine Besonderheit darstellt (Selter, 2006, S. 142). Ein Lerngegenstand wird auf verschiedenen Entwicklungsstufen im Verlauf des schulischen Mathematikunterrichts immer wieder aufgriffen und mit steigendem Niveau vertieft und weiter ausgebaut (Lauter, 1997, S. 24). Es findet eine den jeweiligen Leistungs- und Entwicklungsständen angemessene Unterteilung in Teilprobleme statt, die ein sukzessives Erfassen und Erlernen verschiedener inhaltlicher Strukturen ermöglichen. Dabei wird wiederholend und festigend an bereits vorhandene Vorstellungen und Erfahrungen angeknüpft, um diese dann entsprechend der jeweiligen Möglichkeiten fortsetzen, vertiefen, differenzieren und zunehmend abstrahieren zu können. „Ein solcher fundamentaler Lernprozess muss paradoxerweise auf der einen Seite an das alte Wissen gebunden bleiben, dieses auf der anderen Seite aber zugleich systematisch überschreiten" (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2010, S. 74).

Sukzessives und kontinuierliches Erlernen eines Gegenstands unter zunehmenden kognitiven und sprachlichen Anforderungen ermöglicht eine nachhaltige und tragfähige Lernentwicklung. Dies setzt voraus, dass „hierarchische Strukturen von jedem Kind von unten nach oben durchlaufen werden. [….] Dass die Auseinandersetzung mit den Inhalten auf individuellen

Wegen erfolgt, ist überhaupt kein Widerspruch zu deren grundsätzlich hierarchischer Struktur“ (Müller, G. N. & Wittmann, o.J., S. 5). Die inhaltliche Vernetzung über die Schuljahre hinweg muss für die Lernenden bewusst gestaltet und in der konkreten Auseinandersetzung erfahrbar gemacht werden. „Mit dem Fortschreiten auf der „Spirale“ werden anfangs intuitive, ganzheitliche, undifferenzierte Vorstellungen zunehmend von formaleren, deutlicher strukturierten, analytisch durchdrungenen Kenntnissen überlagert“ (Müller, G. N. & Wittmann, 1984, S. 158). In enger Verknüpfung zu der fundamentalen Idee geht es um die Reorganisation alten Wissens, um „bereits bekannte Lerngegenstände unter einer neuen Perspektive deuten zu können“ (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2010, S. 73).

Zwei wesentliche Leitideen für einen gelingenden inklusiven (Mathematik-)Unterricht stellen die *zielgerichtete Diagnose* und die *fokussierte Förderung* dar - dieser Begriff wird in der vorliegenden Arbeit verwendet, um das fachliche Lernen zu betonen, auch wenn in der Literatur oft von individueller Förderung gesprochen wird. Beide Leitideen stehen in enger Wechselbeziehung zueinander. Ausgehend von der Grundlage fachspezifischer inhaltlicher Planungsfragen (vgl. Kap. 2.3.3 und Kap. 5) gilt es, eine unterrichtsrelevante Diagnose in Bezug auf die Förderung sowie eine fokussierte Förderung bezogen auf die vorgeschaltete bzw. begleitende Diagnose zu planen (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 167).

Bei Diagnosen handelt es sich nach Wember (1998) allgemein um systematisch geprüfte Methoden, die auf eine qualitative und quantitative Beschreibung inter- und intraindividueller Unterschiede zielen (S. 108). Eine zielgerichtete bzw. förderbezogene Diagnose beschreibt spezifischer ein Vorgehen, bei der „bei einzelnen Lernenden und den in einer Gruppe Lernenden Voraussetzungen und Bedingungen planmäßiger Lehr- und Lernprozesse ermittelt, Lernprozesse analysiert und Lernergebnisse festgestellt werden, um individuelles Lernen zu optimieren“ (Ingenkamp & Lissmann, 2008, S. 13). Die alltägliche Diagnose dient dazu, „Schülerleistungen zu verstehen und einzuschätzen mit dem Ziel, angemessene pädagogische und didaktische Entscheidungen zu treffen“ (Hußmann, Leuders & Prediger, 2007, S. 1). Sie stellt eine handlungsleitende Voraussetzung für die Feststellung individueller Lehr- und Lernprozesse sowie einen zentralen Ausgangspunkt für die fokussierte Förderung dar, denn „ohne diagnostische Daten lässt sich im konkreten Fall eine bestimmte Intervention nicht indizieren […]. Ohne differentielle diagnostische Daten ist auch nicht zu entscheiden, in welchen spezifischen Bereichen ein Kind gefördert werden soll und in welchen nicht“

(Wember, 1998, S. 116). Im Allgemeinen lassen sich Diagnosen nach Wember (1998, S. 108) vier Merkmale zuschreiben. Sie sind „aspekthaft selektiv und nicht allumfassend vollständig", d.h. sie beschreiben Ausschnitte situativer Ist-Zustände und stellen Momentaufnahmen dar. Weiterhin sind Diagnosen „wertgeleitet und nicht neutral“, d.h. die persönlichen Haltungen und Erfahrungen der diagnostizierenden Person wirken sich auf das diagnostische Handeln und somit auf das Diagnoseergebnis aus. Diagnosen sind „theoriebestimmt“, d.h. fachliches und fachdidaktisches Wissen über Theorien und Konzepte stellt einerseits eine zentrale Entwicklungsgrundlage, gleichzeitig aber auch eine wichtige Voraussetzung für den zielgerichteten Einsatz dar. Darüber hinaus sind Diagnosen „deskriptiv und als solche allein und für sich genommen nicht geeignet, Veränderungsmaßnahmen zu begründen oder zu leiten“, d.h. anhand von Diagnosen lassen sich keine Folgerungen und Entscheidungen rechtfertigen, da es sonst zu einem Sein-Sollen-Fehlschluss kommen kann (vertiefende kritische Ausführungen lassen sich bei Schlee (2008) nachlesen). Diese vier Merkmale um ein fünftes ergänzend hebt Moser Opitz (Moser Opitz, 2010, S. 14) hervor, dass Diagnosen immer auch fehlerbehaftet sind. Jedes Diagnoseergebnis wird bspw. durch die jeweilige Situation, die momentane Verfassung der diagnostizierten Person sowie die Beziehung zu der diagnostizierenden Person beeinflusst. Um den Diagnoseprozess von der Durchführung über die Auswertung bis hin zur Interpretation mit größtmöglicher Transparenz gestalten zu können, ist das Einhalten wissenschaftlicher Gütekriterien zwar keine hinreichende, aber unabdingbare Voraussetzung (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 33 ff.).

Grundlage für die Diagnosen sind theoretische Grundannahmen, die sich auf curriculare und/oder entwicklungsorientierte Überlegungen stützen. Aus fachlicher Sicht interessant ist die Frage nach dem inhaltlichen Gegenstand der Diagnose, d.h. nach den „Wissens- und Könnensaspekte[n]“, die diagnostiziert werden sollen (Hußmann et al., 2007, S. 3). Für eine sensible Diagnostik individueller Kompetenzen und Schwierigkeiten ist neben dem Einbezug der Kenntnisse und Fertigkeiten auch der verständige Umgang mit fachlichen Begriffen, die Beherrschung von Verfahren, die Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen und Regeln sowie der Umgang mit prozessbezogenen Kompetenzen von zentraler Bedeutung (Hußmann et al., 2007, S. 3). Zusätzlich bestimmen die verschiedenen Zeitpunkte, zu denen Diagnosen durchgeführt werden können, ihren jeweiligen Charakter (Hußmann et al., 2007, S. 1-2). Diagnosen zur *Lernausgangslage* verfolgen die Fragen, welche inhalts- und prozessbezogenen

Kompetenzen bei den Lernenden zu einem neuen Thema bereits ausgebildet sind und welche intuitiven Vorerfahrungen als Anknüpfungspunkte genutzt werden können. Nicht nur bei der Übernahme einer neuen Lerngruppe, sondern auch zu Beginn der Lernphase eines neuen Unterrichtsthemas unterstützen die Lernausgangsdiagnosen eine möglichst passgenaue Planung des Unterrichts. Bei einer *prozessbegleitenden Diagnose* während der Durchführung der Förderung bzw. des Unterrichts geht es um die fortlaufende Diagnose von inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen sowie von individuellen Vorstellungen, Vorgehensweisen und Schwierigkeiten, die für den Lernprozess der gesamten Lerngruppe nutzbar gemacht werden können. Lernprozessdiagnosen zielen demnach auf die kontinuierliche Anpassung des Unterrichts entsprechend der individuellen Bedürfnisse der Lernenden. Die *Lernergebnisdiagnose* i.S. der klassischen Leistungsdiagnose stellt die am häufigsten angewandte Form der Diagnose dar und überprüft die Ergebnisse der Lernprozesse am Ende einer Unterrichtseinheit bzw. einer Lernphase. Im Fokus stehen hier die Lernprodukte, d.h. es wird gefragt, bis zu welchem Grad die unterrichtlichen Ziele erreicht wurden. Noch bestehende Schwierigkeiten stellen gleichzeitig wieder den Ausgangspunkt diagnostischen Handelns i.S. einer Lernausgangslagendiagnose dar.

Vor dem Hintergrund der unterschiedlichen Funktionen von Diagnose entsteht ein Spannungsfeld zwischen Normierung, Standardisierung und Individualisierung (Werner, 2019, S. 139). Gleichzeitig wird die der Diagnose zugrundeliegende Verantwortung hervorgehoben: „Aber sie [diagnostische Tätigkeit] kann trotz dieses Dilemmas [Spannungsfeld zwischen Steuerungsfunktion und unterstützender Entwicklungsfunktion] versuchen, mit den Leistungen der Kinder verantwortlich umzugehen, also durch individuelle Förderung die Lernfreude der Kinder zu erhalten und deren Leistungsfähigkeit zu entwickeln: Unterstützen statt überprüfen heißt die vorrangige Aufgabe“ (Sundermann & Selter, 2013, S. 6). Eine besondere Bedeutung erhält dieses Spannungsfeld für die inklusive Didaktik, die „grundsätzlich andere Ziele als die üblichen Formen der sonderpädagogischen Diagnostik und der Schuleingangs- und Übergangsdiagnostik [hat], die mit dem Ziel praktiziert werden, eine langfristige Entscheidung zu fällen und ein Kind einer bestimmten Einrichtung – Sonderschule, Grundschule oder Schule des Sekundarbereichs – zuzuordnen“ (Prengel, 2014, S. 66). Nach Werner (2019) ist in inklusiven Settings „ein differenziertes (Er-)Kennen und Anerkennen individueller Lernvoraussetzungen sowie die systematische Analyse von Umfeld- und Angebotsstrukturen“

(S. 139) erforderlich. Prengel (2014) fordert für den inklusiven Unterricht eine kontinuierliche Prozessdiagnostik, die sich nicht auf die Identifikation Einzelner, sondern auf alle Schülerinnen und Schüler einer Klasse bezieht und als unverzichtbares Element des Unterrichts aufs Engste mit den jeweiligen inklusivdidaktischen Materialien verbunden ist. Innerhalb der inklusiven Unterrichtsentwicklungen findet eine „Fokusverschiebung in Richtung förderrelevanter Prozessdiagnostik und eine Abkehr von bisherigen Zielen wie Selektion und Platzierung“ (Blumenthal & Mahlau, 2017, S. 341) statt. Ungeachtet dieser Relevanz haben durchaus alle Formen der diagnostischen Vorgehensweisen unter Berücksichtigung bestimmter Ziele ihre Berechtigung, gleichwohl eine sorgfältig fundierte Entscheidung über den jeweiligen Einsatz unabdingbares Kriterium ist. Wartha und Schulz (2014) verweisen auf die Notwendigkeit des „Zusammenspiel[s] von defizitorientierter Sichtweise zur Identifikation von Förderschwerpunkten und kompetenzorientierter Perspektive zur Ermittlung des Lernstandes und der Anknüpfungspunkte von Förderung bzw. Unterricht“ (S. 21), um Diagnosen, die für Fördersituationen genutzt werden, auf einer sicheren Grundlage bilden zu können. Schipper (2009b) hebt hervor, dass es keinen guten Mathematikunterricht geben könne, „in dem nicht immer auch die Lernstände der Kinder erhoben werden“ (S. 109).

Die prozess- und kompetenzorientierte Sichtweise ist für diagnostische Tätigkeiten im Mathematikunterricht wichtig, denn sie sieht die kindlichen Bearbeitungen und Denkweisen als grundsätzlich sinnvoll an (Selter & Lübke, 2015, S. 134). Anstatt nur nach Defiziten zu schauen, werden vorhandene Kompetenzen und Vorstellungen als Anknüpfungspunkte für die individuelle Lernentwicklung genutzt. Im Rahmen kompetenzorientierter diagnostischer Tätigkeiten steht primär das Verstehen von mathematischen Beziehungen, strukturellen Zusammenhängen und Mathematisierungsfähigkeiten im Mittelpunkt, das als dynamischer Prozess verstanden wird, weniger das reine Beherrschen von Rechenverfahren in einem statischen Sinne (Büchter, 2006, S. 156). Büchter und Leuders sprechen in diesem Zusammenhang auch von „verstehensorientierter“ Diagnostik (2005, S. 171 ff.).

Um die unterschiedlichen Funktionen von Diagnose intentionsgerecht nutzen zu können, stellen geeignete Aufgabenstellungen entsprechend spezifischer Kriterien eine wichtige Voraussetzung dar. Nach Hußmann, Leuders und Prediger (2007) nehmen die Konzentration auf spezifische Kompetenzaspekte, die Möglichkeit der Aufgabenbearbeitung auf verschiedenen Niveaus sowie die Aufforderung zur (Eigen-)Produktion eine bedeutende Rolle ein. Vor dem Hintergrund einer kompetenzorientierten Diagnostik spezifiziert Büchter (2006, S. 157) weiterhin, dass die Aufgaben offen sein müssen, um individuelle Bearbeitungswege zulassen und sichtbar machen zu können. Gleichzeitig sind authentische Anregungsprozesse notwendig, um Aufschluss über individuelle Vorstellungen und Kompetenzen erhalten zu können. Im Hinblick auf die Anregung zur Eigenproduktion sollten die Aufgaben differenzierend sein und niveauspezifische Zugänge bieten.

Häsel-Weide und Prediger (2017, S. 177) beschreiben zwei wesentliche Qualitätskriterien für eine zielgerichtete Diagnostik: Einerseits die diagnostische Expertise bzw. Kompetenz auf Seiten der Lehrkräfte. Diagnostische Kompetenz kann nach Weinert (2000) beschrieben werden "als Bündel von Fähigkeiten, um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme einzelner Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostische Einsichten aufgebaut werden kann" (S. 14-15). Das impliziert auch das Wissen darüber, welche diagnostischen Instrumente für welchen Zweck eingesetzt, welche Aussagen getroffen und wie schließlich passgenaue Urteilsbildungen erfolgen können. Diagnosen sind immer auf eine anschließende Intervention und die Planung zukünftiger Lehr-Lernprozesse ausgerichtet, demzufolge also niemals zweckfrei. Andererseits spielt die fachdidaktische Deutungskraft (Girulat, Nührenbörger & Wember, 2013) eine besondere Rolle. Sie beschreibt die Kompetenz auf Seiten der Lehrkräfte, die individuellen Vorgehensweisen und Vorstellungen der Lernenden bei der Aufgabenbearbeitung zu identifizieren und daraus entsprechende Schlussfolgerungen zu ziehen. Die Mehrdeutigkeit von Diagnosen, die insbesondere bei diagnostisch wertvollen offenen Aufgaben besteht, kann durch eine zielgerichtete Erstellung der Diagnoseaufgaben im Vorfeld präziser interpretiert werden (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 178). In Bezug auf den täglichen (Mathematik-)Unterricht hebt Selter (2006) jedoch auch Grenzen hervor: „Es ist schwer möglich, den individuellen Lernstand jedes einzelnen Kindes stets detailliert zu diagnostizieren“ (S. 132).

Seiner ursprünglichen Wortbedeutung nach meint der Begriff der *Förderung* bzw. des *Förderns* (mittelhochdeutsch ‚vürdern‘) „weiter nach oben bringen“ und stellt zunächst nicht eine genuin (sonder-)pädagogisch geprägte, sondern eher eine generische Formulierung dar (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 163). Fördern bedeutet laut Duden „in seiner Entfaltung, bei seinem Vorankommen (finanziell) unterstützen“ bzw. „unterstützen, verstärken“. Im alltäglichen

Sprachgebrauch geht der Begriff oftmals mit hohen Erwartungshaltungen einher, ohne dass auf ein konkretes Begriffsverständnis Bezug genommen wird. Zudem wird mit dem Begriff der Förderung häufig ein passiver Vorgang assoziiert und damit „die Hoffnung verbunden, dass diese wirksam ist und schnell zu größeren (Lern-)Fortschritten führt" (Klieme & Warwas, 2011, S. 805; Moser Opitz, 2013, S. 9). Die aktive, selbstbestimmte Komponente gerät dabei schnell in den Hintergrund.

Gegenwärtig stellt der generische Begriff der Förderung einen zentralen Kern pädagogischer Debatten dar und auch der spezifische Terminus der individuellen Förderung, der lange Zeit eher sonderpädagogisch geprägt war, hält zunehmend Einzug in die fach- bzw. vor allem inklusivdidaktischen Überlegungen (vgl. Kap. 2.2). Als Oberbegriff impliziert die Formulierung der (sonderpädagogischen) Förderung im weiteren Sinne die Diagnose, Intervention und Evaluation (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 164) sowie, gerade auch mit Blick auf die Heterogenität der Lernenden in inklusiven Settings, die Beratung. Werden die Einzelaspekte systematisch in einen Begründungszusammenhang gebracht, kann Förderung ein pädagogisches Handlungskonzept darstellen (Heimlich, 2008; vgl. hierzu vertiefend Kahlert & Heimlich, 2012). Im (schul-)pädagogischen Kontext wird der Begriff der Förderung häufig auch unter dem Doppelbegriff „Fördern und Fordern" (Bartnitzky, 2012, S. 6) verwendet. Häsel-Weide und Prediger (2017) geben jedoch zu bedenken, dass sich diese dichotome Unterscheidung mitunter zu stark auf leistungsschwache und leistungsstarke Lernende bezieht, ohne jedoch die mittleren Leistungsniveaus zu berücksichtigen (S. 170). Die Begriffe Fördern und Fordern sollten sich demnach auf alle Kinder beziehen. Bereits 1925 hat Kühnel für den Mathematikunterricht konstatiert: „Ausgehend von der Berücksichtigung jeder Individualität sind Wege zu suchen, die jeder Begabung, der Schwächsten wie der Stärksten, gerecht werden, die jede höchstmöglich fördern" (S. 8). Das Recht eines jeden Kindes auf individuelle Förderung ist auch im Schulgesetz verankert (§ 54, Absatz 1, Niedersächsisches Kultusministerium, 2018). Damit werden gleichzeitig auch entsprechende Anforderungen impliziert, die vor dem Hintergrund der aktuellen und intendierten Lernstände individuell adaptiert werden müssen (Scherer, 1994, S. 772).

In Anlehnung an seine ausführliche begriffliche Auseinandersetzung führt Bartnitzky (2012, S. 18) folgende zentrale Aspekte an, die als grundlegende Zielsetzungen schulischer Förderung berücksichtigt werden sollten:

- Förderung muss die Herausforderung und Weiterentwicklung der individuellen Kompetenzen der Lernenden unterstützen und somit kompetenzorientiert ausgerichtet sein.
- Förderung muss immer ein sinnhaftes Ziel verfolgen und dieses auch transparent für die Lernenden vermitteln.
- Förderung muss in das Lernen des Klassenunterrichts integriert sein, um Anschlussfähigkeit und Erfolgserfahrungen im täglichen Unterricht zu ermöglichen.
- Förderung muss individuelle Lern- und Leistungsziele verfolgen, um der Heterogenität der Leistungsniveaus gerecht zu werden.
- Förderung muss kommunikativ ausgerichtet sein, um gemeinsame Lernanlässe zu ermöglichen und einer Vereinzelung entgegenzuwirken.
- Förderung muss sowohl inhaltlich als auch personell verlässlich sein und beständig in den Unterrichtsalltag integriert werden.
- Förderung muss eine Kernaufgabe der Schule darstellen und als zentrale didaktische Leitlinie in der Arbeit mit der gesamten Lerngruppe umgesetzt werden.

Insbesondere mit Blick auf die inklusive Schulentwicklung ist der Begriff der ‚individuellen Förderung' gegenwärtig omnipräsent, der mit der Forderung nach einer stärkeren Individualisierung des Unterrichts einhergeht (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 167). In Anlehnung an die Argumentation von Prediger (2014; vgl. für ein Fallbeispiel Prediger & Schink, 2014) wird in der vorliegenden Arbeit der Begriff der *fokussierten Förderung* verwendet. Damit soll möglichen Fehlinterpretationen und Missverständnissen auf rein pädagogisch-methodischer Ebene vorgebeugt werden, die davon ausgehen, dass es sich bei einer (individuellen) Förderung um eine Eins-zu-Eins-Betreuung, um die vollständige Individualisierung der verwendeten Methoden, um räumlich isolierte Einzelarbeit bzw. um die Schaffung homogener Lerngruppen handele. Individuelle Förderung wird „in der öffentlichen Diskussion nahezu unhinterfragt als Schlüssel zur Lösung bildungspolitischer und pädagogischer Probleme" (Klieme & Warwas, 2011, S. 805) angesehen. Häsel-Weide und Nührenbörger (2012, S. 6) kritisieren einen gegenwärtig häufig noch vorzufindenden (klassischen) Förderunterricht:

> Viele Schulen verorten >individuelle Förderung< (die sich zumeist an leistungsschwächere Kinder richtet) in Maßnahmen außerhalb des Regelunterrichts.

> Der beobachtbare Förderunterricht wiederholt jedoch, auch in Kleinstgruppen, mit weiteren Aufgaben jenen Unterrichts, der bereits wenig erfolgreich war. Der Modus der >Beschäftigung< lässt einen verstehenden Zugang zu Schwierigkeiten und ihren möglichen Ursachen außer Acht. Die Frage der Passung stellt sich auf diese Weise gar nicht.

Vielmehr geht es um die Schaffung von geeigneten Lernsituationen, „in denen die Schülerinnen und Schüler ihre Kompetenzen aktiv weiterentwickeln, Verantwortung für ihren Lernprozess übernehmen sowie ihre eigenen Lernfortschritte erkennen und reflektieren können“ (Behrensen et al., 2015, S. 2-3). Es handelt sich um eine „fokussierte, d.h. fachdidaktisch und individuell treffsichere Förderung in variierenden Sozialformen“ (Prediger & Schink, 2014, S. 25). Fokussierte Förderung bezieht alle Schülerinnen und Schüler mit ein und gilt als „selbstverständliches Merkmal pädagogischen Handelns“, das „erzieherisches Handeln unter konsequenter Berücksichtigung personaler Lern- und Bildungsvoraussetzungen“ (Klieme & Warwas, 2011, S. 805) umfasst. Holzbrecher (2015) sieht einen zentralen Schlüsselmoment in der konsequenten Subjektorientierung, d.h. der Forderung, das „Lehren vom Lernenden aus zu denken“ (S. 352).

Zwei wesentliche, den Begriff der fokussierten Förderung[1] definierende Qualitätskriterien sind einerseits die fachdidaktische, inhaltliche Treffsicherheit sowie andererseits die individuelle Adaptivität (Leuders & Prediger, 2016, S. 34). Beim ersten Kriterium wird der Fokus auf die Inhalte gerichtet und die Frage verfolgt, welche Inhalte vor dem Hintergrund der empirischen Forschung zentral sind, um bspw. kritische Stellen im Lernprozess zu überwinden. Die fachdidaktische Treffsicherheit bezieht sich also in Anlehnung an die fundamentale Idee auf die Spezifizierung relevanter Lerngegenstände. Prediger (2014, S. 933) verweist mit Blick auf die fachdidaktische Forschung und Entwicklung auf eine Spezifizierung relevanter Lerngegenstände durch einen normativen Rahmen, auf eine Spezifizierung durch Empirie zur Kompetenzstruktur sowie auf eine Spezifizierung durch Empirie in längsschnittlichen Perspektiven. Um fokussiert fördern zu können, ist ein fundiertes Hintergrundwissen der Lehrkräfte über spezifische Chancen und Hürden im Mathematiklernen von besonderer Bedeutung.

[1] Vertiefende Ausführungen zu verschiedenen Aspekten der fokussierten Förderung lassen sich bei Leuders & Prediger (2016) ausführlich nachlesen.

Das zweite Kriterium richtet den Fokus auf die Individuen und fragt nach der sinnvollen Abstimmung der Förderinhalte auf die individuellen Lernvoraussetzungen und -bedarfe. Aus fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungssicht geht es um die Bereitstellung von treffsicheren Diagnoseinstrumenten sowie um Förderkonzepten, die auf Diagnosen abgestimmt sind, d.h. um ein „lerngruppengerechtes Förderkonzept“ (Prediger, 2014, S. 933), das die unterrichtenden Lehrkräfte unterstützt. Vor dem Hintergrund der sehr großen Heterogenität in inklusiven Lerngruppen kann die Frage nach „angemessener fokussierter Förderung“ (Leuders & Prediger, 2016, S. 102) nicht für alle Lernenden einheitlich beantwortet werden. Hierzu ist das Qualitätskriterium der *Adaptivität* eine wichtige Voraussetzung, das als grundlegende pädagogische Idee eine lange Tradition hat und als Terminus technicus bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts in reformpädagogisch orientierten Schulversuchen in Nordamerika eingeführt wurde (Wember, 2001, S. 162). Nach Helmke ermöglicht Adaptivität eine Passung zwischen dem Lernangebot einerseits und den individuellen Lernvoraussetzungen andererseits (2010, S. 247). Gleichzeitig stellt die Adaptivität ein zentrales Qualitätskriterium für Differenzierungsansätze dar (vgl. Leuders & Prediger, 2016, S. 10). In einem adaptiven Unterricht werden nach Wember (2001)

> die Lernvoraussetzungen der Lernenden [werden] nicht als relativ konstante, sondern als veränderliche Personenmerkmale angesehen, und es wird angenommen, dass diese nachhaltig geändert werden können, wenn der Unterricht in flexibler Weise angepasst wird. Dementsprechend wird auch der Unterricht selbst als veränderliche Größe behandelt: Es gilt nicht, allen Lernenden ein Unterrichtsverfahren vorzusetzen, an das diese sich anpassen müssen, sondern es gilt, unterrichtliche Alternativen zu entwickeln, und diese den Lernenden differenziell zuzuweisen. (S. 164)

Adaptivität bezieht sich also auf die Anpassungsfähigkeit bzw. die Passung zwischen Förderung und Individuum. Nach Leuders und Prediger (2016) setzt die Adaptivität einer Förderung voraus, „dass man nicht nur inhaltlich treffsicher die wichtigen Bereiche identifiziert, sondern auch, dass man die Lernenden identifiziert, die einer entsprechenden Förderung bedürfen“ (S. 72). Dabei stehen die Interaktion und differenzsensible Adaption zwischen individuellen Lernvoraussetzungen, die sowohl personale als auch situative Bedingungen umfassen, und spezifischen Interventionsmerkmalen im Mittelpunkt (Wember, 2001, S. 161-162). Dies entspricht auch der Forderung der UN-Konvention von 2006 in § 24, „wirksame individuell angepasste Unterstützungsmaßnahmen in einem Umfeld, das die bestmögliche schulische und soziale Entwicklung“ ermöglicht, zu gestalten. Wember (2001) nennt in Anlehnung an Salomon (1975) zwei unterschiedliche Strategien, die eine Passung zwischen den individuellen Lernvoraussetzungen und den unterrichtlichen Anforderungen ermöglichen und entsprechend ihres je spezifischen Einsatzes bewusst gewählt werden sollten: die remediale und die kompensatorische Strategie. Die remediale Strategie bezieht sich auf eine direkte, meist zusätzliche Förderung fehlender bzw. unzureichend ausgebildeter zentraler Lernvoraussetzungen und Kompetenzen, um individuelle Lernerschwernisse der Schülerinnen und Schüler zu beheben. Zugrunde gelegt wird die Annahme einer grundsätzlich möglichen und verantwortbaren Anbahnung bzw. Ausbildung fehlender Lernvoraussetzungen, sodass die erforderlichen Voraussetzungen für ein erfolgreiches Lernen geschaffen werden können. Die kompensatorische Strategie geht hingegen davon aus, dass fehlende Lernvoraussetzungen gar nicht bzw. nicht im Rahmen eines vertretbaren Aufwandes ausgebildet werden können. Im Unterricht werden Lernerschwernisse, die auf defizitäre Lernvoraussetzungen der Lernenden zurückzuführen sind, nicht behoben, sondern umgangen.

Wember (2001) schlägt eine Bevorzugung der remedialen Strategie immer dann vor, wenn es möglich ist, durch Lernen Schwierigkeiten zu überwinden oder Funktionsdefizite durch zu erlernende Kompetenzen auszugleichen, aber es dürfe nicht um ein Entweder-Oder gehen, vielmehr sei „je nach individueller Lernausgangslage und konkreter Lernsituation eine passende Kombination von remedialen und kompensatorischen Strategien zu realisieren“ (S.167). Neben der direkten Förderung, die aus fachlicher und sonderpädagogischer Sichtweise zentral ist, wurde insbesondere in sonderpädagogischen Interventionen lange Zeit eher eine indirekte Förderung verfolgt. Indirekte Förderung zielt auf die Abklärung individueller Hintergründe und Bedingungsfaktoren, die zu den jeweiligen Lernschwierigkeiten führen. Im Vordergrund stehen hier vor allem kognitive, kommunikative, sensomotorische oder sozial-emotionale Voraussetzungen, deren Förderung ein entsprechendes Vorwissen der verschiedenen Entwicklungsbereiche erfordert (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 165-166).

Eine fokussierte Förderung im inklusiven Unterricht kann in unterschiedlichen organisatorischen und sozialen Settings stattfinden. Sie kann in Form von Einzelförderung, Kleingruppenförderung, in einem Förderband oder in der für diese Arbeit bedeutungsvollen unterrichtsintegrierten Förderung realisiert werden. Unabhängig von der Organisationsform ist die konsequente Ausrichtung an fachdidaktischen und inhaltlichen Überlegungen zentral

(Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 171). Der Fokus sollte auf *produktiven Förderanlässen* liegen, die den Lernenden authentische Zugänge zu den fachlichen Inhalten ermöglichen. Dazu sind mathematische Lernumgebungen notwendig, die den Lernenden in unterschiedlichen gemeinsamen aber auch individuellen Lernsituationen die Entwicklung und den Ausbau ihrer mathematischen Kompetenzen sowie eine von den Lehrkräften unterstütze Reflektion der individuellen Lernprozesse ermöglichen (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017c, S. 220). Ziel dieses produktiven Förderns ist es, „dass sich die Lernenden bewusst und aktiv-entdeckend mit dem Basisstoff und den damit verknüpften stofflichen Hürden auseinander setzen“ (Nührenbörger, 2014, S. 864). Gleiches gilt im Rahmen der vorliegenden Arbeit auch für die fundamentalen Ideen in der Sekundarstufe I. Häsel-Weide und Nührenbörger (2017c) sehen das produktive Fördern im Rahmen der Unterrichtsintegrierten Förderung als eine „Leitlinie für den inklusiven Mathematikunterricht“ an (S. 220) an. Vertiefende Ausführungen werden im Rahmen der ausführlichen Darstellung des für die vorliegende Arbeit relevanten Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung in Kapitel 3.2 dargelegt.

„Individuelle Förderung bedeutet daher, die Bedingungen herzustellen, unter denen erfolgreiches Lernen möglich ist“ (Leuders, T. & Leuders, 2014, S. 75). Dabei handelt es sich jedoch lediglich um Angebote für die Lernenden, deren Gelingen im Sinne individueller Lern- und Entwicklungsprozesse nur zum Teil von der Lehrkraft abhängt. Wesentlich stärker beeinflusst wird eine erfolgreiche Förderung durch weitere Faktoren in „den Lernenden selber sowie ihrem Lernumfeld und den familiären Unterstützungsmöglichkeiten“ (Moser Opitz, 2013, S. 9). Vor dem Hintergrund der zuvor genannten Erwartungshaltungen, die mit dem Begriff der Förderung verbunden sind, lässt sich mit den Worten Selters (Selter, 2006, S. 133) hervorheben, dass es „schwer möglich [sei], kontinuierlich jedem einzelnen Kind seinem individuellen Lernstand angepasste Aufgaben zuzuweisen, die dessen Lernentwicklung optimal anregen“.

Die Notwendigkeit des *Zusammenspiels von Diagnose und Förderung* wird deutlich, wenn man sich vor Augen führt, dass i.d.R. jede Förderung unspezifisch bleibt, wenn ihr keine Diagnose vorangeht und jede Diagnose ohne eine darauf aufbauende Förderung wirkungslos ist (Selter & Lübke, 2015, S. 136). Kretschmann (2008) beschreibt Diagnosen als „unwirksam, mitunter sogar kontraproduktiv, weil stigmatisierend, wenn sie nicht zu einer nachhaltigen Förderung führen“ (S. 7). „Unterrichtsrelevante Diagnose muss stets im Hinblick auf die Förderung geplant werden, Förderung auf der Basis von Diagnose“ (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 167). Nach Schipper (2009b) handelt es sich um „zwei Seiten der gleichen Medaille“ (S. 4), deren Ziel es ist, jedem Kind möglichst große Lernfortschritte ermöglichen zu können. Ein „fachdidaktisch fundiertes Zusammenspiel von Diagnose und Förderung“ (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 167) stellt sowohl die zu erwerbenden mathematischen Kompetenzen als auch die charakteristischen Hürden, die Schülerinnen und Schüler bei dem Erwerb dieser Kompetenzen überwinden müssen, in den Mittelpunkt. Der fachliche Inhalt, d.h. die zu erwerbenden mathematischen Vorstellungen und Kompetenzen sind „zentraler Dreh- und Angelpunkt“ (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 168) für zielgerichtete Diagnose und treffsichere Förderung. Grundlage dafür bilden die folgenden drei Prinzipien (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 168):

- Inhaltliche Planungsfragen stellen den Ausgangspunkt aller Überlegungen dar.
- Unterschiedliche Settings mit verschiedenen Zielen und unterschiedlichen Zielgruppen stellen eine zentrale Voraussetzung für eine fokussierte Förderung dar.
- Eine zielgenaue Diagnose unterstützt die Treffsicherheit der Förderung.

„Qualität entsteht dabei immer erst durch konsequentes Durchdenken der jeweiligen Themen unter Heranziehung der fachdidaktischen themenspezifischen Hintergründe“ (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 178). Ausgangslage für die Förderung sind demnach nicht allein die Diagnoseergebnisse, sondern es sind fachliche bzw. fachdidaktische Überlegungen von Bedeutung, die sowohl die Grundlage für diagnostische Fragestellungen, zu entwickelnde Diagnoseaufgaben und diagnostische Ansätzen liefern, als auch eine handlungsleitende Funktion bei der Planung von Förderangeboten einnehmen (Moser Opitz & Nührenbörger, 2015, S. 497). Da effektive Förderung fokussiert und niveau- bzw. profilspezifisch ist (Prediger, 2014), sollte dies die Diagnose dementsprechend auch sein, „um Lernende hinsichtlich ihrer spezifischen Fähigkeiten zu unterscheiden, und Diagnosebefunde als Entscheidungsgrundlage für möglichst konkrete Förderentscheidungen nutzen zu können“ (Pellegrino, Chudowsky & Glaser, 2001; zitiert nach Schulz et al., 2017, S. 414).

Die Leitidee des *Differenzierens* soll im Folgenden sowohl aus allgemeindidaktischer sowie fachdidaktischer Perspektive skizziert werden. Vor dem Hintergrund der aktuellen Inklusionsentwicklungen stellt sich das Differenzierungsthema noch einmal neu, „weil die

Sonderungen in verschiedene Schularten nicht mehr der allgemeine Weg sein kann“ (Bönsch, 2015, S. 342). Aufbauend auf die lange Tradition in Grundschulen erfährt das Thema der Differenzierung hinsichtlich der immer größer werdenden Heterogenität auch in der Sekundarstufe zunehmend an Bedeutung. „Versuche einer spezifischen Passung der Inhalte und Methoden des Unterrichts für die Gruppe insgesamt laufen grundsätzlich Gefahr, in reduktionistischer Weise Lern- und Entwicklungsmöglichkeiten einzuschränken und bestehende Schwierigkeiten zu verfestigen statt sie zu beheben oder doch zumindest zu mildern“ (Wember, 2009a, S. 96). Auf einer grundlegenden Ebene lässt sich Differenzieren als eine Antwort auf die (zunehmende) Heterogenität innerhalb (inklusiver) Lerngruppen ansehen. Unter Differenzierung können „alle organisatorischen, inhaltlichen und didaktischen Vorkehrungen […] gefasst [werden, R.-F.K.], die auf besondere Ausprägungen von Lernvoraussetzungen, Lernfähigkeiten und inhaltlichen Interessen verschiedener Schülergruppen eingehen“ (Lenzen, 1989, S. 318). Eine weit gefasste Definition von Differenzieren liefert auch Bönsch:

> Unter Differenzierung wird einmal das variierende Vorgehen in der Darbietung und Bearbeitung von Lerninhalten verstanden, zum anderen die Einteilung bzw. Zugehörigkeit von Lernenden zu Lerngruppen nach bestimmten Kriterien. Es geht um die Einlösung des Anspruchs, jedem Lernenden auf optimale Weise Lernchancen zu bieten, dabei die Ansprüche und Standards in fachlicher, institutioneller und gesellschaftlicher Hinsicht zu sichern und gleichzeitig lernzielorientiert aufzubereiten. Differenzierung stellt sich für die Organisation von Lernprozessen als Bündel von Maßnahmen dar, Lernen in fachlicher, organisatorischer, institutioneller wie individueller und sozialer Hinsicht zu optimieren. (2009, S. 14)

Aus pädagogisch-didaktischer Sicht versucht Differenzierung, der wachsenden Heterogenität gerecht zu werden, „zum einen indem sie ungleiche Lernvoraussetzungen in den Lernangeboten berücksichtigt und unterschiedliche Lernwege zu einem gemeinsamen Lernziel eröffnet, zum anderen indem sie die Verschiedenheit von Begabungen als einen Eigenwert versteht und fördert“ (Bruder, Linneweber-Lammersitten & Reibold, 2015, S. 514). Leuders und Prediger (2016, S. 9) sehen das übergreifende Ziel von Differenzierung darin, „jede Schülerin und jeden Schüler gemäß ihrem Lernstand und Lernendenprofil möglichst optimal zu fördern“.

Grundsätzlich kann man unterscheiden zwischen äußerer und innerer Differenzierung. Bei der äußeren Differenzierung werden möglichst homogene Lerngruppen angestrebt, wohingegen eine innere Differenzierung darauf abzielt, den individuellen Bedürfnissen innerhalb einer heterogenen Lerngruppe gerecht zu werden. Innere Differenzierung umfasst dabei sowohl Phasen des individuellen Lernens als auch gemeinsame Lernangebote, die auf eine „produktive Nutzung der auftretenden Heterogenität" (Leuders & Wittmann, 2017, S. 184) zielen. Die Forderung nach innerer Differenzierung wurde bereits (1985) von Klafki und Stöcker hervorgebracht: „*Wenn Unterricht jeden einzelnen Schüler optimal fördern will, wenn er jedem zu einem möglichst hohen Grad von Selbsttätigkeit und Selbstständigkeit verhelfen und Schüler zu sozialer Kontakt und Kooperationsfähigkeit befähigen will, dann muß [sic.] er im Sinne Innerer Differenzierung durchdacht werden*" (S. 127, Hervorheb. im Original]. Müller, Ehlert und Fritz (2017, S. 460) betonen jedoch in Anlehnung an Schuck (2011), dass innere und äußere Differenzierung als Pole eines Kontinuums zu betrachten sind, die es gleichermaßen und ohne einseitige Gewichtung umzusetzen gilt, um dem Anspruch inklusiven Unterrichts gerecht werden zu können. Eine detaillierte Beschreibung der historischen Entwicklung didaktisch-methodischer Differenzierungsmaßnahmen liefern Bruder, Linneweber-Lammerskitten und Reibold (2015); vertiefende Ausführungen zum Aspekt des Differenzierens sind u.a. bei Hußmann und Prediger (2007), Leuders & Prediger (2012, 2016) sowie Krähenmann et al. (2015) nachzulesen.

Leuders und Prediger (2016) schlagen vier Entscheidungsfelder vor, die eine systematische Auswahl der Vielzahl an Differenzierungsansätzen erleichtert (S. 21 ff.). Die Entscheidungsfelder sollen das Ausbalancieren zwischen der Intention des Unterrichts und den jeweiligen Voraussetzungen einer Lerngruppe unterstützen und somit eine detaillierte „Unterscheidung in quantitative und qualitative Leistungsdifferenzierung" (Leuders & Prediger, 2017, S. 5) ermöglichen. Die Autoren unterscheiden zwischen den Zielen, den Aspekten, den Formaten und den Ebenen von Differenzierung. Differenzierungsziele können sein: Vielfalt zulassen und wertschätzen, Vielfalt fördern und nutzen, Unterschieden gerecht werden bzw. Unterschiede ausgleichen. Differenzierungsaspekte können sich sowohl auf verschiedene Heterogenitätsaspekte (Lernstand, Vorwissen, kognitive Grundfähigkeiten, Interessen, Arbeitsweisen, Kooperationsfähigkeit, Motivation, …) als auch auf unterschiedlich zu differenzierende Aspekte (Lerntempo, Anspruchsniveau, Lernziele, Lerninhalte, sprachliche Anforderungen, …) beziehen. Zur Konkretisierung dieser Ansätze lassen sich unterschiedliche Formate nutzen, die verschiedene Spektren an Differenzierung ermöglichen (bspw. geschlossen, d.h. methodisch individualisierter Unterricht; offen, d.h. selbstdifferenzierende

Erkundungsaufgaben; Stationsarbeit mit vielfältigen Zugangsweisen, entweder geschlossen, d.h. von der Lehrkraft vorgegeben oder teiloffen, d.h. von den Lernenden selbst wählbar). Bruder, Linneweber-Lammerskitten und Reibold (2015, S. 515 ff.) führen darüber hinaus die Organisations- bzw. Sozialform, didaktisch-methodische Maßnahmen sowie die Entscheidungs- und Handlungsträger der Differenzierung als wichtige Strukturmomente auf. Die beispielhaften Differenzierungsansätze verdeutlichen, dass Differenzierung auf unterschiedlichen Unterrichtsebenen umgesetzt werden kann. Es lässt sich mithilfe von Aufgaben differenzieren, anhand von Methoden, aber auch vor dem Hintergrund von Unterrichtsstrukturen. Bei dem Zusammenspiel aller Entscheidungsfelder stehen einerseits die Lernziele, andererseits aber besonders die individuellen Voraussetzungen der Lerngruppen im Mittelpunkt, die es durch vielfältige Kombinationen und Varianten aufeinander abzustimmen gilt (Leuders & Prediger, 2016, S. 32). Dabei geht es nicht um „ein entweder-oder, sondern um die Orientierung an der Leistungsfähigkeit der einzelnen Person“ (Hußmann & Prediger, 2007, S. 6). Nach Leuders & Prediger (2016) sollten differenzierende Maßnahme drei Qualitätskriterien erfüllen, um als „gute“ Differenzierung zu gelten:

- Adaptivität, d.h. die Lernangebote sollten entsprechend der jeweiligen individuellen Lernstände und -bedürfnisse der Lernenden passen,
- Verstehensorientierung, d.h. die Lernangebote sollten fachbezogen lernförderlich sein und ausreichend Gelegenheit zum inhaltlichen Verstehen eröffnen,
- kognitive Aktivierung, d.h. die Lernangebote sollten die Schülerinnen und Schüler zu einer geistig aktiven Auseinandersetzung herausfordern und motivieren.

Die aktuelle Differenzierungspraxis zeigt insbesondere in Bezug auf Formen der inneren Differenzierung jedoch verschiedene Herausforderungen und Schwierigkeiten (Krähenmann et al., 2015, S. 45). Es findet häufig eine wenig variierende methodische Umsetzung statt, die einerseits keine Offenheit für individuelles Denken ermöglicht, andererseits in Form von Individualisierung zu Vereinzelung führt und das gemeinsame Lernen vernachlässigt (Krauthausen & Scherer, 2014, S. 23 ff.). Darüber hinaus fehlt es häufig an strukturierenden Lernhilfen, die insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten eine zentrale Bedeutung haben. In der Praxis erhalten differenzierende Ideen zur Organisation von Lernstationen, Lerntheken oder Werkstattarbeit oftmals Vorrang vor den mathematischen

Inhalten. Anstelle einer Fokussierung auf die Kerninhalte findet eine „Materialflut“ statt (Krähenmann et al., 2015, S. 45).

Nachfolgend werden zwei der zahlreichen Differenzierungsansätze näher erläutert, die sich auf Ebene der Aufgaben verorten lassen und für den Kontext der vorliegenden Forschungsarbeit hinsichtlich der konkreten Gestaltung der unterrichtsintegrierten Förderung einen besonderen Stellenwert einnehmen.

In der Mathematikdidaktik spielt der Ansatz der natürlichen Differenzierung eine bedeutsame Rolle. Als Differenzierungskonzept lässt sich die natürliche Differenzierung klassischer Weise der inneren Differenzierung zuordnen und häufig im Mathematikunterricht der Grundschulen vorfinden. Zunehmend findet sie auch in der Sekundarstufe breiter werdende Anwendung (Leuders & Wittmann, 2017, S. 183). Nach Wittmann und Müller (2004) wird natürliche Differenzierung oder auch Selbstdifferenzierung wie folgt definiert: „Die gesamte Lerngruppe erhält einen Arbeitsauftrag, der den Kindern Wahlmöglichkeiten bietet. Da diese Form der Differenzierung beim <natürlichen Lernen> außerhalb der Schule eine Selbstverständlichkeit ist, spricht man von <natürlicher Differenzierung>" (S. 15). Natürliche Differenzierung lässt sich demnach in den Kontext des aktiv-entdeckenden und sozialen Mit- und Voneinanderlernens einordnen und mithilfe von substanziellen, offenen Aufgabenformaten umsetzen, die den Lernenden innerhalb des gleichen Lernangebots unterschiedliche Zugänge bzw. Wahlmöglichkeiten der Bearbeitungswege und -niveaus erlauben (Leuders & Wittmann, 2017, S. 184). Insbesondere offene Beschreibungsaufgaben weisen hohes inklusives Potential auf: einerseits dokumentieren sie Leistungsunterschiede zwischen den Lernenden und liefern im Sinne der Prozessdiagnostik wertvolle Hinweise für die weitere Förderung. Andererseits ermöglichen sie allen Kindern, sich zu dem gleichen Lerngegenstand zu äußern, „angefangen von Einwortsätzen bis hin zu längeren mathematischen Aufsätzen“ (Krauthausen & Scherer, 2010, S. 14). Die Lehrkräfte tragen dabei die Verantwortung für die fachliche Rahmung. Dabei ist stets die inhaltliche Ganzheitlichkeit zu berücksichtigen, die einen gewissen Komplexitätsgrad aufweisen muss (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 228). „Offenheit und Komplexität sollten dabei für das Verständnis nicht erschwerend, sondern hilfreich sein, da in ganzheitlicheren Zusammenhängen mehr Bedeutung und damit mehr Anknüpfungspunkte für individuelle Lösungswege enthalten sind als in isolierten Teilaufgaben“ (Scherer, 2015, S. 270). Differenzierung auf inhaltlicher Ebene sollte sich demnach an der fundamentalen Idee orientieren und ein variables Anforderungsniveau beinhalten: „Dieser fachliche Kern bestimmt die Gestaltung einer differenzierenden Lernumgebung und hilft, die fachlichen Ansprüche auch bei starker Elementarisierung nicht zu verlieren. Das Thema bekommt ein unverwechselbares Gesicht“ (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 50). Unter Einbezug des Faches und der Fachdidaktik gilt es allerdings nicht, sich an einer starren Struktur zu orientieren, sondern „ausgehend von fachlichen und fachdidaktischen Überlegungen eine qualitative Differenzierung der Lerninhalte vorzunehmen bzw. die Auswahl von Aufgaben und Vorgehensweisen auf einem fachdidaktischen Hintergrund zu reflektieren“ (Moser Opitz, 2014, S. 63).

Die Differenzierungsmöglichkeiten erfolgen in natürlicher Weise sowohl in quantitativer als auch in qualitativer Hinsicht. „Zentral ist, dass diese Differenzierung nicht vorab durch die Lehrperson vorgenommen wird, sondern sich aus der Sache heraus ergibt“ (Scherer, 2015, S. 274). Die Lernenden werden als aktive Subjekte ihrer Lerntätigkeit angesehen, deren Selbstregulation und Verantwortungsübernahme für die eigenen Lernprozesse gestärkt werden sollen (Bruder et al., 2015, S. 525). Im inklusiven Mathematikunterricht ist „damit die Möglichkeit gegeben, gemeinsame Lernangebote anzubieten und gemeinsame Lernsituationen zu schaffen sowie Alternativen zu separierenden Förderungen zu ermöglichen“ (Scherer & Hähn, 2017, S. 32). Dabei gilt es aber zu berücksichtigen, dass selbstdifferenzierende Aufgaben keine Selbstläufer sind, die automatisch zu einer angemessenen Differenzierung führen. Diese Grenzen heben Leuders und Prediger (2012) mit Blick auf Lernende mit vertieftem Förderbedarf besonders kritisch hervor:

> Wenn eine Lerngruppe noch substantiell am Grundverständnis der Inhalte arbeiten muss, während andere bereits problemlösend und abstrahierend mit diesen Inhalten umgehen können, ist dies nicht auf der Aufgabenebene alleine zu lösen, dann sind spezifische Förderprogramme notwendig, die durch geeignete Unterrichtsstrukturen verankert sein müssen. (S. 59)

Neben dem Konzept der natürlichen Differenzierung finden im Rahmen der vorliegenden Arbeit sogenannte gestuft differenzierende Aufgaben (Leuders & Wittmann, 2017, S. 191-192) Anwendung. Dabei handelt es sich um einen Block an Aufgaben, der sowohl für alle Lernenden verbindliche Grundaufgaben mit einem niedrigschwelligen Einstieg beinhaltet, als auch optionale weiterführende Vertiefungsaufgaben für leistungsstärkere und schneller Lernende bereit hält. Eine Vertiefung kann sowohl auf inhaltlicher Ebene erfolgen, aber auch zunehmend komplexere prozessbezogene Kompetenzen ansprechen. Leuders und Wittmann (2017, S. 191) bezeichnen diesen Ansatz als eine einfache und häufige Form der Differenzierung, die sowohl über das Arbeitstempo als auch einen zunehmenden kognitiven Anspruch erfolgt. Letzteres ist essenziell, um inhaltlich fundiertes Lernen zu garantieren. Gleichzeitig gilt es sicherzustellen, dass der gemeinsame Lerngegenstand, die fundamentale Idee, bereits in den Grundaufgaben thematisiert wird, sodass Lernende, die die weiterführenden Aufgaben nicht bearbeiten, keinen Nachteil für ihren weiteren Lernprozess erfahren. Durch die fachliche Breite und ganzheitliche Erarbeitung eines Lerngegenstands soll die Kritik der rein quantitativen Differenzierung vermieden werden, die lediglich über die Aufgabenanzahl und Bearbeitungszeit variiert (Korff, 2016b, S. 66).

Inklusiver Unterricht erfordert ein breites Repertoire an Differenzierungsansätzen, „weil kein einzelner Ansatz alle Qualitätsanforderungen zugleich erfüllen kann“ (Leuders & Prediger, 2012, S. 60). Die Erarbeitung neuer Lerninhalte erfordert bspw. eine andere Art der Differenzierung als das Festigen und Vertiefen bestimmter Lerninhalte (Krähenmann et al., 2015, S. 46). Insbesondere aufgabenbasierte Differenzierungsangebote sind in hohem Maße abhängig von der Qualität der jeweiligen Aufgaben als auch von der kompetenten Begleitung durch die Lehrkräfte (Leuders & Wittmann, 2017, S. 192). Zu berücksichtigen gilt, dass kein noch so gut differenziertes Lernangebot ein erfolgreiches Lernen auf Seiten der Schülerinnen und Schüler garantiert, „vielmehr sind auch die Lehrperson und die konkrete Gestaltung der Unterrichtsprozesse mitentscheidend“ (Scherer, 2015, S. 271). Bezogen auf die tägliche Unterrichtspraxis gilt es, Differenzierung ökonomisch mit den im Unterricht verfügbaren Ressourcen effektiv umzusetzen (Hußmann & Prediger, 2007, S. 1).

Um der Heterogenität in inklusiven Lerngruppen gerecht werden zu können, sollte inklusiver (Mathematik-) Unterricht unterschiedliche Lernsituationen (vgl. Kap. 2.1.1) umfassen, die jeweils ihre eigene Relevanz und Berechtigung aufzeigen. Damit wird dem Spannungsfeld zwischen *Individualität und Gemeinsamkeit* Rechnung getragen.

Der Begriff des *gemeinsamen (Mathematik-)Lernens* ruft unterschiedliche Assoziationen hervor (Häsel-Weide, 2016a, S. 9). Er unterstreicht sowohl den sozialen Prozess des gemeinschaftlichen, kollektiven Lernens von Schülerinnen und Schülern, das in einem kommunikativ-kooperativen Austausch stattfindet, als auch die vielfältige Bandbreite an besonderen Schwierigkeiten und Begabungen, die die Lernenden in den Lernprozess einbringen (Häsel-Weide, 2016a, S. 9-10). Unter dem Begriff des gemeinsamen Lernens wird im Folgenden nicht generell gemeinsamer bzw. inklusiver Unterricht gefasst, sondern in Anlehnung an Korff (2012) explizit die „kooperative Auseinandersetzung mit einer Sache einschließlich gegenseitiger inhaltliche[r] Anregung“ (S. 150) verstanden. Im Sinne eines von- und miteinander Lernens wird gemeinsames Lernen als „spezifisch soziales und dialogisches Lernen“ charakterisiert, das „Ko-Konstruktionsprozesse[n] auf Basis einer inhaltsbezogenen Interaktion als integralem Bestandteil des Lernprozesses“ [Hervorheb. im Original] (Korff, 2016b, S. 54) beinhaltet. Die Auswahl der fachlichen Inhalte sollte sich vor dem Hintergrund der Ausführungen zu der fundamentalen Idee an dieser orientieren, denn „gemeinsames Lernen braucht gemeinsame Themen und Inhalte“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017c, S. 221). Es wird ein gemeinsamer inhaltlicher Kern zugrunde gelegt, der im Sinne des Spiralprinzips die Möglichkeit der differenzierten Bearbeitungen für alle Schülerinnen und Schüler erlaubt und ihnen auch in gemeinsamen Lernsituationen individuellen Spielraum ermöglicht (Scherer, 2017, S. 197). Gleichzeitig werden somit die kritischen Stellen in den Mittelpunkt gerückt. Dabei kann das gesamte Spektrum gemeinsamer Lernsituationen im Sinne Wockens (1998b) ausgeschöpft werden: koexistente, subsidiäre und kooperative Situationen. Bereits 1974 hat Freudenthal die Vorzüge gemeinsamen Lernens für alle Schülerinnen und Schüler hervorgehoben:

> Ich wiederhole: In einer Gruppe sollen die Schüler zusammen, aber jeder auf der ihm gemäßen Stufe, am gleichen Gegenstand arbeiten, und diese Zusammenarbeit soll es sowohl denen auf niedriger Stufe wie denen auf höherer Stufe ermöglichen, ihre Stufe zu erhöhen, denen auf niedriger Stufe, weil sie sich auf die höhere Stufe orientieren können, denen auf höherer Stufe, weil die Sicht auf niedrige Stufen ihnen neue Einsichten verschafft. (S. 167)

Gemeinsames Lernen ermöglicht demzufolge neue Erkenntnisse durch die Orientierung an höheren Stufen, d.h. es schafft ein vorwegnehmendes, vorausschauendes, ggf. sogar leicht überforderndes Lernen, sowie vertiefende Erkenntnisse durch Rückblick auf niedrigere Stufen und die Reflexion eigener Lernprozesse (Häsel-Weide, 2015, S. 6). Besonders betont Freudenthal (1974), dass die Lernenden dabei „nicht neben- sondern miteinander am gleichen Gegenstand auf verschiedenen Stufen tätig sind“ (S. 166).

Der Begriff des *individuellen Lernens* steht in engem Zusammenhang mit den Ausführungen zu der didaktischen Leitidee der fokussierten Förderung. Für das individuelle Lernen ist der lernprozessbezogene Kontakt bzw. die inhaltsspezifische Interaktion mit anderen Lernenden keine grundlegende Voraussetzung. Das bedeutet aber auch nicht, dass individuelles Lernen ein auf das jeweilige Kind zugeschnittenes zieldifferentes, von der Lerngruppe und dem gemeinsamen Lerngegenstand isoliertes Lernangebot ist. Vielmehr sollte auch zieldifferentes, individualisiertes Lernen im inklusiven Mathematikunterricht immer auf einen gemeinsamen Lerngegenstand ausgerichtet sein, in sozialer Eingebundenheit stattfinden (Korff, 2016b, S. 55) und durch vielfältig differenzierte Lernangebote innerhalb einer heterogenen Lerngruppe umgesetzt werden. In bestimmten Fällen kann sich aber auch eine temporäre Einzel- oder Kleingruppenförderung (außerhalb der gemeinsamen Lerngruppe) als sinnvoll herausstellen, wenn es darum geht, positive Lernerfolge und das Erleben von Selbstwirksamkeit zu ermöglichen.

Mathematiklernen als Gemeinsamkeit zu erleben und umzusetzen hat schon Freudenthal (1974) als eine zentrale Voraussetzung für erfolgreiche Lernprozesse aller Kinder hervorgehoben. Im inklusiven Unterricht gilt es, die variierende Vielfalt von personellen Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen sowie situativen Lern- und Entwicklungsbedingungen zu berücksichtigen (Wember, 2009a, S. 89). Dabei sollte zunächst immer die Identifizierung individueller Lernstände sowie passender Lernangebote erfolgen, um vor diesem Hintergrund entscheiden zu können, „wie viel Gemeinsamkeit für die jeweilige Lerngruppe möglich und wie viel Individualisierung nötig ist“ (Lütje-Klose & Miller, 2015, S. 24). Die „Pole der Individualisierung und inneren Differenzierung des Unterrichts einerseits (z.B. durch individuell unterschiedliche Anforderungen und Schwierigkeitsgrade) und der bewussten Herstellung von Gemeinsamkeit (z.B. durch gemeinsames Spiel, Partnerarbeit, kooperative Lernformen) andererseits“ (Lütje-Klose & Miller, 2015, S. 24) müssen also immer wieder vor dem Hintergrund fachlicher, fachdidaktischer sowie pädagogischer und sonderpädagogischer Gesichtspunkte fundiert aufeinander abgestimmt werden. Dabei wird nach Wocken (2014) das Ziel verfolgt, „sowohl die Entwicklung der individuellen Potentiale zu ermöglichen und anzuregen als auch die Gemeinsamkeit und Zugehörigkeit aller zu pflegen. Die widersprüchlichen Pole Verschiedenheit und Gleichheit müssen durch eine dialektische Balance von Individualisierung und Gemeinsamkeit ausgeglichen und versöhnt werden“ (S. 55-

56). Diese beiden komplementären Grundmuster eignen sich für heterogene Lerngruppen, um der Verschiedenheit der Lernenden gerecht werden zu können (Rehle, 2009, S. 185-186). In Relation zu den individuellen Voraussetzungen und Bedürfnissen ist die fachliche Zielspanne auszuloten, in der sich verschiedene Kinder einem gemeinsamen Gegenstand sowohl individuell als auch gemeinsam annähern können, wobei die individuellen Ziele auf die gleiche fachliche Grundidee hin ausgerichtet sind (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 70).

Zeitgemäßer inklusiver Mathematikunterricht berücksichtigt die Heterogenität der Lerngruppe sowohl durch angemessene Unterstützung individueller Lernprozesse als auch durch gemeinsame Lernsituationen. Es werden einerseits individuelle Zugänge und andererseits Möglichkeiten ko-konstruktiver Erarbeitungen des gemeinsamen Gegenstands auf verschiedenen Niveaus ermöglicht (Korff & Schulz, 2017, S. 119). Dabei stellen Formen des individuellen und gemeinsamen Lernens allerdings keine "einfache[n] Gegensätze" (Korff, 2012, S. 152) dar, sondern es können sich in verschiedenen Situationen verschiedene Formen (inhaltlicher) Kooperation ergeben. Wocken (1998b) betont in diesem Zusammenhang das Ziel der Ausgewogenheit des „dialektisch[n] Spannungsverhältnis[ses] von individuellen und gemeinsamen Lernsituationen“ (S. 40). Es geht dabei um ein „so viel gemeinsam wie möglich, so viel individuell unterstützt wie nötig“ (Peter-Koop, Rottmann & Lüken, 2015, S. 6). Scherer (2017) hebt die Unabdingbarkeit hervor, „sowohl Phasen und Situationen des gemeinsamen Lernens sinnvoll zu planen als auch die Notwendigkeit individueller Lernsituationen zu identifizieren und zu ermöglichen“ (S. 195). Neben Phasen des individuellen und gemeinsamen Lernens bedarf es immer wieder gemeinsamer Austauschmöglichkeiten mit der gesamten Lerngruppe über den jeweiligen Gegenstand und die Ergebnisse. Hierfür eigenen sich besonders die Einstiegs- und/oder Reflektionsphasen einer Unterrichtsstunde (Krähenmann et al., 2015, S. 53). Für einzelne Lernende können sich weitere, außerhalb des Klassenunterrichts oder auch außerschulisch stattfindende Förderungen als sinnvoll und notwendig erweisen (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015b, S. 39). Diese sollten allerdings das „Ziel größtmöglicher Gemeinsamkeit“ (Scherer, 2017, S. 195) verfolgen.

In Anlehnung an Pool Mag und Moser Opitz (2014) gilt es in diesem Zusammenhang neben der inhaltsbezogenen auch die emotional-soziale Komponente zu berücksichtigen: gemeinsames Lernen kann im Rahmen der unterrichtsintegrierten Förderung zwar zum Abbau von Stigmatisierungseffekten führen, gleichzeitig kann aber auch häufiger ein

Vergleichsprozess auf Leistungsebene stattfinden, der wiederum zu geringeren leistungsbezogenen Selbstkonzepten führen kann (S. 144). Darüber hinaus stellt die Gemeinsamkeit in heterogenen Lerngruppen in Form von gemeinsamer Arbeit in gemeinsamen Lernsituationen keinen „Selbstläufer“ (Scherer, 2015, S. 280) dar, sondern bedarf immer wieder der erneuten Erarbeitung sowie der entsprechenden Erfahrungsmöglichkeiten für die Lernenden, die von der Lehrperson angeregt und begleitet werden müssen (Lütje-Klose & Miller, 2015, S. 15).

Eine weitere didaktische Leitidee, die im inklusiven Mathematikunterricht einen hohen Stellenwert einnimmt, ist die *Kommunikation*. Als bedeutsame Elemente einer fundamentalen Wissenskonstruktion im Rahmen des kindlichen Lernens werden nach Miller (1986) die interaktive Aushandlung, der konstruktive Austausch mit anderen sowie die Klärung fachspezifischer Einsichten angesehen. Bezogen auf die mathematische Lernentwicklung hat Krummheuer bereits 1992 die Sprache als zentrales Medium mathematischen Denkens und Handelns bezeichnet. Mithilfe von Sprache bauen Lernende tragfähige Vorstellungen zu fachspezifischen Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren auf (Wessel, Büchter & Prediger, 2018, S. 2). "Inhaltsbezogene soziale Aushandlungsprozesse" (Wielpütz, 2010, S. 110) stellen eine wichtige Voraussetzung für mathematische Lernprozesse dar, denn Mathematiklernen wird in einer „ganz konkreten schulischen Interaktions- bzw. Kommunikationssituation“ (Werner, 2019, S. 38) realisiert. Nach Werner (2019) ist Unterricht ein sozialer Prozess und die zentrale Aufgabe des Unterrichtens besteht darin, Kommunikationsangebote zu gestalten. Um individuell bedeutsam lernen zu können, bedarf es auf Seiten der Lernenden „aus dem Kommunikationsangebot (meist der Lehrkraft) die subjektiv bedeutsamen Informationsangebote herauszufiltern und in das eigene Wissensnetz zu integrieren, um die eigene Handlungsfähigkeit zu erweitern“ (S. 39). Mithilfe konkreter Kommunikationsanlässe und Möglichkeiten zur Sprachproduktion und -rezeption kann mathematisches Wissen dynamisch, in wechselseitigen kommunikativen Handlungen und in kommunikativem Austausch entwickelt werden (Brandt & Nührenbörger, 2009, S. 28). Der moderne Mathematikunterricht erfährt vor diesem Hintergrund eine deutliche Versprachlichung und die Bedeutung der Sprache für den Mathematikunterricht eine zunehmende Aufmerksamkeit. „Die individuelle Entwicklung mathematischer Begriffe erfolgt eben nicht im Zuge der stillen und zeitlich variierenden Bearbeitung von Aufgabenserien, sondern vielmehr im Zuge interaktiver

Begegnungen von Kindern, die sich über mathematische Erkenntnisse, Probleme und Zusammenhänge verständigen“ (Bartnitzky, 2012, S.33-34).

Das Kommunizieren stellt im Mathematikunterricht eine „wichtige, aber nicht triviale Kompetenz“ (Fröhlich & Prediger, 2008, S. 1) dar. „Der Austausch mit anderen Lernenden bildet dabei den Katalysator für die Entwicklung des mathematischen Denkens“ (Korff, 2016b, S. 102) und das Initiieren neuer Verstehensprozesse. Die individuelle Sprachkompetenz der Lernenden erhält eine relevante und voraussetzungsvolle Bedeutung für ein erfolgreiches Mathematiklernen und die partizipative Teilhabe und Teilnahme am Unterricht. An Verständnis orientierte Deutungs- und Aushandlungsprozesse, sowohl in Klein- als auch in Großgruppen, sensibilisieren die Lernenden für zugrunde liegende mathematische Strukturen. Dabei differiert jedoch zwischen den Lernenden das Ausmaß an Entdeckungen sowie der Kompetenzen, diese differenziert zu erfassen, zu begründen und zu beschreiben (Selter, 2006, S. 142). „Gemeinsames Kommunizieren und strittiges Argumentieren über Mathematik gewinnt gerade dadurch an Bedeutung, dass Kinder unterschiedliche Ideen produzieren und diese austauschen“ (Nührenbörger, 2011, S. 115). Unterschiedliche Lösungsvorschläge können zu „konstruktiven Irritationen“ (Brandt & Nührenbörger, 2009, S. 30) führen, die reflektiertes Nachdenken sowie Um- oder Neudeutungen des vorhandenen individuellen Wissens herausfordern und eine Weiterentwicklung mathematischer Kompetenzen begünstigen. Ruf und Gallin (2014) sprechen in diesem Zusammenhang von einem „Dialog unter Ungleichen“ (S. 15), in dem die Lernenden unterschiedliche Lernwege und Lösungsmöglichkeiten erkennen und durch den vergleichenden Austausch ihre eigenen Vorgehensweisen erweitern, differenzieren, verwerfen oder auch behaupten können.

Mathematik entsteht im Denken der Lernenden. Diese (mathematischen) Gedanken können wiederum sprachlich zum Ausdruck gebracht werden (Vollrath & Roth, 2012, S. 136). Die Sprache im Mathematikunterricht ist vielfältig. Sie reicht von der Umgangssprache über die Bildungssprache bis hin zur Fachsprache. Als Kommunikationsmedien umfasst sie neben Wörtern und Texten auch Zeichnungen, Bilder und Symbole. Im Unterricht ist die Doppelfunktion von Kommunikation respektive Sprache als Unterrichtsmedium einerseits und als Lerngegenstand i.S. der Fach- und Bildungssprache andererseits zu berücksichtigen (Werner, 2017b, S. 212). Durch Sprache werden fachliche Lernprozesse kommuniziert und sowohl mündlich als auch schriftlich vermittelt. Sprachkompetenz wird demnach sowohl für die Anwendung als auch Vertiefung erworbener mathematischer Kompetenzen erforderlich (Werner, 2019, S. 18). Prozessbezogene Kompetenzen wie Beschreiben, Erklären, Erläutern und Begründen bauen wesentlich auf die sprachlichen Kompetenzen der Lernenden auf. Um Sprache als Lernmedium einsetzen und zielführend anwenden zu können, muss diese gezielt erworben werden. Aber nicht nur die Sprachverwendung, auch das Sprachverstehen nimmt eine bedeutungstragende Funktion im Mathematikunterricht ein. Demzufolge stellt Sprache eine zentrale Lernvoraussetzung für die Partizipation im Mathematikunterricht dar (Werner, 2019, S. 18), die gleichzeitig aber auch für viele Kinder, nicht nur für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten oder Kindern mit Deutsch als Zweitsprache, zu einer Herausforderung und einem damit einhergehend Lernhindernis werden kann. Nach Wessel, Büchter und Prediger (2018) lassen sich insbesondere die bildungs- und fachsprachlichen Herausforderungen auf den vier Sprachebenen Wort, Satz, Text und Diskurs differenziert herausarbeiten. Mathematikunterricht sollte vor diesem Hintergrund auch immer ein sprachsensibler und sprachfördernder Unterricht sein (umfangreiche Forschungsarbeiten zur sprachintegrierten Förderung im Mathematikunterricht liefern Arbeitsgruppen um Prediger, u.a. Prediger & Wessel, 2012; Meyer, M. & Prediger, 2012; Wessel et al., 2018; speziell für die fach- und sprachintegrierte Förderung im Bereich des für die vorliegende Arbeit zentralen Themas des Bruchzahlverständnisses Wessel, 2015). Zu Beginn des mathematischen Lernverlaufs findet primär die natürliche Umgangssprache Anwendung, die ihrerseits bereits einige mathematische Begriffe enthält (bzw. Zahlnamen oder geometrische Bezeichnungen). Sukzessive erfolgt eine Verknüpfung mit mathematischen Fachwörtern und schließlich auch symbolischen Elementen, sodass eine fachgebundene Sprache entsteht (Vollrath & Roth, 2012, S. 137). Die mathematische Fachsprache bildet aufgrund ihrer fachgebundenen Begriffe sowie ihrer spezifischen Satzstrukturen und Textsorten die offensichtlichste Herausforderung auf sprachlicher Ebene im Mathematikunterricht (Meyer & Prediger, 2012, S. 2). Als ein verbindendes, fachunspezifisches sprachliches Mittel dient im charakteristischen Sprachgebrauch der schulischen Kommunikation die Bildungssprache, die sowohl von Lehrkräften verwendet wird als auch in Schulbüchern vorkommt. Bildungssprache ist komplexer, umfasst sowohl umgangssprachliche Elemente als auch Elemente der disziplinären Fachsprache und dient primär der Wissensvermittlung und Aneignung schulisch relevanter Inhalte (Werner, 2019, S. 46). Zwischen den verschiedenen Sprachen lassen sich jedoch keine klar abgrenzbaren, sondern eher fließende Übergänge feststellen, gleichwohl jedes

Sprachregister mit bestimmten Merkmalen charakterisiert werden kann (vgl. vertiefend u.a. Werner, 2019, S. 43 ff.). Im Rahmen eines kommunikationsintensiven Mathematikunterrichts ist das Zusammenspiel der Trias Aufgabe – Methode – Moderation von Bedeutung. Durch entsprechende Methoden lassen sich zahlreiche quantitative Kommunikationsanlässe schaffen, deren Qualität aber insbesondere von der Aufgabenbeschaffenheit abhängig ist. Authentische Kommunikationsanlässe ergeben sich erst durch die angemessene Kombination von Methode und Aufgabe sowie durch die geeignete Anknüpfung an die individuellen Vorerfahrungen, die wiederum eine stimmige Moderation durch die Lehrkraft erfordert. Eigenständiges Lernen wird durch die sinnvolle und zielführende Verbindung aller drei Komponenten der Trias ermöglicht (Fröhlich & Prediger, 2008, S. 8).

Um im Austausch und Diskurs über den gemeinsamen Lerngegenstand eine mathematisch ertragreiche Kommunikation zu erreichen, dürfen sprachliche und kommunikative Differenzen der Lernenden nicht zu groß werden, da ansonsten im Sinne Wockens (1998b) keine „echte“ kommunikative und kooperative Lernsituation möglich ist. Ein inklusiver Unterricht sollte daher auf die Identifikation sowie Minimierung bzw. den Abbau kommunikations- und sprachbedingter Barrieren ausgerichtet sein (Werner, 2017b, S. 212). Darüber hinaus gilt es, die sprachlichen Dimensionen sowohl bei der Planung, der Durchführung und der Auswertung von Unterricht zu berücksichtigen und diese immer wieder an die sprachlichen, fachlichen und methodischen Lernvoraussetzungen und Möglichkeiten der heterogenen Lerngruppe anzupassen (Wessel et al., 2018, S. 7).

In engem Zusammenhang mit der Kompetenz des Kommunizierens steht das *kooperative Lernen*. Kooperative Lernformen sollen die aktive Auseinandersetzung mit Lerninhalten initiieren und dabei sowohl die sozialen Kompetenzen der Lernenden fördern , als auch deren kognitive Kompetenzentwicklung unterstützen (Bosch, 2010, S. 19). Kooperatives Lernen stellt die sozial-kooperative Voraussetzung dar, gemeinsamen an fachspezifischen Aufgabenstellungen zu arbeiten (Brandt & Nührenbörger, 2009, S. 31). „It is principally through interaction with others that children find out what the culture is about and how it conceives of the world“ (Bruner, 1996, S. 20). Götze (2007, S. 30) definiert kooperatives Lernen als eine Verhaltensform „der sozialen Interaktion mit dem Ziel, für eine gemeinsam zu bewältigende Aufgabe gemeinsam die Lösung dieser Aufgabe zu erreichen. Kooperation ist als Zusammenarbeit zu übersetzen und damit ein Spezialfall sozialer Interaktion“. Hinter dem

Begriff der Kooperation bzw. des kooperativen Lernens steht der Anspruch, dass Lernende mathematische Problemstellungen „möglichst eigenständig durch gemeinsames Experimentieren und Diskutieren in Partner- und Gruppenarbeit” (Wember, 1988, S. 160) lösen. Die folgenden fünf Merkmale charakterisieren das kooperative Lernen: positive Interdependenz und individuelle Verantwortlichkeit sowie unterstützende Interaktion, soziale Kompetenzen und Reflexion des Gruppenprozesses. Für detaillierte Erläuterungen der Merkmale sei an dieser Stelle auf Johnson, D. W. & Johnson, 1999 und Slavin, 1995 verwiesen. Nach Wember (1988, S. 160) lässt sich der Nutzen sozialkooperativer Arbeitsformen mit den folgenden vier Aspekten hervorheben:

- Unterstützung der Konstruktion kognitiver Strukturen, indem Lernende andere Sichtweisen eines mathematischen Problems kennenlernen und diese im weiteren Lernverlauf mit ihrer eigenen koordinieren,
- Bearbeitung und Lösung mathematischer Probleme in der Sprache der Lernenden,
- Verhinderung passiver Übernahme vorgegebener medialer Lösungen bzw. Gedanken der Lehrkräfte,
- Ermöglichen des Erlebens der Selbstständigkeit der Lernenden und die Bewältigung mathematischer Probleme sowie den Aufbau neuer Erkenntnisse durch eigene Anstrengungen.

Dabei steht nicht die kooperative Lernform an sich im Vordergrund, sondern deren Funktion, „die grundlegenden mathematischen Strukturen und Beziehungen für Kinder auf kommunikativen Ebenen zugänglich zu machen“ (Brandt & Nührenbörger, 2009, S. 32).

Allerdings lernt man Kooperation nur durch Kooperieren (Wember, 2016a, S. 93), d.h. es müssen explizit Partner- und Gruppenarbeitsphasen sowie vertiefende Projektarbeitsabschnitte angeboten werden, die wirkliches Kooperieren ermöglichen. „Cooperation is much more than being physically near other students, discussion material with other student, or sharing material among students, although each of these is important in cooperative learning“ (Smith, 1996, S. 74). Substantielle Aufgabenformate, die eine produktive und operative Reichhaltigkeit aufweisen, können dabei unterstützen. Brandt und Nührenbörger (2009) sprechen in diesem Zusammenhang auch von diskursiven Lernumgebungen bzw. diskursiven Kontexten (Nührenbörger, 2011). Dabei bilden sowohl eigenständige Erkundungen als auch gemeinsame

Absprachen und Bearbeitungen die Grundlage für inhaltlich reichhaltige Diskussionen. Fokussiert werden sollen dabei primär Begründungen der individuellen mathematischen Denk- und Lösungsprozesse anstelle eines reinen Austausches über Lösungsschritte und -ergebnisse. Es sollten Aufgabenformate eingesetzt werden, die verschiedene Lösungszugänge auf verschiedenen Niveaus ermöglichen, die Schülerinnen und Schüler dazu anregen, ihr gemeinsames Lernen und die Entwicklung eines gemeinsamen Denkens interaktiv und kommunikativ zu koordinieren und alle Lernenden dazu auffordern, sich intensiv mit den Ideen und Lösungsvorschlägen der jeweiligen Kooperationspartnerinnen und Kooperationspartner auseinanderzusetzen (Brandt & Nührenbörger, 2009, S. 29). „In höchster Form wird kooperatives gemeinsames Lernen dann erreicht, wenn die Handlungsziele der Beteiligten sich weitestgehend angenähert haben oder gar ein gemeinsames Ziel angestrebt wird“ (Wocken, 1998b, S. 49).

Kooperative Lernformen sind sowohl aus fachdidaktischer als auch aus sonderpädagogischer Sicht relevant, da kooperatives Lernen kognitive Lernfortschritte fördert und zu einer kognitiven und sozialen Selbstständigkeit beiträgt und dadurch das kognitive mit dem affektiven Lernen verbindet (Wember, 1988, S. 160). Phasen der echten kooperativen Zusammenarbeit nehmen insbesondere auch in Bezug auf die soziale Eingebundenheit sowie das individuelle Kompetenzerleben eine bedeutsame Rolle ein (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013b, S. 6-7). „Das Verstehen von Mathematik ist [aber] im hohen Grade vom aktiven Erkennen mathematischer Zusammenhänge und der Ausdifferenzierung und Verallgemeinerung derselben durch interaktive Verständigungsprozesse abhängig“ (Häsel-Weide et al., 2014, S. 19).

Auch aus lerntheoretischer Sicht stellen die unterschiedlichen Anregungen und Perspektiven der Lernenden einen unerlässlichen Bestandteil der mathematischen Lernentwicklung dar (Korff, 2016b, S. 56). Da kooperatives Lernen im Gegensatz zu herkömmlichen Gruppenarbeiten auf den Umgang mit Heterogenität zielt, „lernen die Kinder, unterschiedliche Fähigkeiten und Ressourcen zu nutzen und mit Verschiedenheit umzugehen“ (Wittich, 2017, S. 63). Inklusives Unterrichten erfordert nach Carle (2017) aber auch „den Zusammenhalt der Kinder, um allen Kindern gleichermaßen ohne Selektion nach Herkunft, Lernvoraussetzungen oder z.B. Behinderungen“ (S.22) kooperatives Lernen in der Gemeinschaft zu ermöglichen. Kooperative Lernangebote bedingen eine allmähliche Integration in die alltägliche

Unterrichtspraxis, um möglichst von allen Lernenden produktiv aufgegriffen und genutzt werden zu können (Brandt & Nührenbörger, 2009, S. 32). Eine gemeinsame Erarbeitung, eingebettet in die klassenintegrierte Förderung, mit spezifischen Absprachen und einem gewissen, variierenden Strukturierungsgrad sind (zunächst) unerlässlich. Vertiefende Ausführungen zu theoretischen, praktischen und wissenschaftlichen Aspekten des kooperativen Lernens können interessierte Leserinnen und Leser u.a. bei Bosch, 2015; Brüning & Saum, 2009; Johnson, D. W. & Johnson, 1999; Konrad & Traub, 2016; Slavin, 1995 sowie Weidner, 2009 nachlesen.

Die didaktischen Leitideen der Kommunikation und Kooperation stehen in enger wechselseitiger Beziehung zueinander und werden oftmals als ein zusammenhängendes Konstrukt verstanden. Der *kooperative und kommunikative Austausch* über den Lerngegenstand nimmt im Fach Mathematik einen zentralen Stellenwert ein, wenn es um das Erkunden und Verstehen mathematischer Zusammenhänge und Beziehungen geht. „Da mathematische Verstehensprozesse im hohen Grade vom aktiven Erkennen mathematischer Zusammenhänge und der Ausdifferenzierung und Verallgemeinerung derselben durch interaktive Verständigungsprozesse abhängig sind, haben kommunikativ-kooperative Lernsituationen eine besondere Bedeutung für den Gemeinsamen Mathematikunterricht“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013b, S. 8). Interaktive und kommunikative Prozesse spielen bei der Konstruktion neuen Wissens eine entscheidende Rolle (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2010, S. 75). Darüber hinaus fordern Formen der kooperativ-kommunikativen Zusammenarbeit den Erwerb und die Anwendung verschiedener prozessbezogener mathematischer Kompetenzen heraus, wie bspw. das Darstellen, Beschreiben und Begründen (Werner, 2019, S. 130). Jeder innere Lernprozess verläuft zwar hochgradig individuell, jedoch ist der äußere Lernprozess auf sozial-interaktive Prozesse angewiesen (Bartnitzky, 2012, S. 33). Krauthausen und Scherer (2008) heben hervor, dass Wissen erst durch „den sozialen Prozess gemeinsamer unterrichtlicher Interaktion und Kommunikation“ (S.164) erzeugt werde. Dieses Wissen könne sich jedes Individuum dann wiederum selbst aneignen. Dabei stellt die Möglichkeit, „eigene Ideen zu entwickeln und über diese in den Austausch zu treten, um somit gemeinsame, an der Mathematik orientierte, Gespräche zu initiieren“ (Brandt & Nührenbörger, 2009, S. 29) eine elementare Voraussetzung gemeinsamer und kooperativer Lernprozesse dar. Um in einen fachlichen Austausch treten zu können, müssen sich die Lernenden allerdings „sprachlich, mit geeigneten didaktischen Materialien und/oder bildlichen Darstellungen ausdrücken und andersherum solche Äußerungen von anderen verstehen können, um gemeinsam Mathematik zu lernen“ (Vom Hofe & Tiedemann, 2017, S. 5). Vor diesem Hintergrund gilt es zu berücksichtigen, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler den gleichen Gewinn während einer solchen kommunikativ-kooperativen Lernphase erzielen und sich mit großer Wahrscheinlichkeit auch nicht gleichermaßen kommunikativ und verbal einbringen können (Höveler, 2016, S. 7).

> Auch wenn die Aufgabenstellungen unterschiedliche Vorgehensweisen oder Deutungen initiieren, bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass die Kinder unterschiedliche Deutungen vornehmen und diese auch verbalisieren oder zeigen. Eine diskursive Aufgabenstellung scheint somit eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für einen produktiven Austausch zu sein. (Häsel-Weide, 2016b, S. 367)

Grenzen kooperativer Lernformen bestehen oftmals in fehlenden, aber vorausgesetzten schriftsprachlichen oder umfassenden verbalen Kompetenzen (Korff, 2012, S. 142). Trotz bzw. aufgrund der individuell stark differierenden Bearbeitungs- und Kommunikationsniveaus ist es wichtig, dass immer wieder bewusst der gemeinsame Austausch und die Kooperation innerhalb einer heterogenen Lerngruppe angeregt wird (Häsel-Weide, 2015, S. 5). „Es erscheint paradox, aber die Vielfalt des mathematischen Denkens erfordert weniger die Trennung an Aufgaben und Themen hin zu einer scheinbaren vorzuorganisierenden Passung zwischen Kind und Mathematik, sondern vielmehr die Verknüpfung der unterschiedlichen Ideen“ (Nührenbörger, 2011, S. 115). Als essentielle Ressource kommunikativ-kooperativen Lernens wird die Verschiedenheit der Lernenden angesehen, die das Erreichen gemeinsamer Lernfortschritte begünstigen soll. Grundlegend ausgedrückt:

> Die Wertschätzung individueller Wahrnehmungs- und Betrachtungsweisen nimmt nicht nur Einfluss auf die Begegnungen mit dem anderen, sondern auch auf die Begegnungen mit den Dingen. Die Verschiedenheit der Zugänge und Perspektiven eines jeden Einzelnen auf einen jeden (Lern-)Gegenstand macht die Vielfalt spürbar, die diesem innewohnt“. (Platte, 2014, S. 83)

Zwar können sich bei der Annäherung an einen gemeinsamen Lerngegenstand individuelle Ziele und damit verschiedene Stufen eines Verständnisprozesses zwischen den Lernenden ergeben, allerdings „sind diese differenten Stufen auf die gleiche fachliche Grundidee ausgerichtet, sodass sich letztlich aus dem Fach heraus Formate des Austausches über gewonnene Erkenntnisse zwischen den Kindern ergeben“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 70). Vor diesem Hintergrund zeichnet sich ein inklusiver (Mathematik-) Unterricht dadurch aus, dass (möglichst) alle Schülerinnen und Schüler nicht nur anwesend sind, sondern auch kommunikativ teilhaben und teilnehmen können, um die Vielfalt des Faches zu erfahren. Das setzt wiederum die „Anerkennung einer grundsätzlichen Lern- und Kommunikationsfähigkeit aller Beteiligten“ (Werner, 2017b, S. 212) auf Seiten der Lehrkräfte voraus.

Um das enge Zusammenspiel zwischen fokussierter Förderung und Diagnose im Unterricht umsetzen zu können, sind *substantielle Aufgabenformate* und *Lernumgebungen* erforderlich, die sowohl diagnostische Erkenntnisse als auch handlungsleitende Einsichten für weiterführende Förderungen ermöglichen (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2012, S. 10-11). Dadurch erhalten sie eine relevante Bedeutung für das Prinzip der unterrichtsintegrierten Förderung. Substantielle Lernumgebungen gelten als eine „natürliche Erweiterung dessen, was man im Mathematikunterricht traditionell eine „gute bzw. eine substanzielle Aufgabe“ nennt“ (Hirt, Wälti & Wollring, 2008, S. 13). Als Lernumgebung wird eine große flexible Aufgabe angesehen, die „in der Regel aus mehreren Teilaufgaben und Arbeitsanweisungen [besteht, R.-F.K.], die durch bestimmte Leigedanken – immer basierend auf einer innermathematischen oder sachbezogenen Struktur – zusammengebunden sind“ (Hirt & Wälti, 2008, S. 13). Mathematikdidaktisch lassen sich substantielle Lernumgebungen als Aufgabenstellungen beschreiben, die „reichhaltige Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten bieten und Kinder zum Erkunden, Darstellen und Erörtern mathematischer Zusammenhänge anregen“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015b, S. 34). Dabei nimmt das fachliche Anregungspotential bzw. die fachliche Rahmung, d.h. die Ausrichtung an zentralen Zielen, Inhalten und Prinzipien des Mathematikunterrichts, eine besondere Bedeutung ein (Wittmann, E. Ch., 1998a, S. 337).

Substantielle Lernumgebungen lassen sich an die individuellen Gegebenheiten einer heterogenen Lerngruppe flexibel anpassen, denn sie ermöglichen einerseits unterschiedliche Zugänge zum Lerngegenstand, andererseits bieten sie im Sinne des Spiralprinzips vertiefende Erweiterungen. „In Lernumgebungen können langsam und schnell Lernende innerhalb des gleichen fachlichen Rahmens integriert gefördert werden. Dank der Offenheit und der Reichhaltigkeit der Aufgaben und Arbeitsanweisungen regen sie zum eigentätigen "Mathematik-Treiben" an und lösen Fachgespräche aus“ (Hirt & Wälti, 2008, S. 12). Die Arbeit an substantiellen Lernumgebungen ist demnach nicht auf ein generelles Ziel ausgerichtet, sondern ermöglicht ein differenziertes, aber inhaltlich aufeinander bezogenes Lernen aller Schülerinnen und Schüler (Häsel-Weide et al., 2014, S. 20). Vollrath und Roth (2012, S. 151) haben wesentliche Aspekte aufgelistet, die charakteristisch für Lernumgebungen sind:

- inhaltlich durchdachter Aufbau und fachliche Korrektheit
- vielfältige Zugänge zu einem mathematischen Phänomen
- Fokussierung des individuellen oder gemeinsamen selbstständigen Arbeitens
- Ermöglichung des entdeckendes Lernens
- Differenzierung durch hinreichend offene Medien, Materialien und Aufgabenstellungen
- Setzung eines methodischen und sozialen Rahmens
- Herausforderung von Kommunikation und Reflexion
- Aufforderungen zur Dokumentation der Ergebnisse
- Möglichkeit individuell abrufbarer Hilfestellungen

Substantielle Lernumgebungen umfassen in einem ausbalancierten Umfang sowohl Phasen des gemeinsamen Lernens, als auch individualisierte Phasen (Leuders & Wittmann, 2017, S. 195). Sie ermöglichen individuelle Entwicklungs- und Lernverläufe, die gleichzeitig eingebettet sind in sozial-interaktive Phasen innerhalb der gesamten Lerngruppe (Häsel-Weide et al., 2014, S. 20). Leuders und Wittmann (2017) schlagen als idealtypischen Ablauf folgende Strukturierung vor: gemeinsamer Beginn, individualisierte Arbeitsphase, gemeinsame Zwischenphase, weitere individualisierte Arbeitsphase und einen gemeinsame Abschluss. Dadurch werde sowohl den individuellen Lösungswegen Rechnung getragen, gleichzeitig aber die durchaus notwendige Systematisierung in Form von Strukturierungen und Zusammenfassungen, die Sicherung in Form von Dokumentation sowie die Wiederholung berücksichtigt (Leuders & Wittmann, 2017, S. 195). So wird einerseits das Grundwissen gesichert, andererseits entsteht durch die Betonung und Hervorhebung der zentralen Inhalte Zielklarheit und Transparenz für die Lernenden. Vertiefende Ausführungen zu dem Begriff der Lernumgebung können interessierte Leserinnen und Leser bei Hirt & Wälti, 2008 nachlesen. Nührenbörger (2011) gibt allerdings zu bedenken, dass eine noch so „sorgfältige Planung von Unterricht mit entsprechenden Aufgabenformate keine Lernprozesse garantieren [kann, R.-

F.K.], denn die Um- und Neudeutung mathematischer Strukturen wird erst im Unterrichtsgeschehen, im Diskurs, realisiert“ (S. 132).

Die didaktische Leitidee des *operativen Prinzips* lässt sich zurückführen auf Jean Piagets Theorie der Operation (1969), sowie auf die darauf aufbauenden Entwicklungen von Hans Aebli (u.a. 1963; 1985). Zugrunde liegt die durch Piaget geprägte Annahme, dass sich das menschliche, insbesondere kindliche Denken aus dessen Wahrnehmen und Handeln entwickelt. Es besteht eine Wechselwirkung zwischen dem erkennenden Subjekt und dessen Umwelt, die eine individuelle Wissenskonstruktion ermöglicht (Wittmann, E. Christian, 1985, S. 7). Denken kann als verinnerlichtes bzw. gedachtes Handeln verstanden werden (Scherer & Weigand, 2017, S. 36). Dabei stellen reale Handlungen an konkreten Objekten den Ausgangspunkt dar, die durch bild-, zeichen- oder symbolhaft unterstützte Handlungen weiter ausgebaut werden und sich schließlich in von konkreten Handlungen gelösten abstrakten oder formalen Handlungen als „die eigentlichen Denkoperationen“ (Scherer & Weigand, 2017, S. 36) ausprägen. Piaget beschreibt die verinnerlichten Handlungen als Operationen. Diese stehen in einem Beziehungszusammenhang und weisen die Eigenschaften der Reversibilität, der Kompositionsfähigkeit sowie der Assoziativität auf (Bauer, 1993, S. 77).

Aebli (2001, S. 102) hat drei sukzessive aufeinander aufbauenden Stufen für die allgemeine Didaktik und den Unterricht unterschieden: Zunächst arbeiten die Lernenden mit konkreten Materialien und Gegenständen (konkrete Stufe). Anschließend findet eine Auseinandersetzung mit bildlich dargestellten Gegenständen statt (figurale Stufe), bis letztlich eine zeichenhafte Darstellung der Gegenstände (symbolische Stufe) erfolgt. Um die nächste Stufe zu erreichen, sind sowohl die Reflektion über das eigene Handeln als auch dessen Verbalisierung relevant. Die „logische Struktur, das System der Beziehungen, das sich in der Operation ausdrückt“ ist nach Aebli (1976, S. 142) der zentrale Kern des operativen Prinzips, nicht die rezepthafte innerliche oder äußere Ausführung einer operativen Handlung. Unterricht, der nach dem operativen Prinzip gestaltet ist, ist ein Unterricht, „der das Denken im Rahmen des Handelns weckt, es als ein System von Operationen aufbaut und es schließlich wieder in den Dienst des praktischen Handelns stellt“ (Aebli, 1985, S. 4). Das Anliegen des Mathematikunterrichts sollte demnach darauf ausgerichtet sein, „äußeres Handeln der Schüler in ein inneres, gedankliches, logisch-strukturiertes Operieren [zu] über[zu]führen“ (Bauer, 1993, S. 77). Nach Wittmann (1985) ist das operative Prinzip gekennzeichnet durch einen „fundamentalen Dualismus unserer

Erkenntnistätigkeit: Wir nehmen einerseits statische (oder wenigstens vorübergehend statische) Elemente wahr, nämlich Objekte; andererseits wirken wir auf sie verändernd ein bzw. beobachten Prozesse, die sich aus ihrer Eigendynamik bzw. ihrer Dynamik innerhalb eines umfassenderen Systems ergeben [Hervorheb. im Original]“ (Wittmann, E. Christian, 1985, S. 9). In seinem bekannten Artikel „Objekte – Operationen – Wirkungen“ (1985) präzisiert Wittmann das operative Prinzip vor dem Hintergrund der Mathematikdidaktik wie folgt:

> „Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn sie auf Operationen (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden. Daher muß [sic.] man im Lern- oder Erkenntnisprozeß in systematischer Weise
>
> (1) untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,
>
> (2) herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden,
>
> (3) beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (Was geschieht mit ..., wenn ...?) [Hervorheb. im Original]“ (1985, S. 9).

Mit dem operativen Prinzip geht das *operative Üben* einher, dessen Ziel eine variable und sinnbezogene Festigung des erworbenen Wissens auf jeder der drei Stufen ist und das den Aufbau einer reversiblen, kompositionsfähigen und assoziativen Entwicklung von Operationen begünstigt. Anstelle eines mechanischen und gleichförmigen Übens wird bereits erlerntes Wissen „in variierenden Aufgabenstellungen gesichert und zu verwandten bzw. gegensätzlichen Operationen in Beziehung gesetzt“ (Wember, 2016a, S. 84). Nach Winter (1984) sollten bei operativen Übungen „gleichartige Übungsaufgaben [sollten] im Sinne des operativen Prinzips als systematische Variation der Daten erzeugt werden, um dadurch Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und somit Kenntnisgewinn zu erzielen“ (11). Das produktive Üben fokussiert die Systematik einer Mathematikaufgabe und ermöglicht das Durchdringen und Erfassen von Bezügen zwischen mathematischen Sachverhalten (Reiss & Hammer, 2013, S. 74). „Operativ üben bedeutet gerade nicht, Aufgaben in beliebiger Zusammenstellung und Reihenfolge zu präsentieren, sondern der Sequenz eine Struktur zu geben, die den Lernenden das Entdecken eigenständiger Bezüge ermöglicht“ (Reiss & Hammer, 2013, S. 75). Im

Mittelpunkt operativer Übungen steht die Exploration der Wirkungen von dynamischen Operationen auf statische Objekte, die durch die Frage „Was geschieht mit…., wenn….?" präzisiert werden kann. Das operative Üben vereint vielfältige systematische Veränderungen, die das „Durchdringen eines Problemkontextes in unterschiedlichen Richtungen" begünstigen und „den Aufbau eines Wissensnetzes unterstützen" (Reiss & Hammer, 2013, S. 78). Operative Variationen in einer geeigneten Aufgabenstellung ermöglichen das Erkennen struktureller Zusammenhänge, d.h. wenn eine Aufgabe in Beziehung zu weiteren Aufgaben steht, kann die Bearbeitung einer Aufgabe einen erkenntnisreichen Zugang zur Bearbeitung weiterer Aufgabenstellungen ermöglichen (Hußmann, Nührenbörger, Prediger, Selter & Drüke-Noe, 2014, S. 4-5). Eine durchaus kritische Betrachtung des operativen Prinzips können interessierte Leserinnen und Leser bei Bauer (1993) nachlesen.

Das *aktiv-entdeckende Lernen* gilt in der aktuellen Lehr- und Lernforschung als zentrales Prinzip fokussierter Förderung. Es erhielt besondere Bedeutung und Beachtung im Rahmen des Projekts „Mathe 2000", das von Müller und Wittmann Ende der 1980er Jahre an der Universität Dortmund initiiert wurde. Das aktiv-entdeckende Lernen lässt sich primär in primarstufenbezogener Literatur wiederfinden (u.a. Müller, G. N. & Wittmann, 1998; Winter, 1996), wird für den vorliegenden Kontext aber als gleichermaßen relevant für den Unterricht in der Sekundarstufe erachtet. Es gilt als Gegenposition zu dem behavioristisch geprägten kleinschrittigen Lernen und Üben, das durch belehrende Instruktionen, imitierendes Nachlernen sowie passive Wissensaufnahme charakterisiert ist und durch den Paradigmenwechsel im Lern- und Lehrverständnisses Mitte der 1980er Jahre in den Hintergrund getreten ist. Die dem Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens zugrunde liegende zentrale lehr- und lerntheoretische Bezugsgröße lässt sich auf die genetische Entwicklungspsychologie Jean Piagets sowie die darauffolgenden Entwicklungen von Aebli und Bruner zurückführen. Im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens wird Mathematik als Geisteshaltung verstanden, deren Erlernen ein „konstruktiver, eigentätiger und sozial situierter Prozess" ist (Korff, 2016b, S. 59). Als aktiv-entdeckendes Lernen kann ein Lernen bezeichnet werden, bei dem der subjektive, aktiv-entdeckende und konstruktive Prozess der Lernenden im Mittelpunkt steht. In der Auseinandersetzung mit ergiebigen Lerninhalten stellen die Lernenden strukturelle Beziehungen und Zusammenhänge her, knüpfen Verbindungen und konstruieren sich ihr mathematisches Wissen durch eigene kognitive Aktivitäten selbst. Die Schülerinnen und Schüler nehmen dabei eine Forscher-Rolle ein.

Der Mathematikunterricht sollte zahlreiche herausfordernde Möglichkeiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen des Lernprozesses zur Verfügung stellen. Es handelt sich um eine Kombination aus entdeckenden, reflektierenden und automatisierenden mathematischen Tätigkeiten (Leuders & Holzäpfel, 2011, S. 225). Lehrkräfte nehmen die Rolle einer Lernbegleitung ein, die durch das Angebot herausfordernder Sinnzusammenhänge, ergiebiger Aufgaben und Arbeitsmittel sowie durch Initiieren kommunikativen Austauschs die individuellen Lernprozesse der Lernenden organisieren. Dem liegt die sozial-konstruktivistische Annahme zugrunde, dass wirkungsvollere und nachhaltigere Erkenntnis- und Lernprozesse erfolgen können, wenn Kinder Mathematik durch aktives Tun, eigene Erfahrungen und ganzheitliche Zugänge erleben können. Winter (2016) vertritt die These, Mathematiklernen sei „umso wirkungsvoller […], je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht“ (S. 1). Derart gestaltete Lernprozesse regen einerseits zum selbsttätigen Lernen an, andererseits ermöglichen sie durch Interaktionen mit anderen Kindern den Austausch sinnstiftender Anregungen, das Mitteilen und Begründen von Entdeckungen sowie das Hinterfragen und Weiterentwickeln des eigenen Verständnisprozesses (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2010, S. 74-75).

Winter (1984, S. 6) stellt vereinfachend vier Phasen des aktiv-entdeckenden Lernens heraus, die nicht ganz trennscharf voneinander zu unterscheiden sind:

1. Auseinandersetzung mit herausfordernden Situationen, Explorationen sowie Entwicklungen von Problemstellungen
2. materialgestützte Simulation und Rekonstruktion sowie Entwicklung neuer Begriffsbildungen oder Verfahren, ggf. Lösung des Problems
3. Einbettung des neu erworbenen Inhalts in vorhandene Systeme
4. Reflektion der neuen Inhalte und Methoden, Thematisierung von Heurismen sowie Transferversuche

Der Ansatz des aktiv entdeckenden Lernens impliziert jedoch „nicht das *ausschließlich* entdeckenlassende Lernen“ [Hervorheb. im Original] (Leuders, 2007, S. 222). Nicht alle

Inhalte des Mathematikunterrichts lassen sich aktiv-entdeckend lernen, sondern es bedarf teilweise auch einer gewissen Organisation und Begleitung der Entdeckungsprozesse sowie der Einführung von Konventionen durch die Lehrkraft (Freesemann, 2014, S. 17).

Vor dem Hintergrund der Relevanz des kooperativen und kommunikativen Lernens lässt sich das aktiv-entdeckende Lernen nach Wielpütz (1998) wie folgt einordnen:

> Wissen, Verständnis sind konstruktiver Natur. Das eigene Lernen kann niemand stellvertretend übernehmen. Wissen und Verständnis sind aber auch das Ergebnis sozialer Verständigung: sie werden sozusagen "sozial ausgehandelt". Alle Kinder benötigen demnach Zeit und Gelegenheit, um eigene Vorstellungen zu entwickeln - aber auch Zeit und Gelegenheit zu Gesprächen über die Vorstellungen. (S. 11)

Die entdeckenden Aktivitäten sind in individuelle und sozial-interaktive Erkundungs- und Lernprozesse eingebettet (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015b, S. 33) und nehmen somit eine zentrale Bedeutung für den inklusiven Mathematikunterricht ein.

Eng verbunden mit dem aktiv-entdeckenden Lernen ist das *produktive Üben*, das als Gegensatz zu reiner Reproduktion und passiver Vermittlung des Lerngegenstands zu verstehen ist. Nach Winter (1984) wird stets „entdeckend geübt und übend entdeckt“ (S. 6-7). Im Rahmen des aktiv-entdeckenden Lernens erhält das Üben eine umfassendere Bedeutung, es geht mit der Erweiterung von Wissen einher und soll sich durch alle Phasen der Lernentwicklung ziehen. Der Prozess des Übens stellt keine isolierte Tätigkeit dar, sondern steht in enger Verbindung zum Unterricht sowie einem einsichtigen Verständnisprozess auf Seiten der Lernenden. Dabei folgt das Üben den Prinzipien der konsequenten und integrierten Wiederholung sowie der Stabilisierung (Scherer & Weigand, 2017, S. 33).

> Üben ist damit im wesentlichen [sic.] das Wiederaufnehmen eines (entdeckenden) Lernprozesses, das Nocheinmalnachbilden, Nocheinmalnachbauen von Lernsituationen. An der zunehmenden (und nicht schon gleich vermittelten) Mechanisierung von Verfahren, Verflechtung von Wissen, geläufigeren Handhabung von Strategien werden die Schüler bewußt [sic.] und aktiv beteiligt. (Winter, 1984, S. 10)

Produktive Übungen gelten als „Grundprinzip für die Gestaltung kognitiv aktivierender Übungen“ (Leuders & Holzäpfel, 2011, S. 225). Sie sollten in Anlehnung an das operative Prinzip in gleichartigen Übungsaufgaben wiederholt systematische Variationen enthalten, um das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten zu unterstützen. Dabei gilt als zentraler Ansatzpunkt ein selbstdifferenzierender Charakter der produktiven Aufgaben, der vom Fach her authentische Anlässe bietet und durch einen breiten Zugang zum Erkunden und Begründen elementarer mathematischer Strukturen und Zusammenhänge auffordert. Produktive (Förder-)Aufgaben zeichnen sich nach Häsel-Weide und Nührenbörger (2017c, S. 224-225) durch eine kurze, klar strukturierte Aufgabenstellung aus, die die Lernenden zum zielgerichteten Arbeiten anregt. Die Arbeitsphasen und -schritte werden durch Visualisierungen unterstützt, sodass eine Entlastung der Gedächtniskapazität zugunsten des Aufgabenverständnisses stattfindet. Um allen Lernenden einen Zugang zu ermöglichen und die Frustrationsgrenze gering zu halten, zeichnen sich produktive Aufgaben durch eine niedrige Zugangsschwelle aus. Durch sprachliche Aktivierungen und entsprechend umgesetzte Methoden kann zugleich eine sprachliche Förderung berücksichtigt werden. Darüber hinaus wird durch ganzheitliche Zugänge insbesondere Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten das Herstellen größerer Zusammenhänge ermöglicht (Scherer, 1994, S. 764) und Fehlvorstellungen lassen sich frühzeitig erkennen.

Die *Theorie der Darstellungsebenen* wurde, ebenso wie das Spiralprinzip, von Jerome Bruner (1974, S. 16–17, S. 49) geprägt und nimmt für den inklusiven Mathematikunterricht eine zentrale Bedeutung ein. Die individuelle Denkentwicklung ist nach Bruner eng verbunden mit unterschiedlichen Ebenen der Darstellung von Inhalten (Reiss & Hammer, 2013, S. 31). „Da normalerweise Kinder in ihrer Entwicklung von handelnder zu bildlicher und schließlich zu abstrakter Darstellungsweise fortschreiten, dürfte sich diese Reihenfolge als bestes Verfahren der Einführung empfehlen" (Bruner, 1974, S. 205). Somit kann die kindliche Wissensentwicklung durch eine schrittweise Repräsentation neuer Lerninhalte in enaktiven, ikonischen und schließlich in symbolischen Darstellungen unterstützt werden. Bruner fordert die optimale Abstimmung der drei verschiedenen Weisen der kindlichen inneren Darstellung von Erfahrungen aufeinander, die er Repräsentationsmodi nennt. Die enaktive Repräsentation bezieht sich auf „handlungsgebundenes Denken“ (Wember, 1988, S. 159), d.h. die Lernenden machen konkrete Erfahrungen durch Handlungen an konkreten Materialien und die Lernerfolge resultieren in Handlungskompetenzen. Die ikonische Repräsentation fokussiert das „wahrnehmungsgebundene Denken“ (Wember, 1988, S. 159), d.h. die Lernenden werden durch bildliche Darstellungen oder Vorstellungen darin unterstützt, sich ihre Rechenwege im Kopf zu vergegenwärtigen. Die symbolische Repräsentation spricht das „abstrakt-verbale[s]“ (Wember, 1988, S. 159) Denken an, d.h. durch sprachliche bzw. symbolische Darstellungen sollen die Lernenden mithilfe ihrer mentalen Vorstellungen die mathematischen Lernprozesse festigen.

Obwohl der Erwerb neuer Kompetenzen oft der Reihenfolge enaktiv – ikonisch – symbolisch folgt, strebt Bruner grundsätzlich einen häufigen Wechsel zwischen den verschiedenen Modi an: „Alles deutet darauf hin, daß [sic.] die Übertragung eines Wissensgebietes auf die drei Darstellungssysteme eine Veränderung und Bereicherung jedes Systems bewirkt“ (1974, S. 205). Den gleichen Lerngegenstand vor dem Hintergrund der verschiedenen Repräsentationsmodi zu bearbeiten soll die Konstruktion „generalisierbare[r], bewegliche[r] und systematische[r] kognitiver Strukturen“ (Wember, 1988, S. 159) ermöglichen. Es handelt sich also nicht um eine zeitlich aufeinander aufbauende, lineare Abfolge der Stufen, sondern um eng miteinander verbundene Ebenen, deren konstantes Zusammenspiel als „didaktische[r] Schlüssel zum fachlichen Verstehen“ (Leisen, 2005, S. 9) angesehen werden kann. Die stete Nutzung aller Repräsentationsmodi der Brunerschen Trias nimmt im Sinne des Spiralprinzips über alle Klassenstufen hinweg eine elementare Bedeutung für den Lernprozess ein. Die Lernenden bewegen sich je nach Inhaltsbereichen und individuellen Kompetenzen auf allen drei Ebenen, gleichwohl eine unterschiedliche Priorisierung in den unterschiedlichen Altersstufen stattfinden kann (Reiss & Hammer, 2013, S. 31). „Im Verlauf der intellektuellen Entwicklung des Menschen verschiebt sich der Schwerpunkt der Wissensrepräsentation immer mehr […]. Allerdings bleiben […] die verschiedenen Darstellungssysteme […] wirksam, besonders dann, wenn etwas noch relativ neu ist“ (Straka & Macke, 2002, S. 111).

Mithilfe der drei Formen enaktiv – ikonisch – symbolisch können kohärente mentale Repräsentationen aufgebaut werden, die ein nachhaltiges und transferfähiges Lernen ermöglichen. „Ein tragfähiger Aufbau von konzeptuellem Verständnis erfordert zum einen Rückbezüge auf bedeutungstragende inner- und außermathematische Kontexte, zum anderen sind strukturelle, innermathematische Vorstellungen und Darstellungen notwendig, die als Bezugspunkte für erfolgreiches Erlernen weiterführender mathematischer Inhalte dienen sollen“ (Hußmann et al., 2014, S. 4). Denn „wie ein Kind rechnet, hängt vor allem von seinen individuellen Vorstellungen von Zahlen und von den Rechenoperationen ab“ (Gerster, 2013, S. 195). Nach Leisen (2005) ist es „didaktisch klug, ja sogar zwingend“, den Wechsel der Darstellungsformen in das Zentrum der [Mathematik-, R.-F.K.] Didaktik zu stellen (S. 9). Es wird davon ausgegangen, dass ein umfassendes mathematisches Verständnis erworben wurde, wenn ein Kind in der Lage ist, eine Aufgabe auf allen drei Modi darstellen zu können („intermodaler Transfer“, Korff, 2016b, S. 71). Der wechselseitige Bezug der verschiedenen Repräsentationsmodi steht im Zentrum mathematischer Lernentwicklung (Korff, 2016b, S. 71). Darüber hinaus stellt der Darstellungswechsel einen zentralen Kommunikationsanlass für das gemeinsame Lernen dar und gilt als bedeutend für die sprachliche Förderung im inklusiven Mathematikunterricht (vertiefend dargestellt in Prediger & Wessel, 2012). Vor diesem Hintergrund wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Erweiterung der Brunerschen Trias durch Werner (2019) mit einer ergänzenden Ebene, der Sprache, zugrunde gelegt. Die besondere Funktion von Sprache resp. Kommunikation im Rahmen des intermodalen Transfers ist die Vermittlung zwischen den drei Repräsentationsmodi. Sowohl aus sonderpädagogischer als auch fachdidaktischer Sicht erweist sich das Durchlaufen der verschiedenen Repräsentationsmodi nach Bruner (1974) insbesondere für den inklusiven Unterricht als hilfreiche unterrichtliche Maßnahme, um allen Kindern durch unterschiedliche Zugangsmöglichkeiten das Lernen am gemeinsamen Gegenstand zu ermöglichen (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 49). Vor diesem Hintergrund schreiben Kahlert und Heimlich (2012) dem Prinzip der Darstellungsebenen einen „inklusiven Moment“ (S. 173-174) zu.

Jede der drei Repräsentationsmodi enthält mathematische Strukturen, die eine aktive Wahrnehmung und Interpretation auf Seiten der Lernenden erfordern. Zentral sind vor allem auf der enaktiven und ikonischen Ebene bedeutungstragende Handlungen und Veranschaulichungen, die eine Unterstützung für einsichtiges Lernen darstellen (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 254). Dem zugrunde liegt die Annahme, dass mathematischer Kompetenzerwerb im handelnden Umgang mit Wissen stattfindet (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 52). Die Darstellungsweisen nach Bruner sind jedoch zu unterscheiden von den Stufen des Verinnerlichungsprozesses des operativen Prinzips (Scherer & Weigand, 2017, S. 37), gleichwohl sie als didaktische Leitideen eng miteinander verbunden sind.

Eng verbunden mit der Brunerschen Trias der Repräsentationsmodi ist auch das *Prinzip der Anschauung* (Vollrath & Roth, 2012, S. 115). Im Folgenden werden die Begriffe Arbeitsmittel und Veranschaulichungen sowie als Oberkategorie der Begriff der didaktischen Materialien verwendet, gleichwohl es in der Fachliteratur eine Vielzahl an Bezeichnungen für die damit beschriebenen zahlreichen Angebote gibt (vgl. Krauthausen & Scherer, 2008, S. 240 ff.). Hinter diesem Prinzip steht die Entscheidung über die im Mathematikunterricht konkret eingesetzten

Repräsentanten und damit über die Art der Darstellung eines Lerngegenstands. Bei didaktischem Material handelt sich um ein „*vermittelndes Medium*“ [Hervorheb. im Original] (Söbbecke, 2008, S. 702), das die abstrakten mathematischen Strukturen, Muster und Beziehungen repräsentiert und für Kinder zugänglich macht. Als Arbeitsmittel werden in Anlehnung an Krauthausen & Scherer (2008) konkrete Materialien verstanden, mit denen Kinder mathematische Strukturen auf enaktiver Ebene handelnd erkunden können. Veranschaulichungen beziehen sich mehr auf ikonische Darstellungen, wobei es sich nicht nur um Bilder, sondern auch um symbolische Repräsentanten handelt. Der Einsatz von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen zielt nicht auf eine „schlichte >Vereinfachung< der Zugänge zu mathematischen Sachverhalten, sondern [auf] die Konstruktion und [der] [den] Aufbau klarer, tragfähiger mentaler Vorstellungsbilder“ (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 246), mithilfe derer mentale Operationen ausgeführt werden können. Eine zentrale Funktion von Arbeits- und Anschauungsmitteln ist demzufolge die Unterstützung der Entwicklung flexibler mathematischer Einsichten und innerer Vorstellungsbilder von Mustern und Strukturen. Diese sollen durch die aktive Auseinandersetzung mit dem Material entwickelt werden. Sorgfältig ausgewählte Arbeitsmittel und konkrete Modelle, die auf struktureller Ebene mit dem jeweiligen mathematischen Lerninhalt übereinstimmen, unterstützen den Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen (Schipper, 2009a). Konkreter gefasst: didaktisches Material dient einerseits als Mittel zur Zahldarstellung, d.h. zum Aufbau eines fundierten Zahlverständnisses, zum Erfassen struktureller Zahlbeziehungen sowie letztlich auch zum Aufbau von abstrakten Zahlvorstellungen. Andererseits ist es ein Mittel zum Rechnen, d.h. anhand der Arbeitsmittel und Veranschaulichungen lassen sich Rechenoperationen darstellen, aber auch unterschiedliche Denkschritte und Lösungswege miteinander vergleichen. Es dient somit auch als Argumentations- und Begründungsmittel und stellt einen zentralen Ausgangspukt für ein fachliches Nachdenken und Kommunizieren dar.

Mithilfe von sinnvoll gewählten Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen können handlungsorientierte oder bildhafte Zugänge realisiert werden, die eine reichhaltige Wahrnehmung des mathematischen Lerngegenstands unterstützen (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 53). „Aus dem spielerischen, handelnden, visuell orientierten Zugang entwickeln sich differenzierte Lernwege“ (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 53). In begrenztem Umfang können alltagsnahe Objekte erste Anknüpfungspunkte zu mathematischen Inhalten bieten.

Jedoch sollte der Schwerpunkt verstärkt auf strukturfokussierten didaktischen Materialien liegen, die „handlungsorientierte und reichhaltige Wahrnehmungen unterstützende Zugänge zur Mathematik“ realisieren (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 53). Diese verkörpern abstrakte mathematische Beziehungen, Strukturen und Gesetzmäßigkeiten, die nicht direkt sichtbar sind, sondern von den Lernenden erkundet und erfasst werden müssen. Didaktische Materialien sollten sich demnach durch eine „gewisse Merkmalsarmut und Vagheit“ (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 250) auszeichnen, um somit verschiedene Aspekte repräsentieren zu können und mehrdeutige Interpretationen möglich zu machen.

Bei der Auswahl didaktischer Materialien ist nach Wittmann & Müller (1993) zu berücksichtigen, „dass der Lernerfolg nicht mit der Masse der Materialien, sondern mit der Reichhaltigkeit und Intensität der Schüleraktivitäten steigt“ (S. 8). Das bedeutet für die Unterrichtsplanung, dass die Auswahl weniger, dafür immer wiederkehrender strukturfokussierter Arbeitsmittel und Veranschaulichungen zielführender ist als die Überfrachtung der Lernenden mit einer Vielzahl unterschiedlicher Materialien. Insbesondere vor dem Hintergrund inklusiver Unterrichtsplanungen spielt eine gewisse Sparsamkeit hinsichtlich des didaktischen Materials eine bedeutende Rolle, denn für Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten stellt „jedes neues Material eine eigene Fremdsprache“ dar (Lorenz, 2000, S. 21). Dennoch sollte der flexible Vorstellungsaufbau im Mittelpunkt stehen, der nicht zu eng an ein einziges Material gebunden ist (bspw. Aufbau des Stellenwertverständnisses anhand des Dienes-Materials (enaktiv), einer Stellenwerttafel mit Wendeplättchen (enaktiv-ikonisch), Zeichnungen (ikonisch) und der Darstellung der Zahlen in der Stellenwerttafel (symbolisch)). Weiterhin ist darauf zu achten, dass die ausgewählten Darstellungsmittel im Sinne des Spiralprinzips über die verschiedenen Schuljahre hinweg fortsetzbar sind, um einen kontinuierlichen Lernprozess zu unterstützen (bspw. Dienes Material, Punktefelder etc.). Die Lehrkraft sollte eine Vorbildrolle einnehmen und ganz selbstverständlich den „Gebrauch von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen modellieren“ (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 255), sodass deren Einsatz für die Lernenden vertraut ist. Dabei ist ein selbstverständlicher Nutzen der Materialen bei allen Kindern anzustreben, nicht nur für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten. Wichtig zu beachten sind die jeweils spezifischen mathematischen Aspekte, welche die unterschiedlichen didaktischen Materialien verdeutlichen. Nicht jedes Material ist für jeden Zweck geeignet und es gilt, die jeweiligen Grenzen zu berücksichtigen (Schmassmann & Diener, 2014, S. 9, S. 11).

Bei Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen stellt sich die Frage, ob diese immer Lernhilfe oder auch Lernstoff sind. Lernhilfe meint, dass das eingesetzte Material das Lernen unterstützt, indem es nicht sofort die richtig Lösung präsentiert, aber den Lernenden hilft, zutreffende Grundvorstellungen von mathematischen Strukturen und Operationen aufzubauen. Lernstoff bezieht sich darauf, dass das Material selbst zum Lerngegenstand werden kann, weil es in der Regel nicht selbsterklärend ist. Bei den Lernenden ist ein „aktiver und individueller Deutungs- und Konstruktionsprozess" (Söbbecke, 2008, S. 701) notwendig. Besondere Relevanz trägt der „Übergang vom Blick zum Durchblick" (Winter, 1998, S. 76). Für den Unterricht ist demnach eine sorgfältige Auswahl und Einführung des Materials durch die Lehrkraft erforderlich, weil die Schülerinnen und Schüler zunächst den jeweiligen Nutzen sowie die zielgerichtete, reflektierte Anwendung der Materialien erkunden und erlernen müssen. Darauf aufbauend können dann innermathematische Strukturen und Beziehungen von den Lernenden entdeckt, gemeinsam untersucht, verstanden und versprachlicht werden (Schmassmann & Diener, 2014, S. 9).

Vor dem Hintergrund der großen Stofffülle besteht oftmals die Gefahr, dass die Arbeit mit konkreten Materialien vorschnell beendet wird, um zugunsten eines formalen Vorgehens fortschreiten zu können (Schmassmann & Diener, 2014, S. 9). Eine übereilte Ablösung kann allerdings schnell zu mangelnder Einsicht in die Struktur des Materials und somit in die Struktur des Lerngegenstandes führen. Insbesondere Kinder mit (besonderen) Schwierigkeiten benötigen ausreichend Zeit, um didaktische Arbeitsmittel und Veranschaulichungen zielgerichtet nutzen zu können. Zwar werden Lernschwierigkeiten durch deren verständigen Nutzen nicht verhindert, „aber sie werden entschärft" (Schmassmann & Diener, 2014, S. 11). Die gemeinsame Kommunikation über das eingesetzte Material ist von besonderer Relevanz (Söbbecke & Welsing, 2016, S. 74). Nicht nur, um die innermathematischen Strukturen zu erfassen, sondern auch, damit die heterogene Schülerschaft mithilfe des gleichen Materials verschiedene Sichtweisen entwickeln kann. Dazu müssen kommunikative Mittel bereitgestellt und deren sprachliche Nutzung unterstützt werden, damit die Lernenden die jeweilige Funktion eines Arbeitsmittels oder einer Veranschaulichung ausdrücken können.

Bei einer fortschreitenden, abstrakter werdenden mathematischen Lernentwicklung darf eine Ablösung von den didaktischen Materialien nicht vernachlässigt werden. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass diese Ablösung nicht endgültig ist, sondern dass die Lernenden im Sinne des Spiralprinzips immer wieder Möglichkeiten erhalten, auf Material zurückgreifen zu können, „um bereits gewonnene Einsichten und Vorstellungen in Erinnerung zu rufen und zu festigen“ (Schmassmann & Diener, 2014, S. 9). Über die Schuljahre hinweg finden Arbeits- und Anschauungsmittel zunehmend ihren Einsatz, um „Rechen- oder Denkwege zu zeigen und Ergebnisse selbstständig zu überprüfen“ (Schmassmann & Diener, 2014, S. 9). Den Ablösungsprozess unterstützend sollten gezielte Übungen eingesetzt werden, die den Aufbau individueller mentaler Bilder begünstigen und somit das mentale Operieren in den Mittelpunkt stellen (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 256).

Vor dem Hintergrund aktueller Diskussionen um eine inklusiv orientierte Didaktik spielen nicht nur die hier dargelegten didaktischen Leitideen an sich eine zentrale Rolle für einen qualitativ hochwertigen inklusiven Mathematikunterricht, sondern vielmehr deren „möglicher Beitrag für die Sicherung und Teilhabe an den gemeinsamen Lehr- und Lernprozessen“ (Werner, 2019, S. 168).

2.3.2 Kriterien „guten“ inklusiven Mathematikunterrichts

Die Qualität der Unterrichtsgestaltung nimmt eine zentrale Rolle ein, wenn es um erfolgreichen inklusiven Mathematikunterricht geht (Scherer, 2018, S. 41). Dabei ist ein qualitativ hochwertiger Unterricht „wahrscheinlich für den weniger begabten Schüler noch wertvoller als für den Begabten, denn jener wird leichter als dieser durch schlechten Unterricht aus der Bahn geworfen" (Bruner, 1970, S. 23). Die bekannten grundlegenden Kriterien und allgemeinen Gelingensbedingungen für einen guten Unterricht (u.a. Helmke, 2015; Meyer, H., 2018) werden in inklusiven Unterrichtssettings durch die heterogenen Lerngruppen nicht außer Kraft gesetzt, sondern haben aufgrund vielfacher Überschneidungspunkte weiterhin ihre Gültigkeit. Vor dem Hintergrund der von Scherer beschriebenen „besondere[n] Facette“ (2015, S. 267) des bereits existierenden Heterogenitätsspektrums sei allerdings eine unabdingbare Weiterentwicklung des Unterrichts erforderlich. Inklusiver (Mathematik-) Unterricht kann als „verfeinerter guter Unterricht“ (Carle, 2017, S. 29) angesehen werden. Dabei stellen sich die folgenden Fragen für einen inklusiven Unterricht möglicherweise noch dringlicher: Für wen soll Unterricht „gut“

sein? Für welchen Lernbereich ist der Unterricht gedacht? Hinsichtlich welcher Ziele soll Unterricht „gut“ sein? (Wember, 2016a, S. 86). Nach Korff (2016b) bedarf es „letztlich keiner neuen, anderen Fachdidaktik, sondern schlicht einer konsequenten Umsetzung der Prinzipien guten Mathematikunterrichts für alle Lernzugänge und Lerninhalte“ (S. 80) in Verbindung mit zentralen sonderpädagogischen Prinzipien. Sie schlägt folgende, für generelle mathematische Lernprozesse geltende Wechselbeziehungen vor, um den Herausforderungen eines „Mathematikunterricht[s] ohne Ausschluss“ (S. 81) begegnen zu können:

- Notwendige Maßnahmen zur Orientierung und Strukturierung sind stets in die inhaltliche Komplexität der Lerninhalte und Lernanlässe einzubinden, sodass Inhalte nicht reduziert oder Schwierigkeiten isoliert werden.
- Eine anschauliche Handlungsorientierung ist um die Auseinandersetzung mit fachlich relevanten Inhalten und damit an der Entwicklung mathematischen Verständnisses auszurichten.
- Die Einbindung von Alltags- und Lebensweltbezug ist innerhalb einer fachlichen Strukturorientierung vorzunehmen. Ein verständiger Bezug beider Aspekte ermöglicht sowohl „eine Umwelterschließung mit mathematischen Mitteln“ als auch eine „Erarbeitung mathematischer Strukturen in der Umwelt“ (2016b, S. 81).
- (Diagnostische) Kenntnisse über verschiedene Schritte der mathematischen Entwicklung sowie darin enthaltener Hürden sind im Sinne einer Einordnung und Begleitung individueller Lernwege sowie Unterstützung der selbsttätigen Strategieentwicklung einzubeziehen.

Erweiternd können für inklusive Lerngruppen gewisse Grundmuster der Unterrichtsorganisation und -methodik hervorgehoben werden, die „die Verschiedenheit der Kinder als Vorteil für das individuelle und gemeinsame Lernen“ (Rehle, 2009, S. 183) nutzbar machen. Guter inklusiver Mathematikunterricht zielt insbesondere auf förderliche fachliche Lernprozesse bei allen Schülerinnen und Schülern einer heterogenen Lerngruppe und legt im Allgemeinen die gleichen Prinzipien zu Grunde, die u.a. Wittmann (1995a) und Müller (1995) für einen kindgerechten und fachlich bedeutsamen Mathematikunterricht formuliert haben: aktiv-entdeckendes und sozial-interaktives Lernen, produktives und beziehungsreiches Üben, Einsatz substantieller Aufgaben, Vernetzung von Darstellungsformen sowie Anwendungs- und Strukturorientierung (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 10). Häsel-Weide und

Nührenbörger (2017b, S. 12) heben darüber hinaus die Verbindung zwischen individuellen und gemeinsamen Lernprozessen einerseits sowie zwischen kooperativ aktiv entdeckenden Schüleraktivitäten und angemessenen Instruktionen der Lehrpersonen andererseits hervor. In Anlehnung an die verschiedenen Lernsituationen sollte ein hochwertiger inklusiver Unterricht nach Jenessen und Wagner (2012) „Lernangebote umfassen, in denen in heterogenen Gruppen gemeinsam an gemeinsamen Gegenständen zieldifferent gelernt werden kann, in denen in heterogenen und/oder homogenen Gruppen an verschiedenen Gegenständen zieldifferent gelernt werden kann und in denen zieldifferent in exklusiv-individuellen Einzelsituationen gelernt werden kann“ (S. 341).

Inklusiver Mathematikunterricht bedarf also einer gewissen Strukturierung, die jedoch nicht instruktiv von der Lehrperson vorgegeben wird, sondern sich stark an der Heterogenität der Lernenden orientiert und aus der Fachlichkeit heraus entsteht. In Verbindung mit einer differenzsensiblen Unterstützung soll jedes Kind die Möglichkeit der fachlichen Teilhabe erhalten. Es gilt stärker denn je zu beachten, dass die „individuellen Stärken und Schwächen eines jeden Kindes (an)erkannt, berücksichtigt und unterstützt sowie produktiv fachlich aufeinander bezogen werden“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 11). Neben den fachlichen Komponenten spielen bewährte sonderpädagogische Ansätze eine zentrale Rolle, die es miteinander zu verbinden gilt: Eine Anpassung der mathematischen Aufgaben an die individuellen Kompetenzen und Bedürfnisse der Lernenden unter Zuhilfenahme spezifischer handlungs- und materialgebundener sowie sprachsensibler Unterstützungs- und Erweiterungsangebote, die verschiedene Sinneskanäle ansprechen, eine Lebensweltorientierung aufweisen und das fokussierte Lernen ermöglichen (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 12). Für alle Lernenden, besonders für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten, nimmt die sozial interaktive Eingebundenheit im inklusiven Mathematikunterricht eine nicht zu unterschätzende relevante Bedeutung ein. Wember (2017) spricht in diesem Zusammenhang von Kompetenzerleben. Kinder können sich dann als kompetent empfinden, wenn sie das Erreichen eines sinnvollen Zieles anstreben, sich diesbezüglich aktiv bemühen und erfahren können, dass ihre Anstrengungen sie (näher) an das Ziel gebracht haben (Wember, 2017, S. 58). Dazu bedarf es Aufgabenstellungen, die einen realistischen und für das Kind sinnvollen Alltagsbezug aufweisen, das Interesse wecken und dadurch die aktive Auseinandersetzung anregen. Carle (2017, S. 19-20) schätzt zwei grundsätzliche Aspekte als konstituierend für inklusiven Unterricht ein, die es miteinander in Verbindung zu bringen gilt:

1. die Lerngemeinschaft, in der jedes Kind in seiner Individualität wertgeschätzt wird und einen Platz findet, in der es sich durch Auseinandersetzung mit den Positionen der anderen und durch gemeinsames Handeln entwickeln kann sowie
2. die Lerninhalte und -aufgaben, die für jedes Kind mehrdimensional persönliche Anknüpfungspunkte, bewältigbare Herausforderungen, eine gute Basis für die Aneignung des Weltwissens und die Einübung in die Grundlagen dafür bieten.

Vor dem Hintergrund der Verbindung fachdidaktischer und sonderpädagogischer Expertise hebt Werner (2019, S. 171) zusammenfassend u.a. folgende Aspekte als „Wesensmerkmale inklusiven Mathematikunterrichts" hervor, die auch im Kontext der vorliegenden Arbeit zentrale Bedeutung einnehmen:

- grundsätzliche Anerkennung einer Lern-, Kommunikations- und Dialogfähigkeit aller Beteiligten,
- sprachlich-kommunikative Barrierefreiheit zur Sicherung der Teilhabe aller Schüler am Unterricht: Gestaltung eines kommunikationsförderlichen und sprachsensiblen Fachunterrichts,
- Gestaltung eines differenzsensiblen Unterrichts, der die Balance zwischen pädagogisch-didaktisch sinnvollen Kategorien und individuellen, spezifischen Bedarfslagen herstellt.

Die Lehrkräfte stehen in der Verantwortung, die genannten Aspekte in einen derart organisatorischen und fachlichen Rahmen einzubinden, der individuelles und eigenaktives Lernen ermöglicht(vgl. Korff, 2016b, S. 35). „Ein guter [inklusiver, R.-F.K.] Unterricht benötigt beides: sowohl eine methodisch gut vorbereitete Lehrerinstruktion wie auch optimal gestaltete Lernumgebungen für die vielfältigen Konstruktionen der Schülerinnen und Schüler" (Reinmann-Rothmeier & Mandl, 2001, S. 624 ff.). Eine angemessene Balance zwischen konstruktiven und instruktiven Phasen sowie zwischen Inventionen und Konventionen stellt eine wesentliche Grundlage für erfolgreiches Mathematiklernen dar (Leuders, 2007, S. 222; Schipper, 2009a, S. 34 ff.). Wocken (2015) spricht in diesem Zusammenhang von einem „heterogenitätsadaptiver[n] Unterricht", der variierende Lehr- und Lernformen bereithält, dabei nicht nur inhalts- und zieldifferent ausgerichtet, sondern auch „wegdifferent“ gestaltet ist. „Die Erkennungsmelodie eines inklusiven Unterrichts ist die Vielfalt der Methoden“ (S. 124).

Guter inklusiver Mathematikunterricht bedarf eines diagnosegeleiteten Blicks der Lehrkraft, um die Balance zwischen individuellem und gemeinsamem Lernen auf die Kompetenzen der einzelnen Lernenden abzustimmen und daraufhin entsprechende Lernangebote anzubieten. „Equity, therefore, requires practitioners who understand the importance of teaching the same thing in different ways to different students, and of teaching different things in different ways to the same students” (Ainscow, Dyson, Goldrick & West, 2013, S. 203). Dazu ist einerseits ein „fachlich und fachdidaktisch fundiertes Wissen und Können über verschiedene spiralig miteinander verbundene Aspekte einer mathematischen Grundidee“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 18) erforderlich. Anderseits bedarf es einer sonderpädagogischen Fachkompetenz, „um Adaptionen bezogen auf den individuellen Unterstützungsbedarf vorzunehmen, die zur individuellen Zone der nächsten fachlichen Entwicklung des Kindes passen“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 18). Um dem Anspruch eines guten inklusiven Mathematikunterrichts gerecht werden zu können, wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit die enge wechselseitige Verknüpfung fachlicher, fachdidaktischer und sonderpädagogischer Kompetenzen verfolgt (vgl. Kap. 2.3.4). Das bedeutet konsequenter Weise auch, dass eine enge Kooperation, im Idealfall team teaching, zwischen Regelschullehrkräften und Förderschullehrkräften stattfinden muss. Wember (2013) konstatiert folgerichtig, dass beide Professionen „in der inklusiven Schule nicht nur zusammen arbeiten, sondern zusammenarbeiten“ (S. 383) müssen.

In einem guten inklusiven, nicht ausgrenzenden Unterricht erfährt das zieldifferente Lernen insbesondere für Lernende mit Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung im Bereich des Lernens und der geistigen Entwicklung Bedeutung. Ursprünglich eher sonderpädagogisch geprägt, gilt es vor dem Hintergrund der in Kapitel 2.1.2 dargelegten Heterogenität inklusiver Lerngruppen auch aus fachlicher Sicht, die unterschiedlichen Differenzlinien zu berücksichtigen und jedes Kind in seiner aktuellen Entwicklung zu unterstützen. Zieldifferenz weist vor dem Hintergrund heterogener Lernvoraussetzungen auf die Notwendigkeit individueller Lernzugänge (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 70) sowie die Berücksichtigung zieldifferent angelegter Bildungsgänge hin. In Anlehnung an das Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit wird entgegen dieser Ausführungen nicht die

Lernzieldifferenz zugrunde gelegt, sondern zunächst eine zielgleiche, wenn auch sehr differenzierte Förderung verfolgt, die zwar eine gewisse Offenheit für zieldifferentes Lernen aufweist, Lernende aber nicht von vornherein einordnet.

Die Ausführungen zu einem „guten“ inklusiven (Mathematik-)Unterricht verdeutlichen den hohen Anspruch, den Füssel und Kretschmann bereits 1993 als „Qualitäts-Exklusivitäts-Dilemma“ (S. 43) beschrieben haben. Sowohl die didaktischen Leitideen als auch die Konkretisierungen für guten inklusiven Mathematikunterricht stellen Orientierungspunkte dar, die stets vor dem Hintergrund der jeweiligen Bedingungen einer „pädagogischen Interpretation und eigenständigen Übertragung in bewusst gestaltete Praxis bedürfen“ (Wember, 2015, S. 457). Die hier dargestellten Aspekte sollen nicht suggerieren, dass es „*den* guten inklusiven Unterricht und damit verbunden den einen Weg zu einer inklusiven Unterrichtsgestaltung“ [Hervorheb. im Original] (Werning, B. & Arndt, 2015, S. 86) geben kann. Vielmehr ist eine sensible Adaption an die Bedürfnisse der jeweiligen Lerngruppe vorzunehmen.

2.3.3 Differenzsensible Unterrichtsplanung

Die Weiterentwicklung eines inklusiven Bildungssystems im Sinne der VN-BRK ist wesentlich auf die Konzeption und Umsetzung eines inklusiv orientierten Unterrichts angewiesen. Dabei stellt die Weiterentwicklung des Unterrichts „ein Kernthema der inklusiven Schulentwicklung“ dar (Budde & Blasse, 2017, S. 239). Die Realisierung eines Unterrichts für Kinder und Jugendliche mit sehr unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und -potentialen bedarf einer differenzsensiblen Planung und Gestaltung. Diese sollte in ausgewogener Weise die in den beiden vorherigen Teilkapiteln beschriebenen Leitideen und Kriterien guten inklusiven Mathematikunterrichts umfassen. Wenn im weiteren Verlauf von einem guten inklusiven bzw. differenzsensiblen Mathematikunterricht gesprochen wird, wird die in Kapitel 2.2.4 spezifizierte Verknüpfung sonderpädagogischer und fachdidaktischer Perspektiven zu einer inklusiv orientierten Didaktik zugrunde gelegt.

Entsprechend der allgemeinen Zielsetzung der vorliegenden Arbeit steht bei den folgenden Überlegungen explizit die Entwicklung eines guten inklusiven Mathematikunterrichts für alle Lernenden unter Berücksichtigung ihrer vielfältigen personellen Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen sowie situativen Lern- und Entwicklungsbedingungen

(Wember, 2009a, S. 89) im Mittelpunkt. Es soll der Anspruch erfüllt werden, allen Kindern entsprechend ihres individuellen Entwicklungsstandes einen Zugang zu einem aktivierenden Unterricht mit sozialen Begegnungen und der Befriedigung individueller Bedürfnisse zu ermöglichen. Zwar wird der Blick fokussierend auf Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten beim Mathematiklernen gerichtet, dies bedeutet jedoch nicht, dass es einer ‚besonderen' Unterrichtsplanung für eben diese Schülerinnen und Schüler bedarf.

Nachfolgend wird insbesondere vor dem Hintergrund der Ausführungen der Spannungsfelder und Herausforderungen (Kap. 2.1.1) dargelegt, wie durch eine differenzsensible Gestaltung des gemeinsamen Mathematikunterrichts eine Balance zwischen den verschiedenen Polen angestrebt und erreicht werden kann. Differenzsensibel meint an dieser Stelle, alle Kinder aktiv, kooperativ und individuell am Mathematikunterricht teilhaben und von ihm profitieren zu lassen. Im Sinne der Anschlussfähigkeit gilt es, den Unterricht sensibel vor dem Hintergrund verschiedener Differenzlinien zu planen, d.h. verschiedene Niveaus, Verständnisse und Tempi in den Lernentwicklungen zu berücksichtigen.

Die Kernfragen, die sich bei einer differenzsensiblen Unterrichtsplanung stellen, beziehen sich sowohl auf die fachliche, inhaltsbezogene Ebene und die Frage „Was soll gelernt werden?", als auch auf die methodische Ebene und die Frage „Wie soll gelernt werden?". Korff (2016b, S. 38) hebt jedoch hervor, dass die mit den beiden Kernfragen eng zusammenhängende Frage „Mit wem soll gelernt werden?" vor allem in heterogenen Lerngruppe häufig nur verkürzt durch methodische Aspekte, wie bspw. verschiedenen Sozialformen, beantwortet wird. Im Sinne einer inklusiv orientierten Didaktik geht es jedoch darum zu hinterfragen, „wie unterstützt werden kann, dass alle Lernenden alles für sie an dem jeweiligen Gegenstand Wichtige lernen können und wie sich in diesem Kontext das Verhältnis von Gemeinsamkeit und Verschiedenheit darstellt" (Korff, 2016b, S. 37). Um beide Ebenen gleichermaßen in der Unterrichtsplanung zu berücksichtigen, sollten „Vielfalt und Gemeinsamkeit [auch verstärkt] in inhaltsbezogene didaktische Entscheidungen" (Korff, 2016b, S. 37) miteinbezogen werden. „Die Zielperspektive schulischer Inklusion ist nicht zuletzt mit grundlegenden didaktischen bzw. fachdidaktischen Fragen verknüpft, die die Planung und Gestaltung von Lernumgebungen in inklusiven Settings betreffen" (Riegert et al., 2017, S. 177). Nach Wielpütz (1998) ist es offensichtlich, dass „die Frage, wie gelernt wird, von der Frage, was (woran) gelernt wird, nicht getrennt werden kann" (S. 10). Unterricht differenzsensibel zu planen erweist sich als ein komplexer Vorgang. „Differenzsensibel unterrichten beinhaltet also eine reflektierte Planung im Horizont der Zielperspektive einer optimalen Lern- und Entwicklungsförderung der Schüler/innen“ (Holzbrecher, 2015, S. 354).

Als theoretische Fundierung der im Rahmen dieser Forschungsarbeit entwickelten Förder- und Unterrichtskonzeption wird im Folgenden ein Planungsraster entworfen, das bereits existierende Leitfragen für die Entwicklung inklusiver Unterrichtsstrukturen miteinander verbindet (vgl. u.a. Behrensen et al., 2015; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a; Häsel-Weide & Prediger, 2017 sowie *Mathe inklusiv mit PIKAS.* (https://pikas-mi.dzlm.de/node/272, 17.10.2020)) und für den vorliegenden Kontext erweitert (vgl. Abb. 4). Es wird in Anlehnung an Klafkis bildungstheoretische Didaktik eine analytisch zu verstehende Unterscheidung zwischen zentralen, in wechselseitigem Bezug und Abhängigkeit zu einander stehenden Strukturelementen vorgenommen, d.h. zwischen der didaktischen Kernfrage (Inhalt und Perspektiven) einerseits sowie methodischen Fragen (Handlungsmuster, Beziehungen sowie Raum und Zeit) andererseits (Korff, 2016b, S. 36). Anhand des mehrschrittigen Planungsrasters soll die Komplexität der differenzsensiblen Unterrichtsplanung reduziert und der Fokus auf die zentralen Planungs- und Entscheidungsfelder gerichtet werden. Dabei wird keine Gewichtung oder zeitliche Nachrangigkeit vorgenommen. Vielmehr gilt es, alle relevanten Aspekte gleichermaßen im Planungsprozess zu berücksichtigen und die Passung zwischen allen Planungsschritten in den Mittelpunkt zu stellen.

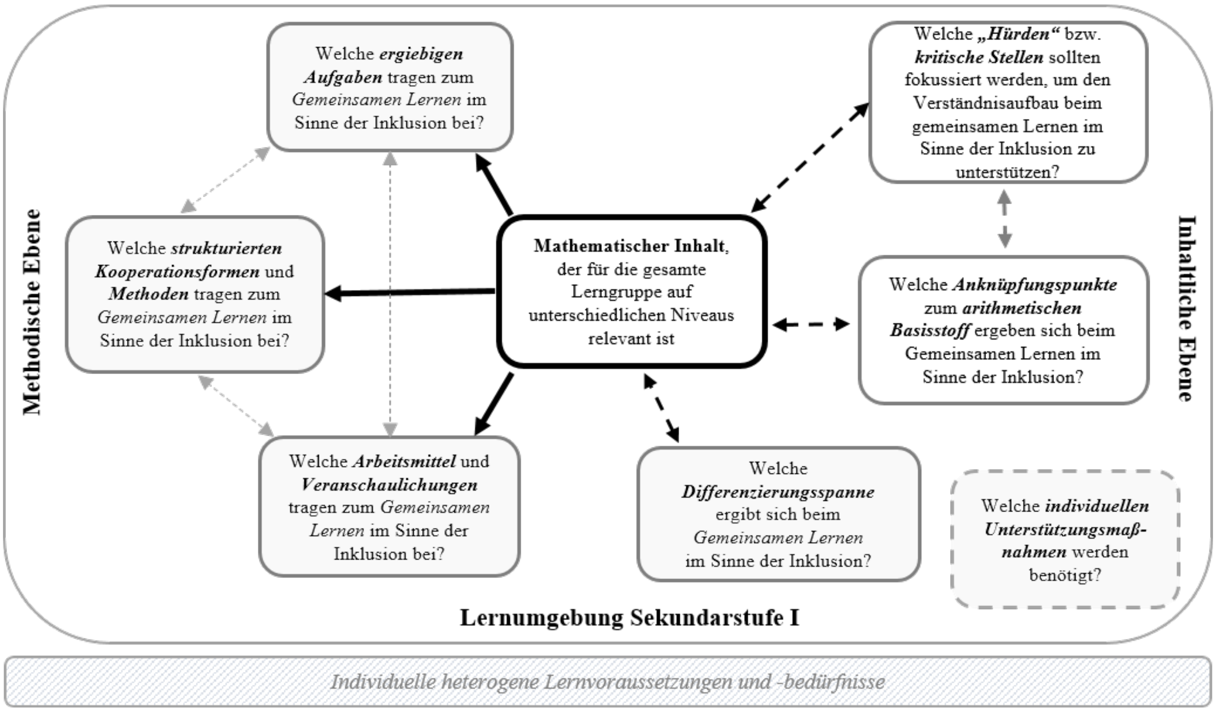


Abbildung 4: Planungsschritte für eine differenzsensible Unterrichtsplanung (eigene Darstellung)

Mathematischer Inhalt

Zu Beginn des Planungsprozesses steht die Entscheidung über den mathematischen Inhalt aus fachwissenschaftlicher Perspektive. Die inhaltsbezogene Seite nimmt hierbei eine wegweisende Funktion für die anderen Planungsfelder ein. Die grundlegende Frage lautet: Was ist der zentrale Lerngegenstand für *alle* Lernenden einer heterogenen Lerngruppe? Im Rahmen einer Sachanalyse gilt es, den fachlichen Kern herauszuarbeiten und die fachwissenschaftliche Struktur des Lerngegenstands aufzuzeigen. Dabei stellt sich auch die Frage, welche Kompetenz- und Lernentwicklung im Sinne des Spiralprinzips zu erwarten ist. Transparenz über die zu erwerbenden inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen stellt eine notwendige Voraussetzung für die folgenden Planungsschritte und -entscheidungen dar (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 168).

Darauf aufbauend stellt sich die Frage, ob der ausgewählte Lerngegenstand für *alle* Lernenden unter Berücksichtigung der individuellen Lernziele eine gemeinsame Fachlichkeit zulässt? Die Voraussetzung, einen für *alle* Lernenden relevanten Lerngegenstand festzulegen und somit der Orientierung an einem gemeinsamen Gegenstand gerecht werden zu können, mag zunächst als Einschränkung wahrgenommen werden, stellt jedoch einen wichtigen Schritt dar, um allen

Kindern „im inklusiven Unterricht gemeinsame, fachlich orientierte Aktivitäten“ (Häsel-Weide, 2016a, S. 20) ermöglichen zu können. Die starke inhaltliche Orientierung an den fundamentalen Ideen „hilft bei der im inklusiven Mathematikunterricht notwendigen Elementarisierung der Unterrichtsinhalte. Die wirklich notwendigen fachlichen Anforderungen treten deutlich hervor“ (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 47). Hinterfragt werden muss also, welcher Inhalt so aufgefächert werden kann, dass er für alle Lernenden einer heterogenen Lerngruppe auf unterschiedlichen Niveaus relevant und zugänglich ist. Im Anschluss an die Analyse der Sachstruktur eines Lerngegenstands nimmt die Darlegung der Verstehensgrundlagen, die für den jeweiligen Lerngegenstand relevant sind, eine zentrale Bedeutung ein (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 168). Es muss ergründet werden, welche Kompetenzen zur Erarbeitung des Themas erforderlich sind, um sowohl das Vorwissen der Kinder einordnen als auch ggf. entsprechende Grundlagen im Vorfeld erarbeiten und sichern zu können.

Kritische Stellen

Eng damit verbunden ist die Frage nach zentralen Grundvorstellungen zu dem jeweiligen mathematischen Inhalt sowie nach sogenannten „Hürden“ bzw. kritischen Stellen, die mit dem Lerngegenstand einhergehen und die gleichzeitig eine zentrale Voraussetzung für den erfolgreichen weiteren Lernprozess darstellen. Häsel-Weide und Prediger (2017) heben hervor, dass sowohl im Mathematikunterricht der Primar- als auch der Sekundarstufe „den Verstehensgrundlagen und kritischen Stellen im Unterricht durchgängig eine zentrale Bedeutung zugewiesen werden“ sollte (S. 176). Welche typischen Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen müssen für den jeweiligen Lerngegenstand berücksichtigt werden (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 168)? Welche Chancen trägt der ausgewählte Lerngegenstand für die weitere Lernentwicklung? Insbesondere für die Sekundarstufe I stellt sich die Frage, ob bei der Einführung eines neuen Unterrichtsinhalts Umbrüche oder Diskontinuitäten zu bisherigen Wissenskonzepten bestehen.

> Die Frage nach der Vermittlung zwischen Sache und Subjekt stellt sich besonders deutlich in der Sekundarstufe I, weil die mit jeder Klassenstufe steigenden fachlichen Ansprüche in den einzelnen Unterrichtsfächern - auch im Rahmen offener Unterrichtsformen - grundlegende didaktische Herausforderungen mit sich bringen. (Riegert & Musenberg, 2015, S. 18)

Eine zentrale Frage, die sich vor dem Hintergrund des in Kapitel 3.2 detailliert erläuterten Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung in Bezug auf die zusätzliche Kleingruppenförderung außerhalb des Klassenunterrichts stellt, lautet: Wie können Aufgaben nicht allein für die Förderung, sondern für die ganze Klasse konzipiert werden, sodass modular verknüpfte Inhalte verstehensorientiert und kommunikativ angesprochen werden (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 64)? Bereits im Rahmen der differenzsensiblen Unterrichtsplanung gilt es, sowohl die inhaltliche als auch die methodische Verknüpfung zwischen der unterrichtsintegrierten Förderung im Klassenraum und den zusätzlichen Förderschleifen zu berücksichtigen, und zwar nicht einseitig, sondern in wechselseitiger Richtung.

Verbindung mit dem arithmetischen Basisstoff als zentraler Aspekt in der Sekundarstufe I

Die Relevanz des arithmetischen Basisstoffs für das erfolgreiche Weiterlernen in der Sekundarstufe I ist unumstritten (vgl. vertiefende Ausführungen in Kapitel 4.1.3). Für eine differenzsensible Planung inklusiven Unterrichts im Sekundarstufenbereich nimmt die Verbindung aktueller Inhaltsbereiche mit zentralen, voraussetzungsvollen Aspekten des arithmetischen Basisstoffs im Rahmen der vorliegenden Arbeit einen fundamentalen Stellenwert ein. Wesentliche Fragen sind an dieser Stelle: Welche Aspekte des arithmetischen Basisstoffs sind für das aktuelle Thema relevant, um ein tragfähiges Verständnis aufzubauen und ein erfolgreiches Weiterlernen zu unterstützen? Wie lässt sich die Lernentwicklung in aktuellen Inhaltsbereichen mit der Festigung bzw. Aufarbeitung zentraler Aspekte des arithmetischen Basisstoffs verknüpfen? Diese Fragen stellen sich in besonderer Weise für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, sollten aber bei der differenzsensiblen Unterrichtsplanung für heterogene Lerngruppen hinsichtlich aller Schülerinnen und Schüler berücksichtigt werden. Die bereits aufgeführte Frage nach möglichen inhaltlichen Diskontinuitäten stellt sich erwartungsgemäß auch aus der Perspektive des arithmetischen Basisstoffs, d.h. dieser Planungsschritt erfordert die genaue Analyse möglicher Wechselbeziehungen zu aktuellen Inhaltsbereichen.

Differenzierungsspanne

Hinsichtlich der Differenzierungsspanne spielen sowohl die fachlich fachdidaktische als auch die sonderpädagogische Perspektive eine zentrale Rolle, die die Heterogenität der Lernenden sowie ihre individuellen Lern- und Entwicklungsmöglichkeiten in den Mittepunkt der

Betrachtung stellen. Ziel ist es, verschiedene individuelle und höchst heterogene Bildungsprozesse innerhalb einer inklusiven Lerngruppe immer wieder zusammenzubringen. Dieser Planungsschritt ist vor dem Hintergrund der in Kapitel 2.3.1 umfänglich dargestellten Aspekte der Differenzierung aufs Engste verbunden mit der Auswahl eines geeigneten fachlichen Lerngegenstands, der Entscheidung über Kooperationsformen und Unterrichtsmethoden sowie der Auswahl ergiebiger Aufgaben.

Grundsätzlich stellt sich die Frage nach der Zugänglichkeit verschiedener Bearbeitungsniveaus. Dabei ist auf fachlicher Ebene durchgängig zu hinterfragen, ob der Bezug zu der fundamentalen Idee trotz der Differenzierungsmaßnahmen bestehen bleibt. Grundsätzlich sollte sich die Differenzierung aus der Sache heraus ergeben und nicht im Vorfeld durch die Lehrkraft vorgenommen werden (Scherer, 2015, S. 274). Darüber hinaus gilt es im Vorfeld zu untersuchen, inwiefern die Vielfalt der Gruppe durch Differenzierungsmaßnahmen aus der Sache heraus berücksichtigt wird und inwiefern diese Maßnahmen methodisch gestützt werden können (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 65). An welchen Stellen ist eine Erweiterung bzw. das Entdecken weiterführender Strukturen und Beziehungen möglich? In welcher Form lassen sich elementare Zugänge zum Lerngegensand schaffen, die einen niedrigschwelligen Einstieg in die Aufgabenbearbeitung ermöglichen, gleichzeitig aber eine gewisse Reichhaltigkeit aufweisen, sodass der gemeinsame Austausch über den Kern der Sache stattfinden kann? Von grundlegender Bedeutung für den inklusiven Mathematikunterricht ist in diesem Zusammenhang die Frage danach, wie sich eine differenziert arbeitende Lerngruppe immer wieder geschickt zusammenbringen lässt (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 54) und wie die unterschiedlichen Tiefen an Bearbeitungen und Erkenntnissen gegenseitig sinnvoll genutzt werden können. Weiterhin ist zu ergründen, welche zusätzlichen individuellen Unterstützungsmaßnahmen für einzelne Lernende geeignet und notwendig sind, um weitestgehend selbstständige Bearbeitungen zu ermöglichen.

Ergiebige Aufgaben

Die Relevanz ergiebiger Aufgaben für den inklusiven Mathematikunterricht, insbesondere in Form von operativen, produktiven, offenen und selbstdifferenzierenden Aufgabenformaten, wurde bereits in Kapitel 2.3.1 grundlegend beschrieben. Hinsichtlich der konkreten differenzsensiblen Unterrichtsplanung sollten bei der Auswahl der Aufgaben folgende Aspekte hinterfragt werden:

- Welche Aufgaben sind geeignet, den Ansprüchen an inklusives Lernen nach Gemeinsamkeit und Individualisierung nachzukommen (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 62)?
- Welche Aufgaben bieten das Potential, dass alle Kinder mathematische Zusammenhänge nicht allein oberflächlich erfahren, sondern bewusst erkennen, nutzen, beschreiben und auch begründen können (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 62)?
- Inwiefern können die bekannten Aufgabenstellungen in der vorliegenden oder aber in erweiterten Konstellationen einen gemeinsamen Gegenstand für die verschiedenen Lernenden darstellen (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 65)?
- Welche Aufgabenformate lassen sich durch Adaption an die individuellen Lernvoraussetzungen der Kinder anpassen, ohne dabei den fachlichen Anspruch aufzugeben? Erhalten alle Lernenden einen vielfältigen Zugang zu der Aufgabenstellung (bspw. durch niedrigschwelligen Einstieg, Handlungsorientierung, Hilfsmittel etc.)? Lässt die Aufgabe Eigenproduktionen zu? Bietet die Aufgabe reichhaltige Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten, sodass die mathematischen Tätigkeiten und Erkenntnisprozesse auf unterschiedlichen Ebenen aus der aktiven und produktiven Auseinandersetzung erwachsen können (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 64)?

Bei der Auswahl geeigneter Aufgabenformte gilt es als Lehrkraft zu berücksichtigen, dass kein objektiver Schwierigkeitsgrad festgelegt werden kann, da die tatsächliche Schwierigkeit einer Aufgabe immer von verschiedenen, subjektiv unterschiedlich wahrgenommenen Faktoren abhängig ist. „Die subjektive Einschätzung der Schülerinnen und Schüler selbst kann dabei erheblich vom Schwierigkeitsgrad abweichen, den die Lehrperson angenommen hat“ (Scherer, 2015, S. 273-274).

Strukturierte Kooperationsformen und Methoden

Für eine differenzsensible Unterrichtsplanung spielen die fachdidaktischen und methodischen Variationen eine wichtige Rolle. Zentrale Fragen sind in diesem Zusammenhang: Wie und in welchem Maße kann sowohl individuelles als auch gemeinschaftliches Lernen am gleichen

Lerngegenstand aus methodischer Perspektive ermöglicht werden (Lenze & Lutz-Westphal, 2015, S. 52)? Anhand welcher methodischen Arbeitsformen können Lernende subjektiv relevante Lernerfahrungen machen, um individuelle Lernprozesse zu initiieren? Wie können sie kommunikativ-kooperative Erfahrungen machen, um gemeinsame Lernprozesse zu initiieren? Welche strukturierten Kooperationsformen und Methoden tragen zielführend dazu bei, innerhalb eines Rahmenthemas sowohl eigenständig gemäß individueller Möglichkeiten zu arbeiten als auch innerhalb der Klasse gemeinsam geteiltes Wissen auf unterschiedlichen Niveaus zu erarbeiten (Nührenbörger & Pust, 2011, S. 9)? Neben der Bereitstellung fachdidaktisch hochwertiger differenzierender Materialien sieht Korff (2012) die inklusive Unterrichtsplanung in der Verantwortung, „Möglichkeiten der Begegnung, des Austausches und der Kooperation“ zu schaffen, „um das Potenzial der Vielfalt für das Lernen des_der Einzelnen zu nutzen“ (S. 145). Zwar stellt das gemeinsame Lernen am gemeinsamen Gegenstand zweifelsohne das Ziel eines inklusiven Mathematikunterrichts dar, dennoch muss berücksichtigt werden, dass nicht jeder Lerninhalt zu jeder Zeit für alle Kinder auf produktive Art und Weise zugänglich gemacht werden kann. Verschiedene Lernsituationen (vgl. Kap. 2.2.1, insbesondere die verschiedenen Lernsituationen nach Wocken) gewinnen dadurch sowohl aus inhaltlicher als auch aus sozialer Perspektive ihre zeitweise Berechtigung.

Arbeitsmittel und Veranschaulichungen

Vor dem Hintergrund der in Kapitel 2.3.1 differenziert dargestellten Bedeutung didaktischer Arbeitsmittel und Veranschaulichungen lassen sich für die differenzsensible Planung inklusiven Mathematikunterrichts folgende relevante Fragen hervorheben: Welche Zugänge können allen Kindern in ihrer Verschiedenheit geboten werden, sodass sie eigenständig arithmetische Ideen entwickeln und mit anderen austauschen können? (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a). Welche Arbeitsmittel und Veranschaulichungen unterstützen das individuelle Lernen? Welche Arbeitsmittel und Veranschaulichungen tragen zum Gemeinsamen Lernen bei? Wie können die Lernenden auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene Erfahrungen machen, um sowohl individuelle als auch gemeinsame Lernprozesse zu initiieren? Wie kann der für die mathematische Verständnisentwicklung so zentrale intermodale Transfer durch geeignete didaktische Materialien unterstützt werden? Bei der Auswahl ist darauf zu achten, dass die jeweiligen Arbeitsmittel und Veranschaulichungen sowohl als Lösungs- und Lernhilfe als auch als Argumentations- und Kommunikationsmittel dienen.

Die dargestellten Planungsschritte erheben keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit. Vielmehr dienen sie als präskriptive Orientierungspunkte, die Lehrkräfte für die Planung eines guten inklusiven Mathematikunterrichts sensibilisieren sollen. Sie werfen relevante Fragen auf, über die es bei der differenzsensiblen Planung inklusiven Mathematikunterrichts nachzudenken gilt. Neben der strukturierten Mehrschrittigkeit lassen sie ein ausreichendes Maß an Flexibilität zu, um die alltäglichen Bedingungen im Kontext Schule berücksichtigen zu können. Unabdingbar ist an dieser Stelle die reflektierte und kontextabhängige Interpretation sowie bedingungsabhängige Anwendung auf die eigene Lerngruppe und Unterrichtspraxis. Aus diesem Grund muss die Frage nach individuellen Unterstützungsmaßnahmen stets mitbedacht werden. Die hier erarbeiteten Planungsschritte sollen Lehrkräfte zu Beginn der Sekundarstufe I im Mathematikunterricht dabei unterstützen, sowohl die Entwicklungspotenziale der Lernenden als auch die Potenziale des Lerninhalts für ihre jeweilige Lerngruppe spezifisch zu erfassen und als tragende Elemente des Unterrichts einzubeziehen (vgl. Kahlert & Heimlich, 2012, S. 161). Allgemeiner gefasst unterstützen sie dabei, einerseits ein fundiertes fachliches und fachdidaktisches Wissen für einen langfristig erfolgreichen mathematischen Lernprozess einer heterogenen Lerngruppe zu erarbeiten, andererseits die Fähigkeit zu entwickeln, für den jeweiligen Lerngegenstand vor dem Hintergrund der jeweiligen Lerngruppe geeignete Aufgaben und Methoden auszuwählen. Die Passung zwischen allen Planungsschritten steht dabei im Mittelpunkt.

Ohne die besondere Relevanz der erläuterten Kernelemente einer differenzsensiblen Unterrichtsplanung in Frage zu stellen, muss konstatiert werden, dass für „verständnisvolle Lernprozesse [sind] die individuelle mentale Aktivität und die individuelle kognitive Konstruktionsleistung“ (Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung [BLK], 1997, S. 22) der Lernenden maßgeblich sind und damit letztendlich die Qualität des Unterrichts bestimmen. Die Grundlage für alle Planungsschritte stellen die individuellen Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen sowie unterschiedlichen situativen Lern- und Entwicklungsbedingungen (vgl. Wember, 2009a, S. 89) dar. Vor diesem Hintergrund nimmt eine den Lernprozess begleitende Diagnostik sowie eine kontinuierliche

Dokumentation der individuellen Lernentwicklungen eine bedeutsame Rolle ein (KMK, 2011, S. 10).

2.3.4 Ausgewählte empirische Erkenntnisse

Die Komplexität inklusiven Unterrichts ist nur schwer in einem allgemeinen Forschungsstand zu konkretisieren. Die Frage nach der optimalen Förderung von Lernenden mit heterogenen Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen ist in dem Anwendungs- und Forschungsbereich verschiedener (Teil-)Disziplinen zu verorten (Lütje-Klose, Schwinger & Wild, 2015, S. 3). Eine umfangreiche Darstellung ist im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit nicht zu leisten. Im Folgenden werden deshalb ausgewählte Studien und Forschungsergebnisse vorgestellt, die für den Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit relevant sind. Fokussiert werden vor dem Hintergrund der aufgezeigten Spannungsfelder und der ausführlich dargelegten didaktischen Leitideen und Merkmale guten inklusiven Unterrichts sowohl Grundsatzfragen bezüglich des Lern- und Förderortes als auch methodisch-didaktische Aspekte, die das konkrete Handeln im Unterricht betreffen. Daraus abgeleitete Schlussfolgerungen lassen sich in der Planung und Umsetzung der Unterrichts- und Förderkonzeption in Kapitel 5 wiederfinden.

Hinsichtlich der Grundsatzfrage, welche Schülerschaft von einem inklusiven Unterricht profitiert, zeigen die wissenschaftlichen Befunde eine uneinheitliche Ergebnislage (vgl. Forschungsüberblick Hattie, 2009; Prengel, 2013; Wember, 2015). Gleichzeitig ist die Untersuchung der leistungsbezogenen Kompetenzentwicklung der Bereich, der die meiste wissenschaftliche Beachtung erhält (Kiel & Weiß, 2016, S. 284). In Anlehnung an die Integrationsforschung der vergangenen Jahre liegen für Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf im Lernen zahlreiche Studien vor, die auf eine größere Effizienz integrativer bzw. inklusiver Lernformen in Abgrenzung zu einer segregativen Beschulung hindeuten, etwa die klassischen Studien aus Deutschland (Tent, 1991 in Kiel & Weiß, 2016; Ahrbeck, Bleidick & Schuck, 1997) und der Schweiz (Haeberlin, 1991 in Kiel & Weiß, 2016; Kronig, Haeberlin & Eckhart, 2007) oder verschiedene nationale und internationale Studien neueren Datums (vgl. z.B. Blackorby, Schiller, Knokey & Wagner, 2007; Bless, 2007; Bless, Klaghofer, Haeberlin & Moser, 2003; Boaler, 2014; Ruijs & Peetsma, 2009). Die Untersuchungen von Wocken (2007) sowie Wocken und Gröhlich (2009) zeigen, dass der Besuch einer Förderschule für Lernende mit entsprechendem Förderbedarf „keine entwicklungsoptimierende Wirkung“ (Werning, R., 2016b, S. 158) hat. Wie lassen sich diese Ergebnisse erklären?

Größere Lernfortschritte in inklusiven Settings werden u.a. mit dem höheren Anspruchsniveau und dem damit einhergehenden höheren kognitiven Anregungspotential begründet (Moser Opitz, 2013, S. 10). In diesem Zusammenhang konnte Hattie (2013) eine überdurchschnittliche Effektstärke für das Setzen herausfordernder Ziele, die an die individuellen Lernvoraussetzungen angepasst sind, als hoch wirksam für Lernende mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf feststellen. Wember (2015, S. 465) sieht hierin „eine naheliegende Erklärung für die tendenzielle Unterlegenheit der Beschulung in Sonderschulen und Sonderklassen“ und verweist auf die oftmals zu voreilig durchgeführte Reduktion der Leistungsansprüche bei Lernenden mit besonderen Schwierigkeiten durch die Förderschullehrkraft.

Eine Forschungsübersicht von Bless (2007) deutet allerdings auf die Notwendigkeit der sonderpädagogischen Begleitung der inklusiv beschulten Kinder in inklusiven Settings hin. Die Wirksamkeit einer umfassenden sonderpädagogischen Förderung für Lernende mit sonderpädagogischem Förderbedarf konnte auch Hattie (2013) mit einer hohen Effektstärke belegen. Schümer (2004) verweist im Rahmen einer Mehrebenenanalyse auf Forschungsergebnisse, die verdeutlichen, „dass die Nachteile der leistungsstarken Schüler in heterogenen Gruppen weniger groß sind als die Vorteile, die leistungsschwache Schüler in solchen Gruppen haben“ (S. 94). Untersuchungen wie die von Feyerer (1998) oder Farell, Dyon, Polat, Hutcheson und Gallannaugh (2007) (in Kiel & Weiß, 2016) legen dar, dass leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler bzw. Lernende ohne sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf keine nachteilige Leistungsentwicklung in inklusiven Unterrichtssettings aufweisen.

Die hier skizzierten ausgewählten empirischen Befunde zur Frage Förderschule vs. Inklusiver Unterricht sprechen in der Gesamtschau für eine positive Wirkung des gemeinsamen Lernens in inklusiven Settings, insbesondere für Schülerinnen und Schüler mit Lernschwierigkeiten. Die referierten Forschungsergebnisse eröffnen vielversprechende Perspektiven für die zukünftige inklusive Schulentwicklung, auch wenn eine gewisse Vorsicht angebracht scheint. Löser und Werning (2013) konstatieren in ihrem Überblicksartikel über den internationalen Forschungsstand zur Inklusion im sonderpädagogischen Diskurs leicht positive Effekte der gemeinsamen Beschulung, aber sie sehen wegen der dünnen Datenlage „zum jetzigen Zeitpunkt noch viele Forschungsdesiderate" (Löser & Werning, 2013, S. 31).

Für die Schülerschaft mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf im Lernen ist es wichtig zu beachten, dass Heterogenität vor allem dann leistungsförderlich wirkt, wenn die Lerngruppe einen hinreichenden Anteil an leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern aufweist. Das mit- und voneinander Lernen ermöglicht die Minimierung von Bildungsbenachteiligungen. Wenn hingegen Lernende mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf beispielsweise an Hauptschulen mit ebenfalls lern- und leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern gemeinsam lernen, kann der Effekt der sogenannten low tracks eintreten (Werning, 2016a, S. 4). In diesem Fall wirken die gemeinsamen Lernsituationen nicht entwicklungsfördernd und anregend, sondern eher entwicklungshemmend, sodass sich das gemeinsame Lernen als negativ für die Lern- und Leistungsentwicklung aller Kinder auswirken kann. Die für die vorliegende Intervention gewählte Schulform der Integrierten Gesamtschule soll dieser Argumentationslinie folgend eine breite und dadurch lernförderliche Heterogenitätsspanne bereithalten, da die Autorin der Auffassung ist, dass Gleiches auch für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen gilt.

Vor dem Hintergrund des vorliegenden Forschungsvorhabens kommt dem Spannungsfeld zwischen unterrichtsintegrierten versus separierten Fördersituationen in inklusiven Settings besondere Relevanz zu. Wiener und Tardif (2004) konnten in ihrer Studie zeigen, dass die Variable Unterrichtssetting einflussreich ist, wenn auch nur in geringem Maße. Demnach sind Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf sozial besser in die Klassengemeinschaft integriert, wenn sie vor allem innerhalb der Klassengemeinschaft, d.h. unterrichtsintegriert, gefördert werden. Unterrichtsintegrierte Förderung (vgl. Kap. 3.2) kann zu einem Abbau von Stigmatisierungen führen, die oftmals durch separierende Fördersituationen entstehen (Pool Maag & Moser Opitz, 2014, S. 140). Die Autorinnen konnten für diese Lernenden auch eine höhere Selbsteinschätzung bezüglich ihrer mathematischen Leistungen feststellen. Gleichzeitig konstatieren sie, dass bei der klassenintegrierten Förderung häufiger die Gefahr von Vergleichsprozessen auf Leistungsebene besteht, die wiederum negative Auswirkungen auf das leistungsbezogene Selbstkonzept der Lernenden haben können (Pool Maag & Moser Opitz, 2014, S. 144).

Die zuweilen vertretene Forderung nach „full inclusion“ für Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf im Lernen konnten McLeskey und Waldron (2011) in ihrem Forschungsüberblick nicht unterstützen. Sie heben die Relevanz zusätzlicher Förderangebote außerhalb des Klassenunterrichts hervor. Ise, Dolle, Pixner und Schulte-Körne (2012) haben in ihrer Metaanalyse von acht deutschen Primärstudien aufgezeigt, dass die Förderung von rechenschwachen Lernenden im Rahmen einer Einzelförderung eine effektivere Wirksamkeit zeigt als bspw. eine Kleingruppen- oder unterrichtsintegrierte Förderung. Freesemann (2014) konnte in ihrer Interventionsstudie, die sich mit der Förderung des mathematischen Basisstoffs bei schwachen Rechnerinnen und Rechnern an Förder-, Gesamt- und Hauptschulen befasst hat, keine statistisch signifikanten Unterschiede in den allgemeinen mathematischen Leistungsfortschritten zwischen drei Gruppen feststellen, die gar nicht, in Kleingruppen oder teilweise klassenintegriert gefördert wurden. Beide Interventionsgruppen lernten jedoch tendenziell erfolgreicher als die Kontrollgruppe (Freesemann, 2014, S. 168), ein Ergebnis, das im Urteil der Autorin daraufhin deutet, „dass schwache Lernende auf eine spezifische Förderung angewiesen sind, um Lernfortschritte zu erzielen und die Lücken zu schließen“ (Freesemann, 2014, S. 187).

Die quasi-experimentelle Schweizer Längsschnittstudie „Rechenschwache Schülerinnen und Schüler unterrichtsintegriert fördern“ von Pfister, Stöckli, Moser Opitz und Pauli (2015) setzt auf Ebene des Mathematikunterrichts in der Primarstufe an und beleuchtet, inwiefern einerseits Lernen am gemeinsamen Gegenstand trotz unterschiedlicher Voraussetzungen ermöglicht und andererseits die adaptive Lernbegleitung durch niedrigschwellige Fortbildungsangebote durch die Lehrkräfte gesteigert werden kann. Vor dem Hintergrund großer forschungsmethodischer Herausforderungen, wie bspw. der großen Heterogenität in den 58 untersuchten inklusiven Klassen (N = 811), den unterschiedlichen Rahmenbedingungen sowie der Beteiligung mehrerer Lehrkräfte bei der Umsetzung, konnte kein deutlich besseres Abschneiden der Experimentalklasse gegenüber der Kontrollgruppe festgestellt werden (Pfister et al., 2015, S. 64-65). In der Untersuchung von Pool Maag und Moser Opitz (2014), in der Teams von Regel- und Förderschullehrkräften in inklusiven Settings befragt wurden, stellte sich aus Lehrerperspektive ein Dilemma zwischen den Polen „effektiv fördern“ versus „gemeinsam

Lernen“ dar (S.139), insbesondere dann, wenn die Lerngruppe ein hohes Heterogenitätsspektrum aufweist. Die Wahl des Förderorts wird als Spannungsfeld zwischen der Gefahr von Stigmatisierungseffekten verbunden mit einer Förderung außerhalb des Klassenunterrichts bzw. selbstwertschwächenden Vergleichen mit leistungsstärkeren Mitschülerinnen und Mitschülern im Rahmen der Klassenförderung (Pool Maag & Moser Opitz, 2014, S. 140) beschrieben.

Das theoretisch zentrale Gleichgewicht zwischen individuellen und gemeinsamen Lernsituationen im inklusiven Unterricht lässt sich innerhalb der bisherigen Entwicklungsansätze inklusiver Didaktik nicht wiederfinden. Zwar haben sowohl Feuser als auch Seitz „die Potentiale des *inhaltlichen* Austausches der Kinder bewusst in den Blick genommen [Hervorheb. im Original]“ (Korff, 2012, S. 152), jedoch gehen beide Modelle nicht über die konzeptionelle Ebene hinaus und lassen sich nur bedingt auf die reale Unterrichtspraxis übertragen. Zur Gestaltung des individuellen Lernens im Sinne der „Vielfalt der Gemeinsamkeit“ sowie zu geöffneten Unterrichtsformen liegen zwar zahlreiche, in der Regel reformpädagogisch orientierte Materialien und Veröffentlichungen vor, aber es fehlt an systematischer Forschung im Sinne einer inklusiv orientierten Didaktik im oben beschriebenen Sinne. Großer Forschungs- und Entwicklungsbedarf besteht demnach hinsichtlich konkreter Konzepte und Materialien, die einerseits das gemeinsame Lernen unter Berücksichtigung der inhaltsbezogenen Fachlichkeit (Korff, 2016b, S. 55) und inhaltlichen Kooperation in den Blick nehmen und die „Gemeinsamkeit in der Vielfalt“ aus inhaltlicher, fachdidaktischer Perspektive fokussieren (Korff, 2012, S. 153). Andererseits bedarf es eines differenzierten Blicks auf die konkrete Gestaltung gemeinsamer Lernsituationen für Lernende mit variierenden Unterstützungsbedarfen (Lütje-Klose et al., 2015, S. 3).

Auf sozial-emotionaler Ebene zeigt sich hinsichtlich der sozialen Integration und des Selbstkonzepts von Lernenden mit Unterstützungsbedarf eine disparate Forschungslage. Einige Studien haben gezeigt, dass Lernende mit besonderem Förderbedarf ein vergleichbar besseres Selbstkonzept aufweisen, wenn sie eine Förderschule besuchen und dass sie dort besser sozial integriert sind als vergleichbare Lernende in inklusiven Settings (vgl. Bless et al., 2003; Ruijs & Peetsma, 2009). Erklärt wird dieser Befund durch Bezugsgruppeneffekte, die bei dem Vergleich leistungsschwächerer Lernender mit ihren leistungsstärkeren Mitschülerinnen und Mitschülern zu negativen Selbsteinschätzungen führen können, nachgewiesen etwa bei

Homfeldt (1996) oder Sauer, Ide und Borchert (2007). Andererseits verdeutlichen empirische Studien, dass Lernende mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf (im Förderschwerpunkt Lernen) in manchen inklusiven Settings keine Beeinträchtigungen bzgl. ihres Selbstkonzepts zeigen (vgl. Kiel & Weiß, 2016), zumal sich der Besuch einer Förderschule häufig stigmatisierend auswirkt. Er macht eine Abweichung im Lern- und Leistungsbereich öffentlich und erzeugt bei den betroffenen Lernenden einen „Verlust ihrer bisherigen Identität“ (Homfeldt, 1996, S. 183). Auch für Schumann (2007) ist der Besuch einer Förderschule für Lernende mit dem Förderschwerpunkt Lernen mit Stigmatisierungen behaftet und mit Schamgefühlen verbunden, die von den Schülerinnen und Schülern als Belastung wahrgenommen werde. „Das Verschweigen und Verleugnen des Sonderschulstatus in sozialen Alltagssituationen ist die vorherrschende Form der Schambewältigung und ein Hinweis auf ein gemindertes Selbstwertgefühl“ (S. 159). Werning (2016b, S. 160) hebt vor dem Hintergrund seiner Forschungsübersicht hervor, dass die Probleme im Bereich der sozialen Integration und des Selbstkonzepts durch spezifische pädagogische Konzepte aufgefangen werden können. Auch dieser Hinweis zeigt das vielversprechende Potential inklusiver Unterrichtsgestaltung.

Auf der Ebene der Aufgaben wird entsprechend der unterschiedlichen Forschungsperspektiven und traditionellen Zielvorstellungen in Sonderpädagogik und Fachdidaktik eine uneinheitliche Befundlage für heterogene Lerngruppen deutlich (vgl. Kap. 2.2.2, 2.2.3 und 2.2.4). Aus mathematikdidaktischer Sicht stellen offene Aufgaben mit natürlicher Binnendifferenzierung das präferierte Format gemeinsamen Lernens in heterogenen Lerngruppen dar. Aus traditionell sonderpädagogischer Perspektive sind für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten die Lernumgebungen förderlich und wirksam, die zu großen Teilen auf die direkte Instruktion und methodisch vorstrukturierte Lernumgebungen zurückgreifen (vgl. Metaanalysen von Grünke, 2006; Heimlich, 2016, S. 75). In den letzten Jahren haben allerdings auch vermehrt Aufgaben im Kontext des aktiv-entdeckenden Lernens Einzug in die Förderung von Lernenden mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf erhalten. Schon 1951 hatte Aebli in einem Unterrichtsversuch festgestellt, dass insbesondere leistungsschwächere Lernende „die Überlegenheit der aktiven Methode beweisen“ (1963 (Original 1951), S. 163). Studien wie die von Scherer (1995) sowie Waasmeier (2009) zeigen, dass lernschwache Lernende von einem solchen Unterricht profitieren, auch wenn bislang noch nicht geklärt ist, wie sich „sowohl ein sehr differenziertes, instruierendes Vorgehen als auch offene Aufgabenkonzepte ausbalanciert in einem inklusiven Mathematikunterricht“ (Müller, A. et al., 2017, S. 464) in Abhängigkeit von den individuellen Entwicklungsständen der Lernenden realisieren lassen.

Auf Ebene der Methoden spielt im vorliegenden Kontext insbesondere die Frage nach der Wirksamkeit kommunikativ-kooperativer Lernformen eine besondere Rolle. Hattie (2013) hat in seiner umfassenden Metaanalyse eine mittlere Effektstärke für kooperative Lernformen nachgewiesen, die sich insbesondere auf den Vergleich zu kompetitiven Unterrichtsformen bezieht. Die Metaanalysen von Rohrbeck, Ginsburg-Block, Fantuzzo und Miller (2003) aus dem Grundschulbereich weisen hinsichtlich fachlicher Leistungen deutlichere Effekte für kooperative Lernformen sowie peer-unterstütztes Lernen als für traditionelle Unterrichtsformen nach. Für Lernende mit dem Förderschwerpunkt Lernen hebt Souvignier (2016, S. 143) vor dem Hintergrund empirischer Befunde hervor, dass der Einsatz kooperativer Lernformen mit Einschränkungen verbunden ist und klar vorgegebene Strukturierungen des Arbeitsablaufs erfordert, die sowohl die Entwicklung sozialer Kompetenzen unterstützen als auch langfristig die Anwendung selbstständiger Arbeitsformen fördern. Gillies und Ashman (2000) zeigen in ihrer Studie auf, dass Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten im Lernen durch zusätzliche Hilfestellungen und strukturierende Hinweise besser miteinander kooperierten. Eine insgesamt positive Wirkung kooperativer Lernformen im Vergleich zu konventionellen Unterrichtsformen konnten McMasters und Fuchs (2002) in ihrer Übersicht über 15 Studien zum kooperativen Lernen herausarbeiten. Dabei stellten sie auch fest, dass Schülerinnen und Schüler mit Lernschwierigkeiten größere Lernfortschritte in kooperativen Settings an Regelschulen (d = .44) zeigten als an Förderschulen (d = .27). Eine finnische Studie von Vehkakoski (2012) deutet darauf hin, dass sich insbesondere für heterogene Lerngruppen kooperative Lernformate anbieten, wenn man Differenzierungsmaßnahmen sinnvoll in den gemeinsamen Klassenunterricht integrieren möchte. Vehkakoski (2012) spricht sich für eine Verbindung kooperativer Lernformen mit Phasen der individuellen Instruktion aus, die es bei der Bearbeitung verschiedener Aufgaben ermöglicht, dass „all students cooperatively contribute to a common goal, support one another and have equal accountability for the outcomes in a non-competitive climate. […] this may result in students becoming familiar with diversity, and the difference of assignments becoming a natural part of everyday classroom practices“ (S. 167).

Insgesamt zeigen empirische Untersuchungen positive Effekte für formelle kooperative Lernformen, die im Gegensatz zu informellen, d.h. spontanen, ungeplanten Kooperationsformen eine methodische Strukturierung aufweisen. Die Ergebnisse legen nahe, dass vor allem lernschwächere Schülerinnen und Schüler von den positiven Effekten profitieren und sich diese positiven Auswirkungen auch hinsichtlich des Selbstkonzepts und des sozialen Verhaltens zeigen (Gillies & Ashman, 2000; Ginsburg-Block, Rohrbeck & Fantuzzo, 2006; Johnson, D. W., Johnson & Stanne, 2000; Slavin, 1995). Auch fachspezifisch betrachtet kann durchaus eine positive Wirkung kooperativer Lernformen im Vergleich zu traditionellen Unterrichtsmethoden auf die mathematische Lernentwicklung nachgewiesen werden, gleichwohl die Wirksamkeitsbefunde nicht eindeutig sind (vgl. Forschungsübersicht in Wittich, 2017, S. 76 ff. sowie Häsel-Weide, 2016c, S. 42 ff.). In ihrer umfangreichen quantitativen Interventionsstudie zur Ablösung des zählenden Rechnens in kooperativen Lernformen bei Lernenden mit mathematischen Lernschwierigkeiten konnte Wittich (2017) signifikante Effekte für die kooperativ-strukturierte Interventionsform nachweisen. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Ablösung vom zählenden Rechnen effektiver in kooperativen Lernsettings als in Einzelarbeit erfolgt (Wittich, 2017, S. 164). Zentral zu berücksichtigen ist an dieser Stelle, dass die Wirksamkeit der jeweiligen kooperativen Methoden auf der einen Seite von ihrer jeweiligen Lernumgebung abhängig ist. Damit gewinnen sowohl die sorgfältige Implementierung der kooperativen Lernformen an sich, als auch die Auswahl und Gestaltung der verwendeten Aufgaben an Relevanz (Wittich, 2017, S. 76-77). Auf der anderen Seite hängt die Wirksamkeit wesentlich von der Qualität der Interaktionen ab (Häsel-Weide, 2016c, S. 44). Als besonders positiv erachtet Götze (2007) Interaktionen, die über das strukturierte Mitteilen von Lösungen hinausgehen und die jeweiligen Gruppenmitglieder aktiv in die jeweiligen Erklärungen einbeziehen (Götze, 2007, S. 151-152).

2.4 Leitende Fragestellungen für die Interventionsstudie

Im Rahmen einer inklusiv orientierten Didaktik sieht Moser Opitz (2014) grundsätzlich hohes Potential für „fachdidaktische Überlegungen und Analysen, die „von der Sache“ her denken, gleichzeitig individuelle Kompetenzen und Lebenslagen mitberücksichtigen und von der Sache her nach den gemeinsamen Lernmöglichkeiten für alle Schülerinnen und Schüler suchen“ (S. 65). Dadurch könne die Entwicklung einer inklusiv orientierten Didaktik sowie die Gestaltung inklusiven Unterrichts, „der wirksame Förderung durch das Lernen am gemeinsamen Gegenstand möglich macht“ (Moser Opitz, 2014, S. 65), vorangetrieben werden. In den gegenwärtigen bildungswissenschaftlichen Diskursen über Inklusion werden häufig jedoch Ansprüche formuliert, deren konkrete Umsetzung in realen Kontexten noch fehlt und dadurch Fragen nach der gezielten Gestaltung sowie den Umgang mit (begrenzten) Ressourcen offen lässt (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 155-156). Trotz der intensiven Weiterentwicklung der Unterrichtsforschung in der jüngsten Vergangenheit wurden Unterrichtsvariablen im Kontext der Inklusionsforschung bislang nur am Rande erforscht (Pfister et al., 2015, S. 54). Häsel-Weide et al. (2014) betonen, es gebe eine große Forschungslücke hinsichtlich der generellen und spezifischen Wirksamkeit geeigneter Unterrichtskonzepte, die derzeit noch mit dem Fehlen konkreter Materialien und spezifischer Anregungen für den inklusiven Unterricht einhergeht (S. 15). Wittich (2017, S. 168) resümiert, dass die Implementation von Unterrichtskonzepten für den inklusiven (Mathematik-)Unterricht unter Einbezug fachdidaktischer Expertise eine Herausforderung für die gegenwärtige und zukünftige Unterrichtsentwicklung darstellt, die einer weiteren empirischen Erforschung und Diskussion bedarf. In der gegenwärtigen Literatur lassen sich deutlich mehr Konzepte und Modelle inklusiven Unterrichts für die Primarstufe finden, Überlegungen für den Sekundarstufenbereich stellen eher Ausnahmen dar (Werner, 2019, S. 15). Aus fachlicher Sicht existieren darüber hinaus im Gegensatz zu dem Primarstufenbereich für den Sekundarbereich nur wenige Studien, die sich auf die Charakterisierung der Heterogenität mathematischer Kompetenzen beziehen (Werner, 2019, S. 83-84). Mit Krajewski lässt sich folgern, dass „als wichtiges Ziel zukünftiger Forschung [ist] nun noch der Nachweis zu erbringen [ist], dass eine Förderung, die sich an diesen Grundsätzen orientiert, auch im Sekundarschulbereich erfolgreich ist und Rechenschwierigkeiten beheben kann“ (Krajewski, 2013a, S. 176). Auch Kuhl und Euker (2016) fordern, Forschungslücken bezüglich mathematischer Inhaltsbereiche und spezifischer Altersgruppen zu schließen und sie mahnen das Fehlen „evidenzbasierte[r] Förderprogramme für mathematische Kompetenzen in der Sekundarstufe I“ (S. 29) an. Moser Opitz sieht für die mathematikdidaktische Forschung Handlungsbedarf „bezüglich der Entwicklung und Evaluierung von Förderkonzepten [...], insbesondere auch für die Sekundarstufe I [...]. Hier geht es speziell darum, Fördermöglichkeiten zu entwickeln, die aufzeigen, wie die Erarbeitung fehlender Kompetenzen der Grundschulmathematik mit dem aktuellen Lernstoff verknüpft werden kann" (Moser Opitz, 2010, S. 16).

Die vorliegende Arbeit setzt sich intensiv mit diesen Forschungsdesideraten auseinander und versucht durch die Entwicklung, Erprobung und Evaluation eines umfangreichen Unterrichts- und Förderkonzepts für den inklusiven Mathematikunterricht zu Beginn der Sekundarstufe I durch bewusst gestaltete und empirisch evaluierte Praxis einen aufschlussreichen Beitrag zu leisten.

Vor dem Hintergrund der bisherigen theoretischen Ausführungen und dem aufgezeigten Forschungsstand stellen sich drei Fragen, die leitend für die später folgende Interventionsstudie sein sollen:

- Wie lassen sich sonderpädagogische und fachdidaktische Aspekte sinnvoll zu einer inklusiv orientierten Didaktik verknüpfen, sodass für alle Lernenden Synergieeffekte auftreten?
- Wie kann Mathematiklernen in inklusiven Klassen so erfolgen, dass die Heterogenität der Kinder produktiv genutzt wird und alle Kinder gefördert werden?
- Wie kann inklusiver Mathematikunterricht so gestaltet werden, dass alle Lernenden in der Auseinandersetzung mit herausfordernden Aufgaben Lernfortschritte sowie Erfahrungen von Selbstwirksamkeit und Kompetenz machen können und dazu motiviert werden, Anstrengungsbereitschaft zu entwickeln?

3 Förderung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu Beginn der Sekundarstufe I

Eine fokussierte Förderung nimmt im Kontext inklusiv orientierten Mathematikunterrichts für alle Lernenden einer heterogenen Lerngruppe eine zentrale Rolle ein (vgl. Kap. 2.3.1). Vor dem Hintergrund des vorliegenden Forschungsinteresses wird im Folgenden der Fokus zunächst auf Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu Beginn der Sekundarstufe I gerichtet (Kap. 3.1), die vorrangigen Adressatinnen und Adressaten der hier entwickelten Unterrichts- und Förderkonzeption. Es erfolgt eine überblicksartige Abgrenzung vorhandener Begrifflichkeiten, die in der ausführlichen Darstellung des Begriffs der (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen bzw. der (besonderen) mathematischen Lernschwierigkeiten resultiert (Kap. 3.1.1), der dieser Arbeit zugrunde liegt. Anschließend wird der Versuch unternommen, typische Merkmale und Spezifika mathematischer Lernschwierigkeiten sowie stoffliche Hürden zu Beginn der Sekundarstufe I herauszuarbeiten (Kap. 3.1.2). Auf der Grundlage des bereits erörterten Leitprinzips der fokussierten Förderung (Kap. 2.3.1) wird das für die vorliegende Arbeit zentrale Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung vorgestellt (Kap. 3.2), das hier als eine Möglichkeit verstanden wird, um auf die Kritik an der aktuellen bzw. oftmals noch vorzufindenden Fördersituation in inklusiven Settings reagieren zu können (Kap. 2.1.1). Gleichzeitig stellt es die zentrale konzeptuelle Grundlage der vorliegenden Interventionsstudie dar. Auf eine aus traditionell sonderpädagogischer bzw. förderdidaktischer Sichtweise relevante Darstellung der Förderplanung zur Erstellung individueller Förderpläne wird an dieser Stelle verzichtet. Vertiefende Informationen liefern Dhaouadi (2008); Popp, Melzer und Methner (2017) sowie der Verband Sonderpädagogik (Verband Sonderpädagogik Landesverband Nordrhein-Westfalen e.V., 2010). Dieses Kapitel abschließend werden zentrale handlungsleitende Fragen für die weitere Forschungsarbeit deduziert (Kap. 3.3).

3.1 Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht

Als elementare Grundlage für die Auseinandersetzung mit der Frage, wie Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im (inklusiven) Mathematikunterricht bestmöglich gefördert werden können, bedarf es zunächst einer Darlegung des zugrunde gelegten Begriffsverständnisses. Daran anschließend werden Ansatzpunkte und Indizien aufgeführt, die auf besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen hinweisen können. In Anlehnung an die bereits dargelegten didaktischen Leitlinien und Kriterien guten inklusiven Unterrichts werden abschließend einige Besonderheiten der Förderung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen spezifiziert.

3.1.1 Begriffliche Abgrenzung Rechenstörung – Dyskalkulie – Rechenschwierigkeiten – Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten

Ein Blick in die einschlägige Fachliteratur zeigt unterschiedliche Argumentationslinien bzgl. einer Einteilung von Schwierigkeiten in der Entwicklung und im Erwerb mathematischer Kompetenzen auf, die teils pädagogisch, teils klinisch-pathologisch orientiert sind. Eine allgemein anerkannte Definition liegt nicht vor. Die geläufigen Begriffe „Rechenstörung“, „Dyskalkulie“ und „Rechenschwäche“ werden in verschiedenen Quellen sowohl synonym, als auch mit unterschiedlicher Bedeutung verwendet (Schneider et al., 2016, S. 186). An dieser Stelle wird auf eine ausführliche Differenzierung der zahlreichen Begriffe (u.a. Lernstörung, Lernbehinderung, Lernbeeinträchtigung), die „verschiedene Formen des erschwerten Lernens“ (Käter, 2017, S. 61) beschreiben, verzichtet. Als Oberbegriff wird hier und im Allgemeinen in Anlehnung an Zielinski (1998) von „Lernschwierigkeiten“ gesprochen,

> wenn die Leistungen eines Schülers unterhalb der tolerierbaren Abweichungen von verbindlichen, institutionellen, sozialen und individuellen Bezugsnormen (Standards, Anforderungen, Erwartungen) liegen oder wenn das Erreichen (bzw. Verfehlen) von Standards mit Belastungen verbunden ist, die zu unerwünschten Nebenwirkungen im Verhalten, Erleben oder in der Persönlichkeitsentwicklung des Lernenden führen. (S. 13)

Dass Modell von Heimlich (2009) stellt multiperspektivisch die Ursachen von Lernschwierigkeiten dar, die interessierte Leserinnen und Leser u.a. auch in Bezug auf allgemeine Rechenschwierigkeiten nachlesen können. Nachfolgend werden für den Kontext der vorliegenden Arbeit zentrale Begriffe aus fachdidaktischer Perspektive voneinander abgegrenzt. In der Fachliteratur bleiben Überschneidungen, uneinheitliche und unpräzise Verwendungen jedoch nicht aus.

Unter *Rechenstörung* werden von der Weltgesundheitsorganisation (WHO) beeinträchtigte mathematische Kompetenzen verstanden, die als umschriebene Entwicklungsstörung schulischer Fertigkeiten in der Internationalen Klassifikation psychischer Störungen (ICD-10, F 81.2; Dilling, Mombour & Schmidt, 2015) erfasst werden.

> Diese Störung beinhaltet eine umschriebene Beeinträchtigung von Rechenfertigkeiten, die nicht allein durch eine allgemeine Intelligenzminderung oder eine eindeutig unangemessene Beschulung erklärbar ist. Das Defizit betrifft die Beherrschung grundlegender Rechenfertigkeiten wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, weniger die höheren mathematischen Fertigkeiten, die für Algebra, Trigonometrie, Geometrie und Differential- sowie Integralrechnung benötigt werden […]. Die Rechenschwierigkeiten dürfen nicht wesentlich auf unangemessene Unterrichtung oder direkt auf Defizite im Sehen, Hören oder auf neurologische Störungen zurückzuführen sein. Ebenso dürfen sie nicht als Folge irgendeiner neurologischen, psychiatrischen oder anderen Krankheit erworben worden sein. (Dilling et al., 2015, S. 277)

Die schwerwiegenden und lang anhaltenden schwachen Leistungen in Mathematik sind demnach auf individuelle, im Kind liegende Entwicklungsverzögerungen sowie biologische Reifestörungen des zentralen Nervensystems zurückzuführen. Nach den Kriterien der ICD-10 weist ein Kind dann eine Rechenstörung auf, wenn es in einem standardisierten Rechentest eine Leistung erbringt, die mindestens um zwei Standardabweichungen von dem Niveau abweicht, das aufgrund des Alters sowie der allgemeinen Intelligenz des Kindes zu erwarten wäre. In einem standardisierten Intelligenztest zeigt es einen non-verbalen IQ, der über 70 Punkten liegt. Darüber hinaus liegen sowohl die aktuellen als auch die vergangenen Lese-Rechtschreibleistungen im Normbereich. Das Kind wurde bisher in einem zu erwartenden Rahmen beschult, wird jedoch durch die schwachen Leistungen in Mathematik in seiner weiteren Schulausbildung oder bei alltäglichen, grundlegende Rechenfertigkeiten erfordernden Handlungen behindert. Die Multiperspektivität von Rechenstörungen kann u.a. mit dem Modell von Jacobs und Petermann (2007) näher beschrieben werden.

Mit den Worten Schippers (2002) lässt sich die grundsätzliche Kritik an dieser medizinischen Definition für den schulischen Kontext wie folgt zusammenfassen:

> Dieser Definitionsversuch ist sowohl für wissenschaftliche Zwecke (z.B. im Sinne eindeutiger, Grenzen ziehender Diagnostik), als auch für die praktische Arbeit mit betroffenen Kindern (Diagnose, Förderung) unbrauchbar. Die tatsächlichen Probleme

> werden nicht beschrieben. Die Beschränkung auf Rechenfertigkeiten ist falsch, denn die Schwierigkeiten liegen auch im Bereich der Rechenfähigkeiten. (S. 246-247.)

Im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit gilt es zu beachten, dass diese Definition auf die unzureichende Beherrschung grundlegender Rechenarten ausgerichtet ist, jedoch nicht die mathematischen Inhalte höherer Klassenstufen umfasst und somit für Lernende in der Sekundarstufe zu kurz greift (Landerl & Kaufmann, 2008, S. 94). Vertiefende kritische Auseinandersetzungen mit der Definition der WHO sowie dem Diskrepanzkriterium können interessierte Leserinnen und Leser u.a. bei Fritz und Ricken (2008) oder Moser Opitz (2009b) nachlesen.

Der Begriff *Dyskalkulie* wird vorrangig im Rahmen „kommerzieller Therapieangebote, sonderpädagogisch und psychologisch orientierter Ausführungen sowie in den Medien genutzt" (Schipper, 2002, S. 245) und suggeriert das Vorhandensein einer Krankheit. Die offizielle Diagnose einer Dyskalkulie ist in der Praxis häufig die Voraussetzung für die Finanzierung therapeutischer Maßnahmen durch öffentliche Träger oder Krankenkassen. Das Etikett bezeichnet eine Untergruppe schwacher Lernender (s.u.), die „eine Rechenschwäche bei normaler bis überdurchschnittlicher Intelligenz zeigen" (Schneider et al., 2016, S. 189) und entspricht in seinem entwicklungsorientierten Verständnis der ICD-10-Definition, setzt jedoch eine erhebliche Diskrepanz von – meist eineinhalb bis zwei Standardabweichungen - zwischen mathematischen und allgemeinen intellektuellen Kompetenzen voraus.

Da es sich bei Schwierigkeiten im Mathematiklernen allerdings um ein sehr komplexes Bedingungsgefüge (Moser Opitz & Freesemann, 2012, S. 8) handelt, das sich in unterschiedlichen Formen und unterschiedlichen Ausprägungen manifestiert (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 13), lassen sich die Schwierigkeiten aus der hier vertretenen pädagogischen Perspektive nur unter Einbezug verschiedener Faktoren und Ebenen verstehen. Der Begriff *Rechenschwäche* beschreibt deutlich unterdurchschnittliche mathematische Leistungen, die sich unabhängig von der Intelligenz eines Kindes zeigen (Schneider et al., 2016, S. 189). Nach Werner (1999) handelt es sich bei Rechenschwäche um „ein dauerhaftes Leistungsversagen im Unterrichtsfach Mathematik" (S. 471), das nur im Kontext von Schule auftritt und daher immer im Zusammenhang zum Mathematikunterricht betrachtet werden muss. Der Mathematikunterricht spielt in diesem Zusammenhang eine zentrale Bedeutung bei „der Entstehung, der Prävention und der Entschärfung von Schwierigkeiten" (Diener &

Schmassmann, 2012, S. 6). Rechenschwäche wird oftmals in der Grundschule festgestellt, kann sich aber gleichermaßen auch in der Sekundarstufe äußern (Moser Opitz, 2005, S. 114). Moser Opitz (2007, 2013) fasst unter dem Begriff Rechenschwäche

> stark unterdurchschnittliche Mathematikleistung, welche sich auf unterschiedlichen Intelligenzniveaus und manchmal in Kombination mit Lese-/ Rechtschreibschwierigkeiten zeigt und durch komplexe Wechselwirkungen zwischen unterrichtlichen, individuellen und schulstrukturellen Faktoren zustande kommt. Rechenschwäche wird somit verstanden als ein Versagen im Mathematikunterricht: ein Versagen beim Erwerb mathematischer Kompetenzen aufgrund spezifischer individueller Voraussetzungen und auch als ein Versagen des Mathematikunterrichts. (S. 139)

Nach Lorenz (1991) sollte Rechenschwäche nicht als isoliertes Phänomen verstanden, sondern als eine Form besonders ausgeprägter Schwierigkeiten beim Lernen im Mathematikunterricht angesehen werden, die in jedem Lernprozess auftreten können. Mit dem Begriff der Rechenschwäche wird interdisziplinär ein „Phänomen mit unterschiedlichen Ursachen" (Schneider et al., 2016, S. 194) beschrieben, deren ausführliche Darstellung an dieser Stelle nicht geleistet werden kann. Einigkeit bezüglich der Vielschichtigkeit des Phänomens der Rechenschwäche besteht darin, dass rechenschwache Lernende „*unterdurchschnittliche Mathematikleistungen* in Bezug auf *das Verständnis grundlegender Inhalte der Grundschulmathematik* zeigen [Hervorheb. im Original]" (Freesemann, 2014, S. 29). Meyerhöfer (2011) plädiert hingegen für eine explizite Abwendung von dem Begriff „rechenschwach" bzw. „Rechenschwäche", da in diesem Begriff das „Pathologische sedimentiert" (Meyerhöfer, 2011, S. 407) werde.

In Abgrenzung zu den drei gängigen Begriffen wird im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit von (besonderen) mathematischen Lernschwierigkeiten bzw. Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen gesprochen. Der Begriff vereint die mathematikleistungsbezogene Heterogenität und bezieht sowohl Lernende mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf im Bereich Lernen als auch rechenschwache Lernende, die in jeder Lerngruppe vorzufinden sind, mit ein. Aus mathematikdidaktischer Sicht erscheint es nicht zielführend, differenzialdiagnostisch zwischen „Lernschwierigkeiten von Regelschüler_innen" und „Kindern mit Sonderpädagogischem Förderbedarf, die neben anderen Bereichen auch in Mathematik Schwierigkeiten haben" (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 10ff.)

zu unterscheiden. Mit dieser Begriffswahl sollen keine personenbezogenen Merkmale hervorgehoben, sondern unterschiedliche Ausprägungen entlang der Differenzlinie mathematischer Leistungen innerhalb des inklusiven Mathematikunterrichtes aufgezeigt werden. Der Begriff (besondere) mathematische Lernschwierigkeiten bzw. Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten beim Mathematiklernen fokussiert eine inhaltliche, nicht personengebundene Perspektive. Nicht vom Kind, sondern vom Unterrichtsfach aus gedacht sind vorliegende inhaltliche Schwierigkeiten relevant, die bei allen Kindern auftreten können (Korff, 2016b, S. 79). Als Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen werden diejenigen Kinder verstanden, die als (sehr) schwache Rechnerinnen und Rechner einer heterogenen Klasse im inklusiven Setting gelten. Sie weisen keine sicheren Kenntnisse und Fähigkeiten in jenen zentralen Inhaltsbereichen auf, die als Schlüsselstellen im längerfristigen Aufbau mathematischer Kompetenzen angesehen werden und deren Bewältigung und Beherrschung daher eine zentrale Rolle für die mathematische Lernentwicklung einnimmt. Diese Begriffswahl ermöglicht eine „symptombezogene Beschreibung der Schwierigkeiten“ (Wartha, 2009a, S. 158), die als „zeitlich begrenzte, jeweils beobachterabhängige und situationsspezifische Charakteristika zu verstehen“ sind (Werner, 2019, S. 101) und fachdidaktischen Handlungsbedarf sowie Perspektiven für die konkrete Förderung anzeigen.

3.1.2 Merkmale mathematischer Lernschwierigkeiten und stoffliche Hürden zu Beginn der Sekundarstufe I

Aus interdisziplinärer Forschungsperspektive handelt es sich bei Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen nicht um eine eigene Gruppe, die sich qualitativ von anderen Lernenden unterscheidet (Lorenz, 1991, S. 192). Die Lernenden zeichnen sich durch eine extrem hohe Heterogenität aus und können sowohl mit als auch ohne einen Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung im Bereich Lernen inklusive Regelschulklassen besuchen (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 15). Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) mathematischen Lernschwierigkeiten benötigen keinen prinzipiell anderen Zugang zum Fach, d.h. dass sie sich in der Art und Weise, wie sie Mathematik lernen, nicht von anderen Kindern unterscheiden (Scherer & Moser Opitz, 2010). „Allerdings ist an ihnen in pointierter Weise zu beobachten, welche kognitiven Fähigkeiten der Mathematikunterricht fordert bzw. welche Defizite zu Störungen im mathematischen Begriffserwerb führen und welche methodisch-didaktischen Fallstricke möglich sind“ (Lorenz & Radatz, 1993, S. 29). Nach Scherer und Moser Opitz (2010, S. 15) haben Lernende, die eine besondere Unterstützung beim Mathematiklernen benötigen, entweder temporäre, auf spezifische Inhaltsbereiche bezogene Probleme oder aber umfangreichere Schwierigkeiten, die sich in einem großen Leistungsrückstand in Bezug auf ihre altersgemäße Lerngruppe ausdrücken. Letztere sind in der Regel auf nicht verstandene bzw. nicht vollständig erworbene zentrale Inhalte der Grundschulmathematik zurückzuführen (Freesemann, 2014, S. 31).

Nach Parmar und Cawley (1997) zeigen Schülerinnen und Schüler (besondere) mathematische Lernschwierigkeiten, die zwei bis vier Schuljahre hinter den erwarteten Mathematikleistungen zurückliegen und die für die Erarbeitung des Lernstoffs eines Schuljahres mindestens zwei oder mehr Jahre benötigen, sodass die Lernenden am Ende ihrer Schulzeit oftmals nur die Inhaltsbereiche der ersten fünf bis sechs Schuljahre beherrschen, zumal in ihren mathematischen Lösungsversuchen über Jahre verfestigte Fehlermuster als sogenannte systematische Fehler erkennbar sind (Balzer, Fritz, Ricken & Jäger, 2007, S. 185). Montague und Appelgate (2000) verweisen auf das rezepthafte Auswendiglernen mathematischer Verfahren, das oftmals ohne Einsicht und Verständnis erfolgt. Die Fehler von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen unterscheiden sich nicht in der Qualität, sondern primär in der Quantität von Lernenden ohne (besondere) Schwierigkeiten: „Schwierigkeiten gehören zum Lernen dazu. Einige Kinder haben größere Schwierigkeiten als andere, manche brauchen länger, um die nächste Stufe der Entwicklung zu erreichen - aber Fehler und unvollkommene Vorformen der angestrebten Leistungen sind normal“ (Brügelmann & Brinkmann, 1994, S. 9).

Im Folgenden werden Inhaltsbereiche der Primarstufenmathematik dargestellt, in denen rechenschwache Lernende empirisch nachgewiesene Schwierigkeiten zeigen (Moser Opitz, 2007, 2013). Es handelt sich um kritische Bereiche, die für die Lernenden Lernchance und Hürde zugleich sein können, da sie zentrale Aspekte der Grundschulmathematik vereinen und die wesentliche Basis für das erfolgreiche Erlernen weiterführender Inhalte in der Sekundarstufe I darstellen. Solche zentralen stofflichen Hürden der Grundschulmathematik zeigen sich insbesondere (u.a. Freesemann, 2014; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013a; Moser Opitz, 2007, 2013; Wartha, 2009a)

- im Verständnis unterschiedlicher Zahlenräume,
- im Zählen in Schritten größer als eins,
- bei der Verwendung nichtzählender Kopfrechenstrategien,
- in der Schreib- und Sprechweise von zwei- und mehrstelligen Zahlen,
- in der Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem bzw. im dekadischen Verständnis, hier insbesondere in Bezug auf das Bündelungs- und Stellenwertprinzip sowie die Orientierung auf dem Zahlenstrahl,
- in der Einsicht in die grundlegenden Operationen und ihrer operativen Zusammenhänge sowie der verständigen Anwendung dieser Grundoperationen,
- in der Anwendung elaborierter Rechenstrategien,
- in der Vorstellung von und dem Umgang mit Größen,
- im Umgang mit Sachaufgaben und
- in der Automatisierung mathematischen Faktenwissens.

Schwierigkeiten manifestieren sich vor allem in dem sogenannten verfestigten zählenden Rechnen (vgl. vertiefend Häsel-Weide et al., 2014, S. 44ff.), welches das Rechnen in höheren Zahlenräumen deutlich erschweren und das mathematische Lernen insgesamt auf vielen Ebenen behindern kann (bspw. grundlegende Einsichten in Zahlbeziehungen, das Stellenwertsystem sowie die Entwicklung eines „number sense“ bzw. „Zahlensinns“ (Lorenz, 2002, S. 67)).

In diesen zentralen Bereichen der Primarstufenmathematik fällt es vielen Lernenden schwer, ein Verständnis für die strukturellen Beziehungen und Zusammenhänge sowie Grundvorstellungen aufzubauen. Nicht nur für Kinder, deren Muttersprache nicht Deutsch ist, bereitet zusätzlich die innersprachliche Struktur des Unterrichtsfachs Mathematik mit seinen Besonderheiten große Schwierigkeiten (vgl. vertiefend bspw. Meyer, M. & Prediger, 2012; Wessel et al., 2018 oder auch das Material von PIKAS, https://pikas.dzlm.de/node/1181, 12.11.2020). Diese unzureichend entwickelten Grundlagen zeigen sich insbesondere im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und werden in deren weiteren Verlauf nicht geringer (Freesemann, 2014, S. 47). Die Auseinandersetzung mit neuen Inhaltsbereichen erfordert den Rückgriff auf die zentralen Grundlagen der Grundschulmathematik und offenbart damit nicht überwundene stoffliche Hürden. Schwierigkeiten zeigen sich insbesondere in den inhaltlichen

Bereichen, die „ein Verständnis von Zahlen und Zahlbeziehungen sowie die flexible Anwendung der Grundoperationen erfordern“ (Freesemann, 2014, S. 48). Verschiedene Forschungsarbeiten (vgl. Kap. 4.1.4) kommen übereinstimmend zu dem Ergebnis, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten auch in der Sekundarstufe I nicht oder nur unzureichend entwickelte Kompetenzen in den zentralen Inhaltsbereichen der Grundschulmathematik aufweisen. Probleme zeigen sich hier insbesondere in nicht hinreichend ausgebauten tragfähigen Vorstellungen zu natürlichen Zahlen sowie in nicht gesicherten Vorstellungen zu den Grundoperationen, am deutlichsten in der Multiplikation und Division (Freesemann, 2014, S. 49). Darüber hinaus gilt das Lösen von Sachaufgaben als zentrale Schwierigkeit, insbesondere das Lösen mehrschrittiger Aufgaben (Montague & Appelgate, 2000; Humbach, 2008).

Neben den inhaltlichen Schwierigkeiten gilt zu berücksichtigen, dass Lernende mit (besonderen) mathematischen Lernschwierigkeiten „in vielen Bereichen […] sehr viel Frustrationen erlebt [haben], in deren Folge nicht selten Entmutigung, mangelndes Selbstvertrauen und Versagensängste anzutreffen sind" (Scherer, 2009, S. 7). Sie zeigen oftmals ein ausgeprägtes negatives Selbstkonzept und führen die vielen Misserfolge auf mangelnde Begabung zurück. Mehrheitlich lernen diese Kinder nicht aktiv und intrinsisch, sondern eher passiv und extrinsisch motiviert, um weitere Misserfolge zu vermeiden. Das Lernen ist häufig durch eine externale Attribuierung gekennzeichnet, d.h. die Schülerinnen und Schüler führen eventuelle Erfolge auf leichte Aufgaben, Zufall oder Glück zurück (Wember, 2017, S. 58). Eine erschwerte Teilhabe und Partizipation im Unterricht kann über die inhaltlichen Schwierigkeiten hinausgehend auch bedingt sein durch „soziale Randständigkeiten und Ausgrenzungsprozesse, prekäre Lebenswelten und brüchige Bildungsbiografien“ (Werner, 2017a, S. 1021), die oftmals mit der Ausbildung misserfolgsorientierter und lernhinderlicher Selbst- und Begabungskonzepte einhergehen.

Die dargelegten Aspekte beruhen auf übereinstimmenden wissenschaftlichen Erkenntnissen, stellen in ihrer Gesamtheit jedoch lediglich zentrale Orientierungspunkte dar und können nicht bei allen Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen gleichermaßen angenommen bzw. erwartet werden.

Zusammenfassend kann für die fokussierte Förderung konstatiert werden, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu Beginn der Sekundarstufe I nicht den gesamten Lernstoff der Grundschuljahre aufarbeiten müssen, sondern dass in Unterricht und Förderung der Fokus auf die zentralen Lerninhalte des arithmetischen Basisstoffs der Grundschulmathematik gerichtet werden sollte (Moser Opitz & Freesemann, 2012, S. 10), die für die weiterführenden Inhaltsbereiche von besonderer Relevanz sind.

3.1.3 Fokussierte Förderung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen

Vor dem Hintergrund der in Kapitel 2.3.1 ausgeführten Grundlagen des Begriffs der Förderung als zentraler didaktischer Leitidee wird nachfolgend das Begriffsverständnis für die vorliegende Interventionsstudie unter besonderer Berücksichtigung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht mit Blick auf den zugrunde gelegten theoretischen Rahmen präzisiert. Grundsätzlich gelten die in Kapitel 2.3.1 und 2.3.2 dargestellten didaktischen Leitideen und Kriterien eines guten inklusiven Mathematikunterrichts gleichermaßen für *alle* Lernenden einer heterogenen Lerngruppe. In Ergänzung dazu lassen sich nach Häsel-Weide und Prediger (2017, S. 174) für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten drei relevante handlungsleitende Ideen hinzufügen, die in der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption berücksichtigt werden (vgl. Kap. 5):

- Verstehensgrundlagen fokussieren und diese, ausgerichtet an der zentralen Idee, mit aktuellen Inhalten vernetzen
- inhaltliche Vorstellungen aufbauen
- Veranschaulichungen und Materialien zum Nachdenken über die mit ihnen ausgeführten Tätigkeiten nutzen

Das aktiv-entdeckende Lernen nimmt, wie bereits in Kapitel 2.2.2 und 2.3.4 ausführlicher dargestellt, insbesondere für Kinder mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht eine zentrale Bedeutung für ihre mathematischen Verstehensprozesse ein (Trickett & Sulke, 1993). Das aktiv-entdeckende und sozial-interaktive Lernen „ist gerade auch für Schülerinnen und Schüler mit Beeinträchtigungen hilfreich, da diese durch die Fokussierung auf das >Wesentliche< die Verwendung von strukturierten Arbeitsmitteln und durch das produktive Üben Unterstützung durch Strukturen >von der Sache her< erhalten“ (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 10). Anstelle einer zeitintensiven Auseinandersetzung mit passgenauen Aufgaben in isolierten Lernprozessen gilt es, „das aktive Lernen und ggf. anspruchsvolle, nicht ausschließlich reproduktive Aktivitäten zu ermöglichen und dabei zunächst auch unfertige Lernprozesse auszuhalten. Das bedeutet bspw., auch unvollständige Schülerdokumente und Lösungen zu akzeptieren und an diesen weiterzuarbeiten“ (Moser Opitz, 2008, S. 20). Besonders hervorgehoben wird von Scherer und Moser Opitz (2010) das produktive Üben für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten, „weil dadurch das Gedächtnis entlastet wird und diese Formen des Übens bei der Konstruktion generalisierbarer, beweglicher und kognitiver Strukturen helfen können“ (S.199). Scherer (1994) betont in diesem Kontext die potentielle Stärkung in das „Zutrauen in die eigenen Fähigkeiten“ (S. 772), welche durch die eher offenen Aufgaben und vielfältigen Zugangsweisen ermöglicht wird. Darüber hinaus lassen sich frühzeitiger individuelle Fehlermuster und Schwierigkeiten erkennen.

Eine Förderung von Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten bedeutet also auch, sie zu fordern und gewisse Anforderungen nicht zu unterschätzen (Scherer, 1994, S. 772). Die in Kapitel 2.3.1 ausführlich dargestellte Leitidee der fundamentalen Idee i.S. einer Konzentration auf grundlegende Inhalte nimmt bezogen auf das Mehr an Lernzeit, das Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten für das Erkunden und Verstehen mathematischer Inhalte benötigen, eine leitende Funktion für den Lernprozess ein (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 13). Übergeordnetes Ziel sollte „der langfristige, verstehensorientierte Aufbau eines Wissens sein, das sich auf das Verständnis mathematischer Zusammenhänge stützt“ (Häsel-Weide et al., 2014, S. 32). Das Prinzip der natürlichen Differenzierung eignet sich in diesem Zusammenhang für den inklusiven Mathematikunterricht, da alle Lernenden die Möglichkeit haben, mathematische Entdeckungen zu machen und dabei entsprechend ihrer individuellen Kompetenzen unterschiedlich tief in die mathematische Substanz eindringen können. In Zusammenhang mit der inhaltlichen Reichhaltigkeit bietet es für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) mathematischen Lernschwierigkeiten einen Rahmen, um „Freiräume für das Nutzten ihrer Vorkenntnisse, für das Ausprobieren eigener Wege und für das Entwickeln individueller Denk- und Arbeitsstile“ zu ermöglichen (Käpnick, Nolte & Walther, 2005, S. 31).

Grundsätzlich benötigen Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten keinen gänzlich anderen Zugang als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler (Hußmann et al., 2014, S. 2). Die

Differenzierung vom Fach aus steht für alle Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt. Für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen ist die natürliche Differenzierung allein jedoch nicht ausreichend. Sie benötigen häufig ergänzend gezielte strukturierte Maßnahmen sowie strukturierende Lernhilfen, um in einer natürlich differenzierenden Lernumgebung zielführend lernen zu können (Krähenmann et al., 2015, S. 44 ff.). Die fachlichen Anforderungen erfordern eine bewusste Begleitung und Unterstützung, der u.a. auch mit Anschauungsmitteln und Veranschaulichungen Rechnung getragen werden kann (vgl. Kap. 2.3.1). Insbesondere Lernende, denen es nicht leicht fällt, von sich aus mathematische Zusammenhänge zu erkennen, benötigen gezielte Anregungen zum inhaltlichen Vorstellungsaufbau (Prediger, 2009), um den bedeutungstragenden Kern mathematischer Aktivitäten erfassen zu können. Dabei spielt die „Unterstützung durch Strukturen ‚von der Sache her'" (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 10) eine grundlegende Rolle. Wember (2009b) konstatiert:

> Bei Kindern mit Lernschwierigkeiten reicht es nämlich in der Regel nicht aus, ihnen lediglich genügend Freiräume zum Erkunden und Entdecken zu geben. Zwar wissen auch diese Kinder solche Freiräume produktiv zu nutzen, […] dennoch muss ich im Förderunterricht prozessbegleitend die Stärken und Schwächen der Kinder diagnostizieren und dementsprechend die weiteren Unterrichtsangebote individuell adaptieren. (S.239)

Gaidoschik (2012) sieht vor diesem Hintergrund für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen allerdings keine Notwendigkeit einer grundsätzlich anderen Förderung:

> Was (rechenschwache) Kinder brauchen, ist im didaktischen Kern dasselbe, was auch für alle anderen Kinder hilfreich ist: eine Lernbegleitung durch fachdidaktisch kompetente, am Denken der Kinder interessierte, wohlwollende Erwachsene; eine Lernbegleitung, welche die Muster der Mathematik in den Mittelpunkt stellt und Kinder dazu anregt und dabei unterstützt, diese Muster für sich zu entdecken und zu verstehen. Manche Kinder brauchen von dieser Art der Lernbegleitung vielleicht mehr, als es im Klassenverband möglich ist; aber sie brauchen davon mehr, und nicht etwas gänzlich anderes. (S. 146)

Hinsichtlich der konkreten Unterrichtsgestaltung lassen sich nach Werning und Baumert (2013) folgende allgemeine Aspekte als lernförderlich im inklusiven Unterricht beschreiben: die „Kommunikation der Unterrichtsziele und Erfolgskriterien", das „Arbeiten mit strukturiertem

Material und ausgearbeiteten Lösungsbeispielen“ sowie ein „häufiges informationshaltiges Feedback“ (S. 42-43). Darüber hinaus gilt es bei Bedarf, gezielte Maßnahmen hinsichtlich der Arbeits(platz)organisation, des Erfassens eines Arbeitsauftrages, einer klaren Strukturierung der Aufgabe und Ergebnisdokumentation sowie einer Visualisierung der Arbeitsschritte zu bieten, um zielgerichtetes Arbeiten zu unterstützen. Die gezielte zusätzliche, individuell abgestimmte Unterstützung einzelner Schülerinnen und Schüler ist notwendig, „sodass sie überhaupt in die Lage versetzt werden, die mathematischen Entdeckungen zu machen oder festzuhalten“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 60). In ähnlicher Weise betonen Leuders und Prediger (2012), dass

> die besten Lernerfolge in Bezug auf Wissensvermittlung bei einer Kombination aus Entdeckung und Unterstützung, einer Balance aus Konstruktion und Instruktion erzielt werden. Alle empirischen Befunde deuten darauf hin, dass es gerade die schwächeren Schülerinnen und Schüler sind, die der engeren Anleitung und Unterstützung bedürfen, um unter solchen Rahmenbedingungen effektiv zu lernen. (S. 46)

Vor dem Hintergrund der Ausführungen zur fokussierten Förderung lassen sich Metaanalysen, wie bspw. die von Swanson (1999), Swanson und Sachse-Lee (2000) sowie Therrien, Zaman und Banda (2011) anführen, die spezifische Komponenten wirkungsvollen Unterrichts für Lernende mit Lernschwierigkeiten herausstellen konnten. Für folgende Komponenten wird ein positiver Einfluss auf Lernentwicklung angenommen (Werning, 2016b, S. 163): Kommunikation der Unterrichtsziele und Erfolgskriterien; Zerlegung der Aufgaben in Teilschritte; Anpassung der Schwierigkeit der Aufgaben an die Schülerfähigkeit, sodass Bearbeitung und Lösung kognitiv herausfordernd sind, aber im Bereich der proximalen Entwicklung liegen; Arbeiten mit strukturiertem Material und ausgearbeiteten Lösungsbeispielen; regelmäßige Leistungskontrolle; häufiges informationshaltiges Feedback; Hinweise auf Strategieverwendung; verteiltes Üben und Wiederholen; interaktive Arbeitsformen in kleinen Gruppen; Vergabe von Zusatzaufgaben. Gersten et al. (2009) weisen in ihrer Metaanalyse dem Verbalisieren von eigenen Gedanken und Lösungsstrategien für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen eine zentrale Bedeutung zu.

Der Verlauf der Förderung sollte auf zwei Ebenen stattfinden, zum einen auf der individuellen Ebene innerhalb des Mathematikunterrichts in der Klasse unter Berücksichtigung der gesamten heterogenen Lerngruppe, zum anderen als individuelle Förderung außerhalb des

Mathematikunterrichts mit dem Fokus auf der gezielten Förderung einzelner Schülerinnen und Schüler. Bauer (2009, S. 163) plädiert:

> Leistungsschwache Schülerinnen und Schüler sollten grundsätzlich in ihrem Klassenverband bleiben und im normalen, gemeinsamen differenzierend angelegten Unterricht hinsichtlich allgemeiner und spezieller mathematischer Kompetenzen gefördert werden. Zusätzlich sollten in speziellen Förderkursen für leistungsschwache Schüler grundlegende Defizite behoben und vorhandene Kompetenzen weiterentwickelt werden.

Das in Kapitel 2.3.1 erläuterte „Sowohl-als-auch-Prinzip" (Scherer, 2017, S. 195) zwischen individueller und unterrichtsintegrierter Förderung erhält insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen eine elementare Bedeutung.

> Eine weitreichende Isolierung der beeinträchtigten Kinder - wenn sie immer an speziellen, reduzierten Aufgaben arbeiten - [kann, R.-F.K.] negative Folgen für das Selbstvertrauen haben. Das heißt nicht, dass Einzelförderungen wenig sinnvoll sind. Denn genauso kann ein ständiges Erleben von Defiziten in gemeinsamen Phasen negative Konsequenzen zeigen. Individuelle Arbeitsphasen sind immer notwendig, aber sie sollten nicht das Unterrichtsgeschehen dominieren. (Scherer, 2015, S. 280)

Folglich stellen individuelle Arbeitsphasen einen notwendigen Aspekt inklusiven Unterrichts dar, sollten aber nicht das Unterrichtsgeschehen dominieren. Vor diesem Hintergrund gilt es besonders zu beachten, dass bei temporären Förderungen in additiven Settings der Gefahr der Etikettierung und Stigmatisierung vorgebeugt werden muss. Im Rahmen der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption werden einige der angeführten Aspekte berücksichtigt sowie beide Ebenen der Förderung in dem Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung miteinander verbunden (Kap. 5).

3.2 Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung

Unterrichtsintegrierte Förderung hat den Anspruch, das individuelle Lernen eines jeden Kindes, ob mit (besonderen) Potentialen oder (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht, in das gemeinsame Lernen zu integrieren. Mit dem von Bartnitzky (2012) angestoßenen und von Häsel-Weide und Nührenbörger (2012) für den Fachunterricht Mathematik konkretisierten *Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung* wird das Ziel verfolgt, den Lernprozess der Lernenden beim Bearbeiten und Überwinden stofflicher Hürden zu unterstützen (Häsel-Weide

& Nührenbörger, 2013a). Zentraler Hauptlernort ist der inklusive Klassenunterricht in der heterogenen Lerngruppe. Mit Fokus auf relevante mathematische Inhaltsbereiche werden spezifische Lerngegenstände bearbeitet und gefördert. Der gemeinsame Lerngegenstand als elementare inhaltliche Voraussetzung ist bedeutungsvoll für das mathematische Lernen aller Schülerinnen und Schüler und stellt die Grundlage für die gemeinsame Auseinandersetzung dar. Einerseits steht also die gesamte Lerngruppe im Mittelpunkt, d.h. Lernende, die „unter Berücksichtigung von Heterogenität im alltäglichen Mathematikunterricht eine an ihren individuellen Kompetenzen und Lernvoraussetzungen ansetzende Förderung erfahren sollen" (Häsel-Weide et al., 2014, S. 18). Gleichzeitig rückt das einzelne Kind mit seinen individuellen Lernpotentialen und Lernbedürfnissen im regulären Unterricht stärker in den Mittelpunkt. Schülerinnen und Schüler mit (mathematischen) Lernschwierigkeiten, für die der gemeinsame Lerngegenstand eine Herausforderung darstellt und die unter den Bedingungen des alltäglichen Unterrichts „zu wenig zu langsam lernen" (Wember, 2009b, S. 231), erhalten aufgrund ihrer individuellen Lernbedürfnisse Unterstützung bei der Bewältigung stofflicher Hürden (vgl. Begemann 2001 in Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013a).

> Unterrichtsintegrierte Förderung zielt zwar auf das einzelne Kind; aber mit Aktivitäten, die von allen Kindern als verstehensorientierte Lernanregungen passend zu ihrem jeweiligen Lernstand genutzt werden können. Die Verknüpfung produktiver Ansätze der Förderung von Kindern (in Anbetracht von Heterogenität) im und außerhalb vom Unterricht schafft eine Grundlage dafür, dass Kinder mit (mathematischen) Lernschwächen den Alltag des Unterrichts nicht mehr allein mithilfe der Kenntnis spezifischer Verfahrensregeln bewältigen, sondern vielmehr während der Arbeit an Lernumgebungen in strukturiert-offenen Lernsituationen grundlegende mathematische Strukturen und Muster verstehen lernen. (Häsel-Weide et al., 2014, S. 24)

Allen Lernenden einer heterogenen Lerngruppe soll eine nachhaltige Förderung mathematischer Kompetenzen ermöglicht werden, die sowohl individuelle Fähigkeiten als auch Schwierigkeiten fokussiert und dabei Phasen des individuellen und gemeinsamen Lernens beinhaltet. Die unterrichtsintegrierte Förderung vereint zentrale etablierte Aspekte guten (Mathematik-) Unterrichts (vgl. Kap. 2.3.1 und 2.3.2) als didaktisches Fundament miteinander, um eine lernförderliche Umgebung für alle Lernenden zu schaffen, der Heterogenität inklusiver Lerngruppen zu begegnen und somit dem Ziel des tatsächlich gemeinsamen Mathematiklernens gerecht werden zu können (Häsel-Weide, 2017, S. 20).

Nachfolgend werden die drei zentralen didaktischen Leitideen dargestellt, die dem Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung zugrunde liegen und dessen theoretisches Fundament bilden. Daran anschließend erfolgt eine detailliertere Erläuterung der für den Kontext der vorliegenden Arbeit bedeutungstragenden Förderschleifen.

3.2.1 Didaktische Leitideen

Es lassen sich drei zentrale Qualitätsmerkmale unterrichtsintegrierter Förderung herausarbeiten, die als handlungsleitend für die Gestaltung von (mathematischen) Förderprozessen im regulären Unterricht gelten. Eingebunden in das übergeordnete Konzept der natürlichen Differenzierung unterstützen sie eine langfristig tragende und wirksame Förderung (Bartnitzky, 2012; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2012, S. 12 ff.). Die nachfolgenden Ausführungen basieren auf den in Kapitel 2.3.1 ausführlich dargestellten didaktischen Leitideen, die grundsätzlich für einen qualitativ hochwertigen Mathematikunterricht gelten. Sie werden im Hinblick auf ihre Relevanz für das Konzept der unterrichtintegrierten Förderung subsumiert und für den vorliegenden Kontext präzisiert.

Beziehungsreich und verstehensorientiert

Im Mittelpunkt unterrichtsintegrierter Förderung im Fach Mathematik steht der fachliche Kern, d.h. das relationale Wissen um die mathematischen Zusammenhänge. Dessen Aufbau und Erwerb bedarf einer langfristigen und verstehensortientierten Entwicklung. Im Gegensatz zu der Annahme der klassischen Hilfsschulpädagogik (vgl. Kap. 2.2.2), für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten komplexere Fähigkeiten in kleinste Teilfähigkeiten zu zerlegen und in kleinsten Lernportionen zu verabreichern, wird im Rahmen der unterrichtintegrierten Förderung der Fokus auf Sinnzusammenhänge und mathematische Beziehungen gerichtet. In Abgrenzung zum isolierten kleinschrittigen Vorgehen stehen Reichhaltigkeit und Beziehungsreichtum mathematischer Lerngegenstände im Vordergrund. Das strukturierte, aber gleichzeitig offene Lernangebot ermöglicht die individuelle und unterschiedlich komplexe Bearbeitung des gemeinsamen Lerngegenstands. Damit dieser von allen Kindern durchdrungen werden kann, bedarf es vor dem Hintergrund der Ganzheitlichkeit sowohl der Zugänge auf elementarer Ebene, die eine aktiv-entdeckende und handlungsorientierte Herangehensweise ermöglichen, als auch weiterführender Zugänge, die das Entdecken und Reflektieren vertiefender Zusammenhänge erfordern (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 228).

> Unter Beachtung der spezifischen Schwierigkeiten und der individuellen Ausprägungen an Zugangsweisen, Facetten, Eigenheiten begrifflichen Denkens steht im Zentrum einer unterrichtsintegrierten Förderung die aktiv-entdeckende und produktive Auseinandersetzung mit Mathematik. Diese geht einerseits vom einzelnen Kind aus, andererseits sind aber die Aktivitäten eingebettet in gemeinsame sozial-interaktive Erkundungen mit der Lerngruppe. Die Verknüpfung individueller und sozialer Lernprozesse schafft die Grundlage einer individuellen Förderung von Kindern, die sich eigenständig in das gemeinschaftliche Mathematiklernen einbringen. (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015b, S. 33)

Sowohl der Aufbau zentraler Zahlbeziehungen, die produktive Auseinandersetzung mit reichhaltigen Lernangeboten sowie die Automatisierung bestimmter Kernaufgaben spielen im Sinne operativer Beziehungen vor allem vor dem Hintergrund der Prävention von sich verfestigenden (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen eine wichtige Rolle. Der Fokus auf grundlegende mathematische Inhaltsbereiche unterstützt die verständige Einsicht in die mathematischen Strukturen.

> Anstatt für einige wenige Kinder inhaltlich eingeschränkte und festgelegte Anforderungen zu setzen, werden also erfolgreiche Lernprozesse bei allen Kindern erzielt, indem mathematische Themen (ganzheitlich in fachlich sinnvollen Zusammenhängen strukturiert) aktiv erkundet, eigene mathematische Zugänge entwickelt und schließlich auch eigene Lösungswege reproduziert werden können. (Häsel-Weide et al., 2014, S. 22)

„Das Prinzip, dass »grundlegendes Verstehen« nachhaltiger ist als »dressierte Fertigkeit« muss Grundlage eines Unterrichts sein, der nicht zu einer andauernden Reparaturwerkstatt degradiert werden will“, schreiben Prediger, Hußmann, Leuders und Barzel (2011, S. 24), und neben der Relevanz der Verständnisorientierung betonen auch Krauthausen und Scherer (2008, S. 199) im Rahmen eines inhaltlich-mathematisch differenzierten Förderangebots das Kriterium der Ganzheitlichkeit und die damit verbundene fachliche Komplexität, die nicht unterschritten werden dürfe.

Diagnosegeleitet und differenziert

Unterrichtsintegrierte Förderung verbindet Lern- und Leistungssituationen miteinander. Vor dem Hintergrund der Annahme, dass jede Lernsituation wichtige diagnostische Hinweise auf individuelle Lernstrategien und Denkweisen bereithält, wird der unterrichtliche Prozess fortlaufend für Beobachtungen und Deutungen individueller Vorgehensweisen und Artikulationen diagnostisch genutzt. Auch fehlerhafte Lösungen werden hinsichtlich individueller mathematischer Entwicklungsprozesse differenziert analysiert und somit zum „Medium diagnostischen Handelns im Unterricht“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2012, S. 13). An die Stelle der Bewertung „Richtig oder Falsch“ rückt vielmehr die differenzierte Analyse individueller Bearbeitungen und Lernprozesse, die diagnostisch „mehrdeutig“ (Häsel-Weide et al., 2014, S. 27) sind und aufschlussreiche Aussagen über mögliche Fehlerursachen und anschließende Fördermöglichkeiten liefern (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 21-22). Sowohl qualitative Beobachtungen während des Unterrichts als auch die Auswahl geeigneter mathematischer Aufgaben im Sinne substantieller Aufgabenformate, die sowohl diagnostische als auch handlungsleitende Erkenntnisse für die weitere individuelle Förderung geben, spielen eine relevante Rolle. Substantielle Aufgabenformate ermöglichen im Sinne der natürlichen Differenzierung neben der Arbeit an einer ganzheitlich strukturierten Aufgabe gleichzeitig auch die selbstständige und individuelle inhaltliche Vertiefung. Neben den diagnostisch erkenntnisreichen substantiellen Aufgaben lassen sich auch mündliche und schriftliche Standortbestimmungen (Sundermann & Selter, 2005, S. 6-7), ausgewählte Tests sowie Unterrichts- und Reflektionsgespräche mit in die diagnostische Analyse einbeziehen. Auf dieser Grundlage kann die Lehrkraft individuelle Kompetenzen und Schwierigkeiten erkennen und die einzelnen Lernprozesse entsprechend unterstützen. Dabei sollte die Differenzierung nicht nur auf Ebene der Methode oder Sozialform stattfinden, sondern insbesondere auch auf Ebene der fachlichen Inhalte. Fördermaßnahmen sind vor diesem Hintergrund immer auf diagnostische Erkenntnisse zurückzuführen (Häsel-Weide et al., 2014, S. 25). Offene Aufgabenformate ermöglichen einen beziehungsreichen Zugang und eröffnen gleichzeitig die Möglichkeit, dass sich die Lernenden auf ihrem individuellen Niveau strukturiert und zielgerichtet mit dem Lerngegenstand auseinandersetzen können. Dabei ist jedoch insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten das Spannungsfeld zwischen Offenheit und notwendiger Unterstützung zu berücksichtigen. Diese den Lernprozess begleitende kontinuierliche Diagnostik stellt ein wesentliches Qualitätsmerkmal unterrichtsintegrierter Förderung dar (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 32). Damit geht ein hoher Anspruch an die fachdidaktischen und diagnostischen Kompetenzen der Lehrkräfte einher, denn die unterrichtsintegrierte Gestaltung von Förder- und Lernprozessen setzt nicht nur das Erkennen von Vorkenntnissen und Kompetenzen voraus, sondern erfordert darüber hinaus diagnostische Erkenntnisse über mögliche Schritte im Lernprozess der einzelnen Schülerinnen und Schüler. Auf dieser Grundlage kann eine langfristige Wissensentwicklung an individuelle Lernpotenziale angepasst werden (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013a).

Kooperativ und kommunikativ

Bei der unterrichtsintegrierten Förderung findet eine soziale-innermathematische Verknüpfung statt, d.h. es werden sozial-interaktive Lernprozesse initiiert, die die individuelle Förderung in kollektive Lernprozesse integrieren. In diesem Austausch über den gemeinsamen Lerngegenstand wird der Auf- und Ausbau mathematischen Verständnisses angeregt. Zentrale Bedeutung nimmt der Diskurs über verschiedene, ähnliche oder konträre Lösungen und Sichtweisen ein (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013b, S. 8), wodurch das gemeinsame Lernen durch gegenseitige Bereicherung geprägt wird (Häsel-Weide et al., 2014, S. 25). Vor allem Kinder mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen können insofern von den konträren Deutungen profitieren, als dass sie eingefahrene Fehlermuster hinterfragen und andere Sichtweisen auf denselben Lerngegenstand einnehmen können (Häsel-Weide et al., 2014, S. 38). Kognitive Konflikte können als Diskursanlass genutzt werden. Sie regen das Nachdenken über eine Sache und das Hinterfragen individueller Lösungsansätze an und können somit als „Katalysator für die Förderung“ (Häsel-Weide et al., 2014, S. 38) angesehen werden. Die Erkenntnisprozesse der Lernenden werden im Gespräch weiter ausgebaut. Im Kern der kommunikativen Auseinandersetzungen stehen die kindlichen Begründungen der mathematischen Zusammenhänge und nicht die bloße Mitteilung von Ergebnissen oder Lösungswegen. Die individuellen Lernprozesse mit ihren unterschiedlich tiefen Entdeckungen stellen die Grundlage für die sozial-interaktive Auseinandersetzung zwischen den Lernenden dar und ermöglichen die Initiierung und Weiterentwicklung neuer Verstehensprozesse. Eine unterrichtsintegrierte Förderung beinhaltet demnach sowohl kooperative und kommunikative Handlungen während der Arbeitsphasen als auch reflektive Diskurse innerhalb der gesamten Lerngruppe. Dabei konstruiert sich das (neue) Wissen nicht nur durch die Kommunikation zwischen den Lernenden, sondern auch durch den kommunikativen Austausch mit der Lehrkraft. Die interaktiven Begegnungen in Form strukturierter Kooperationsformen ermöglichen auf diese Weise, mathematisches Wissen auszudifferenzieren, zu flexibilisieren und weiterzuentwickeln. Innerhalb des Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung stellen kommunikative und kooperative Arbeitsweisen eine wesentliche Leitidee dar, die sukzessive in den Klassen- und Kleingruppenunterricht integriert werden müssen, um für alle Lernenden von produktiver Wirkung sein zu können.

3.2.2 Förderschleifen

Als Besonderheit des hier verfolgten Konzepts treten neben die unterrichtsintegrierte Förderung die zusätzlichen „Förderschleifen". Der Begriff der Förder*schleife* soll das immanente Charakteristikum der Verknüpfung und Verbindung mit dem Fachunterricht der Lerngruppe betonen und zugleich auf die zeitliche Begrenzung und flexible Gestaltung der Angebote hinweisen. Es handelt sich um zeitlich befristeten Förderunterricht für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten in kleinen Lerngruppen in äußerer Differenzierung, „dessen Aufgaben aus der gemeinsamen Arbeit erwachsen und in die gemeinsame Arbeit wieder hineinführen" (Bartnitzky, 2012, S. 29). Die konsequente inhaltliche und personale Anknüpfung an den Mathematikunterricht auf Klassenebene stellt eine zentrale Voraussetzung und damit gleichzeitig die Abgrenzung zu üblichen externen Förderungen dar. „Es kann nicht ausreichen, den bereits erfahrenen Mathematikunterricht lediglich zu wiederholen, denn schließlich haben die Kinder mit besonderem pädagogischen Förderbedarf gerade von diesem Unterricht nicht ausreichend profitieren können" (Wember, 2009b, S. 239). Mit der unterrichtsintegrierten Förderung kann auf die Kritik an einer inhaltlich losgelösten und vom Klassenunterricht getrennten Förderung reagiert werden. Im Vordergrund stehen nicht das Fördern von isolierten Defiziten nach dem Klassen- oder Fachunterricht, vielmehr liegt der Fokus auf dem ständigen Bezug zur inhaltlichen Auseinandersetzung mit dem gemeinsamen Lerngegenstand in der Lerngruppe im Sinne eines sinnhaften und anschlussfähigen Lernens. Wittmann (2015, S. 201) hebt die Notwendigkeit der über den Unterricht hinausgehenden Förderung für Kinder mit großen Schwierigkeiten hervor und appelliert gleichzeitig an den möglichst nahtlosen Anschluss an den Klassenunterricht. Im Rahmen der Förderschleifen können Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten individuelle Schwierigkeiten überwinden, kritische Lernaspekte sowie Lernstrategien erarbeiten und bereits vorhandenes Wissen strukturieren, systematisieren und übend anwenden.

Die gemeinsame Bearbeitung herausfordernder problemhaltiger Aufgabenstellungen, die Verallgemeinerung von Lösungsideen sowie das Erlernen eines verständigen Umgangs mit Hilfsmitteln bieten sich in den zeitweise exklusiven Lernsituationen an (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 15), welche die Entwicklung und Vertiefung mathematischen Verständnisses anstreben sollten. Dabei kann sowohl auf bereits bekannte Inhaltsbereiche vertiefend zurückgegriffen, als auch präventiv auf bestimmte, im Unterricht der heterogenen Lerngruppe noch nicht bearbeitete Inhalte vorgegriffen werden. Ein derart präventiv erarbeiteter „Startvorteil“ (Ademmer, Prediger & Reiche, 2018, S. 305) fördert das Einbringen in den Klassenunterricht bei Lernenden, die zusätzliche Impulse für bestimmte Denkprozesse benötigen. Wember (2001, S. 166-167) spricht in diesem Zusammenhang von der „remedialen Strategie“. Individuelle Lernerschwernisse bzw. fehlende oder unzureichend entwickelte Kompetenzen sollen durch eine direkte Förderung behoben bzw. verringert werden mit dem Ziel, bessere Lernvoraussetzungen für den Mathematikunterricht zu schaffen. Diese sonderpädagogische Sichtweise lässt sich mit der fachdidaktischen Perspektive verknüpfen, nach der kritische inhaltliche Stellen und sogenannte Lernhürden bewusst im Unterricht thematisiert und bearbeitet werden sollen, da sie für die weitere Lernentwicklung relevant sind. Lernerschwernisse sollen also nicht im Sinne der kompensatorischen Strategie umgangen und als nicht (mehr) ausbaufähig angesehen werden, sondern es besteht die Annahme, dass die Kinder ihre fehlenden Voraussetzungen durch spezifische Förderangebote anbahnen und weiter ausbauen können.

> Eine separate, exklusive Förderung, die an die mathematischen Kompetenzen des einzelnen Kindes angepasst sind, besitzt in bestimmten Lehr- und Lernsituationen ihre Berechtigung. So kann dem einzelnen Kind mehr Zeit für die inhaltliche Erkundung eröffnet werden, sodass es begriffliche Weiterentwicklungsprozesse vornehmen kann. Zudem kann sich die Lehrkraft dem Kind […] intensiver zuwenden. (Häsel-Weide et al., 2014, S. 21)

Die entscheidende Frage lautet, wie gut die Lernenden in den Klassenunterricht eingebunden sind.

> Die Didaktik hat sich im inklusiven Unterricht nicht nur auf die individuellen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler und entsprechende, individualisierte Angebote einzustellen. Bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht muss ebenso Berücksichtigung finden, inwieweit die individuellen Leistungen und Beiträge der Schülerinnen und Schüler im Klassenunterricht (z.B. in

> Unterrichtsgesprächen) sichtbar und relevant werden können, d.h. wie wechselseitige Bezugnahme von Schülerinnen und Schülern (mit und ohne Förderbedarf) im Hinblick auf den Inhalt des Unterrichts initiiert werden können. (Musenberg & Riegert, 2015, S. 23)

Im Mittelpunkt steht die Frage nach der inhaltlichen Passung (Wielpütz, 2010, S. 111) auf zwei Ebenen: einerseits zwischen der zeitlich begrenzten Förderung außerhalb des Klassenunterrichts und der unterrichtsintegrierten Förderung innerhalb der heterogenen Lerngruppe, andererseits die Passung zwischen der inhaltlichen Arbeit in den Förderschleifen und den individuellen Lernvoraussetzungen der Kinder.

> Die Förderung von leistungsschwächeren Kindern ist eine zentrale Aufgabe des regulären Mathematikunterrichts. Für einzelne Schülerinnen und Schüler mag darüber hinaus eine weitere individuelle, möglicherweise sogar außerschulische Förderung notwendig sein. Dies entlastet jedoch die Mathematiklehrkraft nicht von der Verantwortung, den Unterricht so zu gestalten, dass alle Kinder angeregt und unterstützt werden, grundlegende mathematische Vorstellungen aufzubauen. (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2012, S. 45)

Darüber hinaus ist zentral, dass die Förderschleifen von den Lernenden als sinnvoll für den individuellen und gemeinsamen Arbeitsprozess angesehen werden und dass in ihnen im Sinne der Transparenz stets ein gemeinsames Lernziel und -ergebnis deutlich wird (Carle, 2017, S. 23). Vor diesem Hintergrund gestaltet sich die Planung und Durchführung der Förderschleifen als anspruchsvolle Aufgabe, die eine differenzierte und kontinuierliche Diagnostik erfordert.

Den aktuellen inklusionsdidaktischen Diskurs aufgreifend versucht das Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung eine Balance zu finden zwischen inhaltlicher Gemeinsamkeit in der Vielfalt und Vielfalt in gemeinsamen Lernsituationen. Es kann somit als zentrales Konzept der fachdidaktisch fundierten, inklusiv orientierten Unterrichtsentwicklung (Korff, 2012, S. 153) angesehen werden. Im Kontext der differenzsensiblen Unterrichtsplanung wird damit dem „Sowohl-als-auch“-Prinzip von Scherer (2017) Rechnung getragen, denn es werden sowohl Phasen und Situationen des gemeinsamen Lernens ermöglicht als auch individuelle Lernsituationen berücksichtigt. Dabei wird eine „verantwortungsbewusste Balance sozial-inklusiver und individuell-exklusiver Lernsituationen“ hergestellt, die als „untrennbare Bestandteile inklusiven Unterrichts“ gelten (Markowetz, 2012, S. 154). Übergeordneter Anspruch dabei ist, dem Ziel größtmöglicher Gemeinsamkeiten Rechnung zu tragen (Scherer, 2017, S. 195). Im Rahmen der unterrichtsintegrierten Förderung kann der Forderung für inklusiven Mathematikunterricht nachgegangen werden, individuelle Stärken und Schwächen der Lernenden (an)zuerkennen, im Unterricht unterstützend zu berücksichtigen sowie in produktiver Weise fachlich aufeinander zu beziehen. Vor dem Hintergrund der Förderschleifen nimmt der enge wechselseitige Bezug und die soziale Eingebundenheit in das gemeinsame Lernen in der Klasse eine besondere Bedeutung ein, in der sich die Lernenden thematisch einbringen können und dabei differenzsensible Unterstützung erfahren (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017b, S. 12).

Kritische Stimmen, wie beispielweise Hinz (2013), sehen in der zusätzlichen Förderung einen Widerspruch zur Grundidee der Inklusion. Präventive Förderangebote würden den Anschluss an die allgemeinen Entwicklungsziele anstreben und das Postulat von Inklusion, „nämlich die Legitimität individueller Lernwege und Entwicklungen“ (S. 8), ignorieren. Befürworter (vgl. u.a. Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 173; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015b, S. 39; McLeskey & Waldron, 2011) sehen zusätzliche (präventive) Förderangebote nicht als Widerspruch, sondern als wichtige Bestandteile von Inklusion (Huber, C., Grosche & Schütterle, 2013; Kuhl & Hecht, 2014, S. 409), um den Fokus verstärkt auf die Verwirklichung der bestmöglichen Lernentwicklung aller Kinder, insbesondere der Kinder mit (besonderen) Lernschwierigkeiten, zu richten. Die unterrichtsintegrierte Förderung sollte in ein „komplementären [s] Verhältnis zu weiteren Fördermöglichkeiten außerhalb oder innerhalb des Unterrichts, in denen gezielt Lernprozesse einzelner Kinder vertieft und erweitert werden“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013a, S. 13) gestellt werden. Zusätzliche Förderung im Sinne der Prävention sei zwar nicht gleichzusetzen mit Inklusion, trage aber eine elementare inklusive Bedeutung im Rahmen des Gemeinsamen Lernens an allgemeinen Schulen, d.h. ihr kann ein „inklusives Moment“ (Kuhl & Hecht, 2014, S. 409) zugesprochen werden.

3.3 Leitende Fragestellungen für die Interventionsstudie

Die vorangegangenen Ausführungen zur Förderung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im inklusiven Mathematikunterricht werfen für die vorliegende Forschungsarbeit die folgenden handlungsleitenden Fragen auf:

- Ermöglicht das Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung die Entstehung von Gemeinsamkeit in der Vielfalt und Vielfalt in der Gemeinsamkeit („Sowohl-als-auch“ Prinzip)?
- Bewirkt die zusätzliche Förderung in den Förderschleifen eine bessere Teilhabe im Mathematikunterricht der heterogenen Lerngruppe?
- Profitieren die Kinder mit (besonderen) Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht durch die zusätzlichen Förderschleifen in ihrer mathematischen Lernentwicklung?

4 CURRICULARE BEREICHE

Im folgenden Kapitel werden die beiden für den vorliegenden Kontext zentralen fachlichen Inhaltsbereiche vor dem Hintergrund ihrer theoretischen Struktur dargelegt. Nach einer kurzen curricularen Einordnung erfolgt jeweils eine Sachanalyse, deren Ziel es ist, „sich der Strukturen und Beziehungen des Unterrichtsgegenstandes bewusst zu werden und diese auf den didaktischen Planungsprozess beziehen zu können“ (Heckmann & Padberg, 2008, S. 71). In Kapitel 4.1 liegt der Fokus auf den zentralen Inhaltsbereichen des arithmetischen Basisstoffs, im Speziellen vor allem auf Aspekten, die für den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses (vgl. Kap. 4.2) unabdingbar sind. Insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen stellen diese arithmetischen Verstehensgrundlagen eine hoch relevante Voraussetzung und essentielle Basis für ein erfolgreiches Weiterlernen dar, deren Wirksamkeit empirisch nachgewiesen werden konnte (u.a. Prediger, Freesemann, Moser Opitz & Hußmann, 2013; Moser Opitz, 2007, 2013; vgl. Kap. 4.1.4). In Kapitel 4.2 steht die Zahlbereichserweiterung der natürlichen Zahlen um die positiven rationalen Zahlen im Mittelpunkt. Der Fokus liegt auf der detaillierten Betrachtung zentraler Aspekte, die als wesentliche Voraussetzung für den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses gelten.

4.1 Arithmetischer Basisstoff

Für die Beschreibung der bedeutsamen Inhalte des Arithmetikunterrichts in der Primarstufe werden im Folgenden zunächst die zwei Begriffe „mathematische Basiskompetenzen“ und „mathematischer Basisstoff“ voneinander abgegrenzt, bevor die entscheidenden Inhaltsbereiche aus fachlicher Sicht erläutert werden. Beide Bezeichnungen beziehen sich zwar auf die zentralen arithmetischen Kompetenzen, die Mathematiklernende üblicherweise während der Grundschulzeit erwerben und werden in der Fachliteratur häufig synonym verwendet. Für das am Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe I ausgerichtete Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit jedoch spielt eine differenzierte Betrachtung der subtilen Unterschiede eine bedeutende Rolle. Eine inhaltliche Auseinandersetzung mit dem von der OECD geprägten Begriff „mathematical literacy“ wird hier nicht geführt, sie kann erweiternd bei Korff (2016b, S. 74 ff.) nachgelesen werden.

Der Begriff „mathematische Basiskompetenzen“ bezieht sich auf das dreistufige Entwicklungsmodell früher mathematischer Fähigkeiten von Krajewski (2008; Krajewski & Schneider, 2009). Das Modell umfasst sowohl vorschulische Vorläuferfertigkeiten als auch frühe mathematische Kompetenzen, die im Grundschulalter erworben werden. „Der Begriff „mathematische Basiskompetenzen“ bezieht sich üblicherweise auf grundlegende Phasen der mathematischen Kompetenzentwicklung und dient als eine Art Sammelbegriff für basale Voraussetzungen, die ein Kind mitbringen muss, um für die Anforderungen im Mathematikunterricht hinreichend gewappnet zu sein“ (Ennemoser, Krajewski & Schmidt, 2011, S. 229). Die erste Kompetenzebene umfasst Basisfertigkeiten wie die Unterscheidung von Mengen, das Aufsagen der Zahlwortreihe sowie Zählprozeduren, wobei Zahlen und Ziffern noch ohne Größenbezug verwendet werden. Auf der zweiten Ebene werden Kompetenzen angesprochen, die zu einer immer präziseren Ausbildung des Anzahlkonzepts führen, d.h. die Mengenrelationen sowie die Mengen-Zahlen-Verknüpfung, die sich in einem Verständnis der Mächtigkeit von Zahlen ausdrückt. Die dritte Kompetenzebene schließt die Anzahlrelationen ein, d.h. das Verständnis von Zahlen als Repräsentanten für Relationen zwischen Mengen.

Nach Krajewski sind die benannten Basiskompetenzen allerdings nicht auf vorschulische Vorläuferfertigkeiten bzw. niedrige Zahlenräume zu Beginn der Primarstufe beschränkt. Auf der Grundlage der drei Ebenen des Kompetenzentwicklungsmodells der frühen mathematischen Vorläuferfertigkeiten und Basiskompetenzen wird davon ausgegangen, dass sich auch die mathematische Lernentwicklung in der Sekundarstufe entsprechend dieser Ebenen (weiter-)entwickelt. Die weiterführenden Inhalte der Sekundarstufe bauen auf allen drei Kompetenzebenen auf und zeichnen sich durch ein zunehmend präziser werdendes Zahlverständnis aus. Sie gehen aber insbesondere aus der dritten Ebene, die sich auf Zahlen als Repräsentanten für die Beziehungen zwischen Mengen beziehen, hervor (Krajewski, 2013a, S. 165). Aufgrund ihrer hohen Relevanz für das grundlegende Verständnis von Rechenoperationen gilt es, die mathematischen Basiskompetenzen bis in die Sekundarstufe hinein immer wieder auf höhere Zahlenräume sowie auf die konzeptuelle Einsicht in weiterführende Rechenfertigkeiten zu übertragen und zu vertiefen (Krajewski & Ennemoser, 2010, S. 358-359). Unter dem Begriff „mathematische Basiskompetenzen“ wird von Ennemoser et al. (2011) darüber hinaus das mathematische Konventions- und Regelwissen, d.h. „das Verständnis der über die bloße Ziffern- und Zahlenkenntnis hinausgehenden mathematischen Notation“ (Krajewski, 2013b, S. 168), als „weitere potenziell bedeutsame und ebenfalls sehr basale Fertigkeitskomponente“ (Ennemoser et al., 2011, S. 228) gefasst. Beide Arten der basalen Kompetenzen sind auch in der Sekundarstufe I in Abgrenzung von höheren mathematischen Kompetenzen zu betrachten.

Moser Opitz (2007, 2013) verwendet ein erweitertes Begriffsverständnis. Der Begriff „mathematischer Basisstoff“ legt den Fokus nicht nur auf die grundlegende Kompetenzentwicklung, sondern auf alle wichtigen fachdidaktischen Inhalte, die zur Erarbeitung der Grundprinzipien des Zahlensystems sowie der Grundoperationen benötigt werden. Der Begriff ist damit stärker curriculumorientiert und bezieht elementare arithmetische Fähigkeiten mit ein. Er umfasst zentrale, (instrumentell) bedeutsame und grundlegende Konzepte und Verfahren, die als unverzichtbar für die mathematische Kompetenzentwicklung gelten.

Für die vorliegende Arbeit wird der Begriff des mathematischen bzw. arithmetischen Basisstoffs verwendet, der zentrale mathematische Kenntnisse der Grundschulmathematik einbezieht, die vor dem Hintergrund aktueller Forschungsergebnisse als entscheidend für den weiteren erfolgreichen Lernprozess gelten. Nach einer curricularen Einordnung erfolgt eine vertiefende Darstellung der relevanten Inhaltsbereiche. Daran anschließend wird die Relevanz des arithmetischen Basisstoffs für die Sekundarstufe I dargelegt und abschließend aus empirischer Sicht nachgewiesen.

4.1.1 Curriculare Einordnung

Die im weiteren Verlauf differenzierter beleuchteten Aspekte des arithmetischen Basisstoffs sind primär im Kerncurriculum der Grundschule verankert. Da die hier dargestellte Interventionsstudie an einer Integrierten Gesamtschule in Hannover durchgeführt wurde, werden die Kerncurricula dieses Bundeslandes zugrunde gelegt (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006, S. 20-21). Unter den inhaltsbezogenen Kompetenzen im Bereich „Zahlen und Operationen“ wird der Aufbau einer „tragfähigen Vorstellung von Zahlen in verschiedenen Darstellungen, unter verschiedenen Aspekten, ihren Eigenschaften und Beziehungen zu anderen Zahlen“ (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006, S. 19) aufgeführt. Das Verständnis der Grundoperationen mit ihren Grundbegriffen sowie das

Erkunden deren beziehungsreicher Verbindungen zählen zu den Kompetenzen, die bereits am Ende der zweiten Klasse erwartet werden. Auch ein sicheres Operationsverständnis sowie die verständige Beherrschung der Operationen in Form von Rechenstrategien und automatisierten Kernaufgaben des kleinen Einmaleins werden hier aufgeführt (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006, S. 20-21). Gleichwohl der arithmetische Basisstoff eine elementare Bedeutung für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I darstellt (vgl. Kap. 4.1.4), wird er im Kerncurriculum für die Integrierte Gesamtschule der Schuljahrgänge 5 bis 10 in Niedersachsen nur indirekt berücksichtigt. Unter dem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Zahlen und Operationen" werden Kopfrechenstrategien und Rechengesetze zum vorteilhaften Rechnen sowie die Grundrechenarten zum Lösen von Sachproblemen am Ende des sechsten Schuljahrgangs als Kompetenzen erwartetet (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012, S. 29).

4.1.2 Sachanalyse und fachlicher Kern

Für eine differenzsensible Unterrichtsplanung und Unterrichtsgestaltung ist die Sachanalyse des Lerngegenstands von zentraler Bedeutung. Auf die differenzierte Darstellung der Entwicklung des arithmetischen Basisstoffs wird an dieser Stelle verzichtet, gleichwohl die Beschreibung der spiralförmigen Kompetenz- und Lernentwicklung im Rahmen einer Sachanalyse bedeutsam ist. Vertiefende Einblicke in den Entwicklungsprozess liefern verschiedene Modelle der Zahlverarbeitung und der numerischen Entwicklung, die in Detailfragen zwar unterschiedliche Schwerpunkte setzen, grundsätzlich jedoch viele Übereinstimmungen aufzeigen, wenn man etwa das „Vier-Stufen-Modell der Entwicklung zahlverarbeitender Hirnfunktionen" von Aster und Kollegen (Aster, 2013; Aster & Shalev, 2007), das „Entwicklungspsychologische Niveaustufenmodell früher mathematischer Kompetenzen" von Fritz und Ricken (2008) sowie das „Entwicklungsmodell früher mathematischer Fähigkeiten" von Krajewski (Krajewski, 2008; Krajewski & Schneider, 2009) vergleicht. Einen Überblick über die Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Grundschulalter geben u.a. Schneider et al. (2016).

Der mathematische Basisstoff umfasst folgende Inhaltsbereiche zu den natürlichen Zahlen, die als zentrale Aspekte der arithmetischen Kompetenzen zählen (Moser Opitz, 2007, 2013; Humbach, 2008; Schäfer, J., 2005):

- Zählen (in Schritten)
- Teil-Ganzes-Beziehung
- Verständnis des Dezimalsystems
- Verständnis der Grundoperationen
- Mathematisierungsfähigkeit und Problemlösen
- Umgang mit Sachaufgaben
- Grundvorstellung / Darstellungswechsel

Es ist in der vorliegenden Arbeit nicht nötig, eine umfassende fachliche und fachdidaktische Darstellung aller Bereiche des arithmetischen Basisstoffs zu leisten, zumal das in der zitierten Fachliteratur bereits geleistet wurde. Der Fokus wird im Folgenden auf die ausgewählten Aspekte des mathematischen Basisstoffs gerichtet, die für die Entwicklung eines anschaulichen Bruchzahlverständnisses von besonderer Relevanz sind. Es werden diejenigen Inhaltsbereiche vor dem Hintergrund ihrer fachwissenschaftlichen Struktur differenziert betrachtet, die sowohl mit den Testaufgaben des „BruKos“ (Kap. 7.1.1) erfasst als auch explizit in der Unterrichts- und primär in der Förderkonzeption (Kap. 5.2) berücksichtigt werden.

- Zahlzerlegungen / Teil-Ganze-Beziehung
- Halbieren und Verdoppeln
- Multiplikation und Division sowie deren Beziehungen
- Beziehungsreiches Einmaleins und Einsdurcheins
- Vertiefung der Grundvorstellung zur Division (Aufteilen / Verteilen)
- Darstellungswechsel

Die beiden letztgenannten Inhaltsbereiche, die Vertiefung der Grundvorstellung zur Division und der Darstellungswechsel, sind nicht direkt als Inhaltsbereiche des arithmetischen Basisstoffs im engeren Sinne zu verstehen, sondern als verbindende Komponenten.

Zahlzerlegungen / Teil-Ganze-Beziehung

Die Zahlzerlegung gehört zu einer der bedeutsamen Kompetenzen des Mathematikunterrichts der Grundschule. Ein wichtiger Meilenstein in der Entwicklung der mathematischen Kompetenzen (Fritz, Ricken & Balzer, 2009; Gerster, 2013) liegt in der Erkenntnis von Mengen als gliederbare Quantitäten sowie dem „operativen Durchdringen“ (Häsel-Weide et al., 2014,

S. 57) der Menge. Dahinter steht einerseits die Einsicht, dass eine Menge auf unterschiedliche Weise in Teilmengen zerlegt bzw. aus Teilmengen zusammengesetzt werden kann, andererseits das Verständnis davon, dass die Anzahl der Objekte der beiden Teilmengen der Anzahl der Objekte der Gesamtmenge entspricht. Diese Kompetenz wird unter dem Begriff Teil-Ganze-Konzept[2] gefasst. Die zentrale Verständnisgrundlage bildet die triadische Struktur von Zahlen, welche die Beziehungen zwischen den Mengen determiniert. Aufgrund der Äquivalenz beider Teilmengen zur Gesamtmenge kann durch die Kenntnis von zwei (Teil-)Mengen auf die dritte geschlossen werden (Ehlert, Fritz, Arndt & Leutner, 2013, S. 241). Resnick (1993) sieht das Teil-Ganze-Konzept als wesentliche konzeptuelle Verständnisleistung der arithmetischen Lernentwicklung in den ersten Grundschuljahren an:

> Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships. With the application of a Part-Whole schema to quantity, it becomes possible for children to think about numbers as compositions of other numbers. This enrichment of number understanding permits forms of mathematical problem solving and interpretation that are not available to younger children. (Resnick, 1993, S. 114)

Die mathematische Grundvorstellung referenziert auf die Beziehungen zwischen Teilmengen und ihrer jeweiligen Gesamtmenge, die auf das Kardinalzahlverständnis zurückzuführen ist und numerisch erfasst werden kann (Häsel-Weide et al., 2014, S. 57). Das Verständnis der Klasseninklusion, d.h. die Fähigkeit, die Gesamtklasse ins Verhältnis zu Teilklassen zu setzen, ist eine wichtige Voraussetzung. Es können sowohl statische Beziehungen zwischen Zahlen (Verständnis der Kompensation, d.h. die Gesamtmenge bleibt gleich, wenn sich die Teilmengen untereinander verändern; Konstanz der Summe / Differenz) beschrieben, als auch dynamische Beziehungen untersucht werden. Letztere können durch eine gegensinnige oder gleichsinnige Veränderung der Teilmengen entstehen, wodurch eine Veränderung des Ganzen hervorgerufen wird (Verständnis der Kovarianz, d.h. die Gesamtmenge verändert sich, wenn sich die Teilmenge verändert).

Die sichere Beherrschung des Teil-Ganze-Konzepts gilt als fundamentale Voraussetzung für die Entwicklung weiterführender mathematischer Konzepte sowie für ein verständiges und erfolgreiches mathematisches Handeln (Ehlert, Fritz & Langhorst, 2011, S. 17). Ein umfassend

[2] In der Literatur oftmals auch u.a. unter den Begriffen „Teil-Teil-Ganze-Konzept“ oder „Teil-Ganze-Beziehung“ aufgeführt.

aufgebautes Teil-Ganze-Konzept ermöglicht dessen flexiblen Einsatz zur effektiven Zahlzerlegung (Ehlert et al., 2013, S. 243). Es trägt wesentlich zum Aufbau von vertiefenden Zahlvorstellungen und Zahlbeziehungen bei, die insbesondere für das Stellenwertverständnis von Bedeutung sind. Das Teil-Ganze-Konzept kann als Schlüsselkonzept betrachtet werden, das „zu einem flexiblen Operationsverständnis und zu automatisierten Basisstrategien" (Ehlert et al., 2011, S. 16) führt und das Rechnen unter Rückgriff auf Zahlbeziehungen ermöglicht. Es stellt somit eine wichtige Grundlage für die Ablösung vom zählenden Rechnen dar (Häsel-Weide et al., 2014, S. 57 ff.). Darüber hinaus ist das Teil-Ganze-Konzept elementar für die Addition und Subtraktion (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2013, S. 139), die Multiplikation und Division (ein Ganzes in gleiche Teile aufteilen) (Ehlert et al., 2011, S. 17), für Kopfrechenstrategien und halbschriftliche Rechenstrategien (Wittmann, E. Ch. & Müller, 1993, S. 85) sowie für ein grundlegendes Bruchzahlverständnis und die darauf aufbauende Bruchrechnung (Balzer et al., 2007, S. 185-186; Ehlert et al., 2011, S. 17). Insbesondere für den Größenvergleich von Bruchzahlen sowie das Verständnis eines Bruchs als Verhältnis wird die Einsicht vorausgesetzt, dass Zahlen bzw. Mengen zerlegbar bzw. ineinander enthalten sind (Balzer et al., 2007, S. 185-186). Die geschickte Zerlegung von Zahlen, die auf der Erkenntnis von Zahlen als flexible Einheiten beruht, ermöglicht es, „mit jeder Zahl ein ganzes Netz von operativen Beziehungen zu verbinden" (Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling, 1998, S. 17). Radatz et al. (1998, S. 42) heben die Wechselbeziehungen zwischen einem grundlegenden Zahlverständnis, das wesentlich auf die Einsicht in das Teil-Ganze-Konzept zurückgeht und elementaren Rechenfähigkeiten hervor. „Unabhängig davon, ob eine Rechenanforderung additiv oder subtraktiv vorgegeben ist, ob die Gesamtmenge oder Teilmengen bzw. Austausch- oder Differenzmengen gesucht werden, liegt den Operationen immer eine solche triadische Struktur zugrunde" (Fritz & Ricken, 2008, S. 40).

Halbieren und Verdoppeln

Das Halbieren und Verdoppeln kann als weitere wichtige Form des Zerlegens und Zusammensetzens von Zahlen angesehen werden, die einen flexiblen Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen unterstützt (Radatz et al., 1998, S. 17). Bereits im ersten Schuljahr werden das Verdoppeln und Halbieren thematisiert und die Begriffe „das Doppelte" und „die Hälfte" erarbeitet. Bei Aufgaben zum Verdoppeln und Halbieren, insbesondere im Zahlenraum bis 20, handelt es sich um Kernaufgaben, die eine wichtige Voraussetzung für die erfolgreiche

Erarbeitung sowie die verständige Anwendung von Ableitungs- und Rechenstrategien im Sinne eines geschickten, vorteilhaften Rechnens sind. Sie stellen eine wesentliche Grundlage für die vielseitige und flexible Erarbeitung des kleinen Einmaleins sowie für die geschickte Lösung größerer Multiplikationsaufgaben dar (Padberg & Benz, 2011, S. 136). Aufgaben zum Verdoppeln und Halbieren fördern eine beziehungshaltige Betrachtung von Zahlen und Aufgaben und sind somit zentral „für den Aufbau der Rechenfähigkeit“ (Moser Opitz, 2007, 2013, S. 195). Darüber hinaus unterstützen sie die Ablösung vom zählenden Rechnen. Gleichermaßen wirken sich die Kenntnis vielfältiger Halbierungs- und Verdopplungsaufgaben förderlich auf die Erweiterung des Zahlraums aus. Bereits in der Grundschule kann über das Verdoppeln und Halbieren eine erste Anbahnung eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses sowie eine erste Sensibilisierung für den Sprachgebrauch „das Doppelte“ bzw. „die Hälfte“ erfolgen (Besuden, 2000, S. 5).

Mathematisch betrachtet basieren das Verdoppeln und Halbieren auf dem Assoziativgesetz, vor dessen Hintergrund sie als zwei „Spezialfälle“ (Padberg & Benz, 2011, S. 136) anzusehen sind. Verdoppeln kann entweder als additiver oder als multiplikativer Vorgang ausgeführt werden. Auf eine Zahl wird dieselbe Zahl noch einmal addiert bzw. eine Zahl wird mit dem Faktor zwei multipliziert. Wird in einem Produkt ein Faktor verdoppelt, so wird auch das Produkt insgesamt verdoppelt (Padberg & Benz, 2011, S. 136). Halbieren kann divisorisch vollzogen werden. Eine Zahl wird in zwei gleich große Teilmengen zerlegt bzw. durch zwei dividiert. Das Halbieren erfordert das Verständnis der Konzepte gerader und ungerader Zahlen, da nur gerade natürliche Zahlen halbiert werden können (Gerster, 2013, S. 206). Wird in einem Produkt ein Faktor halbiert, so halbiert sich auch das Produkt insgesamt (Padberg & Benz, 2011, S. 16). In kleinen Zahlenräumen lässt sich das Halbieren auch durch geeignete Handlungen bzw. ikonische Darstellungen im Sinne des Aufteilens (s. Grundvorstellung Division) ausführen. Auf multiplikativer und divisorischer Ebene ist die automatisierte Kenntnis der 2er-Malreihe eine wichtige Voraussetzung. Die Zusammenhänge in Form der Umkehrbarkeit beider Operationen sollten für ein umfassendes Verständnis von Zahlen und ihren Beziehungen zueinander erarbeitet werden.

Multiplikation und Division

Multiplikation und Division stellen neben der Addition und Subtraktion zwei der vier Grundrechenarten dar, die im Rahmen der Förderkonzeption der vorliegenden Interventionsstudie explizit berücksichtigt werden und deshalb kurz und prägnant erläutert werden sollen.

Die Erarbeitung der Multiplikation beginnt mit dem Erkennen und Beschreiben vielfältiger lebensnaher Sachsituationen, die das Entdecken multiplikativer Strukturen fördern (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 27). Die drei wesentlichen Vorstellungen, die der Multiplikation zugrunde liegen, sollten dabei in anschaulicher und reichhaltiger Art und Weise thematisiert werden: zeitlich-sukzessive Handlungen, räumlich-simultane Anordnungen sowie kombinatorische Kontexte.

Anhand *zeitlich-sukzessiver Handlungen* sollen die Lernenden erkennen, dass das Produkt im Laufe einer bestimmten Zeit durch die mehrmalige Wiederholung der gleichen Handlung entsteht. Dieser Grundvorstellung liegt eine dynamische Komponente zugrunde (Padberg & Benz, 2011, S. 129), die auf das Verständnis der fortgesetzten Addition zurückzuführen ist (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 28). Es findet die mehrfache (der 1. Faktor repräsentiert die Häufigkeit der Handlung) Addition des Gleichen (2. Faktor) statt. Aus fachlicher Sicht erfolgt die Vereinigung von paarweisen elementarfremden, gleichmächtigen Mengen (Padberg & Benz, 2011, S. 129), die auf Ebene der Zahlen als wiederholte Addition der gleichen Summanden erfasst werden kann.

Die *räumlich-simultane Anordnung* stellt das Produkt einer Malaufgabe als Ganzes gleichzeitig und in räumlicher Anordnung dar. Dieser Grundvorstellung liegt demnach eine statische Komponente zugrunde (Padberg & Benz, 2011, S. 129). Auch hier liegt der mathematische Hintergrund in der Vereinigung von paarweisen elementarfremden, gleichmächtigen Mengen bzw. in der Rückführung auf das Verständnis der fortgesetzten Addition. Die räumlich-simultane Vorstellung der Multiplikation in Form systematisch angeordneter Elemente ist in besonderer Weise für die Erarbeitung des kleinen Einmaleins geeignet (Padberg & Benz, 2011, S. 130).

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der zeitlich-sukzessiven und der räumlich-simultanen Grundvorstellung, denn jede zeitlich-sukzessive multiplikative Handlung führt letztlich zu einer räumlich-simultanen Anordnung, die wiederum auf eine zeitlich-sukzessive Handlung zurückgeführt werden kann (Padberg & Benz, 2011, S. 130). Die Unterscheidung beider Grundvorstellungen spielt für den fundierten Aufbau der Multiplikation keine wesentliche Rolle. Vielmehr sollten Lernende anhand vielfältiger Situationen reichhaltige Erfahrungen in beiden Kontexten machen können, um in der Entwicklung fundierter Grundvorstellungen zur Multiplikation unterstützt zu werden.

Die dritte Grundvorstellung bezieht sich auf *kombinatorische Kontexte*, die das Bilden aller möglichen Kombinationen aus den Elementen einer ersten Menge mit den Elementen einer zweiten Menge beinhaltet (Padberg & Benz, 2011, S. 131). Aus fachlicher Sicht liegt der Bereich der Kombinatorik zugrunde. Der Zugang zur Multiplikation verläuft über das Kartesische Produkt (Kreuzprodukt), das die Menge aller geordneten Paare beschreibt, „deren *erste* Komponente aus der Menge A und deren *zweite* Komponente aus der Menge B stammt [Hervorheb. im Original]“ (Padberg & Benz, 2011, S. 132). Entgegen den ersten beiden Grundvorstellungen sind die kombinatorischen Kontexte zur Einführung der Multiplikation ungeeignet (vgl. vertiefend Padberg & Benz, 2011, S. 132).

Ein fundiertes Operationsverständnis der Multiplikation stellt eine zentrale Voraussetzung für die mathematische Lernentwicklung in der Sekundarstufe dar. Sowohl hinsichtlich eines tragfähigen Verständnisses von Rechenstrategien und Rechengesetzen, als auch für das Erkennen und Nutzen multiplikativer Strukturen sowie für weiterführende Inhaltsbereiche, wie bspw. die Zahlraumerweiterung zu den positiven rationalen Zahlen, sind tragfähige multiplikative Kompetenzen elementar.

Die Erarbeitung der Division beginnt gleichermaßen wie die der Multiplikation im Rahmen verschiedener Sachsituationen. Die Division baut auf die zwei Grundvorstellungen des Aufteilens und Verteilens auf. Durch entsprechende Handlungen oder ikonische Darstellungen können Aufgaben zu beiden Grundvorstellungen in kleineren Zahlenräumen zunächst anschaulich ohne ein divisorisches Verständnis gelöst werden (Padberg & Benz, 2011, S. 155).

Charakteristisch für das *Aufteilen* ist eine vorgegebene Grundmenge M sowie die gegebene Elementanzahl, in die die Teilmengen aufgeteilt werden sollen. Die Anzahl der Teilmengen wird gesucht. Mathematisch betrachtet wird beim Aufteilen eine Menge M in gleichmächtige, paarweise elementarfremde Teilmengen aufgeteilt (Padberg & Benz, 2011, S. 153-154).

Analog zu der Rückführung der Multiplikation auf die fortgeführte Addition gleicher Summanden lässt sich die Division auf die wiederholte Subtraktion eines Divisors zurückführen. Insbesondere das Aufteilen weist eine große Nähe zur Subtraktion auf (Padberg & Benz, 2011, S. 156-157). Sowohl für die anschauliche Erarbeitung der Division auf ikonischer und symbolischer Ebene als auch in Bezug auf die Zahlbereichserweiterung in der Sekundarstufe I weist die Grundvorstellung des Aufteilens Vorzüge gegenüber der des Verteilens auf (Padberg & Benz, 2011, S. 158).

Beim *Verteilen* sind die Grundmenge M sowie die Anzahl der Teilmengen, auf die die Gesamtmenge verteilt werden soll, vorgegeben. Die Elementanzahl der einzelnen Teilmengen wird gesucht. Division im Sinne des Verteilens bedeutet also die Zerlegung einer Menge M in gleichmächtige, paarweise elementarfremde Teilmengen (Padberg & Benz, 2011, S. 155).

Die anwendungsbezogene Klassifikation der Divisionsaufgaben im Sinne des Aufteilens bzw. Verteilens muss von den Lernenden nicht beherrscht werden. Vielmehr stehen die grundlegenden Kompetenzen, die Division in bestimmten Anwendungssituationen sowie innerhalb von Rechenanforderungen ausführen zu können, im Mittelpunkt. Darüber hinaus nimmt die Division eine zentrale Bedeutung für die Entwicklung eines anschaulichen Bruchzahlverständnisses ein: „Whole number division might be important for understanding fractions for several reasons“ (Siegler & Pyke, 2013, S. 1996). Tragfähige Grundvorstellungen zur Division, insbesondere im Sinne des Aufteilens, bilden ein elementares Fundament für auf diese Vorstellung aufbauenden Bruchzahlaspekte (Wartha & Güse, 2009, S. 258).

Beziehungen zwischen Multiplikation und Division

Neben der Grundlegung und Durchdringung der Grundrechenarten in ihren je spezifischen Ausprägungsformen unabhängig voneinander gilt es, auch der „innermathematischen Durchdringung und Strukturierung des Beziehungsreichtums einer Rechenoperation, aber *auch zwischen* Rechenoperationen [Hervorheb. R.-F.K.]“ (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 38) Rechnung zu tragen. Für ein umfangreiches Verständnis ist es zentral, Multiplikations- und Divisionsaufgaben aus jeweils beiden Richtungen interpretieren zu können, d.h. eine Multiplikationsaufgabe in ihrer entsprechenden Divisionsaufgabe darstellen und eine Divisions- auf ihre Multiplikationsaufgabe zurückführen zu können (bspw. $a \cdot b = c$ und $c : a = b$ bzw. $c : b = a$). Die intensive Auseinandersetzung mit Umkehraufgaben nimmt diesbezüglich sowohl auf Ebene der Zahlen vor dem Hintergrund struktureller Kontexte, als auch auf Ebene der vielfältigen inhaltlichen Beziehungen im Rahmen von Sachkontexten eine besondere Bedeutung ein (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 38-39). Die Verbindung beider Ebenen als „sich gegenseitig stützenden[s], fördernden[s] und herausfordernden[s] Wechselspiel[s]“ ist nach Krauthausen und Scherer (2008, S. 39-40) zentral für ein fundiertes Verständnis der Multiplikation und Division.

Einmaleins

Grundlegendes Ziel bei der Einführung des Einmaleins ist aus fachdidaktischer Sicht die ganzheitliche und vernetze Erarbeitung (vgl. vertiefend u.a. Gaidoschik, 2015; Krauthausen & Scherer, 2008, S. 31 ff.), um ein fundiertes und tragfähiges Verständnis zu entwickeln. Hauptaugenmerk liegt zunächst auf den sogenannten Kernaufgaben, d.h. auf den Aufgaben des kleinen Einmaleins, aus denen Aufgaben der anderen Reihen konstruiert werden können. Als leicht merkbare Kernaufgaben gelten Aufgaben mit 1 · ; 2 · ; 5 · und 10 ·, die zunächst automatisiert werden sollten. Es geht entgegen traditioneller Vorgehensweisen nicht darum, die Malreihen unabhängig voneinander sequentiell auswendig zu lernen, sondern mithilfe der Kernaufgaben weitere Aufgaben des Einmaleins verständig abzuleiten. Aufbauend auf dem Kommutativ- und dem Distributivgesetz können weitere Rechenstrategien zur Erschließung weiterer Malaufgaben genutzt werden. Die grundlegende Kompetenz des Verdoppelns vertiefend kann mit erweiterten Nachbaraufgaben (Verdoppeln + 1, Verdoppeln + 2) ein Großteil der Aufgaben des kleinen Einmaleins erarbeitet werden. Die einzelnen Malaufgaben sollen vor dem Hintergrund ihrer vielfältigen Querverbindungen systematisch genutzt werden (Wittmann, E. Ch. & Müller, 1993; Gerster, 2013). Als wesentliche Voraussetzungen für eine ganzheitliche Erarbeitung des Einmaleins sieht Gaidoschik (2009, S. 2) vor allem die Sicherheit im Operationsverständnis, Sicherheit im Umgang mit Zehnern und Einern sowie das flüssige Kopfrechen im zweistelligen Zahlenbereich an.

Im Vordergrund sollte das aktiv-entdeckende Erkennen von Zahl- und Aufgabenbeziehungen stehen, das eine „notwendige Voraussetzung für verständnisbasiertes Rechnen in zunehmend größeren Zahlenräumen“ (Schulz et al., 2017, S. 399) darstellt. Die Anwendung von Rechenstrategien im Bereich der Multiplikation und Division erfordert vernetztes multiplikatives Denken (Schulz et al., 2017, S. 400), dessen Grundlagen mit der anschaulichen

Einführung des Einmaleins gelegt wird. Darauf aufbauend kann dann die zunehmend systematischere Erarbeitung der Gesamtstruktur und der einzelnen Reihen des Einmaleins erfolgen (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 32).

> Wichtigstes Ziel bei der Behandlung des >Kleinen 1x1< muss es sein, dass die Kinder Grundvorstellungen des multiplikativen Rechnens gewinnen, die es ihnen ermöglichen, den Sinn der Multiplikation zu erfassen, Zusammenhänge und Strukturen von Aufgaben zu erkennen sowie Rechenstrategien zu entwickeln und zu nutzen. Die wichtigsten Rechenstrategien ergeben sich aus der Anwendung von Rechengesetzen. Erst wenn die Grundvorstellungen zur Multiplikation aufgebaut sind, kann man mit Automatisierungsübungen zur gedächtnismäßigen Verankerung des 1x1 beginnen. (Röhr, 1992, S. 26)

Grundsätzlich sollte bezogen auf alle dargestellten Inhaltsbereiche des arithmetischen Basisstoffs der Aufbau flexibler Strukturen fokussiert werden. Die Lernenden sollten von Anfang an die Erfahrung machen, dass es „unterschiedliche Wege zur Ergebnisermittlung und auch bereits unterschiedliche Sichtweisen für ein und dieselbe Aufgaben geben kann“ (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 36). Derart flexible Grundvorstellungen bauen sowohl auf vielfältige Entdeckungen und Erarbeitungen als auch transparenten Strukturen, Regeln und Rechengesetzen auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene sowie deren Vernetzungen auf (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 36). „Ein verständiges Rechnen muss aufbauen auf einem gesicherten Operationsverständnis und tragfähigen Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen und die Einsicht in Zahlbeziehungen“ (Freesemann, 2014, S. 48). Gesicherte Kenntnisse des kleinen Einmaleins, die sich in einem inhaltlichen Verständnis und fundierten Rechenfertigkeiten ausdrücken, stellen eine „notwendige Bedingung für den Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen“ (Wartha & Güse, 2009, S. 264) dar.

Basisstoff als Chance und Hürde

Die zentralen Bereiche des arithmetischen Basisstoffs sind für den gesamten Lernverlauf Chance und Hürde zugleich. Chance in dem Sinne, als dass die genannten Bereiche eine voraussetzungsvolle Bedeutung für das Verständnis weiterführender Inhalte einnehmen und eine wichtige Weichenstellung für die weitere Lernentwicklung darstellen. Risikofaktor bzw. Hürde in dem Sinne, dass viele Schülerinnen und Schüler, vor allem Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, in diesen Bereichen oftmals unzureichende Kompetenzen entwickeln und in Folge dessen ein erfolgreiches Weiterlernen verhindert wird.

Insbesondere die flexible Anwendung der Grundoperationen sowie alle Bereiche, die ein Verständnis von Zahlen und Zahlbeziehungen erfordern, bereiten Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) mathematischen Lernschwierigkeiten Probleme. Die Hürden werden allerdings nicht als individuelle Defizite betrachtet, sondern vor dem Hintergrund der innermathematischen Struktur erklärt. Defizite in den arithmetischen Verstehensgrundlagen können somit als kritische Stellen des mathematischen Lernprozesses in der Sekundarstufe I angesehen werden, die im Unterricht durchgängig Beachtung finden sollten (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 173). Verdeutlicht am Beispiel der Multiplikation und Division hebt Gaidoschik (2008) verschärfend hervor:

> Ein Kind, das in der Grundschule Multiplizieren nicht als Vervielfachen (sondern etwa als Aufsagen auswendig gelernter Einmaleins-Sprüche), Dividieren nicht als Teilen (sondern als undurchschaubare Abfolge schwieriger Rechenschritte in einem mühsamen schriftlichen Verfahren, als verwirrend-kompliziertes und reichlich ödes „Spiel nach Regeln“ […]) verstanden hat: dieses Kind wird Bruchrechnen, Prozentrechnen, elementare Algebra (wenn überhaupt, dann) auch wieder nur als „Spiel nach Regeln, aber ohne Bedeutung“ eintrainieren können – und diese Regeln zumeist rasch wieder vergessen [Anführungsstriche im Original]. (Gaidoschik, 2008, S. 291)

Es bestehen zahlreiche Verbindungen zwischen den einzelnen Inhaltsbereichen des arithmetischen Basisstoffs (vgl. Freesemann, 2014, S. 49). Vor diesem Hintergrund sind sie nicht losgelöst voneinander zu betrachten, sie bauen aufeinander auf und bedingen sich gegenseitig. Daraus lässt sich schließen, dass Schwierigkeiten in einem Bereich oftmals auch zu Schwierigkeiten in einem anderen Bereich führen und komplexer werden können. Gleichermaßen kann eine Förderung eines einzelnen Bereiches aber auch positive Auswirkungen auf andere Bereiche einnehmen, zumal sich nach Ennemoser et al. (2011) das mathematische Konventions- und Regelwissen bis in die neunte Klassenstufe weiterentwickelt (s.o., Kap. 4.1).

4.1.3 Relevanz für die Sekundarstufe I

Das nachfolgende Kapitel setzt sich mit der Frage auseinander, inwieweit der arithmetische Basisstoff der Primarstufe eine elementare Grundlage für weitere Lernprozesse in der Sekundarstufe I darstellt. Auch wenn gegenwärtig noch keine empirisch abgesicherten Erwerbs- bzw. Kompetenzstufenmodelle für den arithmetischen Basisstoff in der

Sekundarstufe I vorliegen (Käter, 2017, S. 32), kann als wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts in der Grundschule „der Aufbau anschlussfähiger mathematischer Kompetenzen angesehen werden, die eine tragfähige Basis für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe bilden“ (Heinze & Grüßing, 2009, S. 59). Jedoch wird dieses Ziel bei vielen Lernenden nicht erreicht. Eine einmalige Einsicht in die zentralen Bereiche des mathematischen Basisstoffs während des Mathematikunterrichts in der Grundschule stellt sich für viele Lernende, nicht nur für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten, als nicht hinreichend für eine tragfähige und nachhaltige Verständnisentwicklung heraus (Ennemoser et al., 2011, S. 232). „Viele Lücken im Basiswissen sind nämlich darauf zurückzuführen, dass die Inhalte schon beim ersten Lernen nur oberflächlich und auf der Ebene unverstandener Verfahren erarbeitet wurden“ (Prediger et al., 2011, S. 24). Insbesondere der Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe I stellt in Bezug auf den arithmetischen Basisstoff eine besondere Situation dar. Das fachliche Basiskönnen, das während der ersten vier Grundschuljahre erworben werden soll und als fundamentale Grundlage für alle weiteren, darauf aufbauenden Inhaltsbereiche dient, kann nicht bei allen Schülerinnen und Schülern gleichermaßen als gefestigt vorausgesetzt werden (Ennemoser et al., 2011, S. 233). Auch in der Sekundarstufe I ist es demnach von grundlegender Bedeutung, dass alle Lernenden, insbesondere diejenigen mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen oder mit zugewiesenem Bedarf an sonderpädagogischer Unterstützung, die arithmetischen Verstehensgrundlagen auf ihrem individuellen Niveau aufarbeiten und vernetzen können (Ademmer et al., 2018, S. 303). Dabei nimmt insbesondere der konsequente Aufbau von tragfähigen Vorstellungen eine zentrale Rolle ein, denn „ohne tragfähige Vorstellungen zu Zahlen und Operationen ist ein erfolgreiches Weiterlernen in der Sekundarstufe stark gefährdet“ (Schulz, Leuders, Rangel & Kowalk, 2015, S. 14). Prediger et al. (2013) sprechen in diesem Zusammenhang von Verstehensgrundlagen, die "diejenigen inhaltlichen Vorstellungen und Darstellungen [umfassen], die auch Lernende mit Schwierigkeiten in Klasse fünf beherrschen müssen, damit verständiges Weiterlernen in der Arithmetik der Sekundarstufe möglich ist" (S. 12). „Die Konzentration auf das Verstehen des Basisstoffs geht einher mit einer stetigen Sicherung der Basisfakten. Diese Kombination aus Verstehen der Zusammenhänge und Automatisierung der Grundlagen bietet die Voraussetzung für nachhaltiges mathematisches Lernen“ (Heß & Nührenbörger, 2017, S. 282).

Unzureichend entwickelte Grundlagen zeigen sich spätestens im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, wenn die weiterführenden Inhalte unter Rückgriff auf die arithmetischen Grundlagen erarbeitet werden (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013a; Moser Opitz, 2007, 2013). „Fehlendes Basiswissen erschwert bereits in der Primarstufe einen flexiblen, sicheren Umgang mit Zahlen und Operationen und kann in der Sekundarstufe I zu gravierenden Schwierigkeiten führen“ (Häsel-Weide, 2017, S. 19). Auch Balzer et al. (2007, S. 179) heben hervor, dass diese fehlenden Voraussetzungen die weiterführende Entwicklung eines vertiefenden Zahlenverständnisses erschweren kann.

> Somit können in der Sekundarstufe I gewisse Schwierigkeiten im Verständnis neu zu erlernender Zahlbereiche wie bspw. Dezimalzahlen, Bruchzahlen oder negative Zahlen womöglich mit einem fehlenden Basiswissen über das Rechnen mit Zahlen und Ziffern sowie über fehlende Einsichten in das dekadische Zahlverständnis erklärt werden. (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013a, S. 11)

Lorenz und Radatz (1993) konstatieren im Umkehrschluss: „Wenn der basale Lernstoff der ersten vier Schuljahre erworben ist, gelingt [...] der Erwerb von weiterführenden mathematischen Inhalten in höherem Maß“ (S. 224).

Aufgrund der oft beklagten Stofffülle in der Sekundarstufe I besteht die Gefahr, dass die sorgfältige Bearbeitung der Basisinhalte, die für alle Kinder relevant ist, zu kurz kommt (Schmassmann & Diener, 2014, S. 8). Angesichts dieser im Schulalltag häufig vorzufindenden Problematik fordert Gaidoschik (2008, S. 290-291), mathematische Defizite und Probleme vieler Kinder im Bereich der Grundschularithmetik zu Beginn der Sekundarstufe nicht "naturgemäß" massiver werden zu lassen und die Lernenden am Ende der Pflichtschulzeit als "mathematische Analphabeten" auf den Arbeitsmarkt zu schicken. Um zu verhindern, dass sich Probleme aus der Grundschule verfestigen, solle der Mathematikunterricht der Sekundarstufe zunächst den aktuellen Stoff ignorieren und die fehlende mathematische Basis erarbeiten, d.h. eine Grundlage erschaffen, um darauf Aufbauendes überhaupt bewältigen zu können. Bei aller Relevanz der Inhalte des mathematischen Basisstoffs, insbesondere für Kinder mit (besonderen) Schwierigkeiten zu Beginn der Sekundarstufe I, darf nicht in Vergessenheit geraten, dass „diese nur *ein* Element der mathematischen Bildung sind“ [Hervorheb. im Original] (Wittmann, E. Ch., 2015, S. 208).

Die in der vorliegenden Arbeit fokussierte Verbindung zwischen zentralen Aspekten des mathematischen Basisstoffs als grundlegendes Verständnisfundament und dem aktuellen

Inhaltsbereich des Bruchzahlverständnisses ist demnach zentral und entspricht der Relevanz der von Wartha und Güse (2009) hervorgehobenen Wechselwirkung zwischen beiden Bereichen. Nach Weinert und Stefanek (1997, zitiert in Balzer et al., 2007, S. 179) werden fachspezifische Vorkenntnisse umso wichtiger, je höher die Klassenstufe, d.h. es besteht zunehmend ein engerer Zusammenhang zwischen der schulischen Leistung und dem Vorwissen und der Zusammenhang zwischen schulischen Leistungen und Intelligenz verliert immer mehr an Bedeutung. Ein gefestigtes Verständnis des arithmetischen Basisstoffs ist demnach die zentrale Voraussetzung für einen gelingenden mathematischen Lernprozess in der Sekundarstufe I, da „ein weiterführendes mathematisches Verständnis das Ergebnis eines kumulativen Lernprozesses“ (Humbach, 2008, S. 67) ist. Die prinzipiell im Vorschul- und Grundschulalter erworbenen arithmetischen Voraussetzungen müssen im Verlauf der Sekundarstufe I auf neue, größere Zahlenräume übertragen und automatisiert werden, um die Grundlage für den Aufbau höherer Kompetenzen zu schaffen (Schneider et al., 2016, S. 123). Daraus lässt sich die hohe Relevanz ableiten, die eine verknüpfte, präventiv ausgerichtete Förderung des mathematischen Basisstoffs insbesondere für rechenschwache Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I hat (Moser Opitz, 2005, S. 125).

Die von Schipper (2002) für den Primarstufenbereich hervorgehobene „zentrale, Weichen stellende Rolle des mathematischen Anfangsunterrichts“ (S. 255), die Wartha (2017) in dem Aufbau „flexible[r] Grundvorstellungen zu Zahlen und zu Operationen“ (S. 286) sieht, lässt sich vor diesem Hintergrund auch auf den mathematischen Anfangsunterricht der Sekundarstufe I übertragen. Gleichzeitig wird die Notwendigkeit der in dieser Arbeit vollzogenen inhaltlichen Verknüpfung zentraler Aspekte des arithmetischen Basisstoffs mit dem aktuellen Inhaltsbereich der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen betont. Siegler und Pyke (2013) heben hervor, dass „skills that are prerequisite for subsequent mathematics need to be taught much more effectively” (S. 2002). Schmidt (2009) sieht die Anfangsaufgabe des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I darin, dass sich die Lernenden „die Arithmetik der natürlichen Zahlen in einer tragfähigen-nachhaltigen Struktur verfügbar machen“ (Schmidt, S., 2009, S. 125). Im Hinblick auf ein tragfähiges Verständnis der Bruchzahlen „ist es bedeutsam, dass die Schülerinnen und Schüler inhaltliche Vorstellungen [im Bereich der natürlichen Zahlen, R.-F.K.] aufbauen, um den Transfer in andere Zahlbereiche erfolgreich bewältigen zu können“ (Mosandl & Sprenger, 2014, S. 17).

Aufgrund der großen Heterogenität in den während der Grundschulzeit entwickelten Kompetenzen des arithmetischen Basisstoffs sowie deren Relevanz für den weiteren Lernerfolg bieten sich die Aufarbeitung individueller Lücken und die Sicherung zentraler Inhaltsbereiche in Klasse fünf an.

4.1.4 Ausgewählte empirische Erkenntnisse

Nachfolgend wird der Fokus auf relevante Forschungsergebnisse zum arithmetischen Basisstoff gerichtet, die sich entsprechend des in dieser Arbeit verfolgten Forschungsinteresses auf Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen beziehen. Aufgrund der inhaltlichen Nähe und Überschneidungen wird dabei auf Ergebnisse zu Untersuchungen mit rechenschwachen Schülerinnen und Schülern zurückgegriffen. Die im vorangegangenen Kapitel dargelegte normative Relevanz des arithmetischen Basisstoffs für die Sekundarstufe I soll im Folgenden aus empirischer Sicht untermauert werden. Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sind insbesondere für den Grundschulbereich hinsichtlich konkreter Inhaltsbereiche gut erforscht (Moser Opitz, 2009a, S. 33). Fundierte Forschungsergebnisse zu schwachen Rechnerinnen und Rechnern der Sekundarstufe I sind hingegen eher dürftig vorhanden (Moser Opitz, 2009a; Wartha, 2009b, 2017). Übereinstimmung besteht darin, dass der arithmetische Basisstoff eine zentrale Rolle für das kumulative Lernen spielen (Käter, 2017, S. 31) und nicht erworbene Kompetenzen der Grundschulmathematik negative Auswirkungen auf die neuen, weiterführenden Inhalte haben (Moser Opitz, 2007, 2013) – insbesondere auf die „ohnehin schwierige und fehleranfällige Bruchrechnung“ (Wartha, 2017, S. 287; Padberg, 2009; Wartha & Wittmann, 2009).

In ihrer umfangreichen Studie hat Moser Opitz (2007, 2013) Fünft- und Achtklässlerinnen und -klässler mit schwachen Mathematikleistungen im Vergleich zu Lernenden mit durchschnittlichen mathematischen Leistungen untersucht. Grundlage waren Aufgaben aus der Primarstufenmathematik, die sich auf die Bereiche Grundoperationen, Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems, verbales Zählen in Schritten sowie Operationsverständnis bezogen. Die Ergebnisse zeigen eindrücklich, dass schwache Rechnerinnen und Rechner signifikant schlechter abschnitten als Lernende der Vergleichsgruppe. Sie haben zentrale Elemente des mathematischen Basisstoffs nicht oder nur teilweise erworben. Schwierigkeiten zeigten sich vor allem beim Zählen in Schritten größer als 1, bei Operationen, die auf dem Verständnis von Anzahldifferenzen und dem Teil-Ganze-Konzept basieren (Ergänzen, Verdoppeln, Halbieren), bei der Multiplikation und Division, beim Lösen von Textaufgaben sowie beim Verständnis des Stellenwertsystems (Bündeln, Entbündeln, Verständnis der Stellenwerte, Größenvorstellungen). Defizite ließen sich auch bei der Strategieverwendung feststellen, denn Lernende mit Schwierigkeiten verwendeten überwiegend (fehlerhaft) Abzählstrategien und/oder schriftliche Rechenverfahren. Die Ergebnisse weisen auf Lücken im Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems hin. Große Lücken ließen sich auch im Bereich des Ergänzens feststellen. Moser Opitz kam weiterhin zu der Erkenntnis, dass die Automatisierungsfähigkeit bei Achtklässlerinnen und Achtklässlern weiter vorangeschritten war als bei den Lernenden in der fünften Klasse. Schülerinnen und Schüler der achten Klasse lösten Additions- und Subtraktionsaufgaben häufiger durch Abrufstrategien und seltener durch zählendes Rechnen als Lernende in der fünften Klasse. Darüber hinaus konnten bestimmte Bereiche der Grundschulmathematik als signifikante Prädiktoren für die aktuelle mathematische Leistungsentwicklung in der Sekundarstufe I und somit als zentrale Voraussetzung für den Aufbau weiterführender, über den Grundschulstoff hinausgehender Kompetenzen expliziert werden. Dazu zählen die Bereiche Division, Textaufgaben (Problemlösen), Operationsverständnis (Mathematisieren), Verdoppeln und Halbieren sowie das Verständnis des Dezimalsystems für das 5. Schuljahr. Für das 8. Schuljahr gelten das Zählen in Schritten größer als 1, die Division und das Verständnis des Dezimalsystems als markante Prädiktoren (Moser Opitz, 2007, 2013, S. 219).

Die Relevanz des bereichsspezifischen Vorwissens zu Beginn der Sekundarstufe I auf die spätere mathematische Lernentwicklung wurde auch bereits in den 70er- und 80er Jahren im Rahmen klassischer Studien zu Lehr-Lernprozessen, wie bspw. in den Heidelberger und Münchner Hauptschulstudien (Weinert & Helmke, 1987; Weinert & Treiber, 1985) nachgewiesen. Die große längsschnittlich angelegte LOGIK-Studie (Münchener „Longitudinalstudie zur Genese individueller Kompetenzen“) sowie deren Ergänzung in Form der SCHOLASTIK-Studie („Schulorganisierte Lernangebote und Sozialisation von Talenten, Interessen und Kompetenzen“) konnten ebenfalls die zentrale Bedeutung einer frühen und gesicherten Anbahnung mathematischer Kompetenzen für den weiteren mathematischen Entwicklungsverlauf herausstellen (Weber & Stefanek, 1998; Stern, 2008).

Auch Schäfer (2005) konnte in ihrer qualitativen Untersuchung in der Eingangsstufe der Hauptschule aufzeigen, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen in der Sekundarstufe I (N = 43) oftmals kein gefestigtes Verständnis zweistelliger Zahlen aufweisen und nur über eine mangelhaft ausgeprägte Zahlwortreihe verfügen. Die Lernenden lösten Rechenaufgaben häufiger durch zählendes Rechnen oder die Anwendung schriftlicher Rechenverfahren und ermittelten die Ergebnisse seltener durch Abrufen bzw. Ableitungs- und Zerlegungsstrategien. Insbesondere das fehlerhafte Lösen einfacher Mal- und Geteiltaufgaben konnte häufig auf ein unzureichend automatisiertes kleines Einmaleins zurückgeführt werden. Weiterhin kam Schäfer zu dem Ergebnis, dass ca. 90% der Schülerinnen und Schüler keine flexiblen und tragfähigen Grundvorstellungen zur Division aufgebaut haben (Wartha, 2009a, S. 160). Lernende, die in kleinen Zahlenräumen über ein gesichertes Operationsverständnis hinsichtlich der Addition und Subtraktion verfügten, hatten teilweise Schwierigkeiten, dieses auf größere Zahlenräume zu übertragen. Schäfer stellte für die Inhaltsbereiche Zahl- und Stellenwertverständnis, Operationsverständnis in den Grundrechenarten sowie Rechenfertigkeiten fest, dass „die Lernbasis, d.h. das Voraussetzungsrepertoire eines großen Teils der überprüften Schülerinnen und Schüler vor allem in grundlegenden Aspekten des mathematischen Anfangsunterrichts und teilweise bereits im Zahlenraum von 1 bis 20 stark reduziert“ ist (2005, S. 445).

Ähnlich bedeutsame Ergebnisse konnte Humbach (2008) in ihrer Untersuchung nachweisen und einen Zusammenhang zwischen den Kenntnissen des arithmetischen Basisstoffs und den weiterführenden mathematischen Kompetenzen herstellen. Schülerinnen und Schüler der 10. Klasse, die gute Leistungen in den weiterführenden Inhalten zeigten, wiesen auch gute Kenntnisse im arithmetischen Basisstoff auf. Dahingegen zeigten Lernende mit schwachen Leistungen im aktuellen Unterrichtsstoff auch nur niedrige Leistungen im arithmetischen Basisstoff. Die Forschungsergebnisse zeigen aber auch auf, dass der arithmetische Basisstoff zwar eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für erfolgreiches Mathematiklernen in der Sekundarstufe darstellt (Humbach, 2008, S. 175). Viele Lernende, die zwar eine hohe Punktzahl im Bereich des arithmetischen Basisstoffs erzielen konnten, erreichten nur wenige Punkte in den weiterführenden Inhalten.

In einer kleinen (N = 45) qualitativ und quantitativ ausgerichteten Untersuchung haben Wartha und Güse (2009) den Zusammenhang zwischen arithmetischen Kompetenzen und

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und zur Bruchrechnung untersucht und sind in der Tendenz zu einem ähnlichen Ergebnis gekommen. Lernende mit niedrigen arithmetischen Kompetenzen konnten kein gesichertes Verständnis für Bruchzahlen entwickeln, allerdings ließen sich schlechte Leistungen im Bereich der positiven rationalen Zahlen nicht zwangsläufig auf niedrige arithmetische Kompetenzen im Bereich der natürlichen Zahlen zurückführen. Wartha und Güse heben hervor, dass eine Fehleranalyse der Bruchrechnung keine ausreichenden Hinweise für unzureichend entwickelte Kompetenzen der Primarstufenarithmetik liefert. Eine qualifizierte Diagnostik des aktuellen Inhaltsbereichs in der Sekundarstufe I muss immer auch die jeweils notwendigen arithmetischen Kompetenzen mit berücksichtigen. Ihre Ergebnisse zusammenfassend konstatieren die Autoren, dass „nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Minimalanforderungen am Ende des zweiten Schuljahres […] am Ende des sechsten Schuljahres umgesetzt sind“ (2009, S. 268).

Krajewski und Ennemoser (2010) konnten in ihrer Studie mit Lernenden (N = 1782) an Haupt- und Realschulen sowie an Gymnasien zeigen, dass die Entwicklung der Zahl-Größen-Kompetenzen (Ebene 1 und 2 des Entwicklungsmodells nach Krajewski, 2008) sowie des Konventions- und Regelwissens mit Übergang in die Sekundarstufe I nicht abgeschlossen ist. Bis zur achten Klassen zeigten die Schülerinnen und Schüler Verbesserungen bzgl. ihrer Zahl-Größen-Kompetenzen, ihr Konventions- und Regelwissen verbesserte sich auch noch in der neunten Klasse. Nach Krajewski und Ennemoser (2010) „ist davon auszugehen, dass die dargestellten Basiskompetenzen auch im Sekundarstufenbereich eine limitierende Einflussgröße für die an curricularen Anforderungen gemessene Schulleistung darstellen“ (S. 359). Zwischen den Schulformen ließen sich allerdings große Unterschiede feststellen. So zeigen Haupt- und Realschüler „substantielle Rückstände in jenen Basiskompetenzen, die dem einfachen Rechnen zugrunde liegen und die ein basales konzeptuelles Verständnis der Zahlen erfordern“ (Krajewski & Ennemoser, 2010, S. 367). Insbesondere die wissenschaftlich abgesicherte Weiterentwicklung der Zahl-Größen-Kompetenzen, die ein konzeptuelles Verständnis von Zahlen auch in größeren Zielräumen widerspiegeln, weist auf die hohe Relevanz des arithmetischen Basisstoffs und dessen fokussierte Förderung in der Sekundarstufe I hin, da „die dort beschriebenen Kompetenzen nur auf gesicherten mathematischen Basiskompetenzen fußen können“ (Schneider et al., 2016, S. 121).

In ihrer Re-Analyse der Daten der MARKUS-Studie (Mathematik-Gesamterhebung Rheinland-Pfalz: Kompetenzen, Unterrichtsmerkmale, Schulkontext; Helmke & Jäger, 2002) kommen Balzer et al. (2007) zu dem Ergebnis, dass rechenschwache Lernende in der achten Klasse nicht über hinreichend entwickelte grundlegende Kompetenzen im Bereich der Grundschulmathematik verfügen. Die Defizite beziehen sich insbesondere auf das Teil-Ganze-Konzept sowie auf Beziehungen zwischen den Zahlen.

Ebenso konnten Ehlert et al. (2011) in ihrer Untersuchung zum Teil-Ganze-Konzept im Bereich der Grundrechenarten vor allem bei Schülerinnen und Schülern der Haupt- und Gesamtschulen große Probleme beim Lösen von Teil-Ganze-Aufgaben feststellen, insbesondere bei sogenannten Austauschaufgaben sowie bei Vergleichsaufgaben, die ein relationales Zahlverständnis erfordern. Auch diese Ergebnisse untermauern die massiven Defizite vieler Lernender im Bereich des arithmetischen Basisstoffs in der Sekundarstufe I.

Die Kompetenzen bezüglich des arithmetischen Basisstoffs von Schülerinnen und Schülern mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf im Bereich Lernen an Förderzentren wurden in einer Studie von Gebhardt, Oelkrug und Tretter (2013) untersucht. Für Lernende der Jahrgangsstufen 5 bis 9 konnte festgestellt werden, dass sie die arithmetischen Grundlagen „nur langsam und nicht immer ausreichend erlernt" haben (Gebhardt et al., 2013, S. 130). Darüber hinaus besteht eine große Leistungsheterogenität hinsichtlich der mathematischen Kompetenzen zwischen den Jahrgängen. Viele der Lernenden haben am Ende ihre Schulzeit nicht die „Kulturtechnik Mathematik auf dem Stand der Grundschule in ausreichendem Maße erlernt" (Gebhardt et al., 2013, S. 140).

Nach Jordan, Hanich und Kaplan (2003) wenden rechenschwache Lernende oftmals Rechenstrategien jüngerer Kinder an. Dabei machen sie jedoch quantitativ gesehen mehr Fehler. Darüber hinaus zeigen diese Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten beim Abrufen von Rechenfakten sowie beim Lösen von komplexen Sachaufgaben.

Die Forschungsergebnisse verdeutlichen, dass viele Schülerinnen und Schüler, insbesondere Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, „in der Sekundarstufe I nicht ausreichend über tragfähige Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen und ihren Grundoperationen verfügen und damit von den Zielen des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I weit entfernt sind" (Freesemann, 2014, S. 50). Verschiedene Studien konnten aber auch eindrücklich zeigen, dass diese Bereiche erfolgreich gefördert werden können (vgl. Freesemann, 2014; Wißmann, Heine, Hand & Jacobs, 2013 in Pfister et al., 2015, S. 55) und eine fokussierte Förderung dieser Lerninhalte eine große Relevanz für das einsichtige und verständige Mathematiklernen einnimmt (Pfister et al., 2015, S. 55). Freesemann (2014) konnte in ihrer Interventionsstudie bspw. darlegen, dass eine spezifische Förderung der zentralen mathematischen Inhalte aus der Grundschule besonders für schwache Rechnerinnen und Rechner an Haupt- und Förderschulen erforderlich zu sein scheint (S. 188). Da davon ausgegangen werden kann, dass die „Persistenz des Defizits“ (Schneider et al., 2016, S. 209) der (besonderen) Schwierigkeiten beim Mathematiklernen im Verlauf der Schulzeit steigt, scheint die Notwendigkeit der frühen Interventions- und Fördermaßnahmen evident zu sein.

4.2 Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen

Die Erweiterung des Zahlbegriffs von der Menge der natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) um die Menge der positiven rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}^+$) stellt eine „Schlüsselstelle“ (Schneider et al., 2016, S. 118) sowie „Kulturleistung von höchster Perfektion“ (Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015, S. 100) der mathematischen Kompetenzentwicklung der frühen Sekundarstufe I dar. Entgegen einzelner Argumente (vgl. vertiefend bspw. Padberg, 2000, S. 5; Padberg & Wartha, 2017, S. 7-8), die versuchen, der unterrichtlichen Behandlung der Bruchzahlen und der Bruchrechnung ihre Bedeutung abzusprechen und sie als „Ausläufermodell“ zu deklarieren, betont Padberg (2009): „Die Bruchrechnung gerade auch in Form der gemeinen Brüche ist *keineswegs* überflüssig, sondern muss auch in Zukunft für Schüler *aller* Schulformen – wenn auch in unterschiedlichem Umfang – verbindlich bleiben [Hervorheb. im Original]“ (S. 20). Nach Padberg und Wartha (2017, S. 16) stellen ein anschauliches Bruchzahlverständnis sowie darauf aufbauende grundlegende Kompetenzen in der Bruchrechnung eine wesentliche Voraussetzung für weiterführende Inhaltsbereiche der Sekundarstufe sowie das alltägliche Leben dar. Ähnlich argumentieren Fenell und Karp (2017, S. 648): „Proficiency with fraction serves as a prerequisite for student success in higher level mathematics, as well as serving as a gateway to many occupations and varied contexts beyond the mathematics classroom“.

Die Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen stellt ein Kernthema mit Herausforderungen dar (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006, S. 2). Im Folgenden wird in

Anlehnung an die Begriffswahl Padbergs (2009; vgl. auch Padberg, Danckwerts & Stein, 2010; Wartha, 2007b; Wartha & Wittmann, 2009; Zimmermann, 2014) von *Bruchzahlen*[3] gesprochen, wenn eine Klasse gleichwertiger Brüche bzw. genauer ausgedrückt durch Brüche benannte Bruchzahlen mit demselben Wert gemeint sind. Als *Bruch* wird ein spezifischer Bruch mit je einem konkreten Zähler und Nenner als Zahlenpaar bezeichnet. „Zwei Brüche sind genau dann gleich, wenn sie im Zähler und Nenner übereinstimmen. Zwei Bruchzahlen sind genau dann gleich, wenn ihre Klassen identisch sind“ (Padberg et al., 2010, S. 67). Der Begriff *Bruchrechnung* umfasst nachfolgend als allgemeiner Oberbegriff sowohl das Rechnen mit gemeinen Brüchen als auch mit Dezimalbrüchen.

Zunächst findet eine curriculare Einordnung der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen statt. Daran anschließend erfolgen eine Sachanalyse der grundlegenden Inhaltsbereiche aus fachlicher Sicht sowie die Darstellung der besonderen Schwierigkeiten bei der Einführung der Bruchzahlen. Daraufhin werden zentrale Aspekte der unterrichtlichen Behandlung aufgezeigt. Abschließend folgt die Einordnung der Zahlbereichserweiterung vor dem Hintergrund ihrer empirischen Forschungsergebnisse.

4.2.1 Curriculare Einordnung

Angesichts der in jüngerer Zeit feststellbaren „substanzieller[n] Veränderungen“ (Padberg, 2009, S. 23) in der unterrichtlichen Behandlung von Bruchzahlen wird der Inhaltsbereich nachfolgend vor dem Hintergrund seiner inhaltlichen Entzerrung auf die Schuljahre fünf und sechs betrachtet, die durch die im Kerncurriculum formulierten Kompetenzerwartungen am Ende einer Doppeljahrgangsstufe ermöglicht wird. Entgegen der traditionellen und weit verbreiteten Standardbehandlung, die auf der Thematisierung der gesamten Bruchrechnung in Jahrgang sechs sowie der Dezimalbruchrechnung in Jahrgang sieben basiert und unter relativ schnellem Rückgriff auf die formal abstrakten Rechenaspekte durchgeführt wird, findet nachfolgend eine strikte Trennung zwischen dem grundlegenden Bruchzahlverständnis auf semantischer Ebene und der formal-regelhaften Bruchrechnung auf syntaktischer Ebene statt. Nach Wartha und Wittmann (2009, S. 74) beinhaltet das „syntaktisch-algorithmische Denken“

[3] Einige Autoren verwenden eine andere Begriffswahl, wie bspw. Wittmann (2007); Hefendehl-Hebecker (1996); Schink & Meyer (2013): sie sprechen von Brüchen als Äquivalenzklassen und von Bruchzahl im Sinne einer konkreten Zahl mit je einem Zähler/Nenner.

verfahrensorientierte Rechenvorgänge, die festen Regeln folgen und für sich betrachtet nicht unbedingt ein inhaltliches Verständnis erfordern. Das „semantisch-begriffliche Denken" bezieht sich auf die vielfältigen Relationen zwischen Bruchzahlen, die auf inhaltlichen Vorstellungen basieren.

> Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. Diesen Fehler kann man an fast allen Stoffgebieten der Schulmathematik beobachten. Die Bruchrechnung ist aber ein besonders geeignetes Studienobjekt. (Malle, 2004, S. 4)

In Jahrgang fünf liegt der Fokus auf der anschaulichen Einführung des Bruchzahlbegriffs. Es erfolgt eine grundlegende Fundierung des Begriffsverständnisses über zahlreiche enaktive und ikonische Erfahrungen. Im Mittelpunkt steht das aktive Entdecken vielschichtiger Zusammenhänge und zentraler Grundvorstellungen, die deutlich abgetrennt von der systematischen Bruchrechnung behandelt werden (Padberg, 2009, S. 24). Der ausführliche Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zu Bruchzahlen gilt als elementare Voraussetzung für eine verständnisorientierte und einsichtig begründete Bruchrechnung (vgl. Kap. 4.1.5). Unter Rückgriff auf die anschaulichen Grundvorstellungen findet in Jahrgang sechs die Einführung der Rechenregeln für die systematische Bruchrechnung auf syntaktischer Ebene statt. Auf der Basis der inhaltlichen Vorstellungen soll das Kalkül als Denkentlastung betrachtet werden, das immer wieder in Bezug zu den inhaltlichen Grundlagen gesetzt werden soll (Schink, 2013a, S. 20).

Die Bedeutung des grundlegenden Bruchzahlverständnisses hat bereits Auguste de Morgan 1831 hervorgehoben:

> Der Anfänger sollte es sich zur Gewohnheit machen, bei jeder Schwierigkeit im Bruchrechnen zum Ursprung des Bruchbegriffs zurückzukehren. Er sollte alle formalen Regeln beiseite lassen, bis er sich an Beispielen gründlich klar gemacht hat, wie mit Brüchen zu rechnen ist. (zitiert nach Müller, G. N., Steinbring & Wittmann, 2004, S. 91)

Das Kerncurriculum der Grundschule greift unter dem Inhaltsbereich „Größen und Messen" den Umgang mit einfachen Alltagsbrüchen im Rahmen der Umwandlung von Standardgrößen als erwartete Kompetenzen am Ende der vierten Klasse auf (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006, S. 24). In dem Kerncurriculum für die Integrierte Gesamtschule der

Schuljahrgänge fünf bis zehn nimmt die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen in den formulierten Kompetenzen bis zum Ende der sechsten Klasse einen bedeutsamen Stellenwert ein (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012, S. 28). In dem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Zahlen und Operationen“ wird zunächst das Erkennen der Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung sowie das Ordnen und Vergleichen positiver rationaler Zahlen aufgeführt. Weiterhin steht das Deuten von Brüchen[4] als Anteile im Mittelpunkt sowie als Erweiterung das Deuten von Brüchen als Verhältnisse. Darüber hinaus wird das Darstellen einfacher Bruchteile an verschiedenen Objekten sowie das Erkennen und Herstellen der Gleichwertigkeit von Brüchen als Kompetenzerwartung formuliert. Die Dezimalbrüche werden ebenfalls angeführt, allerdings erhalten sie im Rahmen der vorliegenden Arbeit keine weitere Berücksichtigung.

Die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ um $\mathbb{Q}^+$ stellt eine elementare Voraussetzung für die weitere Lernentwicklung in der Sekundarstufe I dar. Die darauf aufbauenden fachlichen Inhaltsbereiche werden im Folgenden kurz genannt, ohne sie mathematisch weiter auszuführen. Tragfähige Kompetenzen im Bereich der gemeinen Brüche sind eine wichtige Fundierung für die Erarbeitung der Dezimalbruchschreibweise sowie der Dezimalbruchrechnung (Padberg, 2009, S. 3). Darüber hinaus eignen sie sich zur Einführung der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie und liefern grundlegende Aussagen zum Umgang mit Wahrscheinlichkeiten (Padberg, 2009, S. 5-6). Auch in Bezug auf die Gleichungslehre und den dazu notwendigen Äquivalenzumformungen sowie im Hinblick auf ein einsichtsvolles Verständnis der Algebra spielt eine gründliche Kenntnis der Bruchrechnung eine entscheidende Rolle (Padberg, 2009, S. 7; Fennell & Karp, 2017, S. 648). Vor dem Hintergrund der natürlichen Zahlen stellen die positiven rationalen Zahlen eine sinnvolle Erweiterung dar, insbesondere bezüglich der eingeschränkten Division ohne Rest in $\mathbb{N}$, die in $\mathbb{Q}$ uneingeschränkt erfolgen kann (Padberg, 2009, S. 8-9).

Im weiteren Verlauf der inhaltlichen Darstellung sowie der konkreten Ausgestaltung der Unterrichts- und Förderkonzeption liegt der Fokus auf dem anschaulichen

---

[4] Entgegen der eingangs festgelegten Begriffswahl für die vorliegende Arbeit werden im Rahmen der curricularen Einordnung die Termini des Kerncurriculums verwendet.

Bruchzahlverständnis auf semantischer Ebene im fünften Schuljahr, die darauf aufbauende syntaktische Ebene der Bruchrechnung wird nicht näher betrachtet.

4.2.2 Sachanalyse und fachlicher Kern

Im Folgenden werden fachliche Vorstellungen zu dem ausgewählten Inhaltsbereich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses spezifiziert, die aus präskriptiver Sicht als entscheidend zu erwerbende und zu beherrschende mathematische Konzepte für einen verständigen Umgang mit Bruchzahlen gelten. In der Fachliteratur werden verschiedene Vorstellungen und Aspekte zu den positiven rationalen Zahlen aufgeführt, die in ihren Systematisierungen zum Teil Überschneidungen aufweisen, zum Teil aber auch unterschiedliche Schwerpunkte setzen. In der jüngeren deutschsprachigen Literatur lassen sich diesbezüglich vor allem Malle (2004), Padberg (2009) und Wartha (2007a) anführen. Die nachfolgenden Ausführungen zu dem vielschichtigen Bruchzahlbegriff und Bruchzahlverständnis beziehen sich primär auf die Systematisierungen nach Padberg (2009). Sie stellen keine vollständige Analyse dar, sondern sollen zentrale fachliche Vorstellungen hervorheben, die im weiteren Verlauf des Kapitels in Bezug auf die in der vorliegenden Arbeit relevanten Grundvorstellungen zur erfolgreichen Einführung eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses konkretisiert werden. Die Darlegungen stellen eine idealtypische Darstellung dar, deren einzelnen Komponenten in der Praxis des Mathematikunterrichts weniger scharf voneinander zu trennen sind und für ein fundiertes Verständnis vor dem Hintergrund ihrer innermathematischen Zusammenhänge betrachtet werden müssen.

Bruchzahlkonzepte

Padberg (2009) differenziert zwischen vier Teilaspekten des Bruchzahlbegriffs bzw. vier Bruchzahlkonzepten, die sich als „mehr oder weniger tragfähig für ein *Gesamtkonzept* [Hervorheb. im Original]“ (Padberg, 2009, S. 13) der Bruchrechnung erweisen:

- Größenkonzept
- Operatorkonzept
- Gleichungskonzept
- Äquivalenzklassenkonzept

Das *Größenkonzept* bezieht sich auf konkrete Brüche, die in Bezug zu einer festen Größe in Form eines Ganzen bzw. einer Einheit gesetzt werden (bspw. $\frac{1}{2}$ $m, \frac{3}{4}$ $h, \ldots$). Entsprechend einer Einheit e stellt der Bruch $\frac{m}{n}$ eine Größe dieser Einheit dar, nämlich $\frac{m}{n}$ e (Padberg, 2009, S. 14). Aufgrund seiner Nähe zu vielfältigen (alltäglichen) Anwendungsmöglichkeiten und der damit verbundenen Möglichkeit des Rückgriffs auf Vorkenntnisse ist dieses Konzept für die Einführung von Bruchzahlen geeignet. Anhand konkreter Anwendungssituationen im Rahmen des Größenkonzepts kann das Erweitern und Kürzen, die Anordnung, die Addition und Subtraktion sowie in wenigen Sonderfällen die Multiplikation und Division von Bruchzahlen erarbeitet werden. Insbesondere in Bezug auf die Multiplikation und Division weist das Größenkonzept allerdings Grenzen auf. Es erfordert die Umdeutung bisheriger Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen (Padberg, 2009, S. 14). Siegler und Pyke (2013) erachten das Größenverständnis als „particularly important aspect of conceptual understanding of fractions“ (S. 1995). Eng verbunden mit diesem Konzept ist der Maßzahlaspekt. Das Größenkonzept ist das vorrangig geeignetste Konzept für die unterrichtliche Umsetzung und wird aufgrund dessen den weiteren Ausführungen schwerpunktmäßig zugrunde gelegt.

Innerhalb des *Operatorkonzepts* werden Bruchzahlen als Funktionen bzw. Operatoren verstanden, die mit der alltäglichen Formulierung „$\frac{m}{n}$ *von* …“ einhergehen. Dahinter steht die Vorstellung, dass der Bruchoperator ($\cdot$ $\frac{m}{n}$) aus dem Divisionsoperator (: n) und dem Multiplikationsoperator ($\cdot$ m) zusammengesetzt ist, die in ihrer Reihenfolge vertauscht werden dürfen (Padberg, 2009, S. 15-16). Letztere Erkenntnis spielt vor allem für die Einführung von Bruchzahlen sowie der Multiplikation eine bedeutende Rolle (vgl. vertiefend Padberg, 2009, S. 16 ff.). Mathematisch betrachtet lässt sich ein Bruchoperator, der auf eine Größe e angewendet wird, wie folgt ausdrücken: $(\cdot \frac{m}{n})\ (e) = (e : n) \cdot m = (e \cdot m) : n$. Das Operatorkonzept ist in seiner formalisierten Form bezogen auf die unterrichtliche Umsetzung kritisch zu betrachten, bspw. aufgrund der fehlenden Anknüpfungsmöglichkeit an individuelle Vorerfahrungen oder der Vernachlässigung inhaltlicher Vorstellung bei der Multiplikation und Division.

Das *Gleichungskonzept* fasst die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ als die Lösung der linearen Gleichung $n \cdot \mathrm{x} = m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, die in Beziehung zu $m : n = \frac{m}{n}$ steht (Padberg, 2009, S. 19). Mithilfe des Gleichungskonzepts lassen sich nach Freudenthal sowohl das Erweitern und Kürzen als auch

Rechenoperationen „nach übersichtlichen Schemata und gleichzeitig sinnvollen Prozessen“ (1973, S. 206) einführen (vgl. vertiefend Padberg, 2009, S. 19). Das Gleichungskonzept weist für die unterrichtliche Behandlung deutliche Grenzen auf, da es die erst später erfolgende systematische Gleichungslehre belastet und einen nicht deckungsgleichen Variablenbegriff verwendet, sehr formal ist und die Gültigkeit von Rechengesetzen innerhalb der umfassenden Menge der Bruchzahlen nicht problematisiert (Padberg, 2009, S. 20). Darüber hinaus wird es aufgrund seiner Einseitigkeit und Formalität den vielfältigen Aspekten der Bruchzahlen nicht gerecht (Padberg & Wartha, 2017, S. 23).

Im Sinne des *Äquivalenzklassenkonzepts* wird in einer Menge von geordneten Paaren (a, b) natürlicher Zahlen eine Relation „ $\sim$ „ durch $(a, b) \sim (c, d)$ als $a \cdot d = b \cdot c$ definiert (Padberg, 2009, S. 20). Mit der Relation wird eine reflexive, symmetrische und transitive Äquivalenzrelation beschrieben, die in der Menge der geordneten Paare natürlicher Zahlen zu einer Klasseneinteilung führt. Dahinter steht die „Idee der Bruchzahl als Klasse gleichwertiger („äquivalenter“) Brüche“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 23). Aus mathematischer Sicht ist die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ die Äquivalenzklasse $\frac{m}{n}$ = {(a,b) | a, b $\in \mathbb{N}$ und $m \cdot b = n \cdot a$}. Brüche, die in derselben Äquivalenzklasse liegen, werden auch als Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse beschrieben. Jede Äquivalenzklasse enthält unendlich viele Bruchzahlen als Repräsentanten. Gleichwohl das Zusammenfassen gleichwertiger Brüche im Sinne der Klassenbildung eine bedeutende Rolle in der unterrichtlichen Behandlung des Themas einnimmt, ist das Äquivalenzklassenkonzept wenig geeignet für die Umsetzung in der frühen Sekundarstufe. Als „schwerwiegende Nachteile“ bezeichnet Padberg (2009, S. 21-22) fehlende Motivation aufgrund der hohen Formalität sowie den damit einhergehenden Mangel an Anschaulichkeit, die fehlende Anknüpfungsmöglichkeit an Vorwissen sowie die anwendungsferne Einführung der Rechenoperationen.

Bruchzahlaspekte

Die Komplexität des Bruchzahlbegriffs zeigt sich in den folgenden Bruchzahlaspekten (vgl. Neumann, 1999; Padberg, 2009):

- Teil vom Ganzen
- Maßzahl
- Operator

- Verhältnis
- Quotient
- Lösung der linearen Gleichung
- Skalenwert
- Quasikardinalität

Die vielfältigen Erscheinungsformen von Bruchzahlen hebt auch Hefendehl-Hebeker (1996) hervor: „Brüche haben viele Gesichter. Wer Bruchrechnung verstehen und Brüche nicht nur nach (fehleranfälligen!) Regeln handhaben will, muss diese Gesichter angeschaut und ihre Verwandtschaft erkannt haben. Welches Gesicht ein Bruch zeigt, hängt auch vom Standpunkt des Betrachters ab" (S. 20). Es gilt also einerseits, die verschiedenen Grundvorstellungen zu erwerben und diese andererseits mit der Fähigkeit zu verbinden, sie unter vielfältigen situativen Bedingungen aktivieren zu können (Schink, 2013a, S. 24). Eine zentrale Voraussetzung für die flexible Nutzung von Bruchzahlen ist deren beziehungsreiche Erarbeitung (Schink, 2013b, S. 18). Nachfolgend aufgeführte Bruchzahlaspekte weisen zum Teil inhaltliche Überschneidungen auf, werden für eine bessere Verständlichkeit jedoch differenziert dargestellt.

Der Aspekt *Bruch als Teil vom Ganzen* setzt sich aus den beiden Teilaspekten „Bruch als Teil *eines* Ganzen“ sowie „Bruch als Teil *mehrerer* Ganzer“ zusammen und stellt eine essentielle Grundlage für das Verständnis des Bruchzahlbegriffs dar. Er greift auf die Vorstellung zurück, dass $\frac{m}{n}$ als m von n Teilen (*eines* Ganzen) bzw. $\frac{m}{n}$ als m von n Teilen (*mehrerer* Ganzer) gedeutet werden kann und knüpft somit an die Grundvorstellungen der Multiplikation und Division natürlicher Zahlen an (Wartha & Wittmann, 2009, S. 95). Es wird die statische Komponente, also das Ergebnis einer Handlung, betont. Dieser Bruchzahlaspekt eignet sich für die anschauliche Einführung der positiven rationalen Zahlen, da er mit korrekten Gegenständen (bspw. Kuchen, Pizza) oder abstrakten Größen (bspw. Gewicht, Längen) verbunden werden kann (Wartha, 2007b, S. 49) und somit u.a. in engem Bezug zu dem Maßzahlaspekt steht. Bruchzahlen als Anteile sind im Gegensatz zu Maßzahlen allerdings nicht auf eine Normierung festgelegt, sondern die inhaltliche Anteilsvorstellung aktiviert das Verständnis der Maßzahl. Die beiden Teilaspekte gelten als wesentliche Grundvorstellungen, die im Zusammenhang mit der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen entwickelt werden müssen. Der

Aspekt „Bruch als Teil *eines* Ganzen“ wird auch als Grundvorstellung 1 (GV1), der Aspekt „Bruch als Teil *mehrerer* Ganzer“ als Grundvorstellung 2 (GV 2) benannt (Padberg, 2009).

Im Rahmen der ersten Grundvorstellung lassen sich Stamm- und Nicht-Stammbrüche aus zwei Perspektiven deuten (Schink & Prediger, 2014, S. 21): Im Kontext einer Verteilsituation wird ein intuitiver, handlungsorientierter Zugang ermöglicht. Der Zähler steht für das Ganze, das verteilt werden soll. Der Nenner bezieht sich bspw. auf die Anzahl der Personen, die sich das Ganze gerecht teilen. Durch den Bruch wird der Anteil ausgedrückt, den eine Person von dem Ganzen bekommt. Diese Interpretation ist bezogen auf das Verständnis von Nicht-Stammbrüchen insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen anspruchsvoll und wird im Rahmen der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzept daher vernachlässigt. Aus der zweiten Perspektive betrachtet gibt der Nenner an, in wie viele gleich große Teile ein Ganzes zerlegt wird. Der Zähler gibt die Anzahl der relevanten Teile an, d.h. er zählt die Teile, die von dem Ganzen genommen bzw. zusammengefasst werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 19), um den Anteil durch den entsprechenden Bruch darzustellen. Letztgenannte Interpretation ermöglicht sowohl die Erarbeitung von Stamm- als auch von Nicht-Stammbrüchen und erhält aus diesem Grund besondere Aufmerksamkeit im Rahmen der vorliegenden Arbeit. Die erste Grundvorstellung dient als Grundlage für den Größenvergleich.

Im Rahmen der GV 2 geht es um das Bestimmen von relativen Anteilen von Mengen. Der notwendige Interpretationsschritt erfordert die Erkenntnis, dass das Ganze nicht mehr eine zusammenhängende Einheit ist, sondern aus mehreren Objekten besteht und als „unzusammenhängende[s] Ganze[s]“ (Schink & Prediger, 2014, S. 38) verstanden werden muss. Das Ganze besteht „der mathematisch-fachsprachlichen Bezeichnung widersprechend aus „mehreren Ganzen““ (Schink & Meyer, 2013, S. 4). Mathematisch betrachtet muss der Anteil multiplikativ auf das Ganze bezogen werden. Durch das (Um-)Bilden von Einheiten kann der Anteil von Mengen erarbeitet werden. Die zweite Grundvorstellung dient sowohl als Grundlage für den Größenvergleich, aber auch zur Beschreibung der Ergebnisse von Verteilsituationen, d.h. sie erhält zusätzlich Relevanz für das Modellieren und mathematische Problemlösen.

Die beiden Grundvorstellungen „Teil *eines* Ganzen“ und „Teil *mehrerer* Ganzer“ im Kontext des Anteilaspekts gelten als entscheidende Verständnisgrundlage, „denn ohne ein Verständnis dieser beiden Grundvorstellungen des Bruchzahlbegriffs können die weiteren Teile der Bruchrechnung nicht wirklich verstanden werden“ (Padberg, 2000, S. 13). Nach separater Thematisierung der beiden Teilaspekte muss die logisch-konsequente Zusammenführung im Sinne der Gleichwertigkeit bzw. Ergebnisgleichheit beider Grundvorstellungen erfolgen.

> *Insgesamt* ist bei der Behandlung der beiden Grundvorstellungen zu beachten, dass die Schüler *zunächst die Unterschiede* zwischen den beiden Grundvorstellungen deutlich erkennen, dass sie aber *anschließend* die Einsicht gewinnen, dass man dennoch in beiden Fällen zu *demselben Ergebnis* gelangt und daher *dieselbe Schreibweise* verwenden darf [Hervorheb. im Original]. (Padberg, 2009, S. 39)

Rein formal unterscheiden sich die beiden Grundvorstellungen auf mathematischer Ebene nur in der Reihenfolge des Teilens und Vervielfachens. Im Sinne der ersten Grundvorstellung wird zunächst geteilt, dann vervielfacht ($\frac{m}{n}\, e = (e : n) \cdot m$). Gemäß der zweiten Grundvorstellung wird zunächst vervielfacht, dann geteilt ($\frac{m}{n}\, e = (e \cdot m) : n$). Auf anschaulicher Ebene lässt sich folgendes Beispiel anführen: In Anlehnung an die erste Grundvorstellung wird ein Ganzes in *n* Teile geteilt. Jedes Teil ist ein *n-tel*. $\frac{m}{n}$ bedeutet dann, dass *m* der *n-tel* zusammengefasst werden, um den Anteil darzustellen. Innerhalb der zweiten Grundvorstellung werden bspw. *m* Objekte gleichmäßig an *n* Personen verteilt. Das jeweilige Ergebnis darf entsprechend mit $\frac{m}{n}$ benannt werden. Als wichtige Verständnisgrundlage wird die Fähigkeit erachtet, „zu einem vorgegebenen *(konkreten) Bruch* einen Repräsentanten auf der Grundlage *beider* Grundvorstellungen anzugeben“ (Padberg, 2009, S. 40).

Nach Wartha (2007b, S. 53) ist die Bedeutung, die der Anteilsvorstellung für den Erwerb von Bruchrechenkompetenzen zukommt, nicht hoch genug einzuschätzen. Für ein umfängliches Grundverständnis der Bruchzahlen ist die „inhaltliche Deutung der Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem“ (Schink, 2013a, S. 24-25, vgl. Abb. 5) eine wesentliche Voraussetzung, um darauf aufbauend ein grundlegendes und flexibel anwendbares Bruchzahlverständnis entwickeln zu können (Schink, 2013b, S. 879).

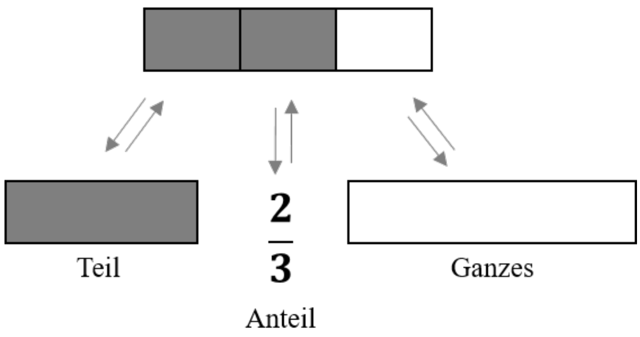


Abbildung 5: Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem (eigene Darstellung in Anlehnung an Schink, 2013a, S.879)

Im Sinne des „unitizing“ (Lamon, 1994) müssen als zentrale mathematische Handlung Einheiten gebildet und umgebildet werden können, d.h. es müssen Zahlen und Mengen in Teilmengen zerlegt und als neue Einheiten verstanden werden.

> So bezieht sich ein Anteil immer auf ein bestimmtes Ganzes und erzeugt eine Strukturierung, aus der sich der Teil ergibt. Der Anteil ergibt sich als Beziehung zwischen dem Teil und dem zugehörigen Ganzen. Das Ganze ergibt sich aus der Rekonstruktion des Teils durch die Nutzung des Anteils. (Schink, 2013b, S. 879)

Schink verdeutlicht die Interdependenz zwischen den drei Komponenten. Durch den Anteil wird ein multiplikativer Zusammenhang zwischen dem Ganzen und seinen Teilen ausgedrückt. Sowohl die Anteile als auch die einzelnen Teile müssen also immer in Bezug auf das jeweils spezifische Ganze interpretiert werden (Schink, 2013a, S. 48). Dazu sind das Nutzen und die Interpretation relativer Zahlbezüge von besonderer Relevanz. Aber auch die Identifikation des Ganzen, dessen strukturelle Beschaffenheit sowie der Rückbezug auf die Teile und den Anteil stellen ein wichtiges Fundament für einen verständigen Umgang mit Bruchzahlen dar. Das Ganze als Bezugsgröße ist nicht beliebig, sondern muss stets in Bezug auf seinen jeweiligen Kontext gedeutet werden. Beim Bilden und Umbilden von Einheiten wird das Ganze immer wieder neu als Zusammensetzung seiner Teile verstanden (Schink, 2013a, S. 53).

> A key idea about fractions that students must come to understand is that a fraction does not say anything about the size of the whole or the size of the parts. A fraction tells us only about the relationship between the part and the whole. (van de Walle et al, 2013, S. 295)

Ramful und Olive (2008, S. 138) heben die damit verbundene Umkehrung von Denkprozessen als Voraussetzung für den Erwerb bestimmter Konzepte, wie hier dem Bruchzahlkonzept, hervor. Es lassen sich nach Schink (2013a) drei mögliche Kombinationen bilden, die jeweils spezifische Perspektiven auf die Trias einnehmen und unterschiedliche Anforderungen implizieren. Die zusammenhängende Betrachtung aller drei Komponenten fördert den Aufbau facettenreicher Grundvorstellungen im Sinne der zugrunde liegenden triadischen Struktur:

- Das Ganze und der Anteil sind gegeben, d.h. der Teil wird gesucht.
- Das Ganze und die Teile sind gegeben, d.h. der Anteil wird gesucht.
- Die Teile und der Anteil sind gegeben, d.h. das Ganze wird gesucht.

Lamon (1994) verweist auf die Anforderungen bezüglich der Strukturierungsfähigkeit im Sinne einer flexiblen Interpretation von Strukturen, die notwendig ist für ein fundiertes Bruchzahlverständnis:

> One of the most critical understandings in the fraction world is that the numerical symbol (1/3, for example) can represent different amounts, depending on what the unit or the unit whole happens to be. How many or how much is meant by 1/3 is ambiguous unless we know (among other things) to which whole it refers. The notions of unitizing and norming play a major role in the development of the fraction concept. […] The ability to reinterpret information in terms of different unit wholes – sometimes several times within the same situation – appears to be essential to understanding ratios. (Lamon, 1994, S. 97-98)

Insgesamt können nach Schink (2013a) die „Interpretation des Ganzen in Bezug auf die es erzeugenden Teile und die Interpretation der Teile und Anteile im Hinblick auf das Ganze“ als „grundlegende Voraussetzungen für den Umgang mit Brüchen“ (S. 53) hervorgehoben werden. Die folgende, vor dem Hintergrund des Aspekts *Bruch als Teil vom Ganzen* von Schink (2013a, S. 72-73) formulierte Arbeitsdefinition für einen flexiblen Umgang mit Brüchen wird auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt:

Der flexible Umgang mit Brüchen äußert sich in der bewussten Nutzung struktureller Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem:

- Der Umgang mit Brüchen erfordert, die drei Komponenten Teil, Anteil und Ganzes aufeinander beziehen zu können.
- Um die drei Komponenten strukturell nutzen zu können, sind Einsichten in deren interne Zusammenhänge notwendig, d.h. es wird eine Bewusstheit für Einheiten und deren Bezugssystem notwendig. Grundlage hierfür ist das multiplikative Denken.

- Das Nutzen dieser strukturellen Zusammenhänge kann in verschiedenen Konstellationen und für verschiedene Qualitäten des Ganzen unter Zuhilfenahme operativer Vorgehensweisen erfolgen.

Nach Schink (2013a, S. 351) stellt der flexible Umgang mit Brüchen im Sinne des Anteilaspekts eine wesentliche Voraussetzung dar, um die in dieser Arbeit fokussierten zentralen Grundvorstellungen überhaupt aufbauen und entwickeln zu können. „Das Verfügen über eine konkrete Grundvorstellung [impliziert] das Wissen um konkrete Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem und deren Nutzung“ (Schink, 2013a, S. 40). Gleichzeitig baut sich das Verständnis von Grundvorstellungen durch deren Nutzung weiter aus.

Der Aspekt *Bruch als Maßzahl* wird auch als Größenaspekt beschrieben und steht in enger Verbindung zu dem oben beschriebenen Größenkonzept, da er die Größe konkreter Brüche beschreibt. Durch Betonung des Ergebnisses kann dem Maßzahlaspekt eine statische Eigenschaft zugeschrieben werden. Neben dem essentiellen Aspekt *Bruch als Teil vom Ganzen* ist der Maßzahlaspekt „am besten brauchbar“ (Padberg, 2009, S. 31) für den Aufbau der Bruchrechnung.

Der Aspekt *Bruch als Operator* wird zur „knappen Beschreibung von auf Größen anzuwendender *multiplikativer* Handlungsweisen [Hervorheb. im Original]“ (Padberg, 2009, S. 29) genutzt. Ein Bruch als Operator bezieht sich auf eine Größe und greift auf eine dynamische Vorstellung zurück. Er nimmt eine „Zahlfunktion [ein], die eine Grundmenge auf den Anteil abbildet“ (Wartha & Wittmann, 2009, S. 96). Im Sinne der „von-Deutung“ gewinnt dieser Bruchzahlaspekt insbesondere bei der Multiplikation von Bruchzahlen an Bedeutung, wobei der Bruchoperator als „Zusammenfassung zweier Operationen, dem Zähler- und dem Nenneroperator“ (Wartha, 2007b, S. 54) zu verstehen ist. Mathematisch ausgedrückt bedeutet der Bruch $\frac{m}{n}$ von x: teile x durch m ($: m$, Divisionsoperator) und multipliziere mit n ($\cdot\, n$, Multiplikationsoperator). Die Reihenfolge des operativen Vorgehens ist dabei nicht festgelegt (Padberg & Wartha, 2017, S. 20).

Der Aspekt *Bruch als Verhältnis* bezieht sich auf ein für den anwendungsbezogenen Bruchzahlbegriff relevanten Aspekt, da er im täglichen Leben häufig vorkommt (bspw. bei Maßstäben, Verhältnisangaben oder Wahrscheinlichkeiten). Mathematisch gesehen drückt der

Bruch $\frac{m}{n}$ das Verhältnis zwischen *m* und *n* aus, also *m* : *n*. Der Doppelpunkt dient in diesem Fall allerdings nicht als Divisionszeichen, sondern als Verhältniszeichen. Für den Aufbau eines grundlegenden Verständnisses der Bruchrechnung ist dieser Aspekt allerdings nicht tragfähig (Padberg, 2009, S. 31).

Der Aspekt *Bruch als Quotient* beschreibt das Ergebnis einer Divisionsaufgabe mit natürlichen Zahlen. Die Aufgabe *m* : *n* kann auch als $\frac{m}{n}$ ausgedrückt werden. Der Zähler steht für den Dividenden, der Nenner für den Divisor und der Bruchstrich drückt die Division im Sinne des (restlosen) Verteilens bzw. des Messens oder Enthaltenseins aus (Padberg, 2009, S. 30). Dahinter steckt die Vorstellung auf syntaktischer Ebene, dass der Umgang mit einem Bruch gleichzusetzen ist mit der operativen Handlung: Zähler dividiert durch Nenner. Für den anschaulichen Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses greift dieses regelgeleitete Vorgehen jedoch zu kurz.

Der Aspekt *Bruch als Lösung der linearen Gleichung* steht in engem Zusammenhang mit dem Gleichungskonzept. Ein so interpretierter Bruch dient zur Beschreibung des Ergebnisses einer linearen Gleichung, d.h. $\frac{m}{n}$ beschreibt $n \cdot x = m$ mit n, $m \in \mathbb{N}$ und weist damit große Überschneidungen mit dem Aspekt Bruch als Quotient auf.

Der Aspekt *Bruch als Skalenwert* bezieht sich auf Bruchzahlen, die zur genaueren Bestimmung von Stellen auf einer Skala, wie bspw. dem Zahlenstrahl, verwendet werden. Auch hier lässt sich eine deutliche Nähe zu dem Aspekt Bruch als Maßzahl feststellen.

Der Aspekt *Bruch als Quasikardinalität* fasst eine Bruchzahl im Sinne der (quasi) Kardinalität von natürlichen Zahlen auf. $\frac{m}{n}$ wird verstanden als *m n*-tel, wobei *n*-tel als eine neue Einheit und *m* als Kardinalzahl gedeutet werden. Mathematisch betrachtet drückt $\frac{m}{n}$ die Größe einer Maßzahl (*m*) und die Größeneinheit ($\frac{1}{n}$) aus (Padberg, 2009, S. 30). Bruchzahlen als quasikardinal aufzufassen ist hilfreich bei der Addition und Subtraktion (insbesondere gleichnamiger) Brüche (Padberg & Wartha, 2017, S. 21).

Die *Äquivalenz* (Gleichwertigkeit) von Brüchen lässt sich sowohl auf semantischer Ebene im Sinne des Verfeinerns und Vergröberns, als auch auf syntaktischer Ebene in Form des Erweiterns und Kürzens betrachten. Die Operation des Erweiterns stellt aus einer anschaulichen

Perspektive eine Verfeinerung der Strukturierung der Teile des Ganzen dar, das Kürzen führt zu einer Vergröberung der Strukturierung der Teile des Ganzen (Malle, 2004, S. 5-6). Auf semantischer Ebene steht die Umwandlung einer Bruchdarstellung in eine andere im Mittelpunkt und stellt eine anschauliche Basis für ein fundiertes Bruchzahlverständnis dar. Dem zugrunde liegt die Einsicht, dass die Einheiten einer Bruchzahl „in kleinere gleich große Einheiten zerlegt bzw. zu größeren Einheiten zusammengefasst“ (Schink, 2013a, S. 27) werden können. „Two equivalent fractions are two ways of describing the same amount by using different-sized fractional parts” (van de Walle et al. 2013, S. 290). Dadurch verändert sich die Unterteilung und Strukturierung des Ganzen, nicht aber seine Größe bzw. der ausgedrückte Anteil. Verbunden mit dem Vorgang des Verfeinerns und Vergröberns soll die Einsicht in die Unendlichkeit der Bruchzahldarstellungen angebahnt werden. Dabei kann das Ganze theoretisch betrachtet beliebig oft verfeinert werden, die Vergröberung ist allerdings nur beschränkt durchführbar (Padberg, 2009, S. 49).

Die Einsicht in die Äquivalenz von Bruchzahlen kann auch über variationsreiche Verteilsituationen erfolgen (vgl. vertiefend Streefland, 1986a). Dieses Vorgehen greift die Beziehung zwischen Bruchzahlen und Verhältnissen auf und berücksichtigt beide zentralen Grundvorstellungen des Bruchzahlaspekts *Teil vom Ganzen*. Es bietet ausreichend Offenheit für individuelle Denkansätze und Lösungswege. Darüber hinaus ist dieser Ansatz hilfreich zur Vorbereitung der Kleinerrelation, der Addition, der Subtraktion sowie der Division von Bruchzahlen (Padberg, 2009, S. 51). Hunting (1984) beschreibt die Äquivalenz von Bruchzahlen als „key idea in elementary mathematics“ (S. 32) und betont deren Relevanz über die Bedeutung bezogen auf die Bruchzahlen hinaus als ein „wichtiges Konzept mathematischer Grundkenntnisse“ (Wartha, 2007b, S. 67).

Mit dem Verfeinern und Vergröbern ist die Erkenntnis verbunden, dass ein identischer Anteil durch eine unterschiedliche Unterteilung des Ganzen mit beliebig vielen Bruchzahlen ausgedrückt werden kann. Diese Bruchzahlen, die sich auf den identischen Anteil beziehen, werden als gleichwertig bzw. äquivalent bezeichnet. Damit verbunden ist die Fähigkeit, sowohl innerhalb unterschiedlicher Kontexte erklären zu können, warum zwei oder mehr vorgegebene Brüche gleichwertig sind, als auch zu einem vorgegebenen Bruch verschiedene gleichwertige Bruchzahlen zu finden (Padberg & Wartha, 2017, S. 47). Auf Ebene des Bruchs findet eine Veränderung statt, nicht jedoch auf Ebene der Bruchzahlen (Padberg, 2009, S. 55). Dies stellt eine zentrale Grundlage für die systematische Erarbeitung des Verständnisses des Erweiterns und Kürzens auf syntaktischer Ebene dar. Das Erweitern greift auf die Multiplikation von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl zurück, das Kürzen bezieht sich auf die Division von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl. Erweitern und Kürzen sind als Umkehroperationen zu verstehen, die sich gegenseitig wieder aufheben (vgl. vertiefend bspw. Padberg 2009, S. 52 ff.). Darüber hinaus ermöglicht das Verfeinern und Vergröbern auf ikonischer Ebene einen anschaulichen Zugang zu dem Vorstellungsaufbau von Ordnungsrelationen (Wessel, 2015, S. 112).

Im Zusammenhang mit dem Verfeinern und Vergröbern bzw. Erweitern und Kürzen ist die Dichtheit der Menge aller Bruchzahlen hervorzuheben: „Zwischen zwei verschiedenen Bruchzahlen, und sei ihre Differenz noch so gering, liegen stets unendlich viele weitere Bruchzahlen. [….] Die Dichte ist Ausdruck dafür, daß [sic.] zwei Größen derselben Art so genau wie gewünscht aneinander gemessen werden können“ (Winter, 1999, S. 29). Die Erkenntnis, dass zu einem gegebenen Bruch kein direkter Vorgänger bzw. Nachfolger angegeben werden kann, d.h. dass die Bruchzahlen den Zahlenstrahl nicht lückenlos bedecken und es auch keine kleinste positive rationale Zahl gibt, gilt es in Klasse 6 aufzubauen (Padberg, 2009, S. 65).

Entsprechend der verschiedenen Bruchzahlaspekte lassen sich auch viele *verschiedene Schreibweisen* anführen, durch die Bruchzahlen ausgedrückt werden können (Padberg & Wartha, 2017, S. 31-32):

- geschriebenes Zahlzeichen: $\frac{1}{5}$
- gesprochenes Zahlwort: *ein Fünftel*
- Dezimalbruch: *0,20*
- Maßstab: *1:5*
- Verhältnis: *1 zu 5* oder *1:5*
- Quotient: *1:5*
- Prozent: *20 %*

Neben den unterschiedlichen Schreibweisen auf symbolischer Ebene können Bruchzahlen auch auf viele verschiedene Arten auf enaktiver und ikonischer Ebene repräsentiert werden. Als *anschauliche Repräsentanten* werden insbesondere geometrische Figuren und Bilder verwendet (Padberg & Wartha, 2017, S. 32). Zur Einführung der positiven rationalen Zahlen wird oftmals auf Kreise zurückgegriffen, die sich anschaulich mit lebensweltbezogenen Gegenständen wie bspw. einer Torte oder einer Pizza verbinden lassen. Sie bieten für Lernende einen konkreten Bezugspunkt, da sie „das Ganze besonders prägnant“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 24) darstellen. Die Kreisdarstellung ist allerdings relativ beschränkt im Hinblick auf weiterführende Inhalte, wie bspw. der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen. Rechtecke eigenen sich besser, da sie mehrere verschiedene Darstellungen auf enaktiver (bspw. durch Falten) und ikonischer Ebene sowie eine einfachere Unterteilungen des Ganzen durch die Lernenden selbst erlauben. Auch Strecken oder Bruchstreifen als Ergänzung der rechteckigen Repräsentanten eignen sich zur anschaulichen Darstellung von Bruchzahlen (vgl. vertiefend Schink & Prediger, 2014).

In Bezug auf die erste Grundvorstellung Teil *eines* Ganzen werden zunächst kontinuierliche Darstellungen der Bezugsgröße gewählt. Das Ganze stellt eine kontinuierliche Einheit dar, die nur durch Aufbrechen in Teile bzw. Teilmengen zerlegt und damit strukturiert werden kann (Schink, 2013a, S. 43). Kreise und Rechtecke dienen dabei der Repräsentation flächiger Ganzer, mit Bruchstreifen können lineare Anteile veranschaulicht werden. Ebenso lassen sich Teile eines diskreten Ganzen bestimmen. Das Ganze stellt auch hier eine Einheit dar, allerdings besteht es aus einer diskreten Menge, d.h. „aus mehreren gleichartigen Einheiten, die nicht erst durch einen Zerteilungsvorgang geschaffen werden“ (Schink, 2013a, S. 43) müssen. Diese können entweder strukturiert oder unstrukturiert repräsentiert werden. Nach Schink (2013a) lassen sich in diesem Fall drei verschiedene Bedeutungsabstufungen unterscheiden: multiplikative Teil-Ganzes-Relation I (relativer Anteil), multiplikative Teil-Ganzes-Relation I (abgeschlossenes Teil-Ganzes-System) sowie Quote (vgl. vertiefend Schink, 2013a, S. 42 ff.).

Bezogen auf die zweite Grundvorstellung Teil *mehrerer* Ganzer lassen sich Anteile ebenso entweder kontinuierlich oder diskret darstellen. Hier bestehen allerdings mehrdeutige Interpretationsmöglichkeiten: Die verschiedenen geometrischen Formen lassen sich entweder zusammen als ein Ganzes oder als getrennte Ganze deuten (Schink, 2013a, S. 46). Vor diesem Hintergrund können sowohl kontinuierlich und strukturiert dargestellte Ganze als auch diskret kontinuierliche Ganze einerseits hinsichtlich ihrer äußeren Form als ein Ganzes, andererseits in Bezug auf ihre interne Strukturierung als diskrete Vereinigung einzelner Teile betrachtet werden. Die Umsetzung der zweiten Grundvorstellung in Form mehrerer diskreter Ganzer kann auch in unstrukturierter Darstellungsform erfolgen.

Um den mathematischen Gehalt für die Auswahl geeigneter Repräsentanten einschätzen zu können, schlägt Padberg (2009, S. 42) folgende Fragen zur Beurteilung der Darstellungsformen vor:

- Ist die Bezugsbasis, d.h. die Einheit, klar zu erkennen?
- Lässt sich die Unterteilung leicht und auf verschiedene Arten durchführen?
- Ist die Darstellungsform im weiteren Verlauf der Bruchrechnung einsetzbar, bspw. beim Erweitern und Kürzen bzw. bei den Rechenoperationen?

Wichtig zu beachten ist, dass die eingesetzten Repräsentanten auf enaktiver und ikonischer Ebene nicht nur eine „rein illustrierende Funktion“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 32) einnehmen, sondern darüber hinaus die mentalen Vorstellungen repräsentativ unterstützen. Im Zusammenhang mit Darstellungsformen ist die Fähigkeit zu sehen, „einen vorgegebenen *Repräsentanten* durch einen (*konkreten*) Bruch zu benennen“ (Padberg, 2009, S. 40).

Im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit findet eine eingrenzende Fokussierung bzw. didaktisch strukturierte Reduzierung auf die folgenden Bereiche statt, die als unerlässliche Voraussetzung und unverzichtbare Grundlage für ein anschauliches und tragfähiges Bruchzahlverständnis angesehen werden.

- Grundvorstellungen (GV)
    - GV 1: Teil eines Ganzen
    - GV 2: Teil mehrerer Ganzer
    - Ergebnisgleichheit
- Äquivalenz
    - Vergröbern
    - Verfeinern
- Darstellungswechsel
- Umbrüche zu natürlichen Zahlen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die oben genannten Schwerpunktsetzungen als elementare Grundvorstellungen zu Bruchzahlen erachtet, die sowohl die beiden als

Grundvorstellungen benannten Teilaspekte der Anteilsvorstellung beinhalten, als auch darüber hinaus weitere, für ein umfangreiches Bruchzahlverständnis als zentral erachtete Aspekte berücksichtigen. Die ausgewählten zentralen Aspekte werden vor dem Hintergrund ihrer Bedeutung für anwendungsorientierte, aktiv-entdeckende Unterrichtskontexte sowie ihrer Relevanz für die Genese eines umfassenden Bruchzahlverständnisses in den Kapiteln 5.3 und 5.4 weiter ausgeführt und im Rahmen der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption konkretisiert. Der letztgenannte Aspekt, die Umbrüche zu den natürlichen Zahlen, wird aufgrund seiner hohen Relevanz für das grundlegende Bruchzahlverständnis in Kapitel 4.2.3 ausführlich erläutert. Im weiteren Verlauf wird der Begriff des Anteils als Zusammenfassung der in der vorliegenden Arbeit als elementare Vorstellungen zu Bruchzahlen verstandenen Grundlagen verwendet. Der Fokus wird insgesamt vorrangig auf Bruchzahlen als Anteile gelegt. Dabei werden weitere Deutungen, wie bspw. der Verhältnisaspekt, nicht berücksichtigt (vgl. Wessel, 2015).

Grundvorstellungen

Um (neue) mathematische Inhalte vorstellungs- und verständnisorientiert erarbeiten und reflektiert anwenden zu können, bedarf es zunächst des Aufbaus inhaltlicher Grundvorstellungen. Diese werden als fachlich tragfähige Vorstellungen zu einem Inhaltsbereich (vgl. u.a. Vom Hofe, 1995) sowie als Voraussetzung für „semantisch-begriffliches Denken“ (Wartha & Wittmann, 2009, S. 92) verstanden. Sie repräsentieren einen abstrakten mathematischen Inhalt auf einer anschaulichen Ebene und nehmen eine Vermittlerrolle zwischen Anwendungssituationen und den zugehörigen mathematischen Inhalten ein. Aus normativer Sicht können über zentrale Grundvorstellungen mathematische Inhalte beschrieben werden, die von den Lernenden erworben werden sollten. Deskriptiv betrachtet eigenen sich Grundvorstellungen im Sinne individueller mentaler Modelle zur Beschreibung und Analyse individueller Denk- und Lösungsprozesse (Wartha, 2011).

Grundvorstellungen werden auch als mentale Modelle (Freudenthal, 1983) aufgefasst, die zur erfolgreichen Lösung mathematischer Aufgaben aktiviert werden müssen und ein verständiges Operieren ermöglichen. Sie stellen darüber hinaus die wesentliche Voraussetzung für den intermodalen Transfer, d.h. die Übersetzungsprozesse zwischen den Darstellungsformen, dar (Wartha & Wittmann, 2009, S. 92) und sind immer dann notwendig, wenn verschiedene mathematische Inhaltsbereiche miteinander in Beziehung gesetzt werden sollen.

Grundvorstellungen basieren auf flexiblen kognitiven Schemata, die einer ständigen Veränderung und Weiterentwicklung unterliegen und vor dem Hintergrund ihrer Wechselwirkung mit den jeweiligen Inhaltsbereichen interpretiert werden müssen.

> Bei Grundvorstellungen ist also nicht an eine Kollektion von stabilen und ein für alle mal validen Werkzeugen zu denken, sondern an die Ausbildung eines Netzwerks, das sich durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren System mentaler mathematischer Modelle entwickelt. (Vom Hofe & Wartha, 2005, S. 203)

Die notwendige Flexibilität bezogen auf den Aufbau von Grundvorstellungen zeigt sich auch in der nicht existierenden Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen spezifischen Aufgaben und Grundvorstellungen. Wittmann (2007) hebt hervor, dass Grundvorstellungen nicht auswendig gelernt werden können, sondern dass sie „nur aus einer individuellen und aktiven Auseinandersetzung“ (S. 19) mit den jeweiligen Inhaltsbereichen erwachsen. Grundvorstellungen können einerseits aufbauend auf bereits erworbene Grundvorstellungen weiter ausgebaut werden, andererseits erfordern sie einen Umbruch bzw. eine Reorganisation, wenn ein neuer Inhaltsbereich nicht mit den bereits erworbenen Grundvorstellungen kompatibel ist (Wartha & Wittmann, 2009, S. 94). Grundvorstellungen beschreiben und strukturieren nicht nur z.T. komplexe mathematische Zusammenhänge, sondern sind selbst facettenreich (Schink, 2013a, S. 23). Lamon (2007) spricht in diesem Zusammenhang von ”rational number sense” und hebt die Bedeutung inhaltlicher Vorstellungen sowie die Flexibilität im Umgang mit Bruchzahlen hervor:

> When educators say that the goal of fraction instruction is to understand the rational numbers, we mean that by providing students with experiences with non-negative rational numbers (fractions), we want them to recognize nuances in meaning: to associate each meaning with appropriate situations and operations, and, in general, to develop insight, comfort, and flexibility in dealing with the rational numbers. [...] Students who have developed rational number sense have an intuitive feel for the relative sizes of rational numbers and the ability to estimate, to think qualitatively and multiplicatively, to solve proportions and to solve problems, to move flexibly between interpretations and representations, to make sense, and to make sound decisions and reasonable judgments. (S. 636)

Vertiefende Ausführungen zu dem Konzept der Grundvorstellungen allgemein sowie speziell dem Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen können interessierte Leserinnen und Leser bspw. bei Vom Hofe (1995) und Wartha (2011) nachlesen.

4.2.3 Schwierigkeiten im Verständnis von positiven rationalen Zahlen

Für viele Lernende, nicht nur diejenigen mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, stellt die Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen ein schwieriges und fehleranfälliges Thema dar (Tian & Siegler, 2017, S. 614). Van de Walle et. al. (2013) sprechen in diesem Kontext von „considerable challenge" (S. 290). Nachfolgend werden die kritischen Stellen, die „in Bezug auf natürliche Zahlen und Bruchzahlen für den Aufbau und die (prozessorientierte) Aktivierung von Grundvorstellungen überwunden werden sollen" (Wartha, 2017, S. 287), dargelegt. Dieses Kapitel soll für kritische Stellen und die sogenannten „Hürden" im Bereich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses sensibilisieren und ein Bewusstsein dafür schaffen, welche Bereiche den Lernenden bei der Zahlbereichserweiterung oftmals Probleme bereiten.[5]

Die Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen weist eine Doppelnatur auf und bewegt sich auf einem Kontinuum zwischen Kontinuitäten und Diskontinuitäten sowie damit verbunden zwischen Assimilation und Akkommodation (Winter, 1999, S. 2); denn mit der Einführung der Bruchzahlen wird eine Veränderung und Erweiterung der bisherigen Vorstellungen zum Zahlbegriff und zu mathematischen Operationen, die bislang dem Bereich der natürlichen Zahlen im Rahmen des arithmetischen Basisstoffs der Primarstufenmathematik zuzuordnen sind, erforderlich (Vom Hofe, Kleine, Blum & Pekrun, 2005, S. 276). Damit stehen viele Schülerinnen und Schüler, nicht nur diejenigen mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, vor einer großen Herausforderung. „Die natürlichen Zahlen sind für Kinder *die* Zahlen überhaupt und insofern wirklich *natürlich*" (Winter, 2004, S. 15). „The problem is, none of those qualities—true of whole numbers—is true when it comes to fractions, one of the most chronically troublesome basic mathematics areas for children and adults alike" (Sparks, 2013, Abs. 3). Winter hebt die Relevanz der Thematisierung der Grundvorstellungsumbrüche für alle Lernenden hervor, da sie "keine Angelegenheit der Vertiefung für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler, sondern von grundlegender Bedeutung für das Verständnis von Bruchzahlen und ihren Anwendungen" (Winter, 2004, S. 15) sind. „Für nicht wenige Kinder ist Bruchrechnen in der Sekundarstufe ein Manipulieren mit Zahlen nach undurchschaubaren

[5] Für eine spezifische analytische Einordnung möglicher Schwierigkeiten sei an dieser Stelle auf das Schichtenmodell von Prediger (2008a) verwiesen, das für den Berich des grundlegenden Bruchzahlverständnisss u.a. auch bei Schink (2013a) weiter ausgeführt wird.

Handlungsvorschriften“ (Lassnitzer & Gaidoschik, 2008, S. 2), da sie nicht auf gesicherte Grundvorstellungen des elementaren Bruchzahlverständnisses zurückgreifen können.

Die Einführung der Bruchzahlen bringt Umbrüche zu den bisher bekannten natürlichen Zahlen mit sich und erfordert neben dem Aufbau der Grundvorstellungen zu Bruchzahlen darüber hinaus, alte, bisher bewährte Grundvorstellungen und Strategien in Frage zu stellen und für den erweiterten Zahlbereich erneut zu überprüfen (Wartha, 2017, S. 303).

> Eine Zahlbereichserweiterung ist nämlich mehr als ein erweitertes Repertoire an Zahlsymbolen, Rechenregeln und Anwendungsmöglichkeiten. Sie führt in eine veränderte Gedankenwelt. Diese ist nicht losgelöst von der alten, vermittelt aber ungewohnte, zum Teil sogar irritierende Erfahrungen und erfordert manches Umdenken. Vertraute Vorstellungen und gewohnheitsmäßige Erwartungen müssen erweitert oder modifiziert werden. (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006, S. 3)

Die Einführung der positiven rationalen Zahlen gilt als „wichtiger Beispielbereich für die allgemeine Forderung, nicht mehr gültige Vorstellungen und Grundüberzeugungen explizit aufzubrechen und die dadurch entstehenden Brüche als Anlässe für mathematische Bildungsprozesse zu begreifen“ (Prediger, 2004, S. 12-13). „Die natürlichen Zahlen sind ernst zu nehmende Verführer vom Beginn des Lernprozesses in der Bruchrechnung an und auch in seinem weiteren Verlauf“ (Streefland, 1986b, S. 45). Nicht adäquate Vorstellungen sind zunächst im Lernprozess nichts Ungewöhnliches. Wichtig ist es jedoch, tragfähige inhaltliche Vorstellungen aufzubauen, bevor sich bspw. ein schematisches Vorgehen verfestigt (Mosandl & Sprenger, 2014, S. 21). Auch Padberg (2009, S. 248) hebt die sogfältig thematisierte Einbettung der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen hervor, um häufig angewandten Fehlerstrategien bei der Bruchrechnung entgegenzuwirken. Wichtige Grundlage dazu sind vielfältige Möglichkeiten, um die Einsicht in die neuen bzw. anderen Strukturen aktiv-entdeckend aufzubauen. „Es darf nicht der Eindruck entstehen, Bruchzahlen seien nur abgewandelte ("kompliziertere") natürliche Zahlen; vielmehr muß [sic.] das Umgekehrte deutlich werden; natürliche Zahlen sind bezüglich des Rechnens spezielle Bruchzahlen“ (Winter, 1999, S. 3). Eine weit verbreitete Schwierigkeit besteht in der inhaltlich fundierten Einbettung der natürlichen Zahlen in die Bruchzahlen. Viele Lernende setzen die natürliche Zahl n mit dem Bruch $\frac{n}{n}$ bzw. vice versa gleich.

Die Interpretation der neu eingeführten Zahlen wird im Vergleich zu den bisher bekannten natürlichen Zahlen vielfältiger (Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006, S. 3). Verschiedene Autoren zeigen Grundvorstellungsumbrüche bzw. Diskontinuitäten zwischen den beiden Zahlbereichen auf (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger, 2006; Padberg, 2009; Wartha & Güse, 2009; Winter, 1999). Nachfolgend werden vor dem Hintergrund der Relevanz für die vorliegende Forschungsarbeit nur diejenigen Unterschiede aufgezeigt, die sich auf ein grundlegendes Bruchzahlverständnis beziehen. Umbrüche in Bezug auf Rechenoperationen werden nicht dargestellt.

Mit Bruchzahlen lassen sich im Vergleich zu natürlichen Zahlen nicht nur Anzahlen und Ordnungszahlen beschreiben, sondern sie können sich entsprechend der verschiedenen Bruchzahlaspekte auf Anteile, Verhältnisse, Größenaspekte, multiplikative Vergleiche u.v.m. beziehen. Diese Vielfalt zeichnet sich ebenso in der Zahldarstellung bzw. symbolischen Notation ab. Entgegen der eindeutigen Darstellung natürlicher Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem durch die Zuordnung eines Zahlzeichens, bestehen Bruchzahlen aus drei Zeichen (Zähler, Nenner, Bruchstrich) sowie zwei ganze Zahlen, die Zähler und Nenner bilden. Dabei ist die Erkenntnis, dass eine Bruchzahl nicht nur die Zusammensetzung zweier natürlicher Zahlen, sondern eine eigenständige neue Zahl ist, von besonderer Bedeutung. Darüber hinaus besteht ein Unterschied hinsichtlich der Anzahl der Wörter, die die jeweilige Zahl benennen. Natürliche Zahlen lassen sich mit einem Wort beschreiben, Bruchzahlen setzen sich aus zwei bis drei Wörtern zusammen. Vor dem Hintergrund der Äquivalenz lässt sich ein Bruch durch unendlich viele verschiedene Bruchzahlen, aber auch durch eine Dezimal- oder eine Prozentzahl abbilden. Während sich natürliche Zahlen diskret und linear anordnen lassen und eindeutige Vorgänger und Nachfolger aufweisen, zeigen die Bruchzahlen in ihrer Anordnung zwar auch die fundamentalen Eigenschaften der Linearität. Darüber hinaus weist die Menge aller Bruchzahlen aber eine Dichtheit auf, d.h. zwischen zwei Brüchen liegen unendlich viele andere Bruchzahlen. Weiterhin besitzen (positive) Bruchzahlen weder einen größten, noch einen kleinsten Bruch, wohingegen für die natürlichen Zahlen ein kleinstes Element existiert. Der Vergleich von natürlichen Zahlen erfolgt direkt über kardinale oder ordinale Überlegungen. Bruchzahlen lassen sich dagegen jedoch nur indirekt über gemeinsame Unterteilungen oder Zwischenzahlen vergleichen.

Vor dem Hintergrund der dargelegten inhaltlichen Umbrüche im Zuge der Zahlbereichserweiterung zieht Padberg (2009, S. 152) zusammenfassend die Konsequenz, die Umbrüche gründlich im Unterricht zu thematisieren, um bei den Schülerinnen und Schülern der häufig intuitiv angenommenen Permanenz der Eigenschaften der natürlichen Zahlen sowie der oftmals damit verbundenen Entwicklung hartnäckiger Fehlvorstellungen im Bereich der Bruchzahlen präventiv entgegenzuwirken.

> Zwar ist es didaktisch unbedingt richtig, das Neue so weit wie möglich dem Altbekannten anzupassen (Assimilation i.S. Piagets), aber genauso richtig ist es, die Grenzen dieser Anpassung wahrzunehmen und die Notwendigkeit zur Kreation neuer Ideen und Vorstellungen zu erkennen (Akkommodation i.S. Piagets). (Winter, 1999, S. 22)

Die Entwicklung von Fehlkonzepten im Bereich der positiven rationalen Zahlen erfolgt häufig vor dem Hintergrund ehemals erfolgreicher Grundvorstellungen zu den natürlichen Zahlen. Van de Walle et. al. (2013, S. 291) sprechen in diesem Zusammenhang von Übergeneralisierungen, d.h. einem unreflektierten Übertragen alter Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen. Diese Fehlkonzepte weisen nicht selten eine „hohe mentale Robustheit“ auf, wodurch ihre „negative Wirkung verstärkt und ihre Überwindung erschwert“ wird (Vom Hofe, Hafner, Blum & Pekrun, 2009, S. 129). Eine Ursache, die Padberg (2009) als maßgeblich für die Schwierigkeiten vieler Lernender sieht und als „Hauptproblem des gegenwärtigen *realen* Bruchrechenunterrichtes“ benennt, ist das „sehr einseitige Agieren auf der syntaktischen Ebene – oft *ohne* eine *vorhergehende* gründliche Fundierung des semantischen Hintergrundes“ (S. 156; vgl. auch Malle & Huber, 2004, S. 22).

Schwierigkeiten bei den neu eingeführten Bruchzahlen ergeben sich allerdings nicht nur im direkten Vergleich mit den natürlichen Zahlen, sondern auch aus ihrer innermathematischen Struktur heraus. Vielen Lernenden fällt es schwer, die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung zu erfassen bzw. die Einsicht zu gewinnen, dass die bisher kleinste bekannte Größe (eins) zerkleinert, d.h. in gleich große Teile aufgeteilt, wird (Lassnitzer & Gaidoschik, 2008, S. 6). Der Aufbau eines anschaulich fundierten Verständnisses für Zähler und Nenner erweist sich ebenfalls oftmals als kompliziert: „Schüler erfahren Zähler und Nenner meist als zwei separierte, beziehungslose Zahlen, die durch einen "Strich" voneinander getrennt sind, wobei insbesondere die Funktion des Nenners schwer zu begreifen ist“ (Thumm, 1987,

S. 176). Oftmals findet auch eine fehlerhafte Interpretation von Zähler und Nenner statt, d.h. die Zahlbezüge werden verwechselt (Mack, 1995).

Für viele Lernende sind die relativen Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem im Kontext der ersten Grundvorstellung schwierig zu erkennen. Eine Herausforderung besteht darin, einen Bruch als Zahl aufzufassen, der eine Relation zwischen einem Ganzen und einem Teil ausdrückt (Schink, 2013a, S. 35). Die als „Teil-zu-Teil-Strategie“ bezeichnete Fehlvorstellung beschreibt die Tatsache, dass viele Schülerinnen und Schüler die Anzahl der markierten Teile des Ganzen in Relation zu den nicht markierten Teilen setzen (Padberg & Krüger, 1997, S. 194) und dadurch eine falsche Interpretation der Bedeutung des Zählers und des Nenners vornehmen. Sie deuten die verschiedenen Konstellationen der Trias oftmals losgelöst voneinander bzw. können bisherige Strategien nicht auf neue bzw. andere Konstellation übertragen (Schink, 2013a, S. 61). Ebenso stellt das Erkennen relationaler Bezüge eine große Herausforderung dar. Oftmals erfolgt eine Überfokussierung auf die Anzahl der Teile, nicht aber auf ihre Größe. Diese Schwierigkeit zeigt sich auch durch eine Zeichenungenauigkeit bezüglich der gleichmäßigen Unterteilung des Ganzen sowie durch nicht korrektes Markieren des Anteils auf Ebene der ikonischen Repräsentationen. Eine Herausforderung besteht in der „gleichzeitigen Betrachtung von Teil und Ganzem bei gleichzeitiger Strukturierung durch zwei Anteile, die es zu vergleichen bzw. herzustellen gilt“ (Schink, 2013b, S. 881).

Ungeachtet der fundamentalen Bedeutung der ersten Grundvorstellung kann eine zu starke Fokussierung allerdings dazu führen, dass Lernende diese Vorstellung auch in Kontexten aktivieren, die eigentlich eine andere Vorstellung verlangen (vgl. Prediger, 2008b; Wartha, 2007b). Im Rahmen der zweiten Grundvorstellung erweist sich das Begreifen und Identifizieren mehrerer unzusammenhängender Objekte als ein diskretes Ganzes unter Bezugnahme des Anteils und des Teils als große Herausforderung (Schink & Meyer, 2013, S. 4). Die Lernenden müssen die Erkenntnis machen, dass das Ganze eine Einheit, also eins ist, und gleichzeitig aus verschiedenen einzelnen Objekten besteht und somit optisch nicht „ganz“ ist. Die zweite Grundvorstellung erfordert den multiplikativen Bezug des Anteils auf das Ganze. Bei der Anteilsbildung besteht die Schwierigkeit darin, $\frac{n}{m}$ nicht als *n* von *m* Teilen, sondern $\frac{n}{m}$ in Bezug zu einem anderen Ganzen zu sehen. Das Bilden und Umbilden von geeigneten Einheiten, auch auf enaktiver bzw. ikonischer Ebene, sowie deren entsprechende Interpretation ist für viele

Schülerinnen und Schüler anspruchsvoll. Schwierigkeiten bestehen oftmals in der Unterscheidung der Strukturen der Teilmengen, d.h. zwischen Anzahl und Mächtigkeit. Einerseits müssen die Lernenden die ganze Menge in eine bestimmte Anzahl von Teilmengen gliedern, die sich aus dem Nenner des Anteils ergibt. Andererseits müssen die sich daraus ergebenen einzelnen Elemente einer Teilmenge erfasst werden (Wessel, 2015, S. 111).

In Bezug auf die Ergebnisgleichheit beider Grundvorstellungen ergeben sich oftmals Schwierigkeiten in der Erkenntnis, beide grundlegenden Verfahren zur Bestimmung eines Bruchs durchführen zu können. Darüber hinaus ist das Verständnis der Äquivalenz oftmals kompliziert. Vielen Lernenden gelingt es nicht, den Blick von der Anzahl der Teile zu lösen und die Relation der Teile zueinander zu sehen (Schink, 2013b, S. 880). Vorerfahrungen mit (Alltags-)Brüchen, die viele Schülerinnen und Schüler bereits aufgebaut haben, stellen eine zusätzliche Fehlerquelle dar, die im Unterricht berücksichtigt werden muss: „However, children are very likely to have met fractions informally in an 'everyday' context so teachers need to be aware of the potential for misconceptions arising from these encounters“ (Drews, 2008, S. 37). In Bezug auf Alltagsbrüche besteht die Gefahr der einseitigen und unflexiblen Verbindung eines Bruchs mit einer festen Bezugsgröße. Die Zahldarstellung bzw. die korrekte und situationsangemessene Deutung verschiedener Darstellungsformen und Repräsentationen von Bruchzahlen ist eine zentrale Grundlage für den Aufbau eines fundierten Bruchzahlverständnisses auf semantischer Ebene. Lernende sollen die Vielfalt in den verschiedenen Darstellungen erkennen und flexibel anwenden können. Gleichzeitig wird sowohl das Hineindeuten und Erkennen struktureller Zusammenhänge der Trias Teil-Anteil-Ganzes als auch die Vernetzung von Darstellungen gefordert (Prediger, 2011, S. 11), was sich für viele Schülerinnen und Schüler als kompliziert erweist. Auch die Übersetzung zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen im Sinne des intermodalen Transfers ist herausfordernd.

Die vorangegangenen Ausführungen verdeutlichen den Doppelcharakter dieses Inhaltsbereichs: ein grundlegendes Verständnis der zentralen Aspekte, die für ein anschauliches Bruchzahlverständnisses vorausgesetzt werden, stellt einerseits eine Chance für eine erfolgreiche mathematische Lernentwicklung im Bereich der positiven rationalen Zahlen sowie in weiterführenden Inhaltsbereichen dar. Andererseits können unverstandene Inhaltsbereiche eine weitreichende Hürde darstellen und die weitere Lernentwicklung maßgeblich beeinträchtigen. Siegler und Pyke (2013) warnen bei frühen Schwierigkeiten im Bereich des

Bruchzahlverständnisses vor persistierenden und langfristigen Konsequenzen: „Children who have early difficulties with fractions tend to have later difficulties as well (Hecht & Vagi, 2010; Mazzocco & Devlin, 2008). Failure to master fractions has large consequences“ (S. 1994).

4.2.4 Brüche als Unterrichtsthema

In Anlehnung an die curriculare Einordnung lässt sich auf konkreter Unterrichtsebene die Notwendigkeit eines klaren Schnitts zwischen „der Erarbeitung und Festigung der anschaulichen Grundvorstellungen sowie der systematischen Behandlung der Bruchrechnung“ (Padberg, 2009, S. 156) hervorheben. Die unterrichtliche Behandlung erfordert eine Schwerpunktverlegung von der „Beherrschung der Rechenverfahren und der Produktorientierung“ im Rahmen der Bruchrechnung hin zu einer „anschaulichen Fundierung der Grundvorstellungen und einer prozessorientierten Sichtweise“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 16) innerhalb einer ganzheitlichen Einführung von Bruchzahlen. Winter (2004) hebt in diesem Zusammenhang hervor, dass „das dünne Gerüst des Regelwerks“, das im Rahmen eines zu raschen Übergangs auf die syntaktische Ebene bzw. deren zu starke Akzentuierung oftmals ohne tiefere Einsicht erarbeitet wird, „unmöglich zu Verständnis und gut organisierten Wissensbeständen führen“ (S. 15) kann. Padberg (2000, S. 18) problematisiert, dass „semantische Informationen offenbar nur noch äußerst schwer automatisierte Regeln überwinden können. Stehen die Rechenregeln zur Verfügung, so werden beim Aufgabenlösen kaum noch inhaltliche Strategien eingesetzt“. Nach Malle (2004) ist jedes noch so gut beherrschte formale Wissen und Anwenden der Bruchrechenregeln als „totes Wissen, mit dem man nichts anfangen kann“ (S. 8) einzuordnen, solange die dazugehörigen Grundvorstellungen nicht ausgebildet sind. Die Relevanz der Grundvorstellungen für ein darauf aufbauendes anschauliches Verständnis der Bruchrechnung heben auch Siegler und Pyke (2013) hervor: „Because without conceptual understanding, the procedures are highly confusable and difficult to remember” (S.1995). Auch Fennell und Karp (2017) unterstreichen die Bedeutsamkeit von “conceptually based foundations”, ohne die “next steps involving operations with fractions will be largely procedural and bereft of the levels of understanding associated with a sense of number” (S. 649). Ebenso erachtet Schmidt (2009) ein grundlegendes Bruchzahlverständnis „als unverzichtbare Basis eines lebendig-aktivierbaren arithmetischen Wissens zur Bruchrechnung“ (S. 135).

Die Einführung der Bruchzahlen[6] in Jahrgang fünf sollte zunächst auf enaktiver und ikonischer Ebene mithilfe anschaulicher Materialien sowie deren handelnder Auseinandersetzung ohne jeglichen Regeleinsatz erfolgen (Padberg, 2009, S. 156-157). Die Lernenden sollen durch ein probierend-experimentelles, handlungsorientiertes Vorgehen (Wittmann, G., 2007, S. 19) konkret „begreifen", dass sich die Bruchzahlen in vielen Bereichen grundlegend von den bisher bekannten Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen unterscheiden (Zimmermann, 2014). Die konkret gesammelten Erfahrungen werden dann sukzessive verallgemeinert und erweitert.

> As students progress in school and begin to use symbols to represent the mathematical ideas, however, the symbols begin to live a life of their own without strong attachment to any conceptual network. Students manipulate the symbols by recalling and applying memorized rules. By the time students reach the middle grades, they have built up a large repertoire of rules, most introduced in school. Students' behaviors become so rule governed that one can predict them on the basis of distortions and combinations of the various rules students have learned [...]. The student who attempts to make sense of the various manipulations is something of an anomaly. (Wearne & Hiebert, 1988, S. 220)

Ein ausreichend langer Fokus auf semantischer Ebene ist zentral, um die Gefahr der Reduzierung auf Fachtermini und auswendig gelernte Regeln zu vermeiden bzw. zu minimieren (Wearne & Hiebert, 1988, S. 232). Sobald sich Fehler oder Fehlvorstellungen bei den Lernenden bemerkbar machen, gilt es, den Fokus wieder auf die konkrete, anschauliche und handlungsorientierte Ebene zu richten (Streefland, 1986a, S. 11). Auch Hasemann und Mangel (1999) heben die Notwendigkeit hervor, dass sich der „Unterricht an Lern- und Verstehensprozessen, an Entwicklungsprozessen orientiert" (S. 163). Nach Bauer handelt es sich bei Brüchen um einen hochabstrakten mathematischen Gegenstand, der „nicht in der äußeren Wirklichkeit, sondern nur in der Vorstellung, im Denken" (Bauer, 2008, S. 16) existiert. Vor diesem Hintergrund spielt die anschauliche, handlungsorientierte Erarbeitung von Bruchzahlen eine besondere Bedeutung, um ein tragfähiges Verständnis aufzubauen.

> Durch Wahrnehmung geeigneter Objekte, mehr noch durch tatsächlich ausgeführte Handlungen mit diesen, wird die Basis für den mathematischen Umgang mit Brüchen im Kopf gelegt. Besonders wichtig sind Handlungen dann, wenn man sie nicht nur tatsächlich, sondern auch rein vorstellungsbezogen ausführen und dann gedanklich einordnen kann. (Bauer, 2008, S. 16)

[6] Vor dem Hintergrund des vorliegenden Forschungsinteresses und inhaltlichen Schwerpunkts der Arbeit wird der Fokus nachfolgend auf gemeine Brüche gelegt, gleichwohl die parallele und verzahnte Einführung von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen in Klasse 5 durchaus sinnvoll ist (vgl. Padberg (2009).

Insbesondere die beiden Grundvorstellungen 1 (Teil *eines* Ganzen) sowie 2 (Teil *mehrerer* Ganzer) lassen sich sowohl auf enaktiver als auch auf ikonischer Ebene für den Aufbau eines handlungsnahen und anschaulichen Verständnisses erarbeiten. Zentral ist dabei die Kommunikation und Reflektion der Schüleraktivitäten, um die anschaulich erworbenen Grundvorstellungen auch in gedankliche Modelle umwandeln und diese argumentativ nutzen zu können (Wartha & Wittmann, 2009, S. 102). Wartha und Wittmann (2009) plädieren dafür, den statischen Aspekt der beiden Grundvorstellungen zeitnah um den dynamischen Aspekt des Verfeinerns und Vergröberns zu erweitern, „da das stundenlange Färben von Bruchteilen keinen Lernzuwachs bringt“ (S. 102). Um dieser Gefahr vorzubeugen, sollten die Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem vor dem Hintergrund ihrer vielfältigen Relationen betrachtet werden (s.u.).

Ein vertieftes mathematisches Verständnis wirkt sich positiv auf die Entwicklung der darauf aufbauenden Rechenfertigkeiten aus (Korff, 2016b, S. 61). Prediger, Krägeloh und Wessel (2013) weisen darauf hin, „dass das Handeln am Material alleine jedoch nicht ausreicht, sondern durch gezielte Fokussierungen auf mathematisch relevante Strukturen ergänzt werden muss“ (S. 9). Wartha und Vom Hofe (2005) kritisieren die in der Praxis häufig fehlende „spezifische, gezielte und reflektierte Anwendung“ (S. 15) des vorhandenen Materials, die in einen kommunikativen Kontext eingebettet ist. Gleichzeitig gilt es zu berücksichtigen, dass ein semantisches Bruchzahlverständnis zwar notwendig, allerdings nicht hinreichend ist für ein Verständnis der Bruchrechnung auf syntaktischer Ebene: „Just knowing how to represent fractions doesn’t mean students will know how to operate with fractions" (Van de Walle et al., 2013, S. 291). Vor dem Hintergrund der anschaulichen Vorstellungen plädiert Padberg (2009, S. 245) dafür, in Klasse fünf auch alle einfachen Rechenoperationen zu erarbeiten, jedoch ohne Rückgriff auf das Ableiten und Formulieren von Regeln. Wichtig erscheinen hier die Vernetzung der verschiedenen Repräsentationsmodi sowie der Bezug zu den verschiedenen Bruchzahlaspekten.

Zunächst steht die anschauliche und aktiv-entdeckende Erarbeitung von Stammbrüchen im Mittelpunkt ($\frac{1}{n}$), mit der die Erkenntnis der Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung einhergeht. „When teaching fractions, teachers need to help children to understand why we need these *'new numbers'* [Hervorheb. im Original]“ (Drews, 2008, S. 37). Anhand vielfältiger Handlungssituationen sollen sowohl das Zahlwort als auch das dazugehörige Zahlzeichen in symbolischer Form eingeführt und die konzeptuelle Bedeutung der Fachbegriffe erkundet werden. Diese gilt es mit anschaulichen Vorstellungen und stets unter Rückbezug auf die Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem zu erkunden und verankern (Padberg & Wartha, 2017, S. 25). Darauf aufbauend können über die Vervielfachung der Stammbrüche weitere Teile eines Ganzen, d.h. Nicht-Stammbrüche, erarbeitet werden (Padberg, 2009, S. 33). Zunächst geht es grundlegend um das Erkennen, Ablesen, Bestimmen und Markieren einfacher Stamm- und Nicht-Stammbrüche. Die Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen sollte sich nach van de Walle et al. primär auf das Ziel ausrichten, „to help students construct the idea of *fractional parts of the whole* – the parts that result when the whole or unit has been partitioned *into equal-sized portions or fair shares* [Hervorheb. im Original]" (2013, S. 295). Um die relativen Zusammenhänge zwischen den Komponenten Teil-Anteil-Ganzes aufbauen und damit einen flexiblen Umgang mit Bruchzahlen fördern zu können, sind operative Vorgehensweisen bedeutsam. Sie ermöglichen das systematische Variieren der einzelnen Komponenten sowie das aktiv-entdeckende Erkunden struktureller Zusammenhänge in situationsangemessenen Anwendungskontexten. Das operative Prinzip drückt flexible Vorgehensweisen aus und ermöglicht anhand konkreter Aufgaben bzw. Lernumgebungen, „Konstellationen variierend zu erkunden, Zusammenhänge systematisch zu nutzen und verschiedene Konstellationen ineinander zu überführen" (Schink, 2013a, S. 64). Verschiedene Variationen zwischen Teil, Anteil und Ganzem ermöglichen es den Lernenden, „(Zahl-) Beziehungen im Zusammenhang mit Brüchen zu erkunden – sowohl beispielsweise handelnd mit konkretem Material als auch als Gedankenexperiment im Kopf" (Schink, 2013c, S. 17). Dabei können sowohl Zusammenhänge innerhalb einer Konstellation betrachtet werden als auch Zusammenhänge zwischen Konstellationen.

> Placing greater instructional emphasis on the need to view each fraction as an integrated magnitude that expresses the relation between its numerator and its denominator might avoid subsequent difficulties not only in fraction arithmetic but in learning of mathematics more generally. (Siegler & Pyke, 2013, S. 2003)

In Bezug auf die erste Grundvorstellung sind folgende Fragestellungen (vgl. Padberg, 2009, S. 41) zentral, die die Lernenden dabei unterstützen sollen, die triadischen Zusammenhänge bei der Anteilsbestimmung zu erkennen. Sie sollten von Beginn an im Unterricht eingeführt werden und die Anteilsbestimmung begleiten:

- Was ist die Einheit (das Ganze)?
- In wie viele Teile ist das Ganze zerlegt worden?
- Sind die Teile jeweils gleich groß?
- Wie groß ist jedes Teil bezogen auf das Ganze?
- Wie viele Teile sind (durch Markierung) zusammengefasst worden?

Bezogen auf die zweite Frage, die nach der Einteilung des Ganzen bzw. der Anzahl seiner Teile fragt, erachten van de Walle et. al. (2013) das Zählen der einzelnen Teile als förderlich für das Teil-Ganze-Verständnis: „Counting fractional parts to see how multiple parts compare to the whole helps students to understand the relationship between the parts (the numerator) and the whole (the denominator)" (S. 299). Dennoch gilt es, die Bedeutung dieser Zusammenhänge sowie die Bedeutung des Zählers und des Nenners mit anschaulichen Vorstellungen zu verbinden, sodass die Lernenden nicht nur stumpf abzählen, sondern die Relationen dahinter erfassen. Insbesondere die dritte Frage, die sich auf die exakt gleiche Größe der einzelnen Teile bezieht, sollte mit Beispielen und Gegenbeispielen erarbeitet werden, um bei den Schülerinnen und Schülern ein entsprechendes Bewusstsein zu schaffen. Für ein flexibles Bruchzahlverständnis gilt es darüber hinaus, verschiedenartige Einteilungen des Ganzen für den gleichen Anteil zu verwenden. Ebenso sollten unterschiedlich große Ganze bzw. verschiedenartige Ganze eingesetzt werden, um Anteile unabhängig von festen Größen zw. Formen zu erfassen.

Ein wichtiger Aspekt bei der Fundierung eines anschaulichen Bruchzahlverständnisses auf semantischer Ebene ist der intermodale Transfer zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen. Es geht sowohl um die konkret handelnde Auseinandersetzung mit struktur-fokussierten Materialien als auch um das Erkennen und Hineindenken der Handlungsstrukturen in ikonische Darstellungen. Dabei spielt das Bilden und Umbilden von Einheiten nicht nur auf enaktiver, sondern auch auf ikonischer Ebene eine zentrale Rolle. Die Lernenden sollten reichhaltige Möglichkeiten erhalten, Bruchzahlen bzw. gleiche Anteile in verschiedenen Konstellationen und Repräsentationen zu erkennen bzw. durch geeignete Repräsentanten selbst herzustellen sowie strukturelle Zusammenhänge zwischen den Repräsentationsformen zu erkunden.

Um den in Kapitel 4.2.3 dargelegten Schwierigkeiten im Zusammenhang mit positiven rationalen Zahlen im Unterricht begegnen und entgegenwirken zu können, ist darüber hinaus die gründliche Thematisierung der Umbrüche, die sich im Vergleich zu den bisher bekannten natürlichen Zahlen ergeben, eine zentrale Voraussetzung. Für die Gestaltung des Unterrichts ist es von besonderer Bedeutung, dass auf diese „in der speziellen Struktur mathematischer Lerninhalte begründete Hürden, die alle Lernenden überwinden müssen“ (Prediger & Wittmann, 2009, S. 1), im Lernprozess bewusst eingegangen wird und sie gezielt zum Lerngegenstand gemacht werden. Die Thematisierung von Fehlvorstellungen erfordert ein grundlegendes Verständnis der Bruchzahlen (Prediger, 2004, S. 11). Nach Prediger sind diese „Bruchstellen“ ganz grundsätzlich als „wesentliche Bestandteile des Wissens über Bruchrechnung“ (2004, S. 10) einzusortieren. Sie sollte u.a. in der Gegenüberstellung der Unterschiede zwischen den natürlichen und den positiven rationalen Zahlen in engem Bezug zu den zentralen Grundvorstellungen erfolgen. Darüber kann ein Bewusstsein dafür geschaffen werden, dass die Fehlvorstellungen nicht tragfähig sind.

Wie bereits einleitend hervorgehoben, sollte auf Basis eines fundierten, anschaulichen Bruchzahlverständnisses die systematische Einführung in die Bruchrechnung in Klasse sechs erfolgen. Der Übergang zu dem Kalkül und den entsprechenden Rechenregeln kann auf dieser Grundlage häufig in deutlich kürzerer Zeit erfolgen als ohne die inhaltliche Entzerrung (Padberg, 2009, S. 157). Verglichen mit dem ausführlichem Aufbau eines fundierten Bruchzahlverständnisses auf semantischer Ebene spielt auch die sorgfältige Erarbeitung der Rechenregeln auf syntaktischer Ebene eine bedeutsame Rolle, die nicht als „überflüssiger Luxus, der nur wertvolle Übungszeit kostet“ (Padberg, 2009, S. 251) anzusehen ist. Dabei sollten die Rechenregeln „als Denkentlastung für ein inhaltlich längst mit Sinn gefülltes und vertrautes Konzept“ (Prediger, 2006, S. 8) vermittelt und die enge wechselseitige Verbindung zwischen den anschaulichen Grundvorstellungen und den darauf aufbauenden Rechenregeln in den Mittelpunkt gestellt werden.

> In der Bruchrechnung ist die Rolle von GVen [Grundvorstellungen] im Lösungsprozess zentral: Tragfähig aufgebaute GVen ermöglichen eine erfolgreiche Bearbeitung von Aufgaben in Modellierungskontexten, andererseits wirkt sich die unreflektierte Übertragung von Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen Fehler verursachend aus. (Wartha, 2007a, S. 190)

„Das Herstellen von dauerhaften *Verbindungen* zwischen der Argumentation auf der symbolischen Ebene und passenden anschaulichen Strategien [Hervorheb. im Original]“ (Padberg, 2009, S. 67) ist eine zentrale Voraussetzung, um typischen Fehlern möglichst präventiv entgegen zu wirken. Ein weiteres Ziel sollte auch bei der systematischen Erarbeitung der Bruchrechnung „das Aufzeigen von N-Verführern sein, um sie zu bekämpfen oder ihnen vorzubeugen.“ (Streefland, 1986b, S. 45). Die Lernenden sollten dazu in der Lage sein, so genannte $\mathbb{N}$-Verführer (vgl. Kap. 4.2.3) auch in Bezug auf die Bruchrechnung zu entdecken und durch sie verursachte Fehler begründet zu widerlegen.

Die vielfältigen Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen erfordern ein gründliches Verständnis auf Seiten der Lehrkräfte: „It is important that teachers are both aware of and understand these interpretations so they can introduce them to children in a meaningful way“ (Drews, 2008, S. 37). Van de Walle et al. (2013) heben daran anschließend hervor: “It is important for a teacher to help students see how fractions are like and different from whole numbers” (S. 291).

Wie in Kapitel 4.2.3 dargelegt, können übergeneralisierte Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen aber auch „eine erfolgreiche Begriffsgenese be- oder gar verhindern“ (Wartha & Güse, 2009, S. 256).

4.2.5 Ausgewählte empirische Erkenntnisse

Die einschlägige Fachliteratur weist viele qualitative und quantitative empirische Untersuchungen auf, die sich insbesondere mit Defiziten in der Bruch*rechnung* in der Sekundarstufe I auseinandersetzen. Wartha und Güse (2009) sprechen in diesem Zusammenhang von einem „Dauerbrenner“ der Mathematikdidaktik (S. 256). Typische Fehlermuster bzw. fehlerhafte Strategien bei der Bruchrechnung zeigen beispielsweise die bekannten Untersuchungen von Hasemann (1986), Padberg (1986), Herden und Pallack (2000) und Wartha (2007b) auf. Mittlerweile existiert aber auch eine Vielzahl an Studien, die sich explizit mit dem grundlegenden *Bruchzahlverständnis* auseinandersetzt, das einen inhaltlichen Schwerpunkt der hier zu entwickelnden Interventionsstudie darstellt. Dieses Kapitel widmet sich deshalb ausgewählten Forschungsergebnissen im Bereich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses auf anschaulicher Ebene und schafft somit die empirische Grundlage für die ausgewählten Inhaltsbereiche der vorliegenden Forschungsarbeit. Es werden die Bereiche betrachtet, die durch das informelle Testinstrument „BruKo“ (vgl. Kap. 7) diagnostisch erfasst und im Rahmen der Unterrichts- und Förderkonzeption schwerpunktmäßig konkretisiert werden. Es soll aufgezeigt werden, welche Grundvorstellungen häufig weniger gut ausgebildet und besonders anspruchsvoll sind und oftmals in Sackgassen führen (Wartha, 2017, S. 295). Die nachfolgend ausgewählten Forschungsergebnisse beziehen sich überwiegend auf Lernende an Regelschulen und beziehen nicht explizit Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen mit ein. Die dargelegten gravierenden Defizite im Rahmen der Untersuchungsergebnisse akzentuieren jedoch eindrücklich die komplexen Anforderungen und damit verbundenen Schwierigkeiten in Bezug auf den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses, die in besonderer Weise auch bzw. gerade für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten zu beachten sind.

In einer empirische Untersuchung zu Problemen bei ausgewählten Teilaspekten des Bruchzahlbegriffs zu Beginn der siebten Klasse an Gesamtschulen (N = 411) kam Neumann (1997; s. auch Padberg & Neumann, 1997) zu dem Ergebnis, dass ungefähr zwei Drittel der untersuchten Schülerinnen und Schüler keine fundierten Vorstellungen im Sinne der ersten bzw. zweiten Grundvorstellung aufwiesen. Es zeigten sich jedoch deutliche Unterschiede zwischen der ersten Grundvorstellung, die bei vielen Lernenden (ca. 26 %) besser bzw. überhaupt ausgebildet war, und der zweiten Grundvorstellung, die nur von etwa 9 % der untersuchten Lernenden beherrscht wurde - nur etwa 5 % der Stichprobe verfügten über beide Grundvorstellungen (Padberg, 2009, S. 39). Darüber hinaus stellte Neumann einen starken Einfluss der erworbenen Grundvorstellungen auf die Leistungen bzgl. des Bruchzahlaspekts „Maßzahl“ fest. Je besser die erste Grundvorstellung ausgebildet ist, desto höher sind die Leistungen bezogen auf den Maßzahlaspekt. Jedoch zeigt eine ausgebildete zweite Grundvorstellung keinen wesentlich positiveren Einfluss auf den Maßzahlaspekt, als wenn keine der beiden Grundvorstellungen ausgebildet ist. Daraus schlussfolgert Neumann, dass die erste Grundvorstellung signifikant wichtiger ist als die zweite und einer sorgsamen Fundierung der ersten Grundvorstellung im Unterricht ausreichend Zeit eingeräumt werden sollte. Padberg und Neumann (1997, S. 248) gehen soweit, dass sie für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen auf die Einführung der zweiten Grundvorstellung verzichten bzw. wenn überhaupt, diese nur in engem Zusammenhang mit der ersten Grundvorstellung sowie der Ergebnisgleichheit thematisieren würden. Neumann konnte in seiner umfangreichen Untersuchung weiterhin aufzeigen, dass ca. 70 % der Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage waren, einen Zusammenhang zwischen den natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen herzustellen. Besonders prägnant zeigte sich die systematisch angewandte Fehlerstrategie $n = \frac{n}{n}$ (vgl. auch Padberg, 1986).

Padberg und Krüger (1997) untersuchten in einer deutlich kleineren Erhebung Lernende (N = 137) an Realschulen am Ende des sechsten Schuljahres hinsichtlich systematischer Fehlerstrategien und Fehlvorstellungen im Bereich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses. Die Ergebnisse weisen ebenfalls große Defizite hinsichtlich der beiden Grundvorstellungen auf. Nur etwa 70 % der Schülerinnen und Schüler zeigten nach der systematischen Behandlung der Bruchrechnung ein Verständnis der ersten Grundvorstellung, nur knapp 25 % der zweiten Grundvorstellung. Grundlegende Vorstellungen zu der Ergebnisgleichheit ließen sich bei nur 18 % nachweisen. Ähnlich wie die PALMA-Studie konnten auch Padberg und Krüger nach der systematischen Behandlung von Bruchzahlen nur sehr schwach entwickelte Grundvorstellungen hinsichtlich des Größenvergleichs feststellen. Die Lösungen der untersuchten Lernenden zeigten eine Vielzahl an Fehlerstrategien auf.

In einer weiteren, längsschnittlich angelegten Pilotstudie untersuchten Padberg und Bienert (2000; s.a. Padberg, 2002a) Realschülerinnen und -schüler (N = 157) über den Zeitraum unmittelbar vor der systematische Bruchrechnung zu Beginn des sechsten Jahrgangs, sowie zu Beginn der siebten und der achten Klasse, nachdem die systematische Behandlung der Bruchrechnung bereits abgeschlossen ist. Untersuchungsgegenstand waren anschauliche Vorerfahrungen zum Bruchzahlbegriff sowie die Frage nach deren Weiterentwicklung während der systematischen Behandlung der Bruchrechnung. Die Ergebnisse für den ersten Messzeitpunkt machen deutlich, dass zu Beginn des sechsten Jahrgangs keine fundierten Aspekte des Bruchzahlbegriffs vorausgesetzt werden können, sondern viele Lernende nur „allererste Ansätze eines allgemeineren Bruchzahlbegriffs“ (Padberg, 2002a, S. 116) zeigen. Padberg hebt hervor, dass vorhandene Vorerfahrungen im Unterricht nicht überschätzt werden dürfen (2002a, S. 117). Die Fähigkeit vieler Lernender, Bruchzahlen in der Ziffernschreibweise korrekt lesen zu können, dürfe auf keinen Fall als Anzeichen dafür gedeutet werden, dass diese Lernenden auch anschauliche Bruchzahlvorstellungen ausgebildet haben. Vielmehr zeigt die Untersuchung, dass viele der Schülerinnen und Schüler nicht in der Lage sind, Zusammenhänge zwischen symbolisch und ikonisch repräsentierten Bruchzahlen herzustellen. Bezüglich der beiden Grundvorstellungen „Teil *eines* Ganzen“ und „Teil *mehrerer* Ganzer“ verdeutlicht die Studie, dass die grundlegenden Vorstellungen selbst bei einfachen Stammbrüchen oftmals nur in geringem Umfang ausgebildet sind und deutliche Schwierigkeiten in Bezug auf Nicht-Stammbrüche bestehen. Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse auch nach Ende der systematischen Behandlung der Bruchrechnung viele Defizite auf. Die mangelnde Aktivierung anschaulicher Vorstellungen, insbesondere bei Textaufgaben, sowie nicht sinnvoll genutzte Repräsentanten bilden weiterhin Problembereiche.

Des Weiteren zeigt Padberg (2002a) unzureichend entwickelte anschauliche Vorkenntnisse zur Äquivalenz von Bruchzahlen auf. Vor der systematischen Behandlung der Bruchrechnung verfügen Schülerinnen und Schüler zu Beginn der sechsten Klasse „im günstigsten Fall über eine *implizite* Vorstellung von Gleichwertigkeit [Hervorheb. im Original]" (Padberg, 2009, S. 47). Die Ergebnisse zeigen, dass es vielen Lernenden schwer fällt, zeitgleich sowohl die Anzahl als auch die Größe der Teile in ihrem relationalen Zusammenhang zu berücksichtigen. Tendenziell werden bessere Ergebnisse in Aufgaben mit kontinuierlichen als mit diskreten Bruchzahlmodellen erzielt. Darüber hinaus erweist sich der Größenvergleich für viele Schülerinnen und Schüler als anspruchsvolle Herausforderung. Schwierigkeiten drücken sich oftmals durch fehlerhafte Übergeneralisierungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen bzw. nicht korrekte Übertragungen von spezifischen Größenbereichen auf andere Größenbereiche sowie auf Bruchzahlen aus (Padberg, 2002a, S. 117).

Im Rahmen des längsschnittlich angelegten und interdisziplinär ausgerichteten Forschungsprojekts PALMA (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik, 2002-2006) wurde die Genese mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe I untersucht. Darin eingebettet ist die Untersuchung von Wartha (2007b), die sich sowohl quantitativ als auch qualitativ mit der Entwicklung mathematischer Grund- und Fehlvorstellungen bezüglich des Buchzahlbegriffs sowie der Bruchrechnung auseinandersetzt. Bezüglich der elementaren Fähigkeit, einen Anteil aus einer ikonischen Darstellung (hier Kreis) im Sinne der ersten Grundvorstellung ablesen zu können, ließen sich bei ca. 63 % der untersuchten Fünftklässlerinnen und Fünftklässler sowie bei ca. 80 % der untersuchten Siebtklässlerinnen und Siebtklässlern korrekte Lösungen feststellen. Gleichwohl der Leistungsanstieg zwischen den Schuljahren ins Auge fällt, der durch die unterrichtliche Behandlung von Bruchzahlen begründet werden kann, lassen sich bei immerhin noch 20 % der Lernenden im siebten Schuljahr massive Defizite im Bereich der ersten Grundvorstellung konstatieren. Hinsichtlich der ikonischen Darstellung im Rahmen einer „elementare[n] Anteilbildung mit einfachen

Zahlen“ (Wartha, 2007b, S. 158) konnte für den fünften Jahrgang nur eine Lösungswahrscheinlichkeit unter 40 %, für den siebten Jahrgang von knapp 75 % festgestellt werden. Auch zeigt sich hier zwar ein deutlicher Anstieg zwischen den Jahrgängen, jedoch ist die generelle Lösungsquote bei der ikonischen Darstellung eines Stammbruchs im Kontext der ersten Grundvorstellung relativ gering. Am Beispiel der Addition zweier Stammbrüche (vgl. auch Hasemann, 1986 und Wartha, 2011) konnte die Studie zeigen, dass knapp 60% der untersuchten Lernenden die Aufgaben am Ende der sechsten Klasse zwar symbolisch richtig lösen konnten, aber nur die Hälfte korrekte Lösungen auf bildlicher Ebene zeigte. Auch am Ende der siebten Klassen gelang etwa 70% eine korrekte Berechnung des Terms, jedoch nur ca. der Hälfte eine Lösung auf anschaulicher Ebene. Die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler, die die Stammbrüche auf ikonischer Ebene richtig addieren konnten, zeigten auch ein erfolgreiches Lösungsvorgehen auf symbolischer Ebene. Bezüglich des Größenvergleichs von Bruchzahlen zeigen die Ergebnisse, dass Lernende am Ende des siebten Schuljahres (n = 2400) nur extrem selten korrekte Lösungen finden. Nur ein Drittel der Untersuchten konnte in einer Auswahl von vier Bruchzahlen den größten Bruch korrekt benennen. Auch das Auffinden von Zwischenzahlen zu gegebenen Stammbrüchen deutet auf große Defizite im Verständnis der strukturellen Eigenschaften hin. „Die Mehrzahl der Schüler verharrt in den Vorstellungen zu natürlichen Zahlen, die grundlegende Revision des Vorwissens (jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger und Nachfolger) für Bruchzahlen (zwischen zwei Brüchen ist immer ein weiterer Bruch) fand nicht statt“ (Wartha, 2007b, S. 81). Insgesamt konnte Wartha eine große Streuung hinsichtlich der mathematischen Leistungsentwicklung zwischen den verschiedenen Schulformen (Gymnasium, Realschule, Hauptschule) nachweisen, die bereits zu Beginn der Sekundarstufe I in dem spezifischen Inhaltsbereich des Bruchzahlverständnisses und der Bruchrechnung festzustellen sind (2007b, S. 236; vgl. auch Ergebnisse der PISA Studie).

Wartha und Güse (2009) konnten ebenfalls bei zwei Dritteln der von ihnen untersuchten Schülerinnen und Schüler ein großes Defizit in der Entwicklung der grundlegenden Vorstellung eines Bruchs als Anteil nachweisen. Die Aufgabenbearbeitungen zum Übersetzen einer ikonischen Darstellung bzw. einer Anwendungssituation in symbolische Bruchzahlen und andersherum deckten in beide Übersetzungsrichtungen große Defizite bei den Lernenden auf (Wartha & Güse, 2009, S. 271).

Balzer et al. (2007) unterstreichen in ihrer Re-Analyse der Daten der MARKUS-Studie (Helmke & Jäger, 2002) den engen Zusammenhang zwischen einem fundierten Teil-Ganze-Konzept aus dem Bereich der natürlichen Zahlen und dem Bruchzahlverständnis. Nur ca. 8 % der Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen lösten Aufgaben zum Größenvergleich von Bruchzahlen korrekt, bei den Aufgaben zur Berechnung von Verhältnissen lag die Lösungswahrscheinlichkeit bei ca. 14 %. Die Autoren sehen die Ursache für die sehr schwachen Leistungen im Bereich der Bruchzahlen in einem unzureichend entwickelten Teil-Ganze-Konzept (Balzer et al., 2007, S. 185-186).

Schink (2013a) widmete sich in ihrer breit angelegten qualitativen und quantitativen Forschungsarbeit der empirischen Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem im Sinne eines flexiblen Umgangs mit Bruchzahlen. Die Untersuchung belegt eindrücklich, dass für einen flexiblen und verständigen Umgang mit Bruchzahlen nicht nur die elementaren Grundvorstellungen eine bedeutsame Rolle spielen, sondern dass auch die Vorstellung bzw. Interpretation der jeweiligen Bezugseinheit, des Ganzen, zentral ist. Insbesondere Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen fällt es schwer, einen Bruch als Teil eines Ganzen richtig zu erfassen und die jeweilige Bezugseinheit zu erkennen. Diese Schwierigkeit der Strukturierung des Ganzen bzw. seiner Identifikation verschärft sich, wenn das Ganze aus einer diskreten Menge besteht.

Wessel (2015) untersuchte in ihrer qualitativ und quantitativ ausgerichteten „Studie zur fach- und sprachintegrierten Förderung durch Darstellungsvernetzung“ die Entwicklung des Anteilbegriffs in enger Verbindung mit den dazugehörigen sprachlichen Mitteln. Sie stellte eine wechselseitige Beeinflussung beider Komponenten heraus und hebt hervor, dass „ein eingeschränktes Sprachrepertoire von Lernenden zur Hürde bei der kognitiven Begriffsentwicklung“ (S. 100) führen kann. Die Ergebnisse weisen auf die Relevanz eines sprachsensiblen Fachunterrichts, insbesondere in Bezug auf die Entwicklung eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses, hin.

In der Untersuchung von Hasemann (1981) lösten Hauptschülerinnen und Hauptschüler mathematisch gleiche Aufgaben zum Teil unterschiedlich, wenn sie in verschiedenen Darstellungsformen (symbolisch, ikonisch, Textaufgabe) präsentiert wurden, was auf eine unverbundene Anwendung von inhaltlichem Denken und Kalkül schließen lässt. Hasemann

(1981) konstatiert, dass das Verständnis der Schülerinnen und Schüler „at most ‚intrumental', but not ‚relational'" sei (S. 71) und dass viele der untersuchten Lernenden einmal erworbene Rechenregeln (hier bspw. zur Multiplikation) mal mehr, mal weniger erfolgreich mechanisch anwenden, ohne dabei ihre Ergebnisse zu hinterfragen (S. 81). Er kritisiert die fehlende „Steigerung der internen Struktur, die auf eine erhöhte Einsicht in das Fachgebiet schließen ließe" (Hasemann, 1993, S. 72). Die Ergebnisse der Untersuchung belegen, dass die formale Bruchrechnung oftmals zu stark fokussiert wird, ohne dabei das fundamentale Bruchzahlverständnis zu berücksichtigen. In diesem Zusammenhang konnte Prediger (2008b) zeigen, dass es vergleichsweise vielen Schülerinnen und Schülern durchaus gelingt, auf symbolischer Ebene zu arbeiten, wohingegen die Aktivierung der entsprechenden Grundvorstellungen auf semantischer Ebene oftmals eine große Herausforderung darstellt.

Auf internationaler Ebene lassen sich in besonderer Weise die Forschungsbemühungen von Nancy Jordan, Lynn Fuchs und Robert Siegler hervorheben, die im Überblick in einer eigenen Ausgabe des *Journal for Learning Disabilities* im Jahr 2017 erschienen sind. Im Kontext des „Center for Improving Learning of Fractions", das in das U.S. National Center for Special Education Research of the Institute of Education Sciences eingebettet ist, haben die Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler zahlreiche Untersuchungen mit unterschiedlichen Schwerpunkten hinsichtlich der Einführung von Bruchzahlen durchgeführt (Gersten & Jordan, 2017, S. 612). Dabei wurden insbesondere auch Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen berücksichtigt. Die Forschungserkenntnisse heben u.a. das große Potential des Zahlenstrahls als effektives Anschauungsmittel zur Einführung eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses hervor (vgl. vertiefend u.a. Fuchs, L. S., Malone, Schumacher, Namkung & Wang, 2017; Jordan, Resnick, Rodrigues, Hansen & Dyson, 2017 und Tian & Siegler, 2017). Auch auf nationaler Forschungsebene erhält der Zahlenstrahl bzw. Bruchstreifen besondere Beachtung (vgl. u.a. Forschungsprojekte um Prediger; Wittmann, G., 2007).

Das Forschungsteam um Jordan (2017) kam zu dem Ergebnis, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zwar tendenziell ein Bruchzahlverständnis aufbauen können, dafür aber deutlich mehr Zeit benötigen und dadurch wohlmöglich in ihrem mathematischen Lernprozess eingeschränkt sind. Fuchs, L. S. et al. (2017) haben in ihren Untersuchungen gezeigt, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im

Mathematiklernen durchaus herausfordernde mathematische Inhaltsbereiche erfolgreich erwerben können, wenn sie im Rahmen einer „well-designed intervention“ (S. 637) gefördert werden. Als wesentliche Faktoren heben die Autoren eine Förderung in Kleingruppen hervor, die systematisch ausgerichtet ist, explizite Instruktionen umfasst und sich auf die neuesten Methoden sowie Erkenntnisse zu relevanten Inhaltsbereichen bezieht. Fennell und Karp (2017) verweisen auf ein „clear lack of foundational understandings related to fractions“ (S. 648), dem nach Siegler und Pyke (2013) vermutlich mit frühen Interventionen bei Schwierigkeiten im Bereich des Bruchzahlverständnisses begegnet werden kann: „Another instructional implication of the present findings involves a target for early intervention that might avoid many subsequent difficulties that children have with fractions“ (Siegler & Pyke, 2013, S. 2003).

Wie wichtig die Bruchrechnung für den schulischen Lernerfolg im Mathematikunterricht ist, zeigt die Analyse von umfangreichen Daten einer Langzeitstudie in den USA und Großbritannien: "Elementary school students’ knowledge of fractions and of division uniquely predicts those students’ knowledge of algebra and overall mathematics achievement in high school, 5 or 6 years later" (Siegler et al., 2012, S. 691). Tian und Siegler (2017) unterstreichen diese Ergebnisse und heben das Bruchwissen in Grade 5 als aussagekräftigsten Prädiktor für die weiterführenden algebraischen Kompetenzen hervor. Gleichzeitig weisen sie nach, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen im Gegensatz zu ihren Mitschülerinnen und Mitschülern ohne (besondere) Schwierigkeiten zwischen Grade 6 und 8 keine signifikanten Lerngewinne machen (vgl. auch Siegler & Pyke, 2013).

4.3 Leitende Fragestellungen für die Interventionsstudie

In Anlehnung an die ausführliche Auseinandersetzung mit den beiden für diese Arbeit zentralen Inhaltsbereichen sowie vor dem Hintergrund der ausgewählten empirischen Forschungsergebnisse kristallisieren sich für die weitere fachliche Gestaltung der Unterrichts- und Förderkonzeption die folgenden handlungsleitenden Fragen heraus:

- Wie lassen sich Basisförderung und aktueller Klassenunterricht im inklusiven Kontext sinnvoll miteinander verknüpfen?
- Wie lassen sich relevante Aspekte des arithmetischen Basisstoffs auch noch in der Sekundarstufe I so vermitteln, dass allen Lernenden grundlegende Lernprozesse

ermöglicht werden, um im präventiven Sinne sich verfestigende Lernschwierigkeiten in weiterführenden Inhalten zu vermeiden bzw. gering zu halten?

- Wie lassen sich relevante Aspekte des arithmetischen Basisstoffs für rechenschwache Schülerinnen und Schüler in den aktuellen Unterricht mit einbeziehen, um unzureichend ausgeprägte Kompetenzen aufzuarbeiten bzw. zu festigen?
- Wie lässt sich der fachlich anspruchsvolle Lerngegenstand des Bruchzahlverständnisses in inklusiven Klassen zu Beginn der Sekundarstufe I so vermitteln, dass möglichst alle Schülerinnen und Schüler ein grundlegendes Verständnis aufbauen können?

5 ENTWICKLUNG EINER UNTERRICHTS- UND FÖRDERKONZEPTION

In diesem Kapitel werden die auf theoretischer Ebene (Kap. 2 bis 4) erarbeiteten inhaltlichen und didaktisch-methodischen Schwerpunkte für die vorliegende Unterrichts- und Förderkonzeption auf Entwicklungsebene dargestellt und anhand ausgewählter Aufgabenbeispiele in wechselseitiger Beziehung konkretisiert. Nach Wember (2009b) besteht zwischen diesen Ziel- und Methodenentscheidungen eine Abhängigkeit, „denn Sollen impliziert bekanntlich Können. Wenn bestimmte Ziele im Förderunterricht erreicht werden sollen, müssen zielführende Methoden bekannt sein und es sollten im Idealfall Erkenntnisse vorliegen, unter welchen Bedingungen welche Methoden welche Effekte bewirken“ (Wember, 2009b, S. 240). Vor dem Hintergrund der in Kapitel 2 bis 4 erarbeiteten empirischen, (fach-) didaktischen und fachlichen Ausführungen werden die zentralen Entscheidungen für das vorliegende Forschungsprojekt expliziert. Die fachlichen und didaktischen Entscheidungen über die Inhalte des Klassenunterrichts und der Förderschleifen stellen normative Zielentscheidungen mit Orientierungsfunktion dar (Wember, 2009b, S. 240). Auf Grundlage dieser normativ formulierten didaktischen Prinzipien, die als handlungsleitende Grundsätze verstanden werden, sollen im Rahmen der nachfolgend konkretisierten Unterrichts- und Förderkonzeption Merkmale besonders erfolgreichen Unterrichts realisiert werden, die sich in unterschiedlichen Forschungsprojekten als wirksam erwiesen haben.

Im Folgenden wird Unterricht vor dem Hintergrund seines „effektiven“ Begriffsverständnisses (Wember, 2009a, S. 91) betrachtet. Im Fokus steht der reale individuelle Kompetenzerwerb der Lernenden. Es entsteht bewusst kein zieldifferenziertes Lernangebot im Sinne des sonderpädagogischen Unterstützungsbedarfs Lernen. Auf eine Kategorisierung von behindert – nicht behindert, mit – ohne sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf bzw. auf jegliche Form der Einordnung und Aussonderung wird bewusst verzichtet. Der Fokus liegt auf der konsequenten Beachtung der Individualität und Bedürfnisse aller Lernenden, um am gemeinsamen Mathematikunterricht teilhaben und teilnehmen zu können. Es wird ein Unterrichts- und Förderkonzept für heterogene Lerngruppen entwickelt, erprobt und evaluiert, das vor dem Hintergrund der Praxistauglichkeit im inklusiven Mathematikunterricht eine gewisse Offenheit für eine mögliche temporäre Zieldifferenz vorbehält[7]. Die Differenzierungsspanne der Aufgaben ermöglicht das individuelle Erreichen verschiedener Ziele, die an dem gleichen Lerngegentand ausgerichtet sind. Es soll sowohl guter Mathematikunterricht für alle Kinder unter Berücksichtigung der in jeder Lerngruppe vorhandenen Heterogenität ermöglicht als auch eine Verengung des Blicks auf Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten beim Mathematiklernen erfolgen. Der Blick wird auf Wesentliches gerichtet, d.h. es werden einzelne Bereiche beleuchtet, ohne dabei jedoch den größeren Rahmen aus den Augen zu verlieren.

Gegenwärtig liegen bereits einige Unterrichtskonzepte und -materialien für das verständnisorientierte und diagnosegeleitete Aufarbeiten von Verstehensgrundlagen zu Beginn der Sekundarstufe I (bspw. die *Rechenbausteine* von Brauner, Hußmann, Matull, Prediger & Verschraegen, 2011) sowie für spezifische Kleingruppenförderungen rechenschwacher Lernender (bspw. *Mathe sicher können* von Selter, Prediger, Nührenbörger & Hußmann, 2014) vor. Erste Unterrichtseinheiten, die eine angeleitete Kleingruppenförderung in den Klassenunterricht integrieren (bspw. Ademmer et al., 2018), berücksichtigen zu Beginn der Sekundarstufe I oftmals lediglich die arithmetischen Verstehensgrundlagen. Es fehlt nach wie vor an fundierten Unterrichtskonzepten, die aufzeigen, wie diese grundlegende Förderung für alle Schülerinnen und Schüler mit dem Klassenunterricht kombiniert und mit aktuellen Unterrichtsinhalten der Sekundarstufe I verknüpft werden kann.

Ziel des vorliegenden Kapitels ist es, die bisherigen wissenschaftlich fundierten, theoretisch-didaktischen Überlegungen mit der praktischen und alltagsnahen Umsetzbarkeit zu vereinen und in Form eines konkreten Unterrichts- und Förderkonzepts darzustellen. Zunächst werden zentrale grundlegende Adaptionen des Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung konkretisiert (Kap. 5.1). In einem nächsten Schritt werden der Aufbau und die Struktur der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption dargestellt (Kap. 5.2). Darauf aufbauend folgt zum Einen die Erläuterung der inhaltlichen Schwerpunkte (Kap. 5.3), die sowohl den zentralen Lerngegenstand der klassenintegrierten Förderung darstellen, als auch vor dem Hintergrund eines „fachdidaktisch fundiertes[n] Zusammenspiel[s] von Diagnose und Förderung“ (Häsel-

[7] In der vorliegenden Arbeit findet immer wieder der Rückbezug auf den sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf Lernen statt (theoretische und empirische Grundlagen), da sich eine große Nähe zu Kindern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen annehmen lässt (vgl. Kap. 2.3.2).

Weide & Prediger, 2017, S. 167) elementare Bedeutung für die in Kapitel 7 dargestellte Entwicklung des diagnostischen Testinstruments haben. Daran anschließend wird zum Anderen die fachdidaktische und methodische Schwerpunktlegung des vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzepts vorgenommen (Kap. 5.4). Die Darlegungen für den Klassenunterricht und die Förderschleifen werden zwar getrennt voneinander, aber in enger wechselseitiger Verzahnung vorgenommen. Anschließend werden ausgewählte Unterrichtsstunden und Förderschleifen vorgestellt sowie konkrete Aufgaben exemplarisch analysiert (Kap. 5.5). Das Kapitel endet mit einem Zwischenresümee auf Entwicklungsebene (Kap. 5.6), um den Übergang zur Forschungsebene (Kap. 6 bis 9) zu schaffen.

5.1 Adaption des Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung

Die im ersten Teil dieser Arbeit aufgezeigte Dringlichkeit, für den inklusiven Mathematikunterricht geeignete Unterrichts- und Förderkonzepte zu entwickeln, die allen Kindern unabhängig von ihren Lernvoraussetzungen individuelle Lernfortschritte am gemeinsamen Lerngegenstand ermöglichen, unterstreicht die Intention der vorliegenden Arbeit: Die Entwicklung einer fachlich fundierten, qualitativ hochwertigen alltagsnahen und praxisbezogenen Unterrichtseinheit, durch die für alle Lernenden, insbesondere für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, ein direkter unterrichtspraktischer Nutzen erzielt werden kann.

Der Kern des vorliegenden Forschungsprojektes, gewissermaßen das Herzstück dieser Arbeit, ist die enge Verzahnung auf drei Ebenen (vgl. Abb. 6), die ein hohes inklusivdidaktisches Potential aufweist:

- Fachdidaktik – Sonderpädagogik
- Inklusiver Mathematikunterricht im Klassenverband – Förderschleifen in Kleingruppen
- Bruchzahlverständnis – arithmetischer Basisstoff

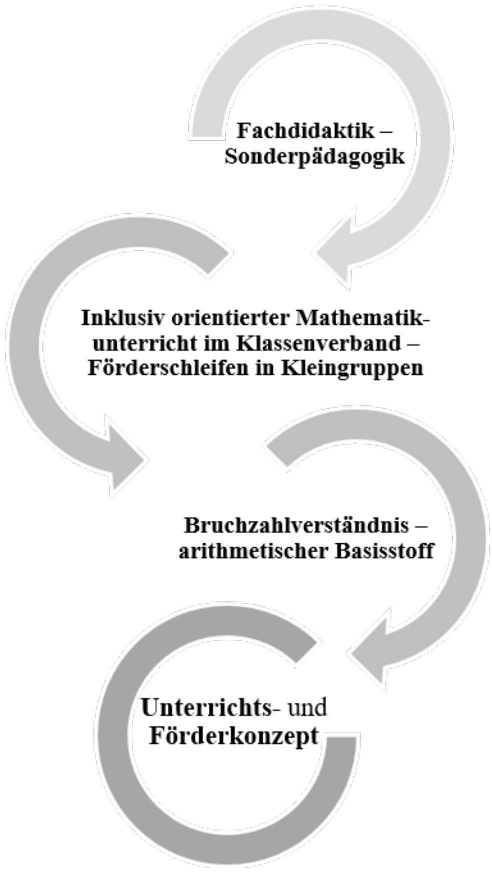


Abbildung 6: Eng verzahnte Ebenen des vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzepts (eigene Darstellung)

Verzahnung von Fachdidaktik und Sonderpädagogik

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit vollzogene enge Verbindung zwischen Mathematikdidaktik und Sonderpädagogik impliziert einen Perspektivwechsel hin zu einer inklusiv orientierten Didaktik (vgl. ausführlich Kapitel 2.2.4), deren Substantiierung auf dem wechselseitigen Bezug zwischen fachdidaktischen und sonderpädagogischen Aspekten fußt. Der Blick wird sowohl auf fachlich relevante Inhaltsbereiche als auch auf das einzelne Kind sowie die heterogene Lerngruppe gerichtet. Die individuelle Verschiedenheit der Lernenden stellt dabei die Grundlage für die fachlichen, fachdidaktischen und methodischen sowie (sonder-)pädagogischen Planungen und Entscheidungen dar. Vor dem Hintergrund der von Korff (2016b, S. 45) postulierten inhaltlichen „Gemeinsamkeit in der Vielfalt“ und „Vielfalt in gemeinsamen Lernsituationen“ wird die reziproke Bereicherung beider Disziplinen in den Mittelpunkt gestellt.

Verzahnung von inklusivem Mathematikunterricht im Klassenverband und Förderschleifen in Kleingruppen

Das Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung verbindet unterschiedliche Lernsituationen miteinander, um der Heterogenität der Lernenden begegnen und dem Ziel des tatsächlich gemeinsamen Mathematiklernens gerecht werden zu können (Häsel-Weide, 2017, S. 20). „Eine Kombination von Elementen gemeinsamen und individuellen Lernens ist nicht nur in Bezug auf sonderpädagogische Förderbedarfe wichtig, sondern für alle Kinder“ (Ademmer et al., 2018, S. 303). Die häufig kritisierte Spaltung zwischen gemeinsamen Lernsituationen im Klassenverband und zusätzlichen, inhaltlich losgelösten Förderungen in exklusiven Settings wird in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen, jedoch im Kontext der unterrichtsintegrierten Förderung im Sinne einer inklusiv orientierten Didaktik vielversprechend miteinander vereint. Das dieser Arbeit zugrunde gelegte Verständnis verfolgt den Anspruch, fokussierte Förderung als handlungsleitendes Prinzip in die tägliche Praxis des inklusiven Klassenunterrichts einzubinden. Damit verbunden ist das Ziel, Fördermaßnahmen für alle Lernenden unter Berücksichtigung der jeweiligen Gegebenheiten - so oft es möglich ist - innerhalb des gemeinsamen Lernens im Klassenunterricht zu integrieren. In abgestimmter Form werden zusätzliche Förderangebote außerhalb des Klassenunterrichts ermöglicht.

> Aber wenn eine solche Förderung [Einzel-/Kleingruppenförderung] *gar nicht* stattfindet - etwa mit der Begründung, dass alle angesprochenen Maßnahmen doch den Stoff der Grundschule (bis zurück in die erste Schulstufe) beträfen (was sie tun!); wenn stattdessen versucht wird, in "Erfüllung des Lehrplans" Dezimalbrüche, gemeine Brüche, Prozentrechnen, elementare Algebra.... Kindern zu vermitteln, die die dafür nötigen mathematischen Voraussetzungen nicht mitbringen - dann ist das Scheitern dieser Bemühungen vorprogrammiert [Hervorheb. im Original]. (Gaidoschik, 2008, S. 292)

Die vorliegende Unterrichts- und Förderkonzeption begreift die zusätzlichen Förderschleifen nicht im Sinne der genannten Kontroverse. Vielmehr steht die beidseitige enge inhaltliche und methodische Verzahnung zwischen den Förderschleifen und dem Klassenunterricht im Mittelpunkt (vgl. Abb. 7).

> Die Didaktik hat sich im inklusiven Unterricht nicht nur auf die individuellen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler und entsprechende, individualisierte Angebote einzustellen. Bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht muss ebenso Berücksichtigung finden, inwieweit die individuellen

> Leistungen und Beiträge der Schülerinnen und Schüler im Klassenunterricht (z.B. in Unterrichtsgesprächen) sichtbar und relevant werden können, d.h. wie wechselseitige Bezugnahme von Schülerinnen und Schülern (mit und ohne Förderbedarf) im Hinblick auf den Inhalt des Unterrichts initiiert werden können. (Musenberg & Riegert, 2015, S. 23)

Von zentraler Relevanz bleiben die inhaltliche und zugleich die soziale Eingebundenheit aller Schülerinnen und Schüler in den Klassenunterricht. Besonderes Augenmerk wird im Rahmen dieser Arbeit auf die Partizipation der Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Klassenunterricht gelegt, die an den Förderschleifen teilnehmen.

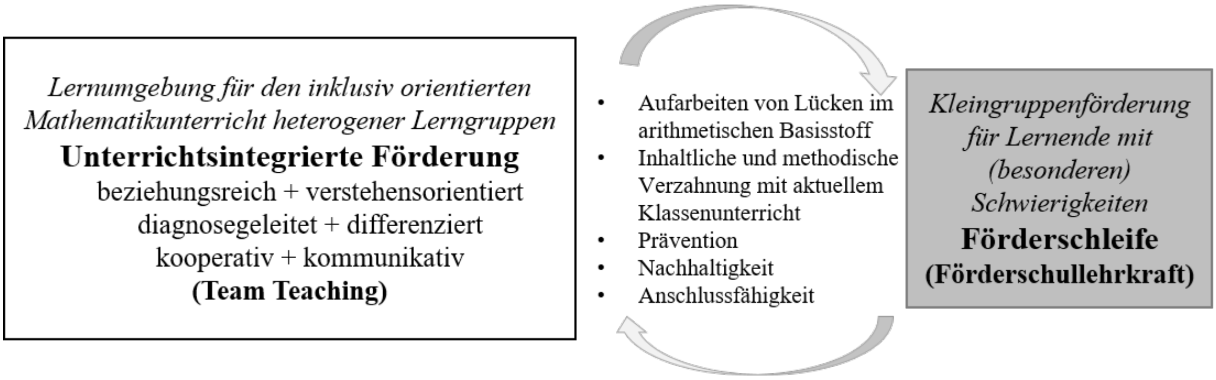


Abbildung 7: Unterrichts- und Förderkonzept (eigene Darstellung in Anlehnung an Bartnitzky, 2012, S. 30)

Verzahnung von Bruchzahlverständnis und arithmetischem Basisstoff

Die vorliegende Unterrichts- und Förderkonzeption bewegt sich in einem additiven Kontext der Grundschularithmetik und des Anfangsunterrichts der Sekundarstufe I (vgl. ausführlich Kapitel 4). Sie nimmt die inhaltsbezogene Seite der Gemeinsamkeit bei der Planung, Durchführung und Evaluation in den Fokus und stellt einen Versuch dar, das Spannungsfeld zwischen der Sicherung zentraler Aspekte des arithmetischen Basisstoffs als notwendige Lernvoraussetzung und dem Aufbau neuer, weiterführender Inhaltsbereiche (Wartha, 2009a, S. 176) auszubalancieren. Eine Erweiterung der Planungsschritte für einen differenzsensiblen Unterricht (Kap. 2.3.3) um die Anknüpfungspunkte zum arithmetischen Basisstoff nimmt besonders für den Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe einen relevanten Stellenwert ein (vgl. Kap. 4.1.3). Prediger et. al. (2011, S. 20) heben dabei bereits den Entscheidungsprozess über für den weiteren Lernprozess relevante Wissenselemente und Fähigkeiten auf der Planungsebene als ersten zentralen Schritt hervor. Gleichzeitig betonen sie das Vermeiden einer bloßen Wiederholung des Grundschulstoffs. Die enge inhaltliche

Verknüpfung der grundlegenden Aspekte des Bruchzahlverständnisses mit den dafür relevanten Aspekten des arithmetischen Basisstoffs wird als Chance angesehen, um beiden Bereichen entsprechende Aufmerksamkeit zu gewähren und diese ohne gegenseitigen Ausschluss sinnvoll miteinander zu verbinden. Darin liegt die Chance, sowohl unzureichend ausgeprägte Kompetenzen aufzuarbeiten bzw. zu festigen als auch im präventiven Sinne sich verfestigende Lernschwierigkeiten in weiterführenden Inhalten zu vermeiden bzw. gering zu halten. „Eine Förderung wird erst dann erfolgreich sein, wenn diese das Kind konzeptuell und auf Niveau seines mathematischen Verständnisses anspricht. Dass dies bei Kindern mit besonderen Lernproblemen nicht [nur, R.-F.K.] die Inhalte des Unterrichts sind, ist hinlänglich bekannt“ (Müller, A. et al., 2017, S. 465). Das hier zugrunde gelegte Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung sollte Schmassmanns (2009) Forderung zufolge so oft es geht umgesetzt werden, wenn die Herausforderung gelingt, „den fehlenden und aktuellen Stoff aufgrund von fachlichen Zusammenhängen so zu kombinieren, dass sich der Lernrückstand verringern kann und der aktuelle Stoff wo immer möglich einbezogen wird“ (S. 171). Für die Implementierung einer unterrichtsintegrierten Förderung im aktuellen Inhaltsbereich in enger Verknüpfung zu dem mathematischen Basisstoff in der Sekundarstufe I bietet sich insbesondere das fünfte Schuljahr an, da die Wiederholung des arithmetischen Basiswissens hier bereits im Lehrplan verankert ist (Freesemann, 2014, S. 126).

Im Sinne Wembers wird der effektive Begriff von Unterricht zugrunde gelegt. Die Unterrichts- und Förderkonzeption zielt demnach auf den realen Kompetenzerwerb und erhebt den Anspruch, einen „optimale[r][n] Unterricht für Alle “ (Wember, 2013, S. 385) zu ermöglichen, sodass wirklich alle Schülerinnen und Schüler der heterogenen Lerngruppe die hier relevanten Kompetenzen erwerben und diese auch nachgewiesen werden können. In Anlehnung an die im theoretischen Teil dieser Arbeit dargelegten fachlichen, fachdidaktischen und sonderpädagogischen Schwerpunkte inklusiv orientierter Didaktik wurden bei der Entwicklung der Unterrichts- und Förderkonzeption unter Beachtung der gegebenen Rahmenbedingungen vorrangig die Aspekte und Prinzipien berücksichtigt, die sich in der Forschung als effektiv erwiesen haben und von denen angenommen wird, dass sie förderlich zu einem inklusiven (Mathematik-)Unterricht beitragen.

5.2 Aufbau und Strukturierung

Nachfolgend werden der Aufbau und die Strukturierung der Unterrichtsstunden im Rahmen der klassenintegrierten Förderung sowie der Förderschleifen ausgeführt. Besonderer Wert liegt auf ritualisierten und wiederkehrenden Elementen, die den Lernenden ein transparentes Gerüst und Orientierung bieten sollen.

5.2.1 Klassenintegrierte Förderung

Zur Durchführung der komplexen Unterrichtskonzeption im Rahmen des wöchentlichen Mathematikunterrichts im Klassenverband wurden in einem ersten Schritt fünf Bausteine mit je zwei bis vier Einheiten (Schulstunden à 45 und 90 Minuten) entwickelt, die während der Durchführung der Intervention erprobt wurden. Innerhalb einer Woche sollten je zwei Einheiten durchgeführt werden, sodass pro Woche insgesamt 3-4 Stunden Mathematikunterricht im Klassenverband stattfinden würden. Auf eine vorherige Erprobung und Adaption musste im Rahmen der zur Verfügung stehenden finanziellen, materiellen und personellen Ressourcen verzichtet werden.

Die Struktur der Unterrichtsstunden variiert im Detail (vgl. Abb. 8), es lassen sich jedoch drei wiederkehrende Elemente herausstellen:

- gemeinsame Einstiegsphasen
- individualisierte und kooperative Arbeitsphasen
- gemeinsame (Zwischen-) Reflexionsphasen

Jede Unterrichtsstunde beginnt mit dem Ritual der gemeinsamen Erarbeitung des visualisierten Stundenverlaufs, um allen Lernenden sowohl auf inhaltlicher als auch auf methodischer Ebene Transparenz zu verschaffen. Weiterhin wird jede Unterrichtsstunde in den Verlauf der gesamten Unterrichtsreihe eingeordnet, sodass die Lernenden den Gesamtzusammenhang erkennen können.

In der gemeinsamen Einstiegsphase einer Einheit erarbeiten sich alle Lernenden im Klassenverband den Kerngedanken des jeweiligen Bausteins bzw. der jeweiligen Unterrichtsstunde anhand eines reichhaltigen, anschaulichen und oftmals offen dargestellten Einstiegsproblems. Der gemeinsame Einstieg mit der gesamten Lerngruppe eignet sich einerseits dazu, allen Lernenden das Thema präsent zu machen und die gemeinsame Motivation am gemeinsamen Lerngegenstand zu wecken. Andererseits ermöglichen beziehungshaltige und selbstdifferenzierende Einstiege das Einbringen individueller Vorerfahrungen auf unterschiedlichen Niveaus (Hußmann et al., 2007, S. 3). Schindler (2017) hebt die Relevanz eines gemeinsamen Einstiegs hervor: „Ohne eine solche gemeinsame Einstiegsphase können die Differenzierungsbemühungen in den folgenden Arbeitsphasen zu vereinzelnder Individualisierung führen, bei der die Lernenden wenig Austausch und Reflektionsmöglichkeiten über ihre mathematischen Entdeckungen haben“ (S. 7).

Für alle Lernenden, insbesondere für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, besteht nach der gemeinsamen Einstiegsphase die Möglichkeit einer vertiefenden Verständnissicherung in einer Kleingruppe im Klassenverband. Die Doppelbesetzung durch eine Mathematiklehrerin und eine Förderschullehrerin ermöglicht die zusätzliche Erarbeitung und Vertiefung eines elementaren Verständnisses des Lerngegenstands der jeweiligen Stunde als Grundlage für die individualisierte und kooperative Arbeitsphase. Im Sinne der Selbsteinschätzung sollen die Lernenden im Verlauf der Unterrichtseinheit immer mehr Verantwortung für ihr eigenständiges Lernen übernehmen und individuelle Entscheidungen hinsichtlich des für sie passenden Zeitpunkts des Übergangs in die Einzelarbeitsphase treffen können.

Nach der gemeinsamen Einführung können unterschiedliche unterrichtliche Fortsetzungen realisiert werden. In der strukturierten und niveaudifferenzierten Arbeitsphase erarbeiten sich die Lernenden den jeweiligen Inhaltsbereich sowohl individualisiert in Einzelarbeit als auch kooperativ und kommunikativ in Partner- bzw. Kleingruppenarbeit. Die Einzelarbeitsphasen ermöglichen „Vielfalt in gemeinsamen Lernsituationen“ (Korff, 2016b, S. 45), sodass die Lernenden in ihrem individuellen Lerntempo mit verschiedenen Erkenntnistiefen an differenzierten Aufgaben arbeiten können. Die Partnerarbeitsphasen fokussieren in besonderer Weise das Vergleichen unterschiedlicher Vorgehensweisen, das Einigen auf eine gemeinsame Lösung, den Austausch über den grundlegenden gemeinsamen Lerngegenstand (Starter-Aufgabe) sowie die gemeinsame Erarbeitung neuer bzw. weiterführender Inhalte. Dabei spielt die „Gemeinsamkeit in der Vielfalt“ (Korff, 2016b, S. 45) eine bedeutsame Rolle. Die Lehrkräfte können die Lernenden sowohl in den individuellen als auch kooperativen Arbeitsphasen unterstützen und in ihren Lernprozessen begleiten. Bezugnehmend auf die in

Kapitel 2.2 dargelegten Spannungen zwischen klassischer sonderpädagogischer und (inklusiv orientierter) fachdidaktischer Perspektive, hebt Wember (2016a) für eine umfassende Förderung die Notwendigkeit einer „ausgeglichene[n] Kombination von schüler- und lehrergelenkten Verfahren" (S. 93) hervor, die nicht nur die kognitive, sondern auch die emotional soziale Entwicklung der Lernenden hin zu Eigenständigkeit unterstützen.

Während der Arbeitsphase bieten sich kurze Zwischenreflexionen an, die fokussierte Kommunikationsanlässe bieten und die Lernenden zu reichhaltigen Sprachproduktionen auffordern. Zwischengeschaltete Reflexionsphasen eignen sich dazu, verschiedene Perspektiven zu betrachten, Verständnis zu sichern und eine gemeinsame Grundlage für die Weiterarbeit zu schaffen.

Die abschließende Reflexionsphase im Klassenverband gibt der Unterrichtsstunde zusammen mit dem gemeinsamen Einstieg eine inhaltliche Rahmung. In einem kommunikativen Austausch werden die Entdeckungen und Erkenntnisse aus den reichhaltigen Aktivitäten zusammengeführt und die Lernerkenntnisse gesichert und vertieft. Dabei kann sowohl die eingangs thematisierte Problemstellung erneut aufgegriffen als auch im Sinne des transferfähigen Lernens eine weiterführende Problemstellung bearbeitet werden. Sowohl in den Zwischenreflexionen als auch in der abschließenden Reflexionsphase stellt die gemeinsame Kommunikation unter möglicher Beteiligung aller Lernenden einen zentralen Aspekt dar. Die sogenannten Starter-Aufgaben, die von allen Lernenden bearbeitet werden sollen, stellen den kommunikativen Ausgangspunkt und die Basis dar, um als Lerngruppe gemeinsam in einem sozialen Prozess Einsichten und Vorstellungen zu verbalisieren und zu vertiefen. Aber auch reflektierende Unterrichtsgespräche, die über die elementaren Aufgaben hinausgehen, können sowohl für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten einen Lernzuwachs darstellen als auch Lernende mit (besonderen) Potentialen fordern.

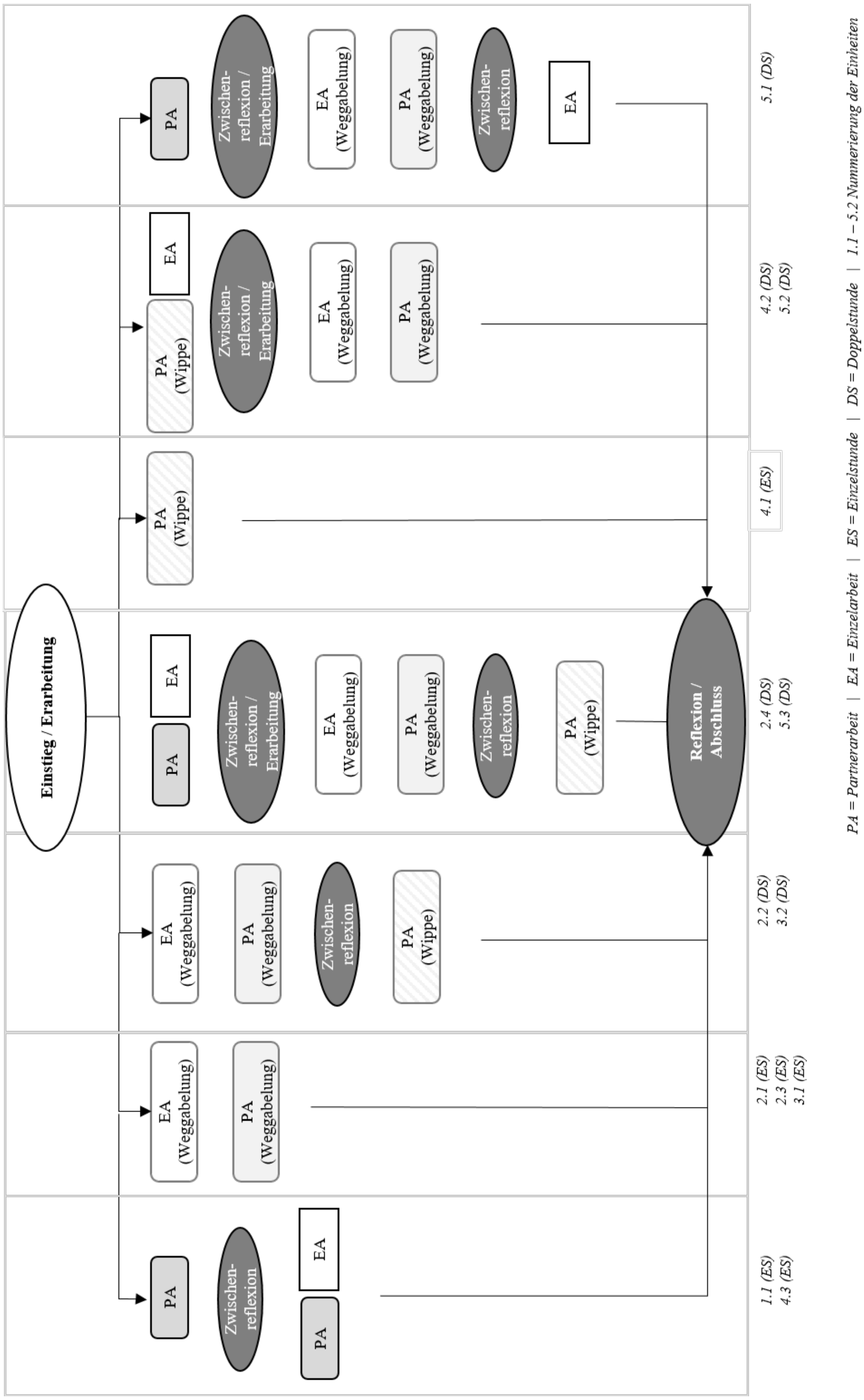


Abbildung 8: Strukturierter Ablauf des Mathematikunterrichts auf Klassenebene (eigene Darstellung)

Die an diese Struktur angelehnte variierende konkrete Umsetzung im Unterricht lässt den nötigen Spielraum zu, um situativ auf die Bedürfnisse der Lerngruppe reagieren zu können.

Für jede Unterrichtsstunde liegt ein ausführlicher Unterrichtsverlauf für die Detailplanung sowie die gründliche Unterrichtsvorbereitung im Vorfeld vor (vgl. Beispiel in Anhang A 1). Dieser beinhaltet umfangreiche Ausführungen zu folgenden Aspekten:

- geplanter Unterrichtsverlauf
- angestrebte Kompetenzen
- methodisch-didaktischer Kommentar
- Sozialform / Kooperationsform
- Aufgabenformate
- Darstellungsform und Hilfsmitteln

Darüber hinaus wurde für jede Unterrichtsstunde eine komprimierte Planungsübersicht erstellt (vgl. Beispiel in Anhang A 2). Diese dient unterrichtsbegleitend im Sinne eines roten Fadens zur Orientierung und fasst die zentralen Aspekte der jeweiligen Unterrichtsstunde übersichtlich auf:

- Zuordnung zu dem jeweiligen Baustein und der jeweiligen Einheit
- intendierte Kompetenzschwerpunkte
- Spanne möglicher Kompetenzen
- Kooperationsformen
- kurz gefasster geplanter Verlauf
- benötigte Materialien
- beispielhafte Aufgaben
- innermathematische Substanz
- Hürden und kritische Stellen
- Möglichkeiten der individuellen Unterstützung
- Bezug zu arithmetischem Basisstoff

Im Sinne eines transparenten Lernprozesses wurde sowohl für die Unterrichtseinheit insgesamt als auch für die jeweiligen Unterrichtsstunden die Zieltransparenz visualisiert (vgl. Beispiele in Anhang B 1 und B 2). Um einen Überblick über die gesamte Einheit zu verschaffen, wurde entsprechend der Bausteinstruktur der jeweilige Baustein bzw. das jeweilige Ziel der Woche im Klassenraum veranschaulicht. So können die Lernenden die jeweilige Stunde in den übergeordneten Gesamtzusammenhang einordnen sowie den aktuellen Stand des Lernprozesses überblicken. Darüber hinaus hat sich die inhaltliche und methodische Visualisierung der Phasen und Arbeitsschritte in Bezug auf das spezifische Lernziel der jeweiligen Unterrichtsstunde als orientierungsgebendes Strukturelement herausgestellt. Die an der Tafel mit wiederkehrenden Abbildungen visualisierte Stundentransparenz wird zu Beginn von den Schülerinnen und Schülern erläutert und als strukturierendes Element während der Unterrichtsphasen immer wieder aufgegriffen. Gerade zu Beginn der Sekundarstufe I können diese Strukturelemente neu zusammengesetzte Lerngruppen dabei unterstützen, verstärkt Eigenverantwortung für ihren Lernprozess zu übernehmen (Ademmer et al., 2018, S. 307).

Thematisch wurde das Unterrichts- und Förderkonzept vor dem Hintergrund des aktiv-entdeckenden Erkundens eines neuen Zahlenraums in den anschaulichen Kontext des Forschens eingeordnet. Zu Beginn der Unterrichtseinheit wurden die sogenannten „Regeln für Forscher-Teams“ (vgl. Anhang C 1) gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet. Sie dienen, insbesondere in Phasen der Partnerarbeit, als kommunikative und kooperative Grundlage des gemeinsamen sozialen Lernprozesses:

- Wir arbeiten als Team.
- Wir sprechen (leise) über unsere Forscher-Aufgabe („30cm – Stimme“).
- Wir erklären uns unsere Lösungen.
- Wir fragen uns gegenseitig, wenn wir etwas nicht verstanden haben.
- Wir bearbeiten gemeinsam Forscher-Aufträge.
- Wir sind beide für die Lösung der Aufgaben verantwortlich.

Es fand im Vorfeld eine feste Zuteilung heterogener Forscherteams durch die unterrichtenden Lehrkräfte statt, da insbesondere die „leistungsheterogene Zusammensetzung der Paare wichtig zu sein“ (Wittich, 2017, S. 164) scheint für die Wirksamkeit kooperativer Lernformen. Zusätzlich wurde die feste Zuteilung der beiden Partner eines Forscherteams als strukturgebendes Element, sowohl für eine neu zusammengesetzte Lerngruppe zu Beginn der Sekundarstufe I als auch für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht, erachtet. Als thematische Rahmung erhalten alle Schülerinnen und

Schüler einzeln und die jeweilige Klasse zum Abschluss der Unterrichtseinheit eine „Forscher-Urkunde“ (vgl. Anhang C 2 und C 3).

Der gewählte anschauliche Kontext des Forschens wird durch die fiktiven Kinder-Figuren Ben, Becky und Bert, die eigens für die vorliegende Unterrichts- und Förderkonzeption illustriert wurden, unterstützt. Trotz der deutlich strukturorientierten und fachlichen Ausrichtung werden die Figuren vor dem Hintergrund einer motivierenden Funktion bewusst eingesetzt, um die Lernenden durch die Einheit zu führen. Neben der visualisierten Einbettung in den Aufgabenstellungen dienen sie immer wieder als Adressaten, an die die Lernenden ihre Entdeckungen und Erkenntnisse formulieren sollen. Weiterhin werden sie im Rahmen kognitiver Konflikte mit (fehlerhaften) Äußerungen einbezogen, auf die sich die Schülerinnen und Schüler äußern sollen.

5.2.2 Förderschleifen

Zur Durchführung der zusätzlichen Förderschleifen wurden entsprechend der Bausteine des Klassenunterrichts inhaltlich eng verzahnte Fördereinheiten entwickelt. Innerhalb einer Woche sollten je zwei Förderschleifen à 45 Minuten durchgeführt werden, sodass pro Woche insgesamt 90 Minuten zusätzliche Förderung stattfinden sollten. Dabei wurde die jeweils erste Förderschleife dem Klassenunterricht vorangeschaltet, die zweite Förderschleife folgte am Ende der Woche im Anschluss an den Klassenunterricht. In der vorangeschalteten Förderschleife sollen erste grundlegende, den Klassenunterricht vorbereitende Inhalte erarbeitet werden, um bei den Lernenden im Sinne der Anschlussfähigkeit einen ersten Zugang anzubahnen. In den nachgeschalteten Förderschleifen am Ende einer Woche sollen die wesentlichen Erkenntnisse, die gemeinsam im Klassenunterricht erarbeitet wurden, vertieft und nachhaltig gefestigt werden. Auch hier musste mangels Ressourcen auf eine vorherige Erprobung und Adaption verzichtet werden.

Ähnlich wie bei den Einheiten des Klassenunterrichts variiert auch die Struktur der Förderschleifen, die im Kern jedoch die gleichen Elemente (gemeinsame Einstiegsphasen, individualisierte und kooperative Arbeitsphasen, gemeinsame (Zwischen-) Reflexionsphasen) aufweist und für die Lernenden ein wiederkehrendes und vertrautes Element aus dem Klassenunterricht darstellt. In der Kleingruppe wurde zu Beginn oder zum Abschluss der

Förderung in der Regel ein gemeinsames kurzes (mathematisches) Spiel gespielt, um entweder einen spielerischen Einstieg zu schaffen oder bearbeitete Inhalte zu festigen. Situativ wurden je nach individuellen Bedürfnissen der Lerngruppe auch weitere kleine Spiele bzw. Bewegungspausen integriert, um die Lernmotivation und -konzentration aufrechtzuerhalten. Gerade für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten wird viel Wert auf eine ritualisierte Strukturierung gelegt. Aus diesem Grund wird auch zu Beginn jeder Förderschleife die Stundentransparenz erarbeitet sowie an passenden Stellen bewusst auf die Verknüpfung zu den Inhalten des Klassenunterrichts hingewiesen, um den Lernenden die Sinnhaftigkeit der zusätzlichen Förderung zu vermitteln. Die Forscherregeln aus dem Klassenunterricht gelten gleichermaßen für die kooperative Zusammenarbeit in den Förderschleifen.

Für jede Förderschleife liegt eine Planungsübersicht vor (vgl. Beispiel in Anhang D), die sowohl zur Vorbereitung als auch parallel zur Durchführung der Förderung vorgesehen ist. Die Übersicht beinhaltet die zentralen Aspekte der jeweiligen Förderschleife:

- intendierte Kompetenzschwerpunkte in einem hervorgehobenen übergeordneten Kasten
- Struktur und Sozialform
- geplanter Unterrichtsverlauf
- benötigte Materialen
- besonders zu fokussierende Aspekte
- Bezug zu Bausteinen bzw. Einheiten des Klassenunterrichts

Die nachfolgende Gesamtübersicht (Abb. 9) bildet die strukturelle Verortung der klassenintegrierten Förderung und der Förderschleifen innerhalb einer Schulwoche ab:

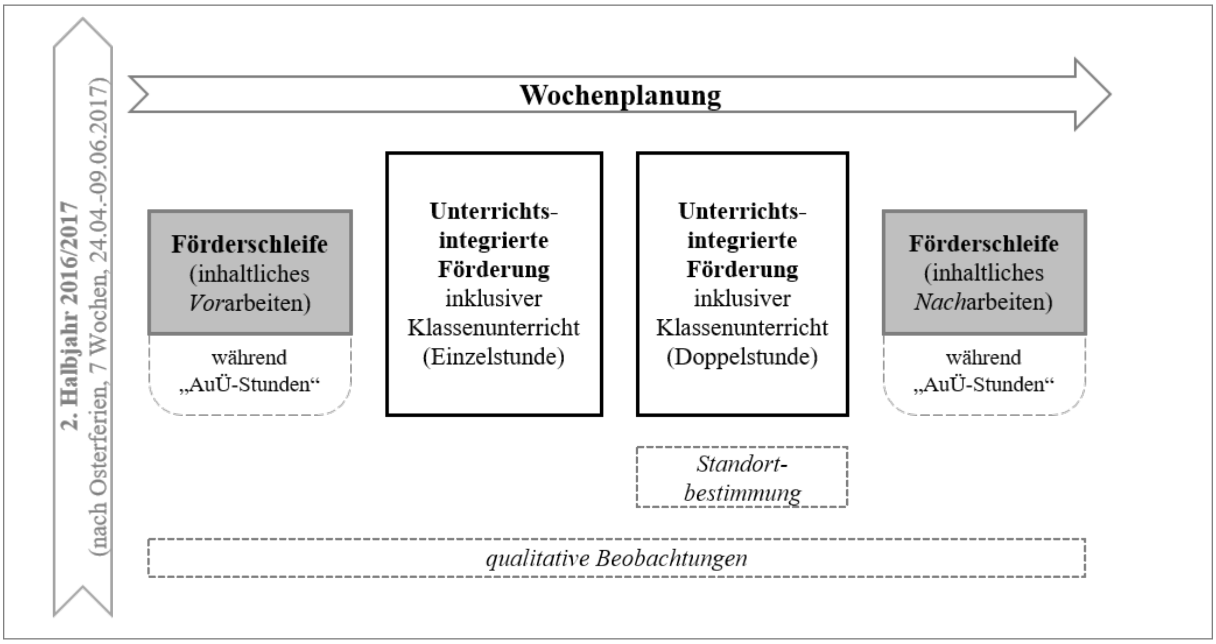


Abbildung 9: Wöchentliche Planung der Unterrichts- und Förderkonzeption[8] (eigene Darstellung)

5.3 Inhaltliche Schwerpunktlegung

Zentrales Ziel der vorliegenden Unterrichtskonzeption auf inhaltlicher Ebene ist die Entwicklung flexibler Grundvorstellungen zu einem anschaulichen Bruchzahlverständnis sowie die Förderung und Vertiefung der dazu relevanten Bereiche des arithmetischen Basisstoffs für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht, auf der Basis der individuell diagnostizierten Lernvoraussetzungen. Das grundlegende Verständnis von Bruchzahlen sowie ihrer strukturellen Zusammenhänge wird in der vorliegenden Arbeit einerseits durch die Fähigkeit operationalisiert, im Sinne des Bildens und Umbildens von Einheiten Anteile von einem Ganzen und von mehreren Ganzen bestimmen und auf verschiedene Arten darstellen zu können und dabei verschiedene Konstellationen zu bewältigen sowie operative Vorgehensweisen zu nutzen. Andererseits wird das grundlegende Bruchzahlverständnis in der Fähigkeit präzisiert, Anteile von Mengen bestimmen und

[8] „AuÜ-Stunden“ sind in der Kooperationsschule die „Arbeiten und Üben Stunden“, in denen die Lernenden frei wählen können, für welches Unterrichtsfach sie ihre Aufgaben bearbeiten möchten.

darstellen zu können sowie die Gleichwertigkeit von Bruchzahlen erkennen, bestimmen und herstellen zu können.

Sowohl in der Unterrichtseinheit als auch in den Förderschleifen wird der Fokus einerseits auf zentrale mathematische Inhaltsbereiche im Sinne des fachlichen Kerns gerichtet, andererseits auf die sogenannten Hürden bzw. kritischen Stellen. Dabei stehen die strukturellen, innermathematischen Vorstellungen sowie die mathematischen Zusammenhänge im Mittelpunkt.

In diesem Kapitel steht die Spezifizierung der fachlichen Inhalte im Vordergrund. Nachfolgend werden sowohl inhaltliche als auch prozessbezogene Schwerpunkte in Form einer gegenstandsspezifischen Konkretisierung der ausgewählten Lerngegenstände substantiiert und anhand konkreter Entwicklungsergebnisse des vorliegenden Forschungsprojektes illustriert.

5.3.1 Klassenintegrierte Förderung

In einem Zeitraum von sieben Wochen können nicht alle Aspekte eines grundlegenden und umfassenden Bruchzahlverständnisses sowie des dafür bedeutsamen mathematischen Basisstoffs bearbeitet werden, sodass eine sorgfältige und wohlbegründete Schwerpunktsetzung ausgewählter Inhaltsbereiche erfolgen muss. Diese lässt sich auch vor dem Hintergrund der in Kapitel 2.3.3 ausführlich dargestellten Notwendigkeit der Reduktion auf zentrale Inhalte innerhalb inklusiver Lernkontexte begründen. Der Fokus liegt auf den elementaren Bereichen, die in Jahrgang fünf als wesentliche Voraussetzung für den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses angesehen werden können (vgl. Kap. 4.2.2). Bei der Konzeption wurde darauf geachtet, dass die Unterrichtseinheit möglichst nah an der praktischen Unterrichtsrealität ansetzt und unter den täglichen Bedingungen durchgeführt werden kann.

Der Lerngegenstand der Unterrichtseinheit wird in Anlehnung an die Planungsschritte der differenzsensiblen Unterrichtsgestaltung (vgl. Kap. 2.3.3) in eine für inklusive Lerngruppen geeignete Kompetenzspanne eingeordnet. Ausgehend von den in Kapitel 4.2 ausführlich dargestellten Inhalten im Rahmen der Sachanalyse wurde für die vorliegende Unterrichtskonzeption der Schwerpunkt auf ausgewählte und elementar wichtige Bereiche eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses gelegt. Im Mittelpunkt steht die intensive

Anbahnung und Grundlegung der anschaulichen Vorstellungen zu Bruchzahlen. Die Erarbeitung der Rechenoperationen soll erst in Klasse sechs erfolgen sowie in den darauffolgenden Jahrgängen substanziell gefestigt und ausgebaut werden (Büchter, 2014, S. 9). Die Auswahl der Kompetenzanforderungen orientiert sich primär an dem Kerncurriculum für Integrierte Gesamtschulen in Niedersachsen (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012) und folgt dem didaktischen Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül" (Prediger, 2004; vgl. Prediger, 2009) sowie ausgewählten empirischen Befunden über typische Hürden im Bereich des Bruchzahlverständnisses (vgl. Kap. 4.2.3). In Anlehnung an das aktuelle Lehr-/ Lernverständnis im Mathematikunterricht werden sowohl in der Unterrichtseinheit für den Klassenunterricht als auch in den Förderschleifen dem inhaltlichen Verständnis und der treffsicheren Fokussierung kritischer Hürden besondere Beachtung geschenkt. Es findet stets eine Orientierung an den fundamentalen Ideen (vgl. Kap. 2.3.1) aus fachlicher Sicht statt. Vor diesem Hintergrund ist die hier entwickelte Unterrichtskonzeption tendenziell stärker dem Ansatz des gemeinsamen Gegenstands nach Feuser zuzuordnen und bezieht sich nur in Ansätzen auf die Konzeption Seitz', bei der die Perspektiven der Lernenden den Kern der Sache bilden (vgl. Kap. 2.2.1).

Für das Zusammenspiel von inhaltlichen und prozessbezogenen Kompetenzen wurden die ausgewählten Inhalte für die einzelnen Unterrichtsstunden der vorliegenden Einheit in Kompetenzen spezifiziert (vgl. Anhang E), die im Sinne eines Kontinuums das mögliche Spektrum an individuellen Lernentwicklungen abbilden. Gleichwohl eine im Vorfeld festgelegte Kompetenzspanne durchaus kritisch beleuchtet werden kann, wird sie im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht im Sinne von Regel- oder Minimalstandards verstanden. Vielmehr bildet die Kompetenzspanne eine flexible und durchlässige inhaltliche Stufung ab, die sowohl elementare, niedrigschwellig zugängliche als auch ausdifferenzierte reichhaltige Kompetenzen umfasst (Häsel-Weide, 2016a, S. 12). Die Kompetenzspanne wurde für alle Schülerinnen und Schüler entwickelt, d.h. weder das reduzierte, noch das erweiterte Niveau ist vorab festgelegt. Vielmehr besteht im Sinne der Ganzheitlichkeit die Möglichkeit der individuellen Verortung auf diesem differenzierten Kompetenzkontinuum sowie der individuellen Lernentwicklung. Es werden einerseits Zielsetzungen für allgemeine schulische Abschlüsse berücksichtigt, andererseits individuelle Kompetenzen im Sinne eines zieldifferenten Lernens an einem gemeinsamen Lerngegenstand beachtet. Allen Lernenden einer heterogenen Lerngruppe soll somit ein Zugang zu dem jeweiligen Lerngegenstand ermöglicht werden.

> In Relation zu den Anforderungen und Angeboten ist stets die fachliche Zielspanne auszuloten, in der sich verschiedene Kinder einem gemeinsamen Gegenstand individuell annähern können. Die individuellen Ziele, die sich für einzelne Kinder ergeben, weisen zwar auf unterschiedliche Stufen eines Verständnisprozesses hin. Jedoch sind diese differenten Stufen auf die gleiche fachliche Grundidee ausgerichtet, sodass sich letztlich aus dem Fach heraus Formate des Austausches über gewonnene Erkenntnisse zwischen den Kindern ergeben. (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 70)

Den fünf Bausteinen sind die folgenden zentralen übergeordneten Inhaltsbereiche (Tab. 1) zugeordnet, die in den jeweiligen Einheiten ausführlich erarbeitet werden:

Tabelle 1: Kompetenzschwerpunkte für das grundlegende Bruchzahlverständnis

Klassenunterricht		
Baustein-nummer	**Anzahl Einheiten**	**Kompetenzschwerpunkte**
1	Doppelstunde *(0,5 Wochen)*	**Anschauliche Einführung Bruchstücke / Bruchteile**
2	Einzelstunde Doppelstunde Einzelstunde Doppelstunde *(2 Wochen)*	**Zahlaspekt: Teil vom Ganzen** **GV 1 – Teil eines Ganzen** *„Ich kann ein Ganzes in gleiche Teile ohne Rest teilen.“ /* *„Ich kann Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen.“* **Ein Ganzes wird aufgeteilt**
3	Einzelstunde Doppelstunde *(1 Woche)*	**Zahlaspekt: Teil vom Ganzen** **GV 2 – Teil mehrerer Ganzer** *„Ich kann mehrere Ganze in gleiche Teile ohne Rest teilen.“* **Mehrere Ganze werden verteilt** **Ergebnisgleichheit /** **Verbindung GV 1 und GV 2** *„Ich kann Brüche auf verschiedene Arten bestimmen und darstellen.“*
4	Einzelstunde Doppelstunde Einzelstunde *(1,5 Wochen)*	**Zahlaspekt: Teil vom Ganzen** **GV 2 – Teil mehrerer Ganzer / Anteile von Mengen** *„Ich kann Anteile von Mengen bestimmen und darstellen.“* **Der Teil einer Gesamtheit wird als Bruchteil (Anteil) ausgedrückt**

5	Doppelstunde Einzelstunde Doppelstunde *(1,5 Wochen)*	**Äquivalenz / Gleichwertigkeit** *„Ich kann gleichwertige Anteile herstellen und in verschiedenen Darstellungen finden und bestimmen."*

Die ausführliche Kompetenzspanne (vgl. Anhang E) umfasst für die gesamte Unterrichtseinheit die nachstehend dargestellten wesentlichen Aspekte:

- Angabe der Woche
- Angabe des Bausteins sowie der jeweiligen Einheit
- Kompetenzschwerpunkte für den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses
  - inhaltsbezogene Kompetenzen: Handlungen der Lernenden sowie intendierte Erkenntnisse
  - prozessbezogene Kompetenzen

Der nachfolgend abgebildete Auszug (Tab. 2) gibt einen exemplarischen Einblick:

Tabelle 2: Exemplarischer Auszug aus der ausführlichen Kompetenzspanne (vgl. Anhang E)

Woche	**Bau-stein**	**Ein-heit**	**Kompetenzschwerpunkt Bruchzahlen**
1	**1**	1	*Die Lernenden* - teilen ein Ganzes gerecht auf - erzeugen durch Handlungen Bruchteile - lernen Bruchteile als Teile eines Ganzen kennen - lernen Bruchteile als Ergebnis von Aufteilsituationen kennen (GV1: ein Ganzes ohne Rest aufteilen) - lernen einfache Stammbrüche kennen - lernen „Wortnamen“ einfacher Stammbrüche kennen (Halb/Hälfte, Drittel, Viertel, Sechstel, Achtel) - untersuchen erste Zusammenhänge T-A-G o Fokus auf Teile / Unterteilung o Ganzes als Bezugsgröße - finden über systematisches Ausprobieren eine Lösung, wie ein Ganzes gerecht auf alle Kinder aufgeteilt werden kann - erkunden indirekte Größenvergleiche *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - die bisher kleinste bekannte Größe (Eins) zerkleinert, d.h. in gleich große Teile aufgeteilt werden kann - gerechtes Aufteilen i.S. „gleich groß“ bedeutet, dass alle Teile gleich groß sein müssen - ein Teil im Zusammenhang mit allen restlichen Teilen steht - ein Ganzes in verschiedene Teile zerlegt werden kann und alle Teile zusammen ein Ganzes ergeben *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Aufstellen von Vermutungen; Begründen; Beschreiben von Beobachtungen - Kommunizieren o Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Vermutungen aufstellen, systematisch ausprobieren und reflektieren; Übertragen von Lösungsbeispielen; Erschließen von Zusammenhängen

5.3.2 Förderschleifen

Bei der Förderung von Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu Beginn Sekundarstufe I sollte der Fokus auf belastbare inhaltliche Vorstellungen gerichtet werden, insbesondere zu sogenannten kritischen Bereichen aus der Grundschularithmetik (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 174). Die ausgewählten Inhalte des arithmetischen Basisstoffs gelten als kritische Bereiche, da sie einerseits zentrale Aspekte der Grundschulmathematik darstellen und andererseits eine voraussetzungsvolle Basis für die weiterführenden Inhalte in der Sekundarstufe I, insbesondere für das Bruchzahlverständnis, bilden. Darüber hinaus handelt es sich um empirisch nachgewiesene Inhaltsbereiche, in denen viele Lernende Schwierigkeiten zeigen und die aufgrund dessen oftmals mit einem nicht erfolgreichen Weiterlernen verbunden sind.

> Eine verstehensorientierte Förderung zielt somit auf fachliche Basiskonzepte ab, die für die Kinder so aufbereitet werden, dass das Kind auf seinem spezifischen Niveau einen Zugang zur Bewältigung und Erkundung erhält. Hierbei erweitert sich die Förderperspektive auf mathematische Inhalte um Unterstützungsmaßnahmen zum Erkunden und Begründen zentraler Beziehungen des Basisstoffs und damit verbunden zum Aufbau grundlegender prozessbezogener Kompetenzen. (Heß & Nührenbörger, 2017, S. 280)

Besonders für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen ist es von zentraler Bedeutung, ausreichend Lernanlässe zu schaffen, die das vernetzte Erarbeiten des mathematischen Basisstoffs mit weiterführenden Themen in den Blick nehmen (Häsel-Weide, 2016a, S. 12). Diese Lernanlässe finden in der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption überwiegend in den zusätzlichen Förderschleifen statt, „um eine nicht zu bewältigende Doppelbelastung bei den rechenschwachen Lernenden [im Klassenunterricht, R.-F.K.] zu vermeiden: die der Aufbereitung der Basiskompetenzen und der aktuellen Unterrichtsinhalte“ (Hußmann et al., 2014, S. 7). Gleichermaßen ist die Fokussierung wesentlicher Inhalte relevant, da jene Lernende mehr Zeit zum Erkunden und Erlernen mathematischer Inhalte benötigen (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017a, S. 13). Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen sollen im Rahmen der Förderschleifen die Möglichkeit erhalten, ihr mathematisches Wissen aufzubauen, „das ihnen eine Verstehensgrundlage für die Auseinandersetzung mit dem aktuellen schulischen Lernstoff bietet“ (Hußmann et al., 2014, S. 8).

Die Schwerpunkte für die inhaltliche Ausgestaltung der Förderschleifen liegen auf wesentlichen Aspekten des arithmetischen Basisstoffs, die als elementare Voraussetzung für den Aufbau eines anschaulichen Bruchzahlverständnisses gelten, sowie auf zentralen Aspekten eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses. Die Konzentration auf einzelne Inhaltsbereiche im Sinne der fundamentalen Idee „ermöglicht eine Reduktion der ausgewählten Förderschwerpunkte und unterstützt eine fokussierte Auseinandersetzung mit individuellen Schwächen“ (Hußmann et al., 2014, S. 6). In Kapitel 4.1.2 und 4.2.2 wurden die relevanten Inhaltsbereiche im Rahmen der Sachanalyse ausführlich dargestellt. Wesentliches Kernstück der Förderschleifen ist die enge inhaltliche Vernetzung zu dem aktuellen Lerngegenstand des Mathematikunterrichts innerhalb der klassenintegrierten Förderung.

Den fünf Bausteinen der klassenintegrierten Förderung sind die folgenden zentralen Inhaltsbereiche zugeordnet (Abb. 10), die in den jeweiligen Förderschleifen ausführlich erarbeitet werden:

Kompetenzschwerpunkte arithmetischer Basisstoff

- beziehungsreiches Einmaleins und Einsdurcheins
- Beziehungen zwischen Multiplikation und Division
- Zahlzerlegung
- Halbieren und Verdoppeln
- Darstellungswechsel
- Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division
    - Aufteilen
    - Verteilen

Abbildung 10: Kompetenzschwerpunkte für den arithmetischen Basisstoff (eigene Darstellung)

Für die zusätzliche Förderung in den Kleingruppen werden die inhaltlichen Kompetenzbereiche in der jeweiligen Planungsübersicht erfasst (vgl. Kap. 5.2.2). Neben den inhaltlichen Kompetenzen spielt gleichermaßen wie in der klassenintegrierten Förderung auch die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen eine wesentliche Rolle.

Tabelle 3 zeigt die inhaltliche Einordnung der Förderschleifen in den Klassenunterricht und hebt grundlegend zu erarbeitende Aspekte sowie enge inhaltliche Verbindungen zu dem Unterricht auf Klassenebene hervor. Darüber hinaus wird die zeitliche und inhaltliche Einordnung der eingesetzten Standortbestimmungen (vgl. Kap. 5.4.1 und 6.3) abgebildet.

		Unterrichts-integrierte Förderung	**Förderschleifen**	*Erarbeitung grundlegender Aspekte für Klassenunterricht*	*Standort-bestimmungen*
Woche 1	**Baustein 1**		**(1.1) Förderschleife 1** Verdoppeln / Halbieren Umkehroperationen		
		Einheit 1			
			(1.2) Förderschleife 2 Verdoppeln / Halbieren Stammbrüche Bruchnamen	Merksatz / Merkplakat erstellen (mit Begriffen vervollständigen) -> „Experten"- Grundlage für 2.1	
Woche 2	**Baustein 2**		**(2.1) Förderschleife 1** beziehungsreiches 1·1 Stammbrüche Notation	Notation einfacher Stammbrüche einführen	
		Einheit 1			
		Einheit 2			*„Erfinde zu der Aufgabe 48 : 8 eine Rechengeschichte."*
			(2.2) Förderschleife 2 Fachbegriffe und strukturelle Zusammenhänge Stammbrüche Messen u Teilen von Längen		
Woche 3			**(2.3) Förderschleife 3** Verdoppeln / Halbieren beziehungsreiches 1·1 Nicht-Stammbrüche	relevante Fragen erarbeiten -> „Experten"-Grundlage für 2.3 | einfache Nicht-Stammbrüche erarbeiten | Bruchpuzzle erkunden als Grundlage Baustein 5.1	
		Einheit 3			
		Einheit 4			*„Schreibe eine Antwort an Becky."*
			(2.4) Förderschleife 4 Stamm- / Nicht-Stammbrüche		
Woche 4	**Baustein 3**		**(3.1) Förderschleife 1** beziehungsreiches 1·1 GV Division (Aufteilen und Verteilen)		
		Einheit 1			
		Einheit 2			*„Zeichne den Bruch (Anteil) $\frac{4}{6}$. Finde verschiedene Möglichkeiten.*
			(3.2) Förderschleife 2 beziehungsreiches 1·1		

			Mal-/ Geteiltaufgaben als Umkehraufgaben GV1 + GV2 Fachbegriffe		
Woche 5	**Baustein 4**		**(4.1) Förderschleife 1** beziehungsreiches 1·1 Mal-/ Geteiltaufgaben am Punktefeld Anteile einfacher Stammbrüche		
		Einheit 1			
		Einheit 2			*„Erfinde zu der Aufgabe 48 : 8 eine Rechengeschichte.“*
			(4.2) Förderschleife 2 Anteile von Stammbrüchen enaktiv GV Division (Verteilen) Teiler und Vielfache		
Woche 6			**(4.3) Förderschleife 3** Anteile von Stammbrüchen enaktiv und ikonisch GV Division (Verteilen) Teiler und Vielfache	Ikonische Ebene in Verbindung mit Verteilhandlung erarbeiten	
		Einheit 3			
	Baustein 5	**Einheit 1**			*„Schreibe eine Antwort an Becky.“*
			(4.4) Förderschleife 4 Anteile von Stammbrüchen ikonisch GV Division (Verteilen) Teiler und Vielfache kleines 1·1 / 1:1		
Woche 7			**(5.1) Förderschleife 1** Äquivalenz (flächige Darstellung) Messen und Falten von Längen kleines 1·1 / 1:1	großen Bruchstreifen als Modell herstellen	
		Einheit 2			
		Einheit 3			*„Zeichne den Bruch (Anteil) $\frac{4}{6}$. Finde verschiedene Möglichkeiten.*
			(5.2) Förderschleife 2 Äquivalenz (lineare Darstellung)		

Tabelle 3: Inhaltliche Einordnung der Förderschleifen in die unterrichtsintegrierte Förderung sowie Verortung der Standortbestimmungen

5.4 Fachdidaktische und methodische Schwerpunktlegung

Als weiterer Schritt der Konkretisierung der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption werden aufbauend auf den fachlichen Darlegungen die fachdidaktischen und methodischen Schwerpunkte erläutert. Die in diesem Kapitel aufgezeigten Entscheidungen wurden im Hinblick auf das Erreichen der inhaltlichen Ziele getroffen (Wember, 2009b, S. 240). Der Fokus liegt dabei auf der komprimierten Darstellung zentraler, in dem vorliegenden Entwicklungsprodukt vereinter Aspekte, die bereits in den Kapiteln 2.3.1 und 2.3.2 sowie 3.2.1 ausführlich ausgeführt wurden. Die vorliegende Unterrichts- und Förderkonzeption erhebt nicht den Anspruch, alle für sinnvoll empfundenen fachdidaktischen und methodischen Aspekte gleichermaßen zu berücksichtigen. Vielmehr geht es darum aufzuzeigen, wie möglichst viele dieser als lernförderlich erachteten Aspekte zielführend in die Gestaltung von inklusivem Unterricht und einer eng verbundenen Förderung integriert werden können.

5.4.1 Klassenintegrierte Förderung

Für die klassenintegrierte Förderung im inklusiven Mathematikunterricht wurden insbesondere die didaktischen Leitideen des Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung (vgl. Kap. 3.2.1) zugrunde gelegt und durch ausgewählte fachdidaktische und methodische Aspekte weiter spezifiziert und ergänzt. Die folgenden Prinzipien (vgl. Abb. 11) werden für die vorliegende Unterrichts- und Förderkonzeption ausgewählt:

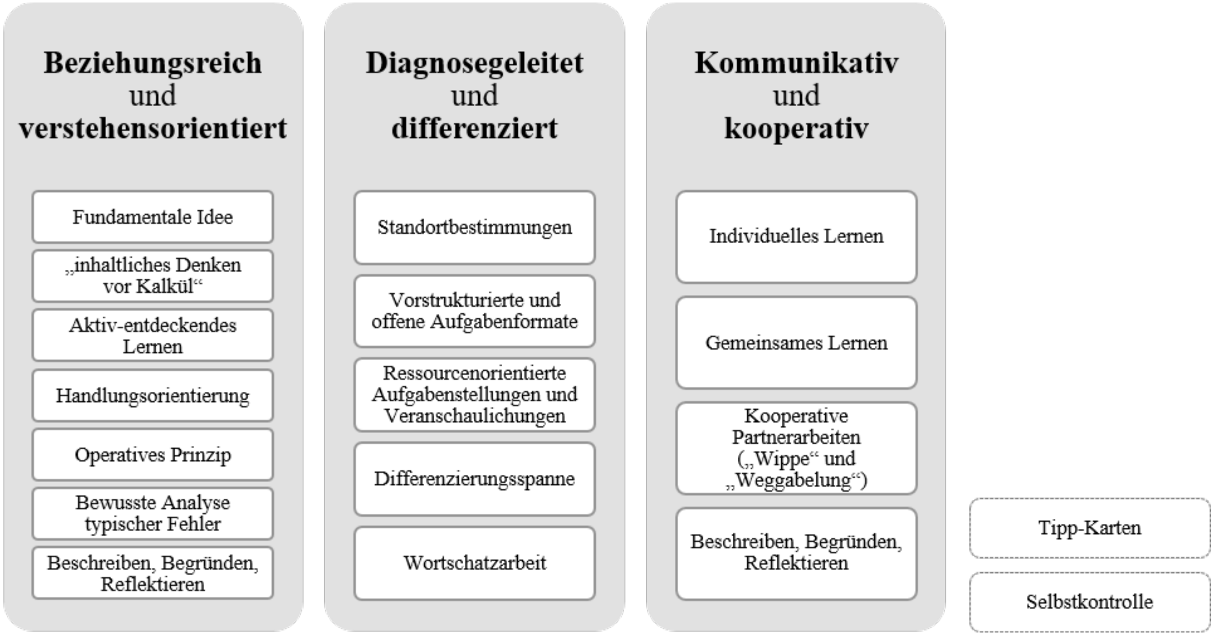


Abbildung 11: Didaktische Leitideen der Unterrichts- und Förderkonzeption (eigene angepasste und erweiterte Darstellung in Anlehnung an Bartnizky 2012)

Beziehungsreich und verstehensorientiert

Sowohl für den Klassenunterricht als auch für die Förderschleifen ist das Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kakül" (Prediger, 2009) handlungsleitend, das auf das anschauliche mathematische Verständnis der Lernenden zielt. Trotz der für den inklusiven Mathematikunterricht notwendigen Reduzierung der Inhalte auf zentrale Aspekte im Sinne der fundamentalen Idee werden die Lerngegenstände für alle Schülerinnen und Schüler ganzheitlich und beziehungsreich angeboten, sodass unterschiedlich tiefe individuelle Lernprozesse vollzogen werden können. Eng damit verbunden ist das aktiv-entdeckende Lernen, das auf die „Ermöglichung eigenständiger, problemlösender Auseinandersetzungs- und Lernprozesse" (Werning, B. & Lütje-Klose, 2016, S. 156) zielt und insbesondere über das handlungsorientierte Erkunden und Entdecken auf enaktiver, aber auch auf ikonischer Darstellungsebene angestrebt wird. Grundlage hierfür stellt das operative Prinzip dar. Das Erkennen, Beschreiben und Verstehen operativer Zusammenhänge wird vor allem durch die Fokussierung auf die Veränderungen der Trias Teil-Anteil-Ganzes initiiert und vor dem Hintergrund eines grundlegenden Verständnisses ausgebaut. Darüber hinaus wird an passenden Stellen die Auseinandersetzung mit fehlerhaften Beispielen sowie die gründliche Thematisierung von Fehlern initiiert, die zu einem „Aufbau von Abgrenzungswissen" (Padberg & Wartha, 2017, S. 5) führen soll, von dem insbesondere lernschwache Schülerinnen und Schüler profitieren.

Die Analyse von fehlerhaften Bearbeitungen soll einen kognitiven Konflikt hervorrufen und erweist sich als effektive metakognitive Aktivität für einen nachhaltigen Lernprozess. In der vorliegenden Unterrichtskonzeption handelt es sich um ein gezieltes Einsetzen bekannter Fehlermuster in Form von fremden Bearbeitungen, die das Finden und Widerlegen von typischen Fehlern, das Identifizieren und Erklären von Fehlermustern sowie die Entwicklung von Fehlerbearbeitungsstrategien herausfordern (Prediger & Wittmann, 2009, S. 7-8). Das bewusste Aufgreifen von Fehlern fördert darüber hinaus die prozessbezogenen Kompetenzen des Kommunizierens und Argumentierens (Wartha & Wittmann, 2009, S. 105).

Ergänzend zu den zentralen Inhaltsbereichen sind die prozessbezogenen Kompetenzen von Bedeutung. Neben der Beherrschung der mathematischen Inhalte ist es wesentlich, dass Lernende vor dem Hintergrund der prozessbezogenen Kompetenzen mit den Inhalten argumentieren, sie darstellen und in Sachsituationen nutzen können (Wartha, 2017, S. 286). Ein Hauptaugenmerk liegt auf dem Beschreiben und Begründen individueller Vorgehensweisen sowie der Reflexion und Evaluation individueller Bearbeitungswege auf der Grundlage inhaltlicher Vernetzungen (Padberg & Wartha, 2017, S. 6). Insbesondere offen gehaltene Aufgabenstellungen, die das Einfordern von Erklärungen („Was hast du herausgefunden?"; „Vergleiche! Was fällt dir auf?") sowie die Gegenüberstellung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden fokussieren, sollen zu einem tragfähigen und nachhaltigen Verständnisaufbau führen.

Diagnosegeleitet und differenziert

In der Unterrichtseinheit bearbeiten die Lernenden am Ende jeder Woche eine gesonderte offene Aufgabe, die als schriftliche Standortbestimmung dient und unter diagnostischen Gesichtspunkten eine hohe Aussagekraft über die aktuellen individuellen Lernstände aufweist (vgl. Kap. 6.3). Lernprozessbegleitend ermöglichen darüber hinaus insbesondere die offenen Aufgabenstellungen diagnostische Einblicke in die individuellen Denk- und Bearbeitungsprozesse der Schülerinnen und Schüler. Sowohl die Erfassung der jeweiligen Lernausgangslagen als auch die Lernergebnisdiagnosen werden im vorliegenden Forschungskontext anhand des informellen Testinstruments „BruKo" (Kap. 7) durchgeführt.

Die Differenzierung erfolgt in der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption auf unterschiedlichen Ebenen, um der Heterogenität der Lernenden gerecht werden und diese produktiv nutzen zu können. Die Vielfalt in gemeinsamen Lernsituationen soll durch ein differenziertes, aber inhaltlich aufeinander bezogenes Lernen gefördert werden.

Auf Ebene der Aufgaben ist es für den inklusiven Klassenunterricht von Bedeutung, Aufgabenformate im Hinblick auf spezifische Unterstützungen zu entwickeln, die nicht nur für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, sondern für alle Schülerinnen und Schülern einer heterogenen Lerngruppe förderlich sind (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a, S. 68). Im vorliegenden Kontext wurde im Sinne der Ressourcenorientierung besonderer Wert auf eine kurze, klare Struktur der Aufgabenstellung gelegt, um ein zielgerichtetes Arbeiten zu ermöglichen. Die Aufgabenstellungen wiederholen sich größtenteils in den Einheiten und die einzelnen Arbeitsschritte werden mit wiederkehrenden Symbolen visualisiert (vgl. Anhang F). Auf diese Weise kann das Arbeitsgedächtnis entlastet und die inhaltliche Arbeit unterstützt werden. Weiterhin sind die Aufgabenstellungen sprachlich aktivierend gestaltet.

Hinsichtlich der Aufgabenauswahl wird angesichts des enormen Arbeits- und Zeitaufwandes, den die Entwicklung einer hochdifferenzierten Lernumgebung erfordert, z.T. auch auf vorhandenes Unterrichts- und Fördermaterial bzw. auf geeignete Aufgaben aus bereits bestehenden Konzepten („*Mathe sicher können*", Prediger, Selter, Hußmann & Nührenbörger, 2014a) sowie Schulbüchern („*Mathewerkstatt 5*", Brauner et al., 2011) zurückgegriffen. Schindler (2017) hebt hervor, dass nicht „jede Aufgabe neu entwickelt und als Arbeitsblatt vorbereitet werden" (S. 9) müsse. Insgesamt ist das Material nicht an ein bestimmtes Lehrwerk gebunden, dennoch fand eine grundlegende Orientierung an bereits vorhandenen Materialien statt, deren konzeptuelle Ideen in Ansätzen aufgegriffen, weiterentwickelt und exemplarisch auf den inklusiven Mathematikunterricht ausgeweitet wurden.

Bei den eingesetzten Aufgaben handelt es sich überwiegend um gestuft differenzierte Aufgaben (vgl. Kap. 2.3.1; Leuders & Wittmann, 2017, S. 191-192) mit parallel struktur-analogem Aufbau. Die gestuften Arbeitsaufträge tragen zur Auflösung des gleichen Tempos bei. Gestufte Strategien, wie bspw. beim Erkunden operativer Strukturen, ermöglichen ein gestuftes Anspruchsniveau, sodass unterschiedliche Herangehensweisen in der differenzierenden Erkundungsphase den Zugang zur Fragestellung erleichtern können. Darüber hinaus tragen sie zu einem breiten mathematischen Kompetenzerwerb bei (Hußmann & Prediger, 2007, S. 3).

Weiterhin umfassen die Aufgaben im Kontext der inneren Differenzierung teilweise auch Aspekte der natürlichen Differenzierung und lassen sich auf der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten und zugrunde gelegten Differenzierungsspanne (Abb. 12) verorten. Die Differenzierungsspanne ist in drei flexible und durchlässige Bereiche eingeteilt, innerhalb derer der gemeinsame Lerngegenstand hinsichtlich unterschiedlicher inhaltlicher Erkenntnistiefen thematisiert wird. Die damit verbundenen variablen Anforderungen bzw. variierenden Komplexitätsgrade sind stets an der fundamentalen Idee orientiert.

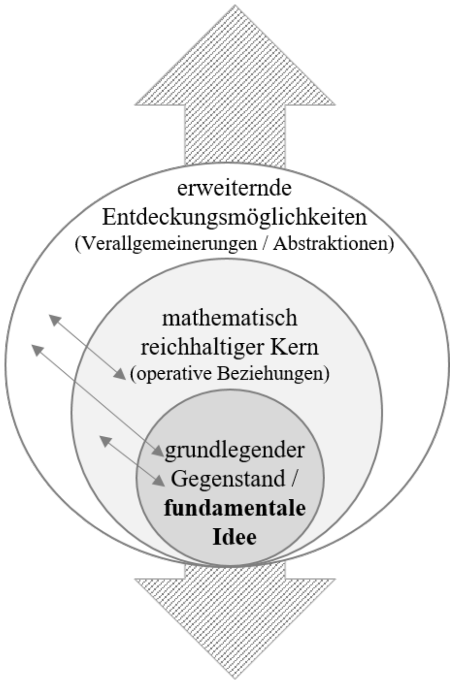


Abbildung 12: Differenzierungsspanne (eigene Darstellung)

Um allen Lernenden einen ersten Zugang zum Lerngegenstand zu ermöglichen und frühzeitige Frustrationserfahrungen zu verhindern, werden niedrige Zugangsschwellen gewählt. Jeder Lerngegenstand wird zunächst im Rahmen einer „Starter-Aufgabe“ von allen Lernenden bearbeitet. Diese Grundaufgabe behandelt den Lerngegenstand auf elementarer Ebene und enthält für alle Schülerinnen und Schüler, insbesondere für diejenigen mit (besonderen) Schwierigkeiten, die grundlegenden Erkenntnisse im Sinne der fundamentalen Idee. Durch die niedrigschwelligen Einstiege sollen keine Nachteile für diejenigen entstehen, die sich nur mit dieser Aufgabe auseinandersetzen. Darüber hinaus dienen die Aufgaben in diesem Bereich als minimale Grundlage für die kommunikativen und kooperativen (Partner-) Arbeitsphasen sowie für die Reflexionsphasen innerhalb der gesamten Lerngruppe. Der Aufbau vertiefender

Kompetenzen erfolgt durch die Zunahme inhaltlicher Komplexität. In Form der optionalen weiterführenden Arbeitsaufträge wird der gemeinsame Lerngegenstand zunächst hinsichtlich seines mathematisch reichhaltigen Kerns betrachtet. Damit verbunden ist in erster Linie das Erkunden operativer Strukturen und Beziehungen. Im Rahmen erweiternder Entdeckungsmöglichkeiten wird das Verallgemeinern und Abstrahieren bisheriger Lernzuwächse initiiert. Insbesondere die offenen Aufgabenformate ermöglichen darüber hinaus natürlich differenzierende Bearbeitungen. Bei den weiterführenden Arbeitsaufträgen handelt es sich um vergleichbare Inhaltsbereiche der Grundaufgabe, die aber auch neue Aspekte umfassen. Es werden sowohl die wiederholende Vernetzung und flexible Nutzung der grundlegenden mathematischen Vorstellungen im Sinne eines Transfers auf andere Zahlenbeispiele als auch weitere Entdeckungen auf zunehmend komplexeren Ebenen ermöglicht (Scherer, 2017, S. 208-209) und somit ein Von- und Miteinander-Lernen initiiert. Diese inhaltliche Reichhaltigkeit und fachliche Breite wirkt der Kritik einer rein quantitativ ausgerichteten Differenzierung entgegen. Die Differenzierung findet zwar einerseits über das individuelle Lerntempo hinsichtlich der Anzahl der bearbeiteten Aufgaben, andererseits aber auch über den damit einhergehenden steigenden Komplexitätsgrad statt.

Eine weitere inhaltliche Ausrichtung erfolgt bei einem Großteil der Aufgaben in Anlehnung an die drei Anforderungsbereiche des Kerncurriculums (Niedersächsisches Kultusministerium, 2012, S. 12):

- *Reproduzieren*: Anteile bestimmen
- *Zusammenhänge herstellen*: Entdeckungen und Auffälligkeiten beschreiben
- *Verallgemeinern und Reflektieren*: Muster fortsetzen, Vergleichen, verschiedene Darstellungsformen finden

Bei allen Aufgaben gilt es zu beachten, dass die objektiv gedachte Schwierigkeit nicht automatisch der tatsächlich empfundenen subjektiven Schwierigkeit entspricht. Es darf nicht von dem „kognitiven Potenzial der Aufgabe auf die kognitive Qualität der tatsächlichen Aufgabenbearbeitung“ (Leuders & Holzäpfel, 2011, S. 214) geschlossen werden, denn „die subjektive Einschätzung der Schülerinnen und Schüler selbst kann dabei erheblich vom Schwierigkeitsgrad abweichen, den die Lehrperson angenommen hat“ (Scherer, 2015, S. 274). Der Komplexitätsgrad einer Aufgabe lässt sich nur in sehr begrenztem Umfang im Vorfeld festlegen und ist im Sinne der qualitativen Differenzierung kritisch zu betrachten. Die auf theoretischer Ebene vorgenommene Einordnung der Aufgaben auf der Differenzierungsspanne dient lediglich als fachlich fundierte Orientierung. In der konkreten Bearbeitung liegt die tatsächliche Schwierigkeit letztlich in Abhängigkeit von ihrer personellen Lern- und Entwicklungsvoraussetzungen sowie der situativen Lern- und Entwicklungsbedingungen (Wember, 2009a, S. 89) bei den Lernenden.

Das mathematikdidaktische Prinzip der enaktiven, ikonischen und symbolischen Darstellungsebenen wird als zentrales Element in der gesamten Unterrichtseinheit berücksichtigt, um den Lerngegenstand an die heterogenen Bedürfnisse der Lernenden anzupassen und entsprechend differenziert darzustellen. Die eingesetzten Aufgaben enthalten vielfältige Arbeitsaufträge auf unterschiedlichen Darstellungsebenen und beziehen sukzessive komplexer werdende Veranschaulichungen mit ein. Der Darstellungswechsel im Sinne des intermodalen Transfers gilt als entscheidend für ein fachlich fundiertes Verständnis des jeweiligen Lerngegenstandes sowie für einen vernetzten Vorstellungsaufbau. Er wird innerhalb der gesamten Unterrichtseinheit häufiger anvisiert, um Abstraktionsprozesse zu unterstützen und umfängliche, flexible Vorstellungen zu entwickeln. Es kommen mehrfach Memories zum Einsatz, die den intermodalen Transfer auf spielerische Art und Weise fördern. Die Spielkarten umfassen sowohl ikonische als auch symbolische Bruchdarstellungen sowie die dazugehörigen Bruchnamen von Stamm- und Nicht-Stammbrüchen. Darüber hinaus enthalten einige Karten auch fehlerhafte ikonische Darstellungen, die von den Lernenden in dem Zuordnungs- und Sortierungsprozess als nicht passend erkannt werden müssen.

Besondere Aufmerksamkeit liegt bei der Auswahl der Arbeitsmittel und Veranschaulichungen auf struktur-fokussierenden Materialien, die „quasi kontextbereinigt mathematische Grundideen besonders klar herausstellen und den abstrakten Zahlenraum „sichtbar“ machen“ (Freesemann, 2014, S. 87; Ennemoser & Krajewski, 2007, S. 233). Es wird an passenden Stellen zwar durchaus Lebensweltbezug hergestellt, eine „alltagsnahe und fantasiereiche kontextuale Einbettung“ (Krajewski & Simanowski, 2017, S. 96) steht aber nicht im Mittelpunkt, um die Gedächtniskapazität der Lernenden zu schonen und die Aufmerksamkeit auf den mathematischen Inhalt zu fokussieren. „Ein gutes Darstellungsmittel ist eine äußerlich sichtbare Vorlage für die entstehende geistige Vorstellung des Zahlenraums“ (Krajewski & Simanowski, 2017, S. 103). Es werden primär rechteckige Darstellungen gewählt, die sowohl ein strukturiertes, kontinuierliches Ganzes (Baustein 1-3) als auch mehrere strukturierte, nicht-kontinuierliche Ganze (Baustein 3) abbilden. Mehrere nicht-kontinuierliche, strukturierte und nicht strukturierte Ganze (Baustein 4) werden auf enaktiver Ebene durch Plättchen bzw. auf ikonischer Ebene in Form von Punktedarstellungen visualisiert. Anhand der ausgewählten Arbeitsmittel und Veranschaulichungen sollen eigenständige Aktivitäten initiiert werden. Dabei ist jederzeit für alle Lernenden der Rückgriff auf didaktisches Material sowie enaktive Bearbeitungen möglich.

Die Aufgaben der Unterrichtseinheit umfassen unterschiedliche Darstellungs- und Dokumentationsanforderungen, die mit verschiedenen Zugangs- und Vorgehensweisen verbunden sind. Entsprechend der bereits dargelegten inhaltlichen Strukturierung variieren die Aufgabenstellungen in dem Grad ihrer Vorstrukturierung bzw. Öffnung. Dadurch soll eine Balance zwischen der strukturierten inhaltlichen Lenkung und der Offenheit für individuelle Denkprozesse geschaffen werden. „Die phasengerechte Balance zwischen Offenheit und Fokussierung für alle Lernenden ermöglicht, mathematische Potenziale aller Lernenden nicht zu übersehen und zu stärken“ (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 176). Die Grundaufgaben sind in der Regel eher relativ eng gehalten und vorstrukturiert, wohingegen die weiterführenden Aufgaben, die das Beschreiben und Erklären von Zusammenhängen erfordern, offen gestaltet sind. Insbesondere in den offenen Aufgaben bzw. den Aufgaben, die von den Lernenden eine eigenständige Fortführung bzw. frei wählbare Darstellungen fordern, findet eine Selbstdifferenzierung im Sinne der natürlichen Differenzierung statt. Die Dokumentationsanforderungen reichen von der Anteilsbestimmung durch den passenden symbolisch notierten Bruch über das Markieren und Einzeichnen von Anteilen in vorgegebenen Einteilungen bis hin zu eigenen, frei wählbaren Darstellungen. Für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen werden teilweise vorstrukturierte Arbeitsblätter bzw. zusätzliche Notationshilfen eingesetzt.

Als weiteres fachdidaktisch relevantes Element ist vor dem Hintergrund eines sprachsensiblen Mathematikunterrichts die Wortschatzarbeit anzusehen. In der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption fand diese vor allem durch den Einsatz von Wortspeichern (vgl. Anhang G) sowie die zielgerichtete fachspezifische Verwendung der Begrifflichkeiten, sowohl auf schriftlicher Ebene als auch mündlich im Unterrichtsgespräch, statt. Innerhalb eines Wortspeichers gilt es idealerweise die drei Ebenen der eigensprachlichen Ressourcen, der bildungssprachlichen Mittel sowie der Fachsprache zu berücksichtigen. Ähnlich der Funktion der struktur-fokussierten Veranschaulichungen und Arbeitsmittel wird versucht, die bewusste Verwendung mathematischer Sprache zu fokussieren, um die Aufmerksamkeit auch auf sprachlicher Ebene gezielt auf die mathematischen Inhalte zu lenken (Krajewski & Simanowski, 2017, S. 96). Zusätzlich zu den Wortspeichern werden die strukturierten Fragen zur Erarbeitung operativer Beziehungen gut sichtbar in jedem Klassenraum visualisiert und an entsprechenden Stellen im Unterricht aktiv mit einbezogen. Ebenso werden wichtige Merksätze als Lernhilfe für alle Schülerinnen und Schüler im Klassenraum visualisiert. Insbesondere die offenen Aufgaben erfordern sprachliche Mittel, damit die Schülerinnen und Schüler ihr individuelles Verständnis sowie ihre Lern- und Bearbeitungswege explizieren können. Die zur Verfügung gestellten Satzbausteine sollen bereits zu Beginn der Unterrichtseinheit die präzise Erläuterung der strukturellen Beziehungen unterstützen und im Laufe der Unterrichtseinheit immer selbstverständlicher Anwendung finden.

Kommunikativ und kooperativ

Hinsichtlich der eingesetzten Sozialformen steht das „Sowohl-als-auch"-Prinzip im Mittelpunkt der vorliegenden Unterrichtskonzeption. Entsprechend der bereits dargelegten Stundenstruktur werden sowohl Phasen des individuellen als auch des gemeinsamen Lernens einbezogen. Insbesondere die gemeinsamen Lernsituationen und die Kooperation am gemeinsamen Gegenstand nehmen in Anlehnung an das Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung eine elementare Bedeutung ein. Im Rahmen der vorliegenden Unterrichtseinheit wurde das kooperativ-strukturierte Mathematiklernen durch zwei methodische Formen der Partnerarbeit initiiert, die vor allem den wechselseitigen Austausch über die mathematischen Strukturen und Beziehungen zwischen den kooperierenden Lernpartnern fokussieren. Beide Partnerarbeitsformen regen sowohl eigenständige als auch kooperative Erkenntnisprozesse bei den Lernenden an. Die Partnerarbeit gilt als „dichteste und intensivste Interaktionsform" (Wittich, 2017, S. 79), in der sich die Schülerinnen und Schüler nur auf eine Teampartnerin oder einen Teampartner konzentrieren müssen. Von grundlegender Bedeutung ist die Verknüpfung auf methodischer, didaktischer und inhaltlicher Ebene, um in bestmöglicher Wechselwirkung „die Ziele der Lernumgebung zu transportieren" (Häsel-Weide, 2016c, S. 83).

Die kooperative Form der „Weggabelung“ (Häsel-Weide et al., 2014, S. 41) greift das „Sowohl-als-auch“-Prinzip in besonderer Weise auf. Nach einer Bearbeitungsphase in Einzelarbeit, in der sich die Lernenden individuell mit der jeweiligen Aufgabenstellung auseinandersetzen, werden die jeweiligen Kooperationspartner zusammengeführt, um auf dieser Grundlage eine vertiefende gemeinsame Bearbeitungs- bzw. Austauschphase zu bestreiten. Je nach Aufgabenstellung liegt der Schwerpunkt durchaus auf dem Vergleichen der Lösungen, vielmehr steht aber „die Diskussion der analogen oder womöglich gar gleichen Lösungen, die durch ähnliche oder unterschiedliche Rechnungen und Zahlenwerte erzielt worden sind“ (Häsel-Weide et al., 2014, S. 41), im Mittelpunkt. Daran anschließend erfolgt die gemeinsame Bearbeitung eines weiterführenden, die strukturellen Zusammenhänge aufgreifenden Arbeitsauftrags, der die Lernenden zur vertiefenden Anwendung ihrer mathematischen Überlegungen oder einer gemeinsamen Koproduktion anregt. Zusammen mit der abschließenden Reflexionsphase im Plenum lässt sich die „Weggabelung“ in Anlehnung an das dreischrittige Grundprinzip „Think-Pair-Share“ (Brüning & Saum, 2009) einordnen. In der ersten Phase (Think) erfolgt die individuelle, unterschiedlich tiefe Bearbeitung einer differenzierten Aufgabe zum gleichen Lerngegenstand. Die sogenannte „Starter-Aufgabe“ stellt den Ausgangspunkt und die Grundlage für die weitere gemeinsame Auseinandersetzung dar. Sie bietet sowohl einen niedrigschwelligen Einstieg als auch weiterführende Vertiefungen. In der zweiten Phase (Pair) steht der Austausch über Lösungen, Entdeckungen, Auffälligkeiten etc. mit der Teampartnerin oder dem Teampartner im Mittelpunkt sowie ggf. die gemeinsame Weiterarbeit und Vertiefung des Lerngegenstands. Die dritte Phase (Share) fokussiert die Präsentation der Ergebnisse und den reflektierenden Austausch im Plenum.

Die kooperative Form der „Wippe“ (Häsel-Weide et al., 2014, S. 41) stellt bereits von Beginn an die gemeinsame mathematische Bearbeitung einer Aufgabenstellung, die durch sich abwechselnde Aktivitäten gekennzeichnet ist, in den Mittelpunkt. Durch diese strukturierte Form der Kooperation können die Lernenden „abwechselnd Lösungen produzieren beziehungsweise abwechselnd aktiv bei der Darstellung und mathematischen Bearbeitung“ (Häsel-Weide et al., 2014, S. 41) sein. Beide in der vorliegenden Unterrichtskonzeption vorherrschenden Arbeitsformen eignen sich insbesondere auch für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, da sie durch ihre Strukturierungen die Möglichkeit der

Konzentration auf die inhaltliche Auseinandersetzung bieten und gleichzeitig die sozialen Kompetenzen berücksichtigen (Wittich, 2017, S. 80).

Als unterstützendes Hilfsmittel werden in vielen Einheiten Tipp-Karten für alle Schülerinnen und Schüler zur Verfügung gestellt, die angelehnt an die inhaltliche Rahmung als Lupen visualisiert sind. Die eingesetzten Tipp-Karten reichen von unspezifischen Anregungen über konkrete Hinweise zu strukturierten Vorgehensweisen bis hin zu weiteren Visualisierungen auf ikonischer Ebene. Aus didaktischer Sicht fördert der Einsatz von Tipp-Karten das eigenverantwortliche Lernen, da die Lernenden selbst entscheiden, ob und wann sie einen Tipp nutzen (Wember, 2017, S. 62). Die zur Verfügung gestellten Tipps dürfen allerdings nicht als unreflektierte Hilfen oder Lösungsvorlagen dienen, die eine Aufgabe simplifizieren. Vielmehr sollen sie eine zielgerichtete Unterstützung bei der Aufgabenbearbeitung darstellen (Scherer & Hähn, 2017, S. 26). Das konstruktive Nutzen der Tipp-Karten muss sowohl im Vorfeld als auch unter Umständen unterrichtsbegleitend mit den Lernenden thematisiert werden.

Um das eigenverantwortliche und selbstregulierte Lernen zu fördern, wird die Selbstkontrolle anhand von vorgegebenen Lösungen zu den Arbeitsblättern angestrebt. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Lehrkräfte nicht jede Aufgabe kontrollieren bzw. in der Reflexionsphase besprechen müssen. Da die Selbstkontrolle zunächst eigene Anforderungen an die Lernenden stellt (Schindler, 2017, S. 9), wie bspw. auf metakognitiver Ebene das in-Verbindung-Bringen der eigenen Lösungswege mit den vorgegebenen Lösungswegen (vgl. Prediger et al., 2011, S. 23), muss sie von der Lehrkraft begleitet eingeführt und geübt werden.

Alle hier dargestellten und im Rahmen der Unterrichtseinheit konkret eingeführten Strukturelemente stellen selbstverständlich keine Selbstläufer dar, sondern bedürfen der sukzessiven Erarbeitung und Einübung. Die Lernenden müssen dementsprechend parallel zu ihren inhaltlichen Lernprozessen auch ihre Methodenkompetenz weiter ausbauen.

5.4.2 Förderschleifen

Für die Kleingruppenförderung im Rahmen der Förderschleifen werden grundsätzlich zwar die gleichen didaktischen Prinzipien zugrunde gelegt, auf die auch die unterrichtsintegrierte Förderung aufbaut, vor dem Hintergrund einer zielführenden und sinnvollen Umsetzung ergeben sich allerdings kleine Änderungen bzw. Unterschiede.

Die für den Klassenunterricht bedeutsame natürliche Differenzierung stößt im Rahmen der Kleingruppenförderung bisweilen an ihre Grenzen. Das spezifische Aufarbeiten und Üben einzelner Inhaltsbereiche bedarf einer Fokussierung auf die jeweiligen Kompetenzen, der die natürliche Differenzierung nicht durchgehend gerecht werden kann (Prediger et al., 2011, S. 21). Im Rahmen der Förderschleifen findet eine stärker lehrergelenkte Vorgehensweise statt, die eine „möglichst spezifische und gezielte Intervention nahe am eigentlich zu fördernden Zielverhalten“ (Wember, 2016b, S. 163) ermöglichen soll. Ergänzend dazu erhält aber auch das aktiv-entdeckende Lernen einen besonderen Stellenwert, um sowohl einen fundierten Verständnisaufbau als auch das selbstständige Lernen zu fördern. Insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten kann in Anlehnung an Wember (2016b) hervorgehoben werden, dass sich Selbstständigkeit nicht lehren lässt, sondern „in Selbstverantwortung erprobt sein“ (S. 172) will. Die Heterogenität innerhalb der Kleingruppe erfordert es, die „manchmal disparaten und fast immer multivalenten Ziele durch verschiedene Methoden anzugehen; insofern sind strukturierte und geschlossene Phasen der Inhaltsvermittlung und des Fertigkeitstrainings angewiesen auf die Ergänzung durch offene Phasen explorativen und entdeckenden Lernens“ (Wember, 2016b, S. 172). Gerade die ganzheitlichen Zugänge zum Lerngegenstand und die damit verbundenen Freiräume für selbstbestimmte mathematische Handlungen ermöglichen die Förderung intrinsischer Motivation. Aufgrund der häufig erlebten Misserfolge und biographischen Erfahrungen des Schulversagens ist diese für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen von elementarer Bedeutung. Sie bedürfen vermehrt emotionaler Unterstützung, um sich auf das aktive Erkunden neuer Lerngegenstände bzw. das verständige und intensive Aufarbeiten von Verständnislücken einlassen zu können (Werning, B. & Lütje-Klose, 2016, S. 156). Im Zusammenhang damit steht das individuelle Kompetenzerleben im Unterricht (Wember, 2017, S. 58). Vor dem Hintergrund der engen Verknüpfung zwischen Klassenunterricht und zusätzlicher Förderung liegt eine Hauptaufgabe und Chance der Förderschleifen neben der inhaltlichen Arbeit auch in der Entwicklung und dem Ausbau eines positiven Kompetenzerlebens. Die dem Klassenunterricht vorangeschalteten Förderschleifen, in denen inhaltlich vorgearbeitet wird, eignen sich in besonderer Weise zum Aufbau von Kompetenzvorsprüngen. Diese können die zusätzlich geförderten Schülerinnen und Schüler an gegebener Stelle in Form von Expertenrollen in den Klassenunterricht einbringen.

Innerhalb der Förderschleifen findet eine bewusste Anregung von Austauschprozessen durch geeignete Fragen sowie den Einsatz konkreter Materialien statt. Stärker als im Klassenunterricht steht die gemeinsame Erarbeitung sowie Kommunikation über die mathematischen Inhalte im Vordergrund, „denn gerade die mathematikbezogenen Förderkinder können sich neue Inhalte selten selbstständig erarbeiten“ (Ademmer et al., 2018, S. 306). In den Förderschleifen steht den Schülerinnen und Schülern Unterstützungsmaterial in Form von zusätzlichen Visualisierungen, Vorstrukturierungen bzw. konkreten didaktischen Materialien (bspw. Dienes-Material, Bruchpuzzle, …) zur Verfügung, um Überforderung und Entmutigung zu vermeiden und den inhaltlichen Kompetenzaufbau zu unterstützen.

Stärker als auf Ebene des Klassenunterrichts finden im Rahmen der Förderschleifen spielerische und explorierende Phasen statt, um die Lerninhalte möglichst motivierend zu erarbeiten. Als weitere motivierende Unterstützungsmaßnahme erhalten die Lernenden der Förderschleife ein „Forscher-Team-Stempelheft“, in dem sie am Ende jeder Förderschleife gemessen an ihren individuellen Fortschritten Stempel für eine motivierte und konzentrierte Mitarbeit sammeln können. Der Fokus liegt auf der positiven Verstärkung. Die Kriterien für das Erreichen eines Stempels sowie für die erforderliche Belohnungsgrenze werden im Vorfeld gemeinsam festgelegt und sind den Schülerinnen und Schülern transparent. Als Stempel werden kreisförmige Brucheinteilungen gewählt, sodass die Stempelvergabe auf spielerische Art und Weise mit dem Benennen und Markieren von Stammbrüchen verbunden werden kann.

5.5 Ausgewählte konkrete Beispiele

Die theoretisch fundierte Ausarbeitung und Entwicklung konkreter Materialien für die Unterrichts- und Förderkonzeption stellt eins der beiden Entwicklungsprodukte der vorliegenden Arbeit dar. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden einzelne Unterrichtsstunden, Förderschleifen und Aufgaben exemplarisch vorgestellt. Die ausgewählten Darlegungen können nicht die Fülle der fachlichen und didaktisch-methodischen Aspekte der gesamten Unterrichtseinheit in Gänze wiedergeben. Vielmehr soll anhand der Beispiele aufgezeigt werden, wie zentrale Gestaltungsprinzipien im Rahmen der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption umgesetzt werden.

5.5.1 Baustein 2, Unterrichtseinheit 1: *Unterrichtsstunde der klassenintegrierten Förderung*

Als beispielhafte Unterrichtsstunde der klassenintegrierten Förderung wird die erste Einheit des zweiten Bausteins (vgl. Anhang A 1) analysiert. Die Stunde führt zielorientiert auf das Erkunden der ersten Grundvorstellung „Bruch als Teil *eines* Ganzen“ hin. Es werden erste grundlegende Erkenntnisse bezüglich des Herstellens, Erkennens und Beschreibens von Stammbrüchen sowie das Erkunden erster Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem angebahnt.

Die Spanne möglicher inhaltlicher Kompetenzen umfasst folgende Aspekte:

Die Lernenden

- stellen Bruchteile / Stammbrüche durch Falten her (ein Ganzes in gleiche Teile teilen).
- erkunden verschiedene Faltmöglichkeiten und Papierformen, um (gleiche) Anteile darzustellen.
- lernen die Fachbegriffe, symbolische Notation und Aussprechweise von Stammbrüchen kennen.
- erkunden die konzeptuelle Bedeutung von Zähler und Nenner im Sinne der ersten Grundvorstellung.
- lernen das Lesen von (symbolisch dargestellten) Stammbrüchen.
- erkennen, bestimmen und lesen einfache Bruchteile (Anteile) bzw. Stammbrüche aus gefalteten Darstellungen ab.
- erkennen die Vielfalt von Darstellungsformen (Gemeinsamkeiten und Unterschiede).
- übersetzen zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Darstellungsformen.
- untersuchen erste Zusammenhänge der Trias Teil-Anteil-Ganzes
    - Fokus auf Teile / Unterteilung
    - Ganzes als Bezugsgröße.

Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass

- „gerechtes“ Aufteilen i.S. „gleich groß“ bedeutet, dass alle Teile gleich groß sein müssen.
- gefaltete Teile eines Blattes mit Bruchzahlen beschrieben werden können.
- ein Teil in Zusammenhang mit allen restlichen Teilen steht.
- ein Ganzes in verschiedene Teile zerlegt werden kann und alle Teile zusammen ein Ganzes ergeben.
- der Nenner (i.S. GV1) angibt, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt ist.
- der Zähler (i.S. GV1) die Anzahl der relevanten Teile angibt.
- die absolute Größe des Ganzen Auswirkungen auf die absolute Größe des Teils hat.

- der gleiche Anteil bei unterschiedlichen Papierformen (Ganzen) unterschiedlich aussehende Teile hat.

Bei den eingesetzten Aufgaben der exemplarischen Einheit kommt die Verknüpfung inhaltsbezogener und prozessbezogener Kompetenzen zum Tragen. Hinsichtlich der prozessbezogenen Kompetenzen werden in der Unterrichtsstunde folgende Aspekte berücksichtigt und gefördert:

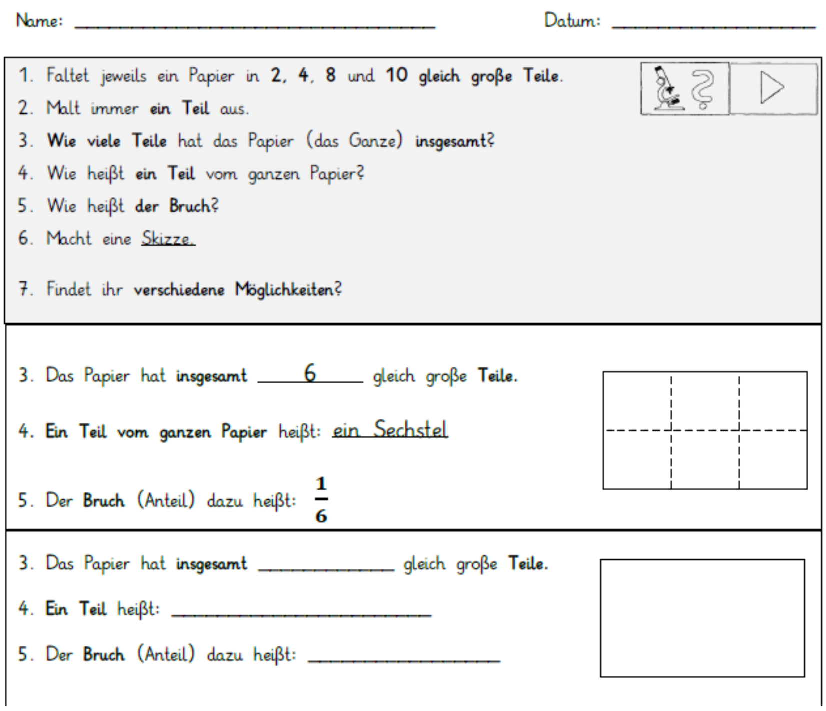
- Argumentieren
  - Erkunden
  - Aufstellen von Vermutungen
  - Begründen
- Kommunizieren
  - Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen
  - Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen
  - Aufnehmen mathematischer Informationen
  - Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team
- Problemlösen
  - Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen
  - Vermutungen aufstellen, systematisch ausprobieren und reflektieren
  - Erschließen von Zusammenhängen

Der gemeinsame Einstieg im Plenum (Sitzkreis) fokussiert anhand des Faltens von großen Papprechtecken[9] einen ersten Zugang zu dem handlungsorientierten Herstellen von Bruchteilen sowie dem Erkunden verschiedener Darstellungsmöglichkeiten. Die gewählte Form des Rechtecks ermöglicht ein Anknüpfen an die in der vorherigen Unterrichtsstunde eingesetzten Materialien. Die kontextbezogenen, alltagsnahen Erfahrungen des gerechten Verteilens aus dem ersten Baustein werden handlungsorientiert abstrahiert und das Verständnis für „gerechtes" Verteilen im Sinne gleich großer Teile wird gefestigt. Anhand des kognitiven Konflikts „Wie kann ich das Rechteck in gleich große Teile einteilen?" erarbeiten sich die Lernenden einen ersten Zugang zu den Zusammenhängen zwischen dem Ganzen und seinen Teilen. Diese Erkundungen werden durch die strukturierten Fragen der Lehrkräfte („Was ist das Ganze?", „In wie viele Teile ist das Ganze geteilt?", „Wie heißt ein Teil?", „Wie heißt der Bruch?") zielführend unterstützt. Durch das Einfärben einzelner Teile werden gemeinsam

[9] Die Aufgabe wurde angelehnt an „*Mathe sicher können*" (B1 A, 1.1) für den vorliegenden Stundeneinstieg adaptiert.

einfache Stammbrüche abgeleitet. Einstiege dieser Art eignen sich einerseits dazu, vereinzelt vorhandene Erfahrungsdefizite zu kompensieren (Leuders & Prediger, 2012, S. 41) sowie eine gemeinsame Arbeitsgrundlage für die daran anschließende Arbeitsphase zu schaffen. Andererseits werden Kinder mit einbezogen, die noch verstärkter Unterstützung auf der handlungsorientierten Ebene bedürfen (Scherer, 2017, S. 200).

Die Arbeitsphase wird in Form der klassischen Partnerarbeit umgesetzt. Die Forscherteams erhalten rechteckiges Papier in verschiedenen Größen sowie ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt für die gemeinsam zu bearbeitende „Starter-Aufgabe“ (Abb. 13), die nachfolgend auszugsweise dargestellt ist:



Name: ____________________ Datum: ____________

1. Faltet jeweils ein Papier in **2, 4, 8** und **10 gleich große Teile**.
2. Malt immer **ein Teil** aus.
3. **Wie viele Teile** hat das Papier (das Ganze) **insgesamt**?
4. Wie heißt **ein Teil** vom ganzen Papier?
5. Wie heißt **der Bruch**?
6. Macht eine Skizze.

7. Findet ihr **verschiedene Möglichkeiten**?

3. Das Papier hat **insgesamt** 6 gleich große **Teile**.
4. **Ein Teil vom ganzen Papier** heißt: ein Sechstel
5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: $\frac{1}{6}$

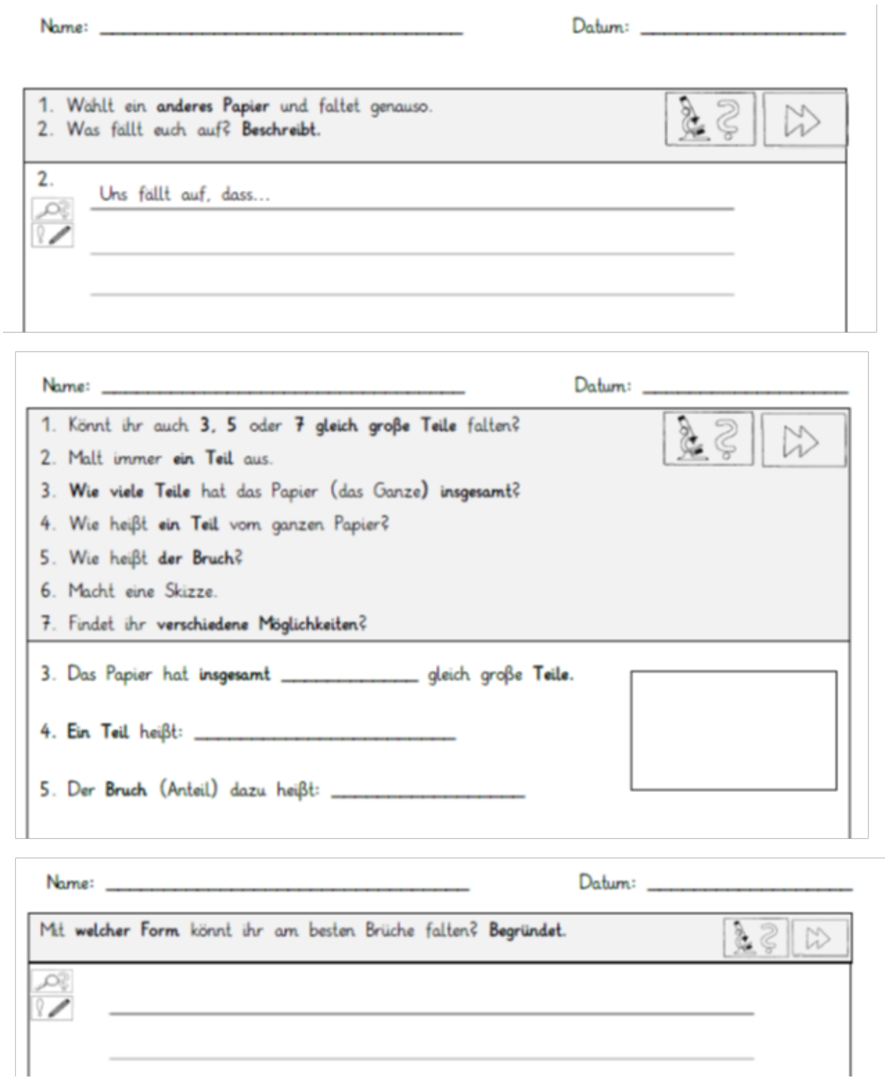
3. Das Papier hat **insgesamt** ____________ gleich große **Teile**.
4. **Ein Teil** heißt: ____________________
5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ______________

Abbildung 13: Auszug der "Starter-Aufgabe" aus Baustein 2, Einheit 1 (vollständiges Arbeitsblatt vgl. Anhang H 1)

Es findet eine Verknüpfung des handlungsorientierten Faltens auf enaktiver Ebene mit ersten Strukturierungen auf ikonischer Ebene statt. Die Lernenden werden dazu aufgefordert, ihre gefalteten Einteilungen in die ikonische Skizze zu übertragen. Die strukturierten Fragen aus der Einstiegsphase werden in den Arbeitsaufträgen wieder aufgegriffen, um die Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem zu fokussieren. Gleichzeitig werden die Bruchnamen sowie deren symbolische Schreibweise eingeübt.

> Der handelnde Herstellungsprozess konkreter Brüche entspricht den mathematischen Operationen und kann diese gesondert betonen […]. Das Teilen der Einheit wird durch das Falten in gleich große Teile, das anschließende Auswählen von Teilen durch das Färben dieser ausgeführt. Wichtig ist hierbei, dass die enaktive Ebene nicht sich selbst überlassen wird, sondern die Prozesse in die mathematische Symbolik […] übersetzt werden. (Wartha & Wittmann, 2009, S. 102)

Die weiterführenden Arbeitsaufträge[10] (vgl. Anhang H 1) zeichnen sich durch eine zunehmende Öffnung und Verallgemeinerung des Lerngegenstands aus. Einen Einblick liefern die nachfolgend abgebildeten Auszüge (Abb.14):


Name: ______________ Datum: ______________

1. Wählt ein **anderes Papier** und faltet genauso.
2. Was fällt euch auf? **Beschreibt.**

2. Uns fällt auf, dass…

Name: ______________ Datum: ______________

1. Könnt ihr auch **3, 5** oder **7 gleich große Teile** falten?
2. Malt immer **ein Teil** aus.
3. **Wie viele Teile** hat das Papier (das **Ganze**) **insgesamt**?
4. Wie heißt **ein Teil** vom ganzen Papier?
5. Wie heißt **der Bruch**?
6. Macht eine Skizze.
7. Findet ihr **verschiedene Möglichkeiten**?

3. Das Papier hat **insgesamt** ______ gleich große **Teile.**

4. **Ein Teil** heißt: ______

5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ______

Name: ______________ Datum: ______________

Mit **welcher Form** könnt ihr am besten Brüche falten? **Begründet.**

Abbildung 14: Auszug der weiterführenden Aufgaben aus Baustein 2, Einheit 1 (vollständige Arbeitsblätter vgl. Anhang H 1)

[10] Die eingesetzten Aufgaben wurden in Anlehnung „*Mathewerkstatt 5*" (S.113, Nr. 24) für den vorliegenden Unterrichtseinsatz adaptiert.

Für eine gemeinsame Reflexionsphase (Halbkreis vor der Tafel) bietet es sich an, einzelne Lösungen der Schülerinnen und Schüler zu sammeln, um die Vielfalt an Vorgehens- und Lösungsmöglichkeiten anzudeuten. Auf diese Weise werden die Lernenden bereits zu diesem frühen Zeitpunkt der Unterrichtseinheit dafür sensibilisiert, dass es mehr als eine richtige Lösung sowie verschiedene Erkenntnisse gibt. Die Sammlung der Arbeitsergebnisse an der Tafel wird abschließend ergänzend unterstützt durch ein Lernplakat, das die zusätzlich geförderten Schülerinnen und Schüler in der vorangeschalteten Förderschleife erarbeitet haben. Als Experten präsentieren sie einfache Stammbrüche, die sowohl ikonisch als auch symbolisch dargestellt sind. Das Lernplakat wird gut sichtbar für alle Lernenden im Klassenraum platziert. Im Anschluss an die Präsentation der zentralen Stammbrüche findet der Transfer auf die gesammelten Arbeitsergebnisse der Partnerarbeitsphase statt. Die symbolischen Schreibweisen sowie die dazugehörigen Bruchnamen werden als magnetisches Material den entsprechenden Faltungen zugeordnet, sodass die handelnde Ebene mit der symbolischen Ebene verbunden wird. Die Namen der Begriffe „Ganzes, Teil, Anteil, Bruch, Nenner, Zähler, Bruchstrich" werden ohne Aneignungshandlung einfach genannt, „da Bezeichnungen nicht aktiv erarbeitet werden" (Leuders & Prediger, 2012, S. 53) können. Gleichwohl liegt in dem abschließenden Unterrichtsgespräch sowie in den anschließenden Unterrichtsstunden ein großer Schwerpunkt auf der Erarbeitung ihrer konzeptuellen Bedeutung in enger Verbindung zu den jeweiligen Bruchdarstellungen („Was fällt euch auf? Was habt ihr entdeckt?", „Woran kann man … erkennen?", …).

Die eingesetzten Aufgaben beinhalten ein breites Spektrum an Differenzierungsmöglichkeiten sowie mathematischen Tätigkeiten und sind für unterschiedliche Leistungsniveaus einsetzbar. Die Lernsituation weist eine hinreichende Offenheit auf, die es den Schülerinnen und Schülern im Sinne einer natürlichen Selbstdifferenzierung ermöglicht, auf unterschiedlichen Wegen und Kompliziertheitsniveaus verschiedene Faltmöglichkeiten zu erkunden und dadurch Bruchteile zu erzeugen. Der handlungsorientierte Zugang ermöglicht einen niedrigschwelligen Einstieg und somit einen ersten Zugang für alle Lernenden. Gleichzeitig können durch verschiedene Herangehensweisen sowie durch vielfältige Materialien (Quadrate, Rechtecke und Kreise in verschiedenen Papiergrößen) unterschiedlich tiefe Erkenntnisse gewonnen werden, die sukzessive verallgemeinert und erweitert werden können. Durch ein systematisch-probierendes Vorgehen kann ein vorausschauendes, geplantes und systematisches Falten angebahnt werden.

Die Schülerinnen und Schüler müssen die mathematischen Strukturen selbst konstruieren, wobei der gewählte Komplexitätsgrad in Abhängigkeit der jeweiligen individuellen Voraussetzungen und Kompetenzen variiert. Auf diese Weise werden der heterogenen Schülerschaft anhand eines gemeinsamen Lerngegenstandes individuelle Lerngelegenheiten geboten und individuelle Spielräume eröffnet, sodass Unter- und Überforderungen reduziert werden können. Individuelle Unterstützungsbedarfe werden berücksichtigt und es findet eine Wertschätzung der vielfältigen Vorgehensweisen und Leistungen der Schülerinnen und Schüler statt.

Vor dem Hintergrund der Differenzierungsspanne lässt sich das Erkunden verschiedener Faltmöglichkeiten in allen drei Bereichen einordnen. Der zentrale Lerngegenstand der ersten Grundvorstellung kann sowohl auf grundlegender, basaler Ebene erarbeitet werden als auch vor dem Hintergrund seines mathematisch reichhaltigen Kerns sowie erweiternder Entdeckungsmöglichkeiten erforscht werden. Die eingesetzten Aufgaben haben das Potential, allen Kindern arithmetische Zusammenhänge nicht allein oberflächlich zu ermöglichen, sondern das bewusste Erkennen, Nutzen, Beschreiben und auch Begründen zu fördern (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2015a). Die Lernumgebung ermöglicht nicht nur für Lernende mit (besonderem) Potential vertiefende Aufträge. Um das reichhaltige Differenzierungspotential der Erkundungsaufgabe auszuschöpfen, erfolgen in den weiterführenden Arbeitsaufträgen gestufte Impulse, die u.a. einen ersten Größenvergleich zwischen verschiedenen Bruchzahlen oder unterschiedlich dargestellten Brüchen fokussieren. Parallel steigt durch die stärkere Öffnung der Aufgaben sowie den zunehmenden Anspruch an die prozessbezogenen Kompetenzen des Beschreibens und Begründens der sprachliche Anspruch. Durch die gemeinsame Bearbeitung der eingesetzten Aufgaben wird darüber hinaus das Kommunizieren gefördert, da die Lernenden ihre konkreten Handlungen gleichzeitig versprachlichen müssen (Wartha, 2017, S. 302). Im Sinne des Spiralprinzips können in der Lernumgebung erste Erfahrungen hinsichtlich der Äquivalenz von Bruchzahlen im Sinne des Verfeinerns und Vergröberns angebahnt werden. Durch das Falten von rechteckigen Papierblättern können leicht Verfeinerungen einer vorgegebenen Unterteilung gefunden werden. Der jeweilige Anteil bleibt gleich, es verändert sich jedoch die Anzahl der Unterteilungen. Der gleiche Anteil kann somit leicht durch verschiedene, aber gleichwertige Bruchzahlen beschrieben werden (Padberg & Wartha, 2017, S. 43). Umgekehrt betrachtet ermöglichen die gefalteten Blätter das Erkennen des Vergröberns. Die gefalteten Papiere werden in der ersten Einheit in Baustein 5 wieder aufgegriffen.

Die Hürden bzw. kritischen Stellen innerhalb dieser Unterrichtsstunde liegen zum einen in dem motorischen Anspruch des gleichmäßigen Faltens sowie dem dafür notwendigen Verständnis der gleichmäßigen bzw. gleichgroßen Einteilung der Bruchteile. Zum anderen wird das Hineindeuten erster Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem in das konkrete Material gefordert sowie die Transferleistung, nach dem Markieren des Teils den jeweiligen Stammbruch zu bestimmen und in der symbolischen Schreibweise darzustellen. Die Lernenden müssen erkennen, dass die Unterteilung des Papiers den Nenner darstellt bzw. umgekehrt der Nenner angibt, in wie viele Teile das Ganze gefaltet bzw. eingeteilt ist. Darüber hinaus gilt es, eine Verbindung bzw. Beziehung zwischen den verschiedenen Darstellungen, d.h. den neu eingeführten Fachbegriffen, der symbolischen Schreibweise und dem gefalteten Papier, herzustellen.

In Bezug auf die enge inhaltliche Verbindung zu den Förderschleifen wird in dieser Unterrichtsstunde insbesondere der mathematische Basisstoff des Halbierens und Verdoppelns sowie des Aufteilens im Sinne der Division angesprochen. In Anlehnung an das Kompetenzerleben der Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im gemeinsamen Mathematikunterricht trägt das Präsentieren des Lernplakats in Form der Expertenrollen einen zentralen Beitrag bei.

5.5.2 Förderschleife 3, Baustein 2 und Baustein 5, Einheit 1: *Verzahnung Förderschleife – klassenintegrierte Förderung*

Als weitere Beispiele der engen Verzahnung zwischen klassenintegrierter Förderung und Förderschleife werden nachfolgend die erste Einheit des fünften Bausteins für den Klassenunterricht sowie die dritte Förderschleife des zweiten Bausteins analysiert. „Die Implementation spezifischer Unterstützungsmaßnahmen für schwache Lernende in den Mathematikunterricht ist ein zentrales Thema. Es ist notwendig, Konzepte zu entwickeln und zu evaluieren, die eine Passung zwischen den Lernbedürfnissen und der Förderung bieten“ (Freesemann, 2014, S. 194). Exemplarisch wird einerseits dargestellt, wie Elemente aus vorherigen Stunden im Verlauf der Unterrichtseinheit wieder aufgegriffen und weiter vertieft werden. Andererseits verdeutlicht das gewählte Beispiel, wie die Aufgaben der zusätzlichen Förderung aus der gemeinsamen Arbeit im Klassenunterricht erwachsen und wieder in diese gemeinsame Arbeit hineinführen. Sowohl das Kompetenzerleben für die Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten als auch der ständige inhaltliche Bezug zu der heterogenen Lerngruppe stellen im Sinne der Anschlussfähigkeit und Sinnhaftigkeit einen zentralen inklusiven Moment der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption dar.

Die exemplarisch ausgewählte Förderschleife 3 aus Baustein 2 verdeutlicht, wie Fördermaßnahmen in die Gestaltung des Unterrichts auf Klassenebene integriert werden können. Dabei wird sowohl die Verknüpfung auf inhaltlicher als auch auf methodischer Ebene vor dem Hintergrund des Kompetenzerlebens berücksichtigt.

Als intendierte Kompetenzschwerpunkte umfasst diese Förderschleife bezüglich des arithmetischen Basisstoffs das beziehungsreiche Einmaleins. Hinsichtlich des aktuellen Inhalts der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen sollen zunächst die zentralen Stammbrüche gefestigt sowie erste Nicht-Stammbrüche erarbeitet werden. Darauf aufbauend stehen das Erkennen von Nicht-Stammbrüchen sowie das Zuordnen ikonischer und symbolischer Darstellungen im Mittelpunkt.

In dem spielerischen Einstieg der Kleingruppenförderung findet zunächst die beziehungsreiche Festigung der Kernaufgaben des kleinen Einmaleins in einem Würfelspiel statt. Daran anschließend werden mithilfe von zwei Zehnerwürfeln gemischte Aufgaben gewürfelt und gelöst. Diese Einstiegsphase dient sowohl der spielerischen Motivierung der Lernenden als auch der Wiederholung und Festigung zentraler Aspekte des arithmetischen Basisstoffs.

In der darauf folgenden Arbeitsphase erhalten die Lernenden ein Bruchpuzzle, das sie in Partnerarbeit in einem ersten Schritt frei und explorativ erkunden. In einem zweiten Schritt erfolgt die strukturierte Bearbeitung anhand eines Arbeitsblattes, das in abgewandelter Form in der ersten Einheit des fünften Bausteins auf Klassenunterrichtsebene erneut eingesetzt wird (s.u.). Die Struktur des Arbeitsblattes wird zunächst im Plenum im Sinne der Zieltransparenz besprochen, um eine gemeinsame Arbeitsgrundlage für die kooperative Partnerarbeit zu schaffen. Inhaltlich liegt der Fokus auf der Erarbeitung der Zusammenhänge der Trias Teil, Anteil, Ganzes.

In der gemeinsamen Reflexionsphase sichern die Lernenden ihre Kenntnisse zu den Stammbrüchen. Entsprechend der farblichen Gestaltung der Bruchpuzzleteile[11] wird ein Lernplakat erstellt, das im weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit (Baustein 5, Einheit 1) vor dem Hintergrund der inhaltlichen Verknüpfung und des Kompetenzerlebens im Klassenunterricht eingesetzt wird (s.u.). Parallel dazu werden für die Anteilsbestimmung relevante strukturierende Fragen in Form eines Wort- bzw. Fragenspeichers festgehalten, die als inhaltlich fokussierende sowie sprachlich unterstützende Arbeitsgrundlage dienen. Die Fragen wurden bereits in vorherigen Unterrichtseinheiten (bspw. Baustein 2, Einheit 1) eingeführt. Darauf aufbauend erfolgt mithilfe der Förderlehrkraft die Erarbeitung erster Nicht-Stammbrüche. Unter Berücksichtigung der sprachlichen Anforderungen wird besonderer Wert auf die korrekte Anwendung der bisher eingeführten Fachbegriffe gelegt und das Beschreiben der strukturellen Beziehungen bzw. Veränderungen bei Nicht-Stammbrüchen fokussiert.

Das hier eingesetzte Material in Form der Bruchpuzzle eignet sich sowohl zur Erarbeitung und Festigung von Stamm- als auch von Nicht-Stammbrüchen, da es eine strukturfokussierte Repräsentation der Trias Teil-Anteil-Ganzes bietet. Das Handeln am Bruchpuzzle als konkretes Material, das strukturiert und umgeordnet werden kann, ermöglicht das Erkennen struktureller Zusammenhänge (Schink & Meyer, 2013, S. 7). Insbesondere für den Einsatz in den Förderschleifen eignen sich Bruchpuzzle, um grundlegende Kompetenzen und beziehungsreiche Zusammenhänge im Bereich der ersten Grundvorstellung zu festigen.

> Die Erkundung von Auslegemöglichkeiten und die Bestimmung der Größe einer anteilsmäßig ausgelegten Fläche geben vielfältige Anlässe, sich über die relative Größe der einzelnen Stückelungselemente untereinander Gedanken zu machen und mit der Idee von Zweiteln (Hälften), Dritteln, Vierteln oder auch anderen Stückelungen vertraut zu werden. Je mehr gleich große Stücke zur Auslegung einer Fläche benötigt werden, desto kleiner sind sie. (Schwank, 2009, S. 119)

Auf dieses grundlegende Verständnis aufbauend kann anhand von Bruchpuzzeln das Nachlegen und Vergleichen verschiedener Anteile ermöglicht und somit eine erste Einsicht in die Äquivalenz von Bruchzahlen gefördert werden (vgl. Baustein 5, Einheit 1).

[11] Im Sinne eines flexiblen, von konkretem Material losgelöstem Verständnisses bietet sich eine variierende Farbgebung der einzelnen Bruchpuzzleteile an, die im Rahmen der vorliegenden Unterrichts- und Förderkonzeption vor dem Hintergrund der Aufgabenstellungen sowie der ökonomischen Materialerstellung jedoch nur schwierig umzusetzen wäre.

Nach der Reflexion im Plenum erfolgt die gemeinsame Erarbeitung der ikonischen Anteilsbestimmung von Nicht-Stammbrüchen unter Rückbezug auf die relevanten Fragen. Optional kann das dazugehörige Arbeitsblatt je nach Konzentrationsfähigkeit der Lernenden und zeitlichen Ressourcen entweder gemeinsam oder individuell bearbeitet werden.

Die Fördereinheit abschließend spielen die Lernenden ein Domino zu Nicht-Stammbrüchen und festigen damit noch einmal das Erkennen von Nicht-Stammbrüchen in unterschiedlichen Darstellungen.

Die Unterrichtsstunde Baustein 5, Einheit 1 zielt auf das Erkunden erster Einsichten in die Gleichwertigkeit von Bruchzahlen in flächigen Darstellungen. Die Spanne möglicher inhaltlicher Kompetenzen umfasst folgende Aspekte:

Die Lernenden

- erkunden verschiedene Faltmöglichkeiten, um den gleichen Teil durch äquivalente Anteile darzustellen.
- stellen äquivalente Bruchteile durch Falten her.
- erkunden Bruchpuzzle und erkennen, dass der gleiche Teil durch unterschiedlich strukturierte Einteilungen und Anteile ausgedrückt werden kann.
- erkunden strukturelle Zusammenhänge zwischen den Teilen des Bruchpuzzles.
- erkennen gleiche Anteile in unterschiedlichen Darstellungsformen (flächige Darstellung).
- benennen gleiche Anteile mit unterschiedlichen äquivalenten Bruchzahlen.
- erkennen und beschreiben Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen äquivalenten Brüchen.

Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass

- zwei /mehrere Brüche „gleichwertig“ sind, wenn ihr Teil und Anteil gleich groß sind.
- ein gleich großer Teil unterschiedlich strukturiert sein und durch unterschiedliche, aber gleichwertige Anteile beschrieben werden kann.
- der gleicher Anteil ikonisch und symbolisch unterschiedlich aussehen kann.
- ein und dieselbe Größe durch verschiedene Brüche darstellbar ist und sich ikonische Darstellungen in der Feingliederung und symbolische Darstellungen in Zähler und Nenner unterscheiden.
- natürliche Zahlen eindeutig und Bruchzahlen unendlich dargestellt werden können („Hürde“/ häufige Fehlvorstellung bzw. Umbruch zu natürlichen Zahlen).
- eine kleinere natürliche Zahl im Nenner einen größeren Teil beschreibt als eine größere natürliche Zahl im Nenner (Umbruch zu natürlichen Zahlen).

Auf Ebene der prozessbezogenen Kompetenzen werden in der Unterrichtsstunde folgende Aspekte angesprochen:

- Argumentieren
  - Erkunden
  - Strukturieren von Informationen
  - Aufstellen von Vermutungen; Begründen
- Kommunizieren
  - Dokumentieren eigener Lernwege
  - Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen
  - Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen
  - Aufnehmen mathematischer Informationen
  - Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen
  - Strukturieren
  - Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team
- Mathematische Darstellungen
  - Interpretieren von Darstellungen
  - Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen, bildhaft
  - Übertragen von Darstellungsformen auf neue Aufgaben
- Problemlösen
  - Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen
  - Erschließen von Zusammenhängen

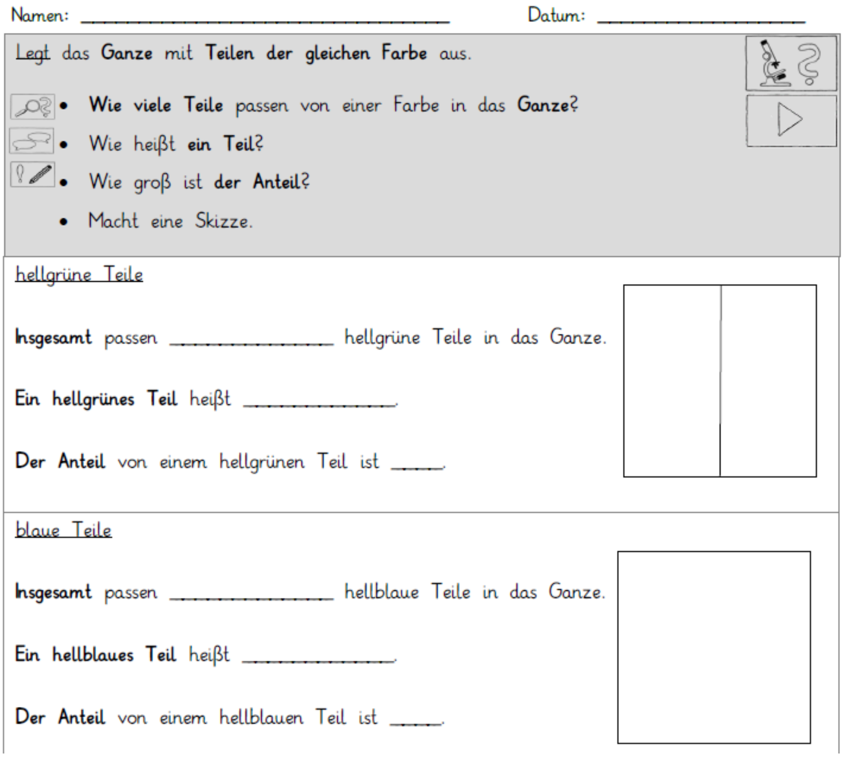
Der gemeinsame Einstieg im Plenum greift ausgewählte Arbeitsergebnisse der Schülerinnen und Schüler aus der ersten Einheit des zweiten Bausteins wieder auf. Die Lernenden werden für die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ im Sinne der kognitiven Aktivierung in einem offenen, handlungsorientierten Zugang dazu aufgefordert, weitere Faltmöglichkeiten zu finden, die den gleichen Teil durch äquivalente Anteile darstellen. Es findet eine erste implizite Anbahnung des Verfeinerns und Vergröberns auf enaktiver Ebene statt.

Nach einer kurzen explorativen Phase der natürlich differenzierenden Einzel- oder Partnerarbeit werden die Arbeitsergebnisse in der Zwischenreflexion sortiert und vor dem Hintergrund entdeckter Zusammenhänge bzw. Unterschiede analysiert. „Damit die Kinder nicht allein mathematische Phänomene beschreiben, sondern bewusst mathematische Zusammenhänge konstruieren, bieten sich verschiedene Aktivitäten an zum Erkunden, Sammeln, Ordnen und Vergleichen, Beziehungen artikulieren“ (Heß & Nührenbörger, 2017, S. 281). Durch gezielte

Impulse der Lehrkräfte wird der Fokus auf die kommunikative Erarbeitung der strukturellen Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem gerichtet. Für die zentralen Stammbrüche werden die verschiedenen gleichwertigen Faltungen mit den entsprechenden symbolischen Notationen als gemeinsame Arbeitsgrundlage für den weiteren Stundenverlauf an der Tafel visualisiert. Vor dem Hintergrund eines gemeinsamen Verständnisses wird der Begriff der Gleichwertigkeit im Sinne „gleich groß“ festgelegt. Der Begriff der Äquivalenz bzw. äquivalenter Bruchzahlen wird im Unterricht nicht verwendet. Die hier eingesetzte Aufgabenstellung bietet neben dem niedrigschwelligen, handlungsorientierten Zugang auch ausreichend Offenheit für Lernende mit (besonderem) Potential. Die Gleichwertigkeit der Bruchzahlen kann durch das Finden weiterer Äquivalente, die über die ikonischen Faltdarstellungen hinausgehen, auch im Kopf weiter erkundet werden, ohne dabei jedoch die dahinterstehenden Strategien auf syntaktischer Ebene zu thematisieren. Darüber hinaus kann ein indirekter Größenvergleich angebahnt sowie der Umbruch zu den natürlichen Zahlen (eine kleinere natürliche Zahl im Nenner beschreibt einen größeren Teil als eine größere natürliche Zahl) thematisiert werden. Weiterhin wird die Diskontinuität der eindeutigen bzw. unendlichen Zahldarstellung aufgegriffen.

In der anschließenden Arbeitsphase wird die kooperative Methode der Weggabelung eingesetzt. Die Lernenden erkunden das Bruchpuzzle vor dem Hintergrund struktureller Beziehungen zunächst individuell anhand eines vorstrukturierten Arbeitsblattes (s. Abb. 15)[12].

[12] Die eingesetzten Aufgaben wurden in Anlehnung an „*Mathe sicher können*“ (B1 A, 2.6) für den vorliegenden Unterrichtseinsatz adaptiert.



Namen: ______________________ Datum: ____________

Legt das **Ganze** mit **Teilen der gleichen Farbe** aus.

- **Wie viele Teile** passen von einer Farbe in das **Ganze**?
- Wie heißt **ein Teil**?
- Wie groß ist **der Anteil**?
- Macht eine Skizze.

hellgrüne Teile

Insgesamt passen __________ hellgrüne Teile in das Ganze.

Ein hellgrünes Teil heißt __________.

Der Anteil von einem hellgrünen Teil ist ____.

blaue Teile

Insgesamt passen __________ hellblaue Teile in das Ganze.

Ein hellblaues Teil heißt __________.

Der Anteil von einem hellblauen Teil ist ____.

Abbildung 15: Auszug der "Starter-Aufgabe" aus Baustein 5, Einheit 1 (vollständiges Arbeitsblatt vgl. Anhang H 2)

Den Lernenden der Förderschleifen ist sowohl das Material als auch das Aufgabenformat zwar bereits aus einer vorherigen Förderschleife bekannt (Förderschleife 3, Baustein 2), jedoch findet in der vorliegenden Unterrichtsstunde mit zeitlichem Abstand eine Erweiterung um die Dokumentation auf ikonischer Ebene statt. Daran anschließend werden in den Forscherteams die Ergebnisse verglichen, möglicherweise gemeinsam vervollständigt und unterschiedliche Erkenntnisse zusammengeführt. Vertiefend bearbeiten die Lernenden den weiterführenden Arbeitsauftrag (s. Abb. 16), der mithilfe des Bruchpuzzles auf das Finden gleichwertiger Bruchzahlen abzielt. Die Beziehungen zwischen den äquivalenten Bruchzahlen sollen vor dem Hintergrund der strukturellen Zusammenhänge der triadischen Struktur „innerhalb einer Konstellation als auch zwischen den Konstellationen“ (Schink, 2013a, S. 351) erarbeitet und reflektiert werden. Die Lernenden werden im Sinne des intermodalen Transfers auf allen drei Darstellungsebenen dazu aufgefordert, ihre Ergebnisse festzuhalten. Die verschiedenen Zugangsweisen und Notationsanforderungen bieten eine sinnvolle Differenzierung für die heterogenen Forscherteams.

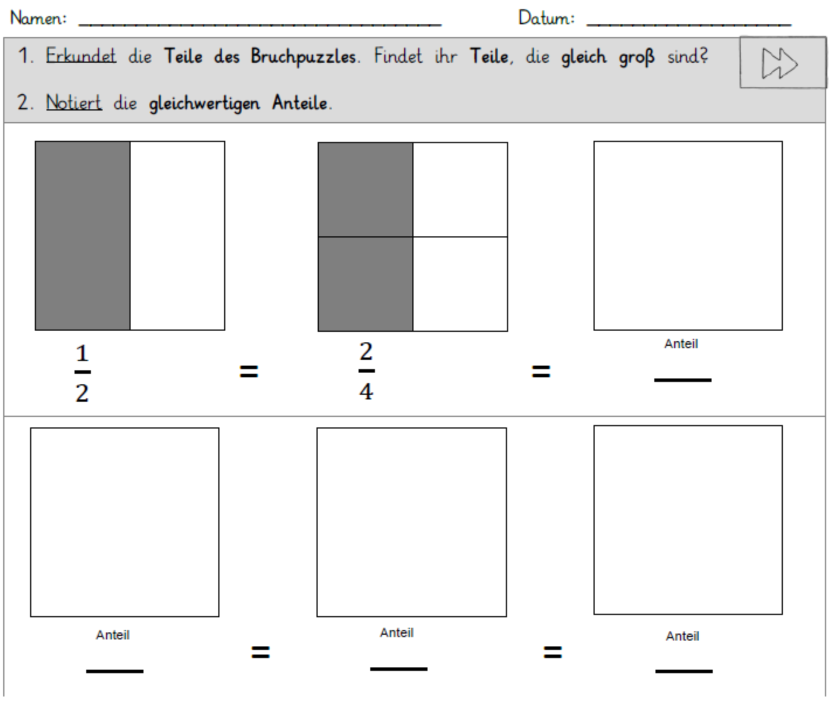


Abbildung 16: Auszug der weiterführenden Aufgabe aus Baustein 5, Einheit 1 (vollständiges Arbeitsblatt vgl. Anhang H 2)

Die zweite Zwischenreflexionsphase ist gegliedert aufgebaut. Zunächst wird die „Starter-Aufgabe“ als gemeinsame Kommunikationsgrundlage für alle Lernenden aufgegriffen. An dieser Stelle nehmen die Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten, die zusätzlich in den Förderschleifen gefördert werden, wieder eine Expertenrolle ein. Sie vergleichen mithilfe ihres Lernplakats (Förderschleife 2.3) die Ergebnisse für die einzelnen Bruchpuzzleteile mit der gesamten Lerngruppe, wiederholen und festigen noch einmal die Stammbrüche und sichern somit die Arbeitsgrundlage für die weiteren inhaltlichen Auseinandersetzungen. Daran anschließend stellen die Forscherteams exemplarisch ihre Lösungen anhand des auf Folie gedruckten Bruchpuzzles am Overheadprojektor vor. Diese Erkenntnisse vertiefend findet im nächsten Schritt der Übertrag auf die ikonische Ebene statt. Gemeinsam erarbeiten die Lernenden mithilfe der Lehrkräfte die Bestimmung gleichwertiger Bruchzahlen für ikonisch dargestellte Anteile.

In der letzten Arbeitsphase folgt eine individuelle Einzelarbeit, die sich wieder durch gestufte Arbeitsaufträge mit steigendem Komplexitätsgrad auszeichnet. In der „Starter-Aufgabe“ (vgl. Abb. 17) werden jeweils zwei Darstellungen verwendet, die das gleiche Ganze als Bezugsgröße zugrunde legen und den gleichwertigen Anteil durch unterschiedliche Einteilungen abbilden.

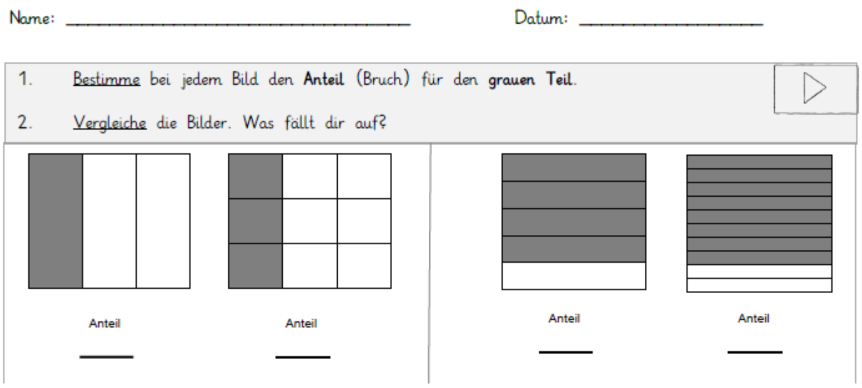


Abbildung 17: Auszug der "Starter-Aufgabe" (EA) aus Baustein 5, Einheit 1 (vollständiges Arbeitsblatt vgl. Anhang H 2)

Die zugrundeliegende Struktur wird durch den direkten bildlichen Vergleich explizit verdeutlicht. Der weiterführende Arbeitsauftrag (vgl. Abb. 18) enthält jeweils nur noch eine Darstellung, in die die Lernenden die verschiedenen Einteilungen hineindenken müssen, um zwei äquivalente Bruchzahlen zu finden.

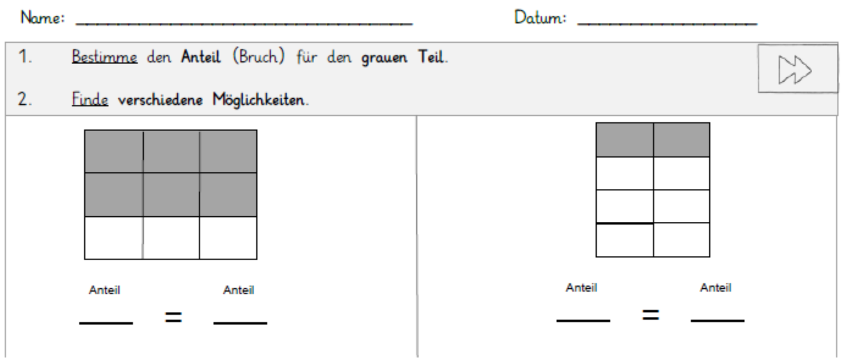


Abbildung 18: Auszug der weiterführenden Aufgabe (EA) aus Baustein 5, Einheit 1 (vollständiges Arbeitsblatt vgl. Anhang H 2)

Für alle Lernenden, die für die Anteilsbestimmung auf ikonischer Ebene weitere Erklärungen benötigen, besteht die Möglichkeit der vertiefenden gemeinsamen Bearbeitung in einer Kleingruppe mit einer der beiden Lehrkräfte.

Die Unterrichtsstunde abschließend findet die Bearbeitung der wöchentlichen Standortbestimmung (vgl. Kap 6.3) statt. Die halboffene Aufgabe zum Bruchzahlverständnis, die verständnisorientiert auf das Argumentieren und Begründen zielt, ist den Lernenden bereits bekannt und wird zu diesem Zeitpunkt der Unterrichtseinheit zum zweiten Mal bearbeitet.

Die Lernumgebung zeichnet sich insbesondere in der Einstiegs- und in der ersten kooperativen Arbeitsphase durch eine Offenheit aus, die im Sinne der natürlichen Differenzierung sowohl ein individuelles als auch gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand ermöglicht. Die niedrigschwelligen Einstiege auf enaktiver Ebene, die durch den Einsatz struktur-fokussierten Materials unterstützt werden, eröffnen allen Lernenden einen ersten Zugang zum Erkunden der Äquivalenz von Bruchzahlen auf elementarer Ebene. Insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten festigt die „Starter-Aufgabe“ das Erkennen, Benennen und Einzeichnen von Stammbrüchen. Der weiterführende, kooperativ zu bearbeitende Arbeitsauftrag ermöglicht nach einem vorstrukturierten Einstieg das eigenständige Finden gleichwertiger Anteile durch Auslegen des Bruchpuzzles. Dabei kann sowohl probierend-experimentell als auch systematisch vorgegangen werden und demzufolge können unterschiedlich reichhaltige Zusammenhänge entdeckt werden. In Anlehnung an das Bruchpuzzle ist die Bezugsgröße jeweils als Quadrat vorgegeben und die Lernenden sollen die Einteilungen, die sie handelnd mit dem Bruchpuzzle entdecken, auf ikonischer Ebene einzeichnen. Im Sinne des intermodalen Transfers findet eine Verknüpfung aller drei Darstellungsebenen statt. Je nach individuellen Lernvoraussetzungen des jeweiligen Forscherteams können die Arbeitsschritte abwechselnd durchgeführt werden. Es bietet sich aber auch an, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten bspw. eher den enaktiven Teil und leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler die ikonische und symbolische Notation übernehmen. Als unterstützende Hinweise können sich die Lernenden an den an der Tafel visualisierten Arbeitsergebnissen der Einführungsphase orientieren. Zentrale Elemente sind der gemeinsame kommunikative Austausch sowie das kooperative Bearbeiten der Aufgaben. Bei den Arbeitsaufträgen der abschließenden individuellen Arbeitsphase findet eine Differenzierung in quantitativer Hinsicht durch den Einsatz gestuft differenzierter Aufgaben statt, die sich durch einen zunehmenden Anspruch hinsichtlich der Veranschaulichungen und den damit einhergehenden steigenden kognitiven Anforderungen auszeichnen. Als Unterstützungsmöglichkeit für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen bietet sich in dieser Phase bei Bedarf die gemeinsame Erarbeitung des grundlegenden Lerngegenstands mit einer der beiden Lehrkräfte in der Kleingruppe an, während der Rest der Lerngruppe diesen individuell vertiefend bearbeiten kann. Vor diesem Hintergrund lässt sich die vorliegende Lernumgebung auf allen drei Ebenen der Differenzierungsspanne verorten.

Potentielle Hürden in dieser Unterrichtsstunde liegen in dem Hineindenken struktureller Zusammenhänge in verschiedene Darstellungen sowie deren flexible Anwendung. Die Lernenden müssen gleiche Anteile in unterschiedlichen flächigen Darstellungsformen erkennen und mit gleichwertigen Bruchzahlen benennen. Dazu ist es erforderlich, dass sie in einem ersten Schritt Gleichwertigkeit im Sinne gleich großer Anteile verstehen und darauf aufbauend ein Verständnis dafür entwickeln, dass die absolute Größe eines Anteils durch verschiedene Einteilungen dargestellt und mit verschiedenen Bruchzahlen beschrieben werden kann.

Die innermathematische Substanz dieser Unterrichtsstunde zeichnet sich durch den offenen, handlungsorientierten und problemlösenden Einstieg, der einen niedrigschwelligen Zugang mit unterschiedlich tiefen Erkenntnismöglichkeiten bietet, aus. Darüber hinaus ermöglicht die Arbeit mit dem konkreten Material auf enaktiver Ebene in Form des Bruchpuzzles und den strukturierten Arbeitsaufträgen auf ikonischer und symbolischer Ebene eine für heterogene Lerngruppen sinnvolle Differenzierung und fördert gleichzeitig den umfassenden Verständnisaufbau im Sinne des intermodalen Transfers.

Hinsichtlich der engen Verknüpfung zwischen dem aktuellen Inhaltsbereich und dem arithmetischen Basisstoff wird in dieser Unterrichtsstunde insbesondere die Diskontinuität der unterschiedlichen Zahldarstellungen angesprochen. Darüber hinaus erfolgt die kontextbezogene Deutung der natürlichen Zahlen im Nenner eines Bruches.

5.5.3 Baustein 1, Förderschleife 1: *Verzahnung arithmetischer Basisstoff – aktueller Inhaltsbereich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses*

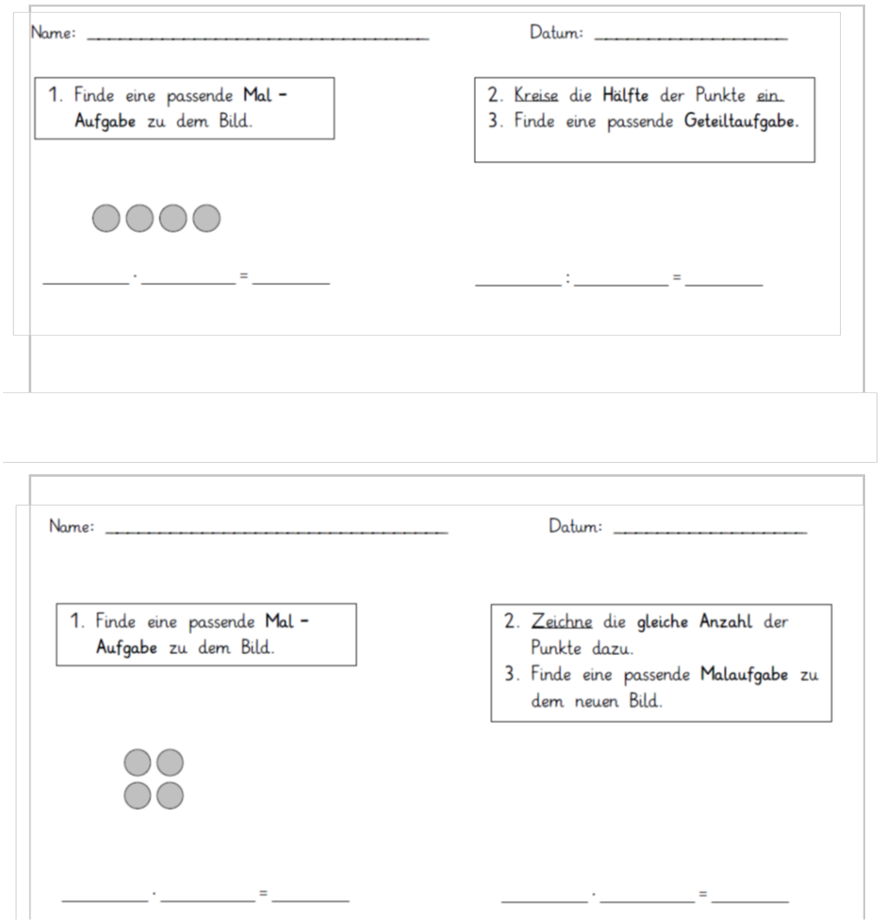
Die im Folgenden dargestellte Förderschleife ist beispielgebend für die Verbindung zentraler Aspekte des arithmetischen Basisstoffs mit dem grundlegenden Bruchzahlverständnis. Sie ist die erste Förderschleife innerhalb der Unterrichts- und Förderkonzeption.

Als vorrangige Kompetenzschwerpunkte werden das Verdoppeln und Halbieren im Sinne zentraler operativer Beziehungen des kleinen Einmaleins in den Mittelpunkt gestellt. Die kognitive Verknüpfung, dass Verdoppeln „mal zwei“ und Halbieren „geteilt durch zwei“ bedeutet sowie die Umkehrbarkeit der beiden Operationen stellen eine wesentliche Grundlage für einen ersten Zugang zu einem anschaulichen Bruchzahlverständnis dar. Darüber hinaus ist die Erkenntnis wichtig, dass nur gerade Zahlen ohne Rest aufgeteilt werden können. Vor diesem

Hintergrund soll ein erstes Verständnis dafür angebahnt werden, dass die bisher kleinste bekannte Größe (Eins) zerlegt, d.h. in gleich große Teile aufgeteilt werden kann und diese Teile kleiner als eins sind.

Der Einstieg in die Förderschleife erfolgt spielerisch anhand eines Kartenspiels im Plenum. Das Kartenset besteht aus „Aktionskarten“, die entweder das Verdoppeln oder das Halbieren einfordern und „Zahlenkarten“, die unterschiedliche Zahldarstellungen umfassen. Die Ziffern 0-9 werden sowohl symbolisch als auch auf unterschiedliche Weise ikonisch abgebildet: im Zehnerstreifen, im Zwanzigerpunktefeld, als Würfelaugen, mit Fingern und als Striche illustriert. Je nach individuellen Lernausgangslagen der Schülerinnen und Schüler können die Zahldarstellungen entweder auf eine Abbildung begrenzt oder mit Fokus auf eine flexible Zahlvorstellung anhand verschiedener Darstellungen visualisiert werden. Die Lernenden ziehen abwechselnd eine Aktions- und eine Zahlenkarte und führen die jeweilige Operation durch. Entsprechend der individuellen Kompetenzen der Lerngruppe kann eine vorangeschaltete anschauliche Erarbeitung auf enaktiver Ebene sinnvoll sein. Das Kartenspiel lässt sich aber auch problemlos mit symbolischen Zahldarstellungen, die über den Zehnerzahlenraum hinausgehen, auf größere Zahlenräume erweitern. Es bietet sich an, zunächst mit zu den ikonisch dargestellten Zahlen analogen ganzen Zehnern, Hundertern oder Tausendern zu arbeiten, bevor gemischte Zahlen hinzugenommen werden. Anhand der Karten werden die dahinterliegenden Rechenregeln gemeinsam erarbeitet. Gleichwohl das Verdoppeln und Halbieren aus der Grundschulmathematik bekannt sein sollte, erscheint es vorteilhaft, ein gemeinsames Begriffsverständnis zu erarbeiten. Alle Lernenden sollen das Verständnis dafür aufbauen, dass hinter dem Verdoppeln die Multiplikation mit der zwei steht und dass Halbieren bedeutet, eine Menge oder eine (gerade) natürliche Zahl in zwei gleich große Hälften zu teilen, d.h. durch zwei zu dividieren. Die gleichzeitige Ausführung der Operation auf enaktiver Ebene durch Legen des entsprechenden Materials sowie die symbolische Notation der dazugehörigen Aufgabe soll den Verständnisaufbau unterstützen. Im Sinne des beziehungsreichen Einmaleins erkunden die Lernenden auch die Umkehrbarkeit des Verdoppelns und Halbierens. Sprachlich wird der Fokus auf „halbieren“ bzw. „die Hälfte von“ sowie „verdoppeln“ bzw. „das Doppelte von“ gerichtet. In enger Verbindung zu diesem grundlegenden Aspekt des arithmetischen Basisstoffs wird bereits ein erster Bezug zu dem Stammbruch $\frac{1}{2}$ hergestellt.

Die darauf folgende Arbeitsphase beginnt mit der gemeinsamen Erarbeitung des Aufgabenformats, sodass der anstehende Arbeitsauftrag (vgl. Abb. 19) für alle Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar ist.


Name: ______________ Datum: ______________

1. Finde eine passende **Mal - Aufgabe** zu dem Bild.

2. Kreise die **Hälfte** der Punkte ein.
3. Finde eine passende **Geteiltaufgabe**.

____ · ____ = ____   ____ : ____ = ____

Name: ______________ Datum: ______________

1. Finde eine passende **Mal - Aufgabe** zu dem Bild.

2. Zeichne die **gleiche Anzahl** der Punkte dazu.
3. Finde eine passende **Malaufgabe** zu dem neuen Bild.

____ · ____ = ____   ____ · ____ = ____

Abbildung 19: Auszug Arbeitsauftrag aus Baustein 1, Förderschleife 1 (vollständiges Arbeitsblatt vgl. Anhang H 3)

In Einzelarbeit bearbeiten die Lernenden zunächst die Aufgaben, die das Finden von Malaufgaben an Punktefeldern behandeln. In einem zweiten Schritt findet die Verbindung zum Halbieren bzw. Verdoppeln statt. Die Lernenden sollen eine vorgegebene Punktedarstellung in zwei gleich große Hälften einteilen und eine passende Divisionsaufgabe notieren. Ebenso geht es um die ikonische Verdopplung einer vorgegebenen strukturierten Punktemenge, für die wiederum eine passende Malaufgabe notiert werden soll. Durch individuelle Unterstützungen der Förderschullehrkraft kann bereits der Zusammenhang zwischen den beiden Teilen und dem Ganzen thematisiert werden. Die Aufgabe ermöglicht es auch, unterstützend mit Material auf enaktiver Ebene zu arbeiten.

Das Finden von Malaufgaben am Punktefeld eignet sich besonders zum Aufbau bzw. zur Festigung der räumlich-simultanen Grundvorstellung der Multiplikation (vgl. Kap. 4.1.2). „In Punktefeldern lässt sich das Kommutativgesetz und seine Allgemeingültigkeit erkennen“ (Deutscher, Akinwunmi & Selter, 2014, S. 78). Punktefelder ermöglichen das Veranschaulichen von Rechengesetzen sowie von multiplikativen Strukturen, wobei die Erarbeitung, „warum in einem rechteckigen Punktefeld eine Multiplikation gesehen werden kann“ (Deutscher et al., 2014, S. 78), eine zentrale Rolle spielt und verhindern soll, dass die Lernenden lediglich die Randpunkte zählen. Im Mittelpunkt steht das Durchdringen flexibler multiplikativer Strukturen, wobei oftmals die Anzahl der Zeilen als Multiplikator und die Anzahl der Spalten als Multiplikand vermittelt werden.

Im Anschluss an die individuelle Arbeitsphase erfolgt situativ entweder eine Reflektion in Partnerarbeit oder im Plenum, in der das Vergleichen der Ergebnisse sowie das Erklären und Begründen der jeweiligen Vorgehensweisen steht. Darüber hinaus sollen die Auffälligkeiten und Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen untersucht werden.

Als Abschluss der Kleingruppenförderung findet eine handlungsorientierte Anbahnung der Notwendigkeit von Bruchzahlen statt, indem gerade oder ungerade Anzahlen homogener Objekte gleichmäßig auf zwei Kinder aufgeteilt werden sollen. Die Handlungen werden in den alltagsbezogenen Kontext des gerechten Verteilens eingeordnet. Die Lernenden erkunden verschiedene ungerade Anzahlen kleiner Papierrechtecke und erkennen, dass ein Rechteck, d.h. ein Ganzes, im Sinne des Halbierens in zwei gleich große Teile geteilt werden muss, um die Gesamtanzahl gerecht verteilen zu können. Aus diesen Handlungen wird der Stammbruch $\frac{1}{2}$ abgeleitet und wiederum in Zusammenhang mit dem Verdoppeln gebracht, um ein Ganzes zu erhalten.

5.5.4 „*Starter-Aufgabe*“ und *weiterführende Aufgaben*

Im Folgenden werden die „Starter“- und die weiterführenden Aufgaben[13] der zweiten Einheit des zweiten Bausteins vorgestellt, die im Rahmen der „Weggabelung“ in individueller Einzelarbeit bearbeitet werden. Anhand der beispielhaften Aufgaben wird verdeutlicht, wie zentrale didaktische Prinzipien bei der Arbeitsblattgestaltung berücksichtigt wurden.

Die Unterrichtsstunde zielt auf die Festigung der bisher erworbenen Kompetenzen zu Stammbrüchen im Bereich der ersten Grundvorstellung und stellt das Erkennen, Bestimmen und Darstellen von Stammbrüchen auf ikonischer und symbolischer Ebene in den Mittelpunkt. Es wird sowohl das Benennen eines vorgegebenen Repräsentanten durch einen passenden Bruch als auch das Herstellen eines vorgegebenen Bruchs durch einen geeigneten Repräsentanten fokussiert. Für ein vertieftes Verständnis wird ein erstes Erkunden operativer Veränderungen sowie struktureller Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem unter Anwendung der neu eingeführten Fachbegriffe angestrebt.

Die „Starter-Aufgabe“ (vgl. Abb. 20) ist in dem Dreischritt aufgebaut, den viele Aufgaben der Unterrichtseinheit als wiederkehrendes Element aufweisen. In einem ersten Schritt („Bestimme bei jedem Bild den Anteil (Bruch) für den grauen Teil!“) werden die Lernenden im Sinne des Reproduzierens dazu aufgefordert, den jeweiligen ikonisch dargestellten Anteil zu erkennen und auf symbolischer Ebene zu bestimmen. Gleichwohl nicht immer zu verhindern ist, dass die Schülerinnen und Schüler Zähler und Nenner durch Abzählen der Teile insgesamt sowie des markierten Teils bestimmen, liegt der Fokus während der gesamten Unterrichtseinheit auf dem verständnisorientierten Durchdringen der konzeptuellen Bedeutung unter besonderer Berücksichtigung der Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem. In einem zweiten Schritt („Vergleiche die Bilder! Wie könnte es weitergehen? Setze das Muster fort!“) wird eine erste Verallgemeinerung angestrebt, indem die Lernenden das (operative) Muster der vorherigen Darstellungen fortsetzen und in dem vorgegebenen Ganzen markieren sollen. Die exakt gleichmäßige Einteilung des Ganzen wäre wünschenswert, ist zu diesem frühen Zeitpunkt der Unterrichtseinheit aber noch nicht maßgeblich. Zentraler erscheint die möglichst genaue Unterteilung, die auf ein dahinter liegendes Verständnis für die Gleichmäßigkeit deuten lässt. Der dritte Arbeitsschritt („Was fällt dir auf? Beschreibe!“) spricht das Herstellen von

[13] Die eingesetzten Aufgaben wurden in Anlehnung an „*Mathe sicher können*“ (B1 A, 1.1, 1.2, 1.4) unter Hinzunahme weiterer Darstellungen für den vorliegenden Unterrichtseinsatz adaptiert.

Zusammenhängen zwischen unterschiedlichen Darstellungen von Anteilen an. Die Lernenden sollen die ikonischen Darstellungen hinsichtlich der operativen Veränderungen untersuchen und ihre gemachten Entdeckungen schriftlich ausführen. Die Spanne möglicher Erkenntnistiefen ist dabei bewusst weit gefasst, sodass sowohl offensichtliche, grundlegende Einsichten als auch tiefergehende, zusammenhängende Relationen beschrieben werden können. Die Aufgabe stellt einen hohen sprachlichen Anspruch, ermöglicht durch ihre Offenheit aber gleichzeitig eine natürliche Differenzierung. Als wichtige Unterstützung dient an dieser Stelle der gemeinsam erarbeitete Wortspeicher, den die Schülerinnen und Schüler als Formulierungshilfen in Anspruch nehmen sollen. In Anlehnung an Prediger und Wessel (2012, S. 32) kann sowohl das hohe konzeptuelle, als auch das sprachliche Potenzial von Beschreibungsaufträgen hervorgehoben werden.

Die „Starter-Aufgabe" umfasst drei Teilaufgaben, die alle nach dem gleichen Schema aufgebaut sind und das Erkunden der mathematischen Grundidee verfolgen, aus der sich dann verschiedene Beziehungen erarbeiten lassen. Die verwendeten ikonischen Darstellungen beziehen sich auf die struktur-fokussierte Form des Rechtecks, variieren jedoch vor dem Hintergrund der intendierten Lernzuwächse:

- Gleichbleibendes Ganzes:
    - Je mehr Teile das Ganze hat, desto größer wird der Nenner (als natürliche Zahl).
    - Je mehr Teile das Ganze hat, desto kleiner werden die Teile bzw. je größer der Nenner wird, desto kleiner werden die Teile.
    - Je größer der Nenner wird, desto kleiner wird der Anteil am Ganzen bei gleichbleibendem Zähler.
    - Es ist immer ein Teil markiert, aber die Größe der Teile wird kleiner.
- Unterschiedlich großes Ganzes:
    - Die Veränderung des Ganzen hat Auswirkungen auf den Anteil.
    - Das markierte Teil bleibt gleich, aber der Anteil am Ganzen wird kleiner.
    - Es kommen mehr Teile hinzu und der Nenner verändert sich.
    - Das gleiche markierte Teil kann unterschiedliche Anteile von unterschiedlich großen Anteilen darstellen.
- Gleichbleibendes Ganzes, gleicher Anteil:
    - Gleiche Anteile / Brüche können unterschiedlich dargestellt werden.
    - Es muss immer ein Teil markiert sein, um einen Stammbruch abzubilden. Die Wahl des markierten Teils ist dabei nicht ausschlaggebend.

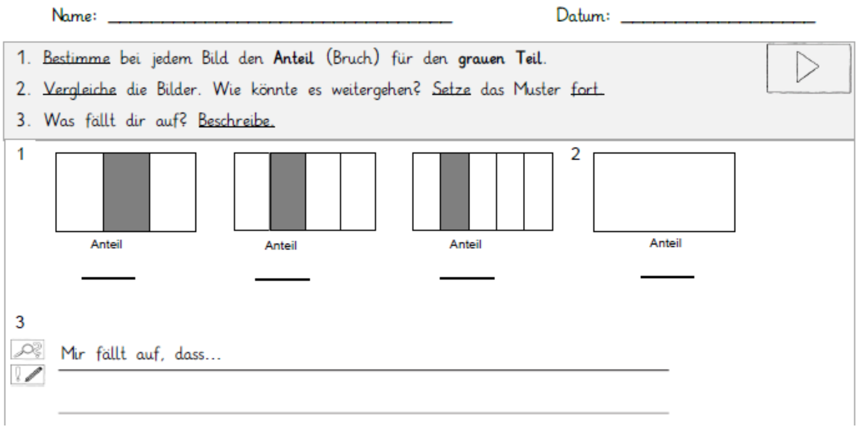


Abbildung 20: Auszug der "Starter-Aufgabe" aus Baustein 2, Einheit 2 (vollständiges Arbeitsblatt vgl. Anhang H 4)

Die weiterführenden, in ihrer zu bearbeitenden Reihenfolge frei wählbaren Aufgaben (vgl. Abb. 21) nehmen entweder den Dreischritt der „Starter-Aufgabe“ mit steigendem Komplexitätsgrad (freies Einzeichnen von vorgegebenen Brüchen in unterschiedlich dargestellten Bezugsgrößen) wieder auf oder umfassen einen zweistufigen Arbeitsauftrag, der das Erkunden, Finden und Beschreiben unterschiedlicher Darstellungsmöglichkeiten bzw. Erkennen von Beziehungen zwischen Anteilen und unterschiedlichen Bezugsgrößen einfordert. Dabei können die bisherigen Erkenntnisse flexibilisiert und auf verschiedene Darstellungsformen übertragen werden. Die eingesetzten Aufgaben ermöglichen die Erkenntnis, dass

- der gleiche Anteil auf unterschiedliche Weise innerhalb eines Ganzen dargestellt werden kann.
- der gleiche Anteil in verschiedenen Ganzen mit unterschiedlichen Formen und Größen dargestellt werden kann.
- der Anteil keine absolute, sondern eine relative Bezugsgröße ist.

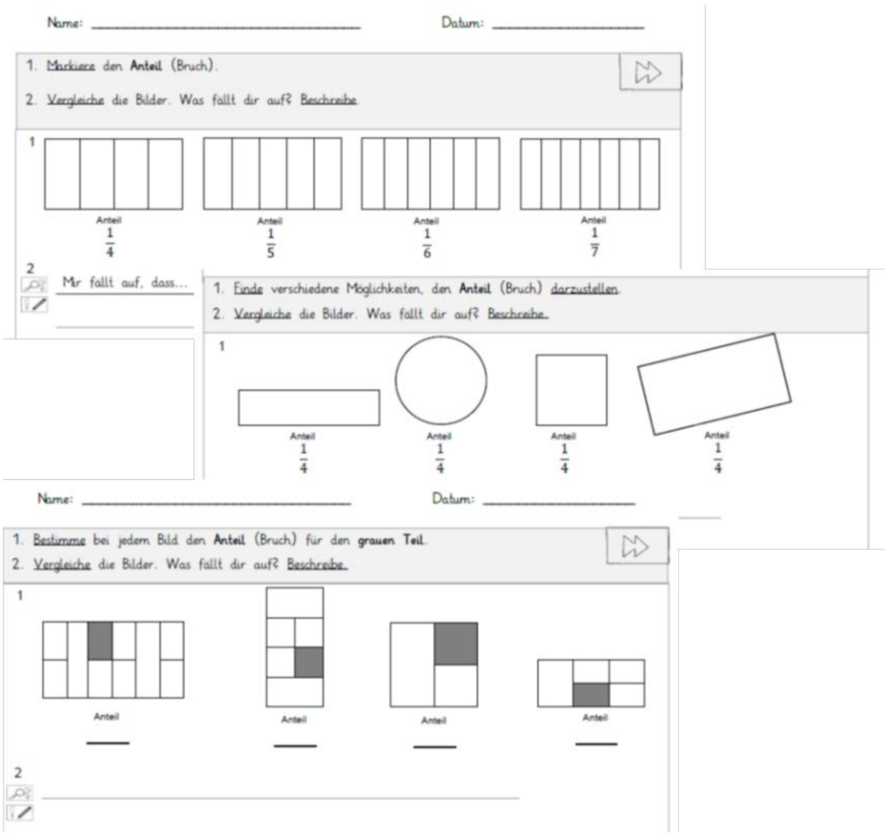


Abbildung 21: Auszug der weiterführenden Aufgaben (EA) aus Baustein 2, Einheit 2 (vollständiges Arbeitsblatt vgl. Anhang H 4)

In der zweiten Arbeitsphase der Weggabelung werden die Forscherteams dazu aufgefordert, ihre Ergebnisse zu vergleichen und sich über die gemachten Entdeckungen mündlich auszutauschen. Das Zusammenführen unterschiedlich tiefer Zusammenhänge und Erkenntnisse soll eine Grundlage für die weitere gemeinsame Aufgabenbearbeitung sichern. Als weiterführende, kommunikativ und kooperativ zu bearbeitende Aufgabe (vgl. Abb. 22)[14] sollen sie sich mit Aussagen der beiden fiktiven Figuren Ben und Becky auseinandersetzen. Dabei steht das Erkennen von Unterschieden und Gemeinsamkeiten zwischen unterschiedlichen Repräsentanten sowie die Erkenntnis, dass Veränderungen der absoluten Größe eines (gleichen) Ganzen Auswirkungen auf die Teile und den Anteil haben, im Vordergrund. Diese Aufgabe fordert über das bisherige Beschreiben hinaus das Erklären der gemeinsam gemachten Entdeckungen und stellt somit einen hohen sprachlichen Anspruch an die Lernenden. Die offene Aufgabe ermöglicht aber insbesondere zu diesem relativ frühen Zeitpunkt der

[14] Die Aufgabe wurde aus „*Mathewerkstatt 5*“ (S.108, Nr. 8) übernommen und auf den Kontext der vorliegenden Arbeit übertragen.

Unterrichtseinheit die Berücksichtigung unterschiedlicher sprachlicher Kompetenzen innerhalb der heterogenen Forscherteams.

Abbildung 22: Weiterführende Aufgabe (PA) aus Baustein 2, Einheit 2

Alle eingesetzten Arbeitsaufträge werden einerseits durch eine konstante optische Hervorhebung auf Schriftebene unterstützt, indem die Operatoren unterstrichen und für das Aufgabenverständnis relevante Schlüsselbegriffe fett markiert werden. Andererseits werden die Arbeitsschritte durch wiederkehrende Symbole begleitet, die auch im Rahmen des transparenten Stundenverlaufs eingesetzt werden (vgl. Kap. 5.4.1, Anhang F).

5.6 Zusammenfassung

Das in dieser Arbeit entwickelte Unterrichts- und Förderkonzept dient als richtungsweisendes Beispiel, wie inklusiver Mathematikunterricht vor dem Hintergrund der engen Verknüpfung zwischen fachdidaktischen und sonderpädagogischen Aspekten, zwischen klassenintegrierter Förderung und zusätzlicher Kleingruppenförderung außerhalb des Klassenunterrichts sowie zwischen dem grundlegenden arithmetischen Basisstoff und dem aktuellen Inhaltsbereich der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen theoretisch fundiert geplant werden kann. Die Durchführungen der Förderschleifen und Unterrichtsstunden im inklusiv orientierten Mathematikunterricht sollen zeigen, dass sowohl Lernende mit (besonderen)

Schwierigkeiten als auch leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler individuell aber auch gemeinsam an dem gleichen grundlegenden Lerngegenstand arbeiten können.

Für die vorliegende Konzeption gilt es dabei zu berücksichtigen, dass die von der Autorin entwickelte Lernumgebung mit ihren theoretisch und wissenschaftlich fundierten Annahmen nicht identisch sein wird mit der Lernumgebung, die auf die einzelnen Lernenden wirken wird. Das entwickelte und erprobte Unterrichts- und Förderkonzept muss in seinen einzelnen Teilen je nach Situation begründet ausgewählt, reflektiert durchgeführt sowie vor dem Hintergrund der jeweiligen Lerngruppe angemessen an die individuellen Lernvoraussetzungen angepasst werden (Wember, 2016a, S. 93).

6 METHODISCHE ANLAGE DER EMPIRISCHEN STUDIE

In der vorliegenden Interventionsstudie nimmt die Untersuchung der Effektivität einer gezielt konzipierten Unterrichts- und Förderkonzeption einen relevanten Stellenwert ein. Dabei werden die aktuell verfügbaren Ressourcen in einer Integrierten Gesamtschule in Niedersachsen einbezogen, mit dem Ziel, das Recht auf eine optimal mögliche Förderung unter den aktuellen Bedingungen wahrzunehmen (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 155-156).

Eine fundierte Auseinandersetzung mit dem Forschungsgegenstand bedarf einer theoretischen, wissenschaftlichen und methodologischen Rahmung. Die theoretische Substantiierung wurde ausführlich in den Kapiteln 2 bis 4 erläutert und in Kapitel 5 für das vorliegende Unterrichts- und Förderkonzept konkretisiert. Im Folgenden sollen die dieser Arbeit zugrunde liegenden wissenschaftlichen und methodologischen Perspektiven dargelegt werden. Einleitend wird das vorliegende Forschungsinteresse aufgezeigt, aus dem die zentralen Forschungsfragen abgeleitet werden (Kap. 6.1). Daran anknüpfend erfolgt die Darstellung des Forschungsdesigns (Kap. 6.2), die sowohl dessen theoretische Fundierung (Kap. 6.2.1), die Beschreibung der Stichprobe (Kap. 6.2.2) als auch die der Untersuchung zugrunde liegende Forschungskonzeption (Kap. 6.2.3) umfasst. In einem nächsten Schritt werden die eingesetzten Messinstrumente (Kap. 6.3) sowie die angewandten Forschungsmethoden (Kap. 6.4) vorgestellt. Nach der Formulierung der im Rahmen der vorliegenden Studie erwarteten Ergebnisse (Kap. 6.5) schließt dieses Kapitel mit einer Zusammenfassung (Kap. 6.6) ab.

6.1 Forschungsinteressen und Forschungsfragen

Die Darstellung aktueller Forschungsergebnisse sowie ausgewählter empirischer Erkenntnisse haben in den vorangegangen Kapiteln bereits auf konkrete Problemlagen in der Praxis aufmerksam gemacht und aufgezeigt, dass die inklusive Unterrichtsentwicklung noch in ihren Anfängen steckt, insbesondere für die Sekundarstufe I. Vor diesem Hintergrund ist es einerseits wichtig, Unterrichts- und Förderstrukturen zu konzipieren, die sich unter Berücksichtigung zentraler theoretischer und wissenschaftlicher Perspektiven für den praktischen inklusiven Mathematikunterricht eignen. Andererseits spielt die empirische Erprobung und Evaluation dieser Konzeptionen eine elementare Rolle, um daraus begründete Aussagen und Implikationen für die inklusive Schulpraxis abstrahieren zu können. An diese Forschungsdesiderate knüpft die vorliegende Interventionsstudie an. Aufgrund des bisher wenig erschlossenen Forschungsfeldes wird ein exploratives Forschungsanliegen verfolgt. Die Studie zielt auf den Gewinn erster grundlegender und richtungsweisender Erkenntnisse, die für die inklusiv orientierte Didaktik im Fach Mathematik für die Sekundarstufe I auf den folgenden drei Ebenen gewonnen werden sollen (vgl. Kirchhof, 2017):

Auf der *theoretischen Ebene* steht die theoretisch-wissenschaftliche Fundierung eines praxistauglichen Unterrichts- und Förderkonzepts im Sinne der unterrichtsintegrierten Förderung (vgl. Bartnitzky, 2012; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2012) im Mittelpunkt, das zentrale fachliche und fachdidaktische Aspekte mit Aspekten der sonderpädagogischen Förderung vereint. Die theoretischen Grundlagen wurden ausführlich in den Kapiteln 2 bis 4 dargelegt.

Auf der *Entwicklungsebene* nimmt einerseits die Gesamtkonzeption mit dem strukturierten Aufbau und den konkreten Materialien für die Umsetzung der komplexen Unterrichtseinheit im inklusiven Klassenunterricht sowie für die inhaltlich eng verknüpften Förderschleifen einen besonderen Stellenwert ein (Kap. 5). Andererseits wird die Entwicklung eines umfangreichen informellen Testinstruments zur Erfassung individueller verstehensorientierter Leistungen in den relevanten Inhaltsbereichen fokussiert (Kap. 7).

Die Überlegungen der ersten beiden Ebenen werden schließlich auf der *Forschungsebene* im Rahmen einer explorativen Interventionsstudie empirisch erprobt. Anhand der Untersuchung sollen Rückschlüsse auf die Wirksamkeit der Intervention in verschiedenen methodischen Settings gezogen werden: unterrichtsintegrierte Klassenförderung mit Förderschleifen und regulärer Mathematikunterricht. In Kapitel 8 und 9 werden die erhobenen Daten analysiert, um Erkenntnisse für die Gestaltung inklusiven Mathematikunterrichts zu gewinnen.

Exemplarisch soll aufgezeigt werden, wie der Inhaltsbereich des anschaulichen Bruchzahlverständnisses in enger Vernetzung mit den dafür relevanten Aspekten des mathematischen Basisstoffs für alle Lernenden vermittelbar ist und wie trotz heterogener Voraussetzungen ein Lernen am gemeinsamen Gegenstand mit individuellen Lernzuwächsen ermöglicht werden kann. Dabei liegt der Forschungsfokus auf der Wirksamkeit der Intervention für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen. Auf Klassenunterrichtsebene verfolgt die Autorin ein extensives Vorgehen, d.h. der

Mathematikunterricht als Ganzes soll effektiv gestaltet werden. Auf Ebene der Förderschleifen findet ein eher intensives Vorgehen statt, d.h. anhand ausgewählter Schülerinnen und Schüler sollen effektive individuelle Lernentwicklungen erzielt werden. Sowohl das konzipierte Unterrichts- und Förderkonzept als auch das entwickelte Testinstrument stellen in diesem Rahmen die Forschungsinstrumente dar, anhand derer unterschiedliche Lernumgebungen und individuelle Lernprozesse untersucht und erklärt werden können.

Das Dissertationsprojekt konzentriert sich auf die von Wittmann (1992) akzentuierte spezifische Aufgabe der Mathematikdidaktik, die in der „*Entwicklung und Erforschung inhaltsbezogener theoretischer Konzepte und praktischer Unterrichtsbeispiele* mit dem Ziel einer *Verbesserung* des realen Unterrichts als *Kernbereich* […] der wissenschaftlichen Arbeit [Hervorheb. im Original]“ (S. 56) liegt. Dieses übergeordnete Forschungsinteresse wird inhaltlich auf das anschauliche Bruchzahlverständnis und die dafür relevanten Bereiche des mathematischen Basisstoffs konkretisiert und in Kapitel 7 durch das selbst entwickelte Testinstrument „BruKo“ operationalisiert. Dabei baut die vorliegende Arbeit auf die folgenden fünf Forschungsfelder auf:

- inklusiv orientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I
- Gestaltung integrierter Förderungen für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen
- anschauliches Bruchzahlverständnis
- arithmetischer Basisstoff
- Entwicklung und Evaluation eines kriteriumsorientierten Testinstruments zum grundlegenden Bruchzahlverständnis und dafür relevanten Aspekten des arithmetischen Basisstoffs

Die Intention dieser Arbeit besteht in der theoriegeleiteten und praxisorientierten Entwicklung einer komplexen Unterrichts- und Förderkonzeption, deren explorativen Erprobung im Feld sowie der Evaluation im Hinblick auf ihre Wirksamkeit für den inklusiven Mathematikunterricht im Ganzen und für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen im Besonderen. Nach Wittmann (1995b) kann das hier zugrunde gelegte Forschungsinteresse in Form von „clinical teaching experiments“ als eine geeignete empirische Methode beschrieben werden:

> As a result we arrive at "clinical teaching experiments" in which teaching units can be used not only as research tools, but also as objects of study. The data collected in these experiments have multiple uses: They tell us something about the teaching/learning processes, individual and social outcomes of learning, children's productive thinking, and children's difficulties. They also help us to evaluate the unit and to revise it in order to make teaching and learning more efficient. [….] Clinical teaching experiments can be repeated and thereby varied. By comparing the data we can identify basic patterns of teaching and learning and derive well-founded specific knowledge in teaching certain units. (Wittmann, E. Ch., 1995b, S. 367-368, Anführungsstriche im Original).

Die Evaluationsstudie ist um ein komplexes Unterrichts- und Förderkonzept ausgerichtet und verfolgt die Ziele,

- im Sinne der inklusiven Unterrichtsentwicklung sowohl fachliche und fachdidaktische Überlegungen als auch den Beitrag sonderpädagogischer Förderung zur inklusiven Didaktik miteinander in Beziehung zu setzen,
- inklusive Unterrichtsstrukturen mit hoher fachlicher Qualität zu schaffen,
- das Lernen an dem fachlichen mathematischen Kern auszurichten,
- gemeinsame Lernanlässe für Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen zu schaffen,
- die Auseinandersetzung mit denselben Lerngegenständen auf verschiedenen Niveaus zu ermöglichen,
- sowohl individuelles als auch kooperatives, gemeinsames Lernen zu fördern,
- Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen das Aufarbeiten von spezifischen Lerninhalten bzw. Lücken im Bereich des arithmetischen Basisstoffs zu ermöglichen,
- Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen bei Lernfortschritten in aktuellen Inhaltsbereichen zu unterstützen (Fokus auf zentrale Kompetenzen im Sinne des mathematischen Kerns),
- insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen den Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe I im Sinne der Anschlussfähigkeit und Kontinuität zu gestalten,
- die praktische Umsetzbarkeit in einem realen Unterrichtssetting zu überprüfen.

Am Ende der vorangegangen Kapitel wurden die sich jeweils aus der theoretischen Auseinandersetzung ergebenden handlungs- und erkenntnisleitenden Fragestellungen als Orientierung formuliert. Auf dieser Grundlage sowie vor dem Hintergrund des formulierten Forschungsinteresses und der Zielstellungen lassen sich für die empirische Untersuchung folgende übergeordnete Forschungsfragen ableiten, die unterschiedliche Dimensionen an Tiefe aufweisen und zu deren näherer Eingrenzung sowohl spezifischere Folgefragen als auch weitere Teilfragen herangezogen werden.

Unter konzeptioneller Hinsicht wird die erkenntnisleitende und übergeordnete Frage (*Forschungsfrage 1*) verfolgt, ob die auf die enge Verbindung von Basisförderung und aktuellem Klassenunterricht ausgerichtete Intervention für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen in Klasse fünf an einer Integrierten Gesamtschule allen Schülerinnen und Schülern lernförderliche Wissenskonstruktionsprozesse ermöglicht und sich damit als Konzept für den inklusiv orientierten Unterricht eignet. Das Fundament in Bezug auf empirische und theoretische Befunde im Bereich inklusiver Unterrichtsstrukturen ist noch nicht weit ausgebaut (vgl. Kap. 2.2). Im Sinne der Grundlagenforschung bietet sich dementsprechend eine gröbere Strukturierung und weit gefasstere Fragestellung an, die auf die Erprobung und Evaluation im Vorfeld festgelegter theoretischer Wirkfaktoren in einem ersten eher umfassenden Unterrichtsversuch zielt:

Eignet sich das Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung, um allen Schülerinnen und Schülern einer heterogenen Lerngruppe individuelle Lernzuwächse zu ermöglichen?

Daran schließt sich unter fachlichen Aspekten die leitende und übergeordnete Frage (*Forschungsfrage 2*) an, ob die enge Verzahnung von ausgewählten Aspekten des mathematischen Basisstoffs und aktuellem Inhaltsbereich zu einer Verbesserung der individuellen Mathematikleistungen in beiden Bereichen führt. Das Fundament in Bezug auf empirische und theoretische Befunde im Bereich der Bruchrechnung ist, wie in Kapitel 4.1.4 dargestellt, bereits sehr breit ausgebaut und es liegen zahlreiche Studien zu Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen vor. Vor diesem Hintergrund bietet sich für die vorliegende Untersuchung eine spezifische und detailschärfere Fragestellung an, die einen bestimmten ausgewählten Bereich fokussiert und dabei bisherige Forschungsergebnisse berücksichtigt: Die Einführung eines fundierten Bruchzahlverständnisses auf der Grundlage tragfähiger Kompetenzen in ausgewählten Bereichen des arithmetischen Basisstoffs im inklusiv orientierten Mathematikunterricht für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten.

Führt die enge Verzahnung von ausgewählten Aspekten des mathematischen Basisstoffs und relevanten Aspekten des Bruchzahlverständnisses bei Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu einer Verbesserung der individuellen Leistungen in beiden Bereichen?

Aus den übergeordneten Forschungsfragen ergeben sich für die vorliegende Untersuchung die nachstehenden spezifischen *Folgefragestellungen*. Diese sollen sowohl für die heterogene Lerngruppe auf Klassenunterrichtsebene als auch für die ausgewählten Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten auf Förderschleifenebene die Frage nach der Effektwirkung der Intervention beantworten:

1. Welche Kompetenzen zeigen die Schülerinnen und Schüler mit Fokus auf ein grundlegendes Bruchzahlverständnis?
2. Welche Kompetenzen zeigen die Schülerinnen und Schüler mit Fokus auf ausgewählte Bereiche des arithmetischen Basisstoffs?
3. Zeigt die Interventionsform einen Einfluss auf den individuellen Lernfortschritt bei Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht?
4. Inwiefern entwickeln sich ihre individuellen Kompetenzen im Bereich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses?
5. Inwiefern entwickeln sich ihre individuellen Kompetenzen im Bereich des arithmetischen Basisstoffs?

Im Rahmen der vorliegenden Dissertation wird die Wirksamkeit der Intervention auf inhaltlicher Ebene in Bezug auf die Lernstände anhand des selbstentwickelten Testinstruments „BruKo“ unter quantitativen Aspekten evaluiert (*Forschungsfragen 1* und *2* sowie *Folgefragen*

1 und *2*). Auf organisatorischer Ebene wird der Einfluss der Interventionsform für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten untersucht (*Folgefrage 3*). Für eine umfassende Beurteilung des entwickelten Unterrichts- und Förderkonzepts gilt es mittels qualitativer Analysen ausgewählte individuelle Lernverläufe (*Folgefragen 4* und *5*), d.h. „die Interaktion zwischen Lernvoraussetzungen und Interventionsmerkmalen" (Wember, 2001, S. 161), anhand von Fallbeispielen zu untersuchen.

Darüber hinaus interessieren mit Bezug auf die übergeordneten Forschungsfelder die folgenden *Teilfragen*, die sowohl quantitativ (*Teilfrage 1* und *2*) als auch qualitativ (*Teilfrage 3*) beantwortet werden.

1. Inwieweit sind die arithmetischen Voraussetzungen im Basisstoff zum Zeitpunkt der Einführung des Bruchzahlverständnisses (Prätest) ausgebildet?
2. Welche Zusammenhänge lassen sich zwischen den Lösungen im arithmetischen Basisstoff und im grundlegenden Bruchzahlverständnis herstellen?
3. Ermöglicht das Konzept der Unterrichtsintegrierten Förderung für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten ein stärkeres Kompetenzerleben im gemeinsamen Klassenunterricht?

Trotz der Kenntnis darüber, dass erst im Sinne eines dualen Forschungsinteresses das Zusammenspiel und die gegenseitige Ergänzung beider Formen der Datenauswertung erste differenzierte Aussagen über die Wirkung der Intervention auf inhaltlicher und konzeptioneller Ebene liefern können, richtet sich der Fokus im Rahmen dieser Arbeit aus Gründen begrenzter Ressourcen auf die ergebnisbezogene Auswertung der quantitativen Daten. Die Analyse der erhobenen qualitativen Daten steht derzeit noch aus und wird zu einem späteren Zeitpunkt im Hinblick auf die prozessbezogene Wirkung tiefergehend analysiert.

6.2 Forschungsdesign

Um die Forschungsfragen zu beantworten, verbindet die vorliegende Studie die Entwicklung einer umfangreichen Unterrichts- und Förderkonzeption mit ihrer Erforschung im Feld und ist damit dem Ansatz der (fachdidaktischen) Entwicklungsforschung (vgl. Kap. 6.2.1) zuzuordnen. Die Evaluation der Interventionsmaßnahmen erfolgt im Rahmen einer explorativen Interventionsstudie im klassischen Prä-/Posttest-Design. Es handelt sich um ein quasi-experimentelles Design. Die Untersuchung wird sowohl inhaltlich als auch zeitlich (Testzeitpunkte, Interventionszeitrahmen) in das reale Unterrichtsgeschehen integriert und auf die zeitlichen Bedingungen innerhalb des regulären Schulbetriebs der Kooperationsschule abgestimmt. Es werden Stichproben aus natürlichen Populationen miteinander verglichen (Bortz & Döring, 2006, S. 54; Bortz & Schuster, 2010, S. 206; Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 127). Die Untersuchung findet somit in einer natürlichen, von der Untersucherin nicht beeinflussten Umgebung statt und kann damit gleichzeitig als „Felduntersuchung" mit hoher ökologischer Validität charakterisiert werden (Bortz & Döring, 2006, S. 57). Da die Klassen zufällig den verschiedenen Interventionsbedingungen zugeteilt werden, kann eine eingeschränkte Randomisierung realisiert werden. Auf die für ein experimentelles Forschungsdesign notwendige ideale Randomisierung der Gruppen muss zugunsten des Anspruchs der praxisnahen Umsetzung verzichtet werden. Die für die Evaluationsforschung zentrale Bedingungskontrolle, d.h. das Konstanthalten bzw. Kontrollieren von Störvariablen, kann in der schulischen Praxis unter alltagsnahen Bedingungen nur begrenzt eingehalten werden (Wember, 2009a, S. 106).

Insgesamt kommt der vorliegenden Evaluationsstudie explorativer Wert zu, da sie sich auf ein bisher wenig erschlossenes Forschungsfeld bezieht. Es wird ein praxisorientiertes Forschungsinteresse verfolgt und der Blick auf inklusive Unterrichtsstrukturen gelenkt. Es stehen die Konstruktionsprozesse sowie die empirische Erforschung eines komplexen und praxisvaliden Unterrichtssettings im Vordergrund, dessen Wirksamkeit durch im Vorfeld festgelegte theoretische Wirkfaktoren in einem ersten Versuch evaluiert wird.

Im weiteren Verlauf erfolgt zunächst eine theoretische Einordnung. Daran anschließend wird die Stichprobe beschrieben. Die Darstellung der Forschungskonzeption schließt dieses Kapitel ab.

6.2.1 Theoretische Einordnung

Das vorliegende Dissertationsprojekt ist in Anlehnung an zwei aufeinander aufbauende theoretische Forschungsansätze ausgerichtet. Beide betrachten die Mathematikdidaktik als eine Wissenschaft, in der die oftmals getrennt voneinander untersuchten Pole der praxisorientierten Entwicklungsarbeit und der deskriptiven Grundlagenforschung von Lehr-/Lernprozessen wechselseitig miteinander verknüpft werden. Als leitend gilt dabei „die Zielperspektive eines tragfähigen forschungsbasierten und praxistauglichen Unterrichtsdesigns“ (Hußmann, Thiele, Hinz, Prediger & Ralle, 2013, S. 25). Zum einen liegt der von Wittmann geprägte Ansatz von „Mathematikdidaktik als Design Science“ (vgl. Wittmann, E. Ch., 1992; 1995b) zu Grunde. Zum anderen stellt die Spezifizierung dieses Ansatzes in Form der fachdidaktischen Entwicklungsforschung nach dem Dortmunder Modell (Prediger et al., 2012) eine theoretische Orientierung dar. Im Folgenden soll ein Überblick über beide Ansätze gegeben werden, um sie dann in Bezug auf ihre jeweilige Rolle in dem vorliegenden Forschungskontext zu konkretisieren (für einen Überblick über verschiedene Entwicklungsforschungsansätze siehe Link, 2012).

Design Science

Im Rahmen des von Wittmann am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts in Dortmund geprägten Konzepts „Design Science“ (1992) lässt sich das Aufgabenfeld der Mathematikdidaktik in der „Erforschung und Entwicklung des Lernens und Lehrens von Mathematik in allen Altersstufen einschließlich seiner Voraussetzungen, Zielsetzungen und Rahmenbedingungen“ (Wittmann, E. Ch., 1992, S. 56) verorten. Einen zentralen Aspekt zur Erfüllung dieser auf den Nutzen für die Praxis ausgerichteten Aufgaben stellen die „Entwicklung und Erforschung inhaltsbezogener theoretischer Konzepte und praktischer Unterrichtsbeispiele mit dem Ziel einer Verbesserung des realen Unterrichts“ dar, die als „Kernbereich in den Mittelpunkt der wissenschaftlichen Arbeit“ gestellt werden (Wittmann, E. Ch., 1992, S. 56). Wittmann (1995b) hebt hervor, dass

> The specific tasks of mathematics education can only be actualized if research and development have specific linkages with the practice at their *core* and if the improvement of practice is merged with the progress of the field as a whole [Hervorheb. im Original]. (S. 356)

Dabei sieht er die zentrale Stellung des Kerns als „an expression of the *applied status* of mathematics education [Hervorheb. im Original]“ (Wittmann, E. Ch., 1995b, S. 358). Neben der Durchdringung möglicher Unterrichtsinhalte auf elementarmathematischer Ebene mit dem Ziel, sie bestimmten Lerngruppen zugänglich zu machen, sowie der Erforschung von Lernvoraussetzungen und Lehr-/Lernprozessen, tragen insbesondere die Entwicklung substantieller Lernumgebungen und die wissenschaftliche Untersuchung ihrer praktischen Umsetzbarkeit eine bedeutsame Rolle (Wittmann, E. Ch., 1992, S. 57).

Wittmann (1992, 1995b) setzt dabei auf den wissenschaftlichen Zugang über die „Eigenart des Kernbereichs der Mathematikdidaktik“, d.h. die spezifische Orientierung an und Ausrichtung der mathematikdidaktischen Forschung auf den zentralen fachlichen Kern innerhalb seiner interdisziplinären Bezugsbereiche und begleitenden Theoriegerüste (Wittmann, E. Ch., 1995b, S. 361). Dabei wird einerseits die Konstruktion konkreter Produkte (bspw. Unterrichtseinheiten, Unterrichtskonzepte, Curricula) aus dem Kernbereich heraus fokussiert, die fachspezifische Merkmale und reichhaltige, mathematische Substanz aufweisen und das vorrangige Ziel der Unterrichtsverbesserung verfolgen. Für Wittmann tragen diese „sets of carefully designed and empirically studied teaching units that are based on fundamental theoretical principles“ (1995b, S. 369) eine besonders relevante Bedeutung, da sie entscheidend für die Weitergabe von Unterrichtsinnovationen sind. Andererseits nimmt die systematische Beforschung ihrer praktischen Implementation in Bezug auf mögliche Wirkungen und die Qualität der induzierten Lernprozesse in unterschiedlichen schulischen „Ökologien“ (vgl. Link, 2012, S. 63) einen besonderen Stellenwert ein.

Fachdidaktische Entwicklungsforschung

Die lernprozessfokussierende fachdidaktische Entwicklungsforschung nach dem Dortmunder Modell (vgl. Prediger & Link, 2012) als eine spezifische Ausrichtung der fachdidaktischen Entwicklungsforschung bzw. des Design Research greift sowohl auf die Gegenstandsorientierung im Sinne der Design Science nach Wittmann (vgl. Wittmann, E. Ch., 1992; 1995b) als auch auf die Prozessorientierung im Sinne der Fokussierung individueller Lernprozesse (Gravemeijer & Cobb, 2006) zurück. Das Potenzial der Entwicklungsforschung wird im Allgemeinen in der Verschränkung der schul- und unterrichtspraktischen Perspektive mit theoretischen Forschungsansätzen gesehen. „We would argue that design research has the potential to bridge the gap between theory and practice” (Gravemeijer & Cobb, 2006, S. 26). In Abgrenzung zu Wittmanns Ansatz verfolgt sie eine stärker empirisch ausgerichtete Erprobung (vgl. Gravemeijer & Cobb, 2006; Prediger & Link, 2012) und stellt zugleich das Verstehen als „salient characteristic of design research“ (Gravemeijer & Cobb, 2006, S. 46) in den Vordergrund.

Das Vorgehen innerhalb der fachdidaktischen Entwicklungsforschung zielt zum einen auf die theoriegeleitete und empirisch gestützte Entwicklung von Lehr-/Lernarrangements vor dem

Hintergrund einer stofflich-epistemologischen Analyse des jeweils ausgewählten Lerngegenstands. Zum anderen nimmt die Evaluation der durch die entwickelten Lehr-/Lernarrangements initiierten Lernprozesse eine bedeutsame Rolle für die empirisch begründete Theoriebildung ein. Kennzeichnend für diesen Forschungsansatz sind ihre iterativen Zyklen. Innerhalb dieser werden die Bereiche Entwicklung und Erforschung eng miteinander verknüpft, sodass eine zyklische Auswertung, Überarbeitung und Weiterentwicklung der Entwicklungsprodukte stattfindet. Durch die Verknüpfung beider Zielperspektiven entstehen „gleichermaßen für die Praxis relevante und gehaltvolle Lehr-/Lernarrangements und Design-Prinzipien und tragfähige, sich immer weiter ausdifferenzierende Theorien“ (Hußmann et al., 2013, S. 27).

Konkretisierung für die vorliegende Studie

Die Überlegungen zur mathematikdidaktischen Forschung nach dem Ansatz des „Design Science“ werden in der vorliegenden Studie bei der Konstruktion des Unterrichts- und Förderkonzepts (Kap. 5) sowie der Entwicklung des Testinstruments (Kap. 7) berücksichtigt. Sowohl die entwickelten Unterrichtsstunden und Fördereinheiten als auch das Testinstrument „BruKo“ stellen in diesem Sinne die Entwicklungsprodukte dar und tragen somit neben den empirischen Forschungsergebnissen (Kap. 8) wesentlich zu der vorliegenden Forschungsleistung bei. Die praktische Erprobung und Umsetzung wird sowohl durch die Autorin, die ausgebildete Förderschullehrkraft ist, als auch durch die Mathematiklehrerinnen der teilnehmenden Schulklassen durchgeführt und evaluiert. Es geht also im Sinne Wittmanns darum, die theoretisch auf die fundamentale Idee und den mathematischen Kern ausgerichteten Entwicklungsprodukte so zu konzipieren, dass sie den Lehrkräften in der Praxis Gestaltungsfreiräume bei der Umsetzung eröffnen und den Schülerinnen und Schülern vielfältige Lernzugänge ermöglichen (Wittmann, E. Ch., 1992, S. 66). Dabei überträgt Wittmann die Aufgabe der Umsetzung und Konkretisierung der Entwicklungsprodukte im Unterricht auf die Lehrkräfte:

> The design of substantial teaching units, and particularly of substantial curricula, is a most difficult task that must be carried out by the experts in the field. By no means can it be left to teachers, though teachers can certainly make important contributions within the framework of design provided by experts, particularly when they are members of or in close connection with a research team. Also, the adaptation of teaching units to the conditions of a special classroom requires design on a minor scale. Nevertheless, a

> teacher can be compared more to a conductor than to a composer or perhaps better to a director (‘metteur en scene’) than to a writer of a play. (S.365)

Dieses Vorgehen entspricht der „empirischen Forschung »erster Art« [Hervorheb. im Original]“ (Wittmann, E. Ch., 2013, S. 1096), das einen wichtigen Beitrag zur Weiterentwicklung, Überarbeitung und Ausgestaltung des konkreten Entwicklungsprodukts leistet (vgl. Link, 2012, S. 63).

Bei dem vorliegenden Forschungsprojekt handelt es sich um ein klassisches Design im Sinne der Entwicklung, Erprobung und Erforschung eines Unterrichtsbeispiels in realen Unterrichtssettings, d.h. Forschung und Entwicklung werden als sich wechselseitig bereichernde Pole eines vielfältigen Spektrums an wissenschaftlichen Zugängen betrachtet (vgl. Hußmann et al., 2013, S. 26). Im Gegensatz zu der fachdidaktischen Entwicklungsforschung im engeren Sinne finden allerdings keine iterativen Entwicklungsphasen (Prediger & Link, 2012) statt. Gleichwohl stellen im Rahmen dieser Studie übergreifende Charakteristika (vgl. Hußmann et al., 2013, S. 29), die das Feld der Entwicklungsforschung auszeichnen, eine bedeutsame Orientierungsgrundlage dar: Die Entwicklung des komplexen Unterrichts- und Förderkonzepts nach dem Ansatz der unterrichtsintegrierten Förderung (vgl. Bartnitzky, 2012; vgl. Häsel-Weide & Nührenbörger, 2012) sowie des Testinstruments ist theoriegeleitet, d.h. sie wurden vor dem Hintergrund der explizierten theoretischen Grundannahmen entworfen. Das Ziel der Veränderung der realen (hier inklusiv orientierten) Unterrichtswirklichkeit wird sowohl durch den Anspruch der praxisnahen Entwicklung und Implementation als auch der Evaluation ihrer Praxisrelevanz erfüllt. In Anlehnung an das spezifische Forschungsprogramm der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell wird dem Aspekt der Prozessorientierung insbesondere durch die noch ausstehende qualitative Auswertung individueller Lernprozesse Rechnung getragen werden können. Darüber hinaus nimmt auch in der vorliegenden Studie die Gegenstandsorientierung eine zentrale Rolle ein, d.h. es findet sowohl aus theoretischer als auch aus empirischer Sicht eine fundierte Auseinandersetzung und Strukturierung des Lerngegenstands und der Lernstände statt, um tragfähige Lernprozesse initiieren zu können.

Das hier vorgestellte Dissertationsprojekt berücksichtigt gleichermaßen die beiden komplementären Ziele der Konzeption einer Lernumgebung unter Berücksichtigung zentraler Gestaltungsprinzipien einerseits sowie deren empirischen Erforschung andererseits. Aufgrund begrenzter forschungsökonomischer, zeitlicher und personaler Ressourcen konnte die entwickelte Unterrichts- und Förderkonzeption erstmalig erprobt und evaluiert werden, umfangreiche iterativ angelegte Forschungsphasen waren nicht realisierbar.

6.2.2 Beschreibung der Stichprobe

Die Evaluation der Intervention soll mit einer heterogenen Lerngruppe im inklusiven Schulkontext stattfinden. Aus forschungsökonomischen Gründen kann die Untersuchung nur an einer Schule durchgeführt werden. Unterschiede, die sich zwischen verschiedenen Einzugsgebieten von Schulen ergeben, können folglich nicht berücksichtigt werden. Die relativ kleine Gesamtstichprobe (N = 103) unterstreicht den explorativen Charakter der Untersuchung.

Als Kooperationsschule konnte eine Integrierte Gesamtschule aus einem Stadtzentrum in Niedersachsen gewonnen werden. Da die Heterogenität der Lernenden an Integrativen Gesamtschulen recht groß ist, kann man davon ausgehen, dass die teilnehmenden Klassen das gesamte nicht-gymnasiale Leistungsspektrum gut abbilden. Ein quasi-experimentelles Untersuchungsdesign ist im schulischen Kontext entscheidend von der Freiwilligkeit der Schulen und letztlich den Lehrerinnen und Lehrern abhängig. Aus diesem Grund lässt sich keine Zufallsstichprobe bilden. Die im Folgenden vorgestellte Stichprobe kann demnach als eine „anfallende Stichprobe“ (Bittrich & Blankenberger, 2011, S. 25) charakterisiert werden. Darüber hinaus handelt es sich um eine sogenannte Klumpenstichprobe (Bortz & Döring, 2006, S. 435-436), deren zufällig ausgewählten Teilmengen (Interventionsklassen und Vergleichsklasse) bereits vorgruppiert sind und vollständig untersucht werden.

Die Interventionsstudie wurde im zweiten Halbjahr des Schuljahres 2016/2017 in der Region Hannover in Niedersachsen durchgeführt. Es nahmen Schülerinnen und Schüler des fünften Jahrgangs teil. Die Gesamtstichprobe von N = 103 war durch die schulischen Rahmenbedingungen vorgegeben und blieb über den gesamten Interventionszeitraum weitestgehend konstant.[15] Bei den vier Schulklassen handelte es sich um sogenannte „natürliche Gruppen“ (Bortz & Döring, 2006, S. 54), die hinsichtlich verschiedener Variablen Unterschiede aufwiesen. Anhand einer vorstrukturierten Tabelle wurden (nach der Intervention)

[15] Lediglich in der Interventionsklasse I reduzierte sich die Anzahl der Lernenden zu Beginn der Durchführung von 25 auf 24 Schülerinnen und Schüler, in der Vergleichsklasse hat ein Schülerwechsel stattgefunden.

schülerspezifische Daten zu sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf (Lernen, emotionale und soziale Entwicklung, Sprache, geistige Entwicklung, körperliche Entwicklung, Hören, Sehen), zu erster und zweiter Nationalität, zu allgemeinen mathematischen und (schrift-)sprachlichen Kompetenzen (Schätzurteile: ++, +, 0, -, --) sowie weiteren wichtigen Informationen durch die Einschätzung der jeweiligen Mathematik- und Klassenlehrerinnen erhoben. Einige der Ergebnisse sowie die Ergebnisse des Prätests sollen im Folgenden (Tab. 4) zur Charakterisierung der Gesamtstichprobe dargestellt werden:

Tabelle 4: Überblick über die Stichproben (gerundete Proezentangaben beruhend auf den Einschätzungen der Lehrkräfte)

	Interventions-klasse I (5.1)	**Interventions-klasse II (5.3)**	**Interventions-klasse III (5.2)**	**Vergleichs-klasse (5.4)**[16]
Anzahl Lernende	*n = 24*	*n = 28*	*n = 24*	*n = 25*
BASIS-MATH-G 4$^+$-5 *m (SD)*	36.64 (13.90)	34.03 (13.1)	29.09 (15.34)	35.92 (14.32)
BruKo Teil I *m (SD)*	29.02 (10.41)	26.48 (12.66)	31.18 (12.62)	25.44 (13.69)
BruKo Teil II				
geschl. A. *m (SD)*	29.33 (11.07)	30.85 (11.05)	28.15 (14.73)	13.13 (12.53)
o. A. *m (SD)*	15.29 (5.64)	15.04 (6.36)	13.41 (7.85)	7.08 (6.74)
Sonderpädagogischer Unterstützungsbedarf (L: Lernen; ES: Emotional-Sozial; SP: Sprache)	L: 13% ES: 4% SP: 0%	L: 7 % ES: 0 % SP: 0 %	L: 17 % ES: 4 % SP: 4 %	
Familiensprache (D: nur Deutsch; D + x: Deutsch und weitere Sprache; x: nur weitere Sprache)	D: 58 % D + x: 21 % x: 21 %	D: 75 % D + x: 25 % x: 0 %	D: 70 % D + x: 13 % x: 17 %	

[16] Für die Vergleichsklasse liegen der Autorin auch nach mehrmaliger Anfrage keine Einschätzungen der Mathematik- und Klassenlehrerin vor.

Mathematische Kompetenzen (Einschätzung durch Mathelehrkraft; ++, +, o, -, --)	++: 17 % +: 8 % 0: 42 % -: 21 % --: 13 %	++: 14 % +: 14 % 0: 46 % -: 14 % --: 10 %	++: 21 % +:13 % 0: 42 % -: 17 % --: 8 %
Deutschkenntnisse in Sprechen und Verstehen (Einschätzung durch Mathelehrkraft; ++, +, o, -, --)	++: 4 % +: 42 % 0: 42 % -: 13 % --: 0 %	++: 35 % +: 10 % 0: 35 % -: 10 % --: 7 %	++: 0 % +: 67 % 0: 29 % -: 4 % --: 0 %
Schreibkompetenz und schriftlicher Ausdruck (Einschätzung durch Mathelehrkraft; ++, +, o, -, --)	++: 4 % +: 33 % 0: 21 % -: 42 % --: 0 %	++: 21 % +:7 % 0: 43 % -: 10 % --: 14 %	++: 4 % +: 25 % 0: 46 % -: 17 % --: 8 %

Die dargestellten Gruppenunterschiede im Rahmen des Quasi-Experiments führen gegenüber experimentellen Untersuchungen zu einer Einschränkung der internen Validität. Unterschiede zwischen den Gruppen hinsichtlich der abhängigen Variable (mathematische Leistung) können dann manchmal nicht eindeutig auf die Wirksamkeit der unabhängigen Variable (Interventionsform) zurückgeführt werden (Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 169).

Für die Erforschung der Wirksamkeit der Unterrichtskonzeption auf Klassenunterrichtsebene wird die Untersuchungsstichprobe (N=103) weitgehend zufällig auf die verschiedenen Interventionsformen *klassenintegrierte Förderung mit Förderschleifen* (zwei Schulklassen, Interventionsklasse I mit n = 24 und Interventionsklasse II mit n = 28), *klassenintegrierte Förderung ohne Förderschleifen* (eine Schulklasse, Interventionsklasse III mit n = 24, Interventionsklasse II) und *Vergleichsklasse* (eine Klasse, n = 27) verteilt. Die Zuteilung der Gesamtstichprobe auf die verschiedenen Interventionsformen sieht wie folgt aus (Abb. 23):

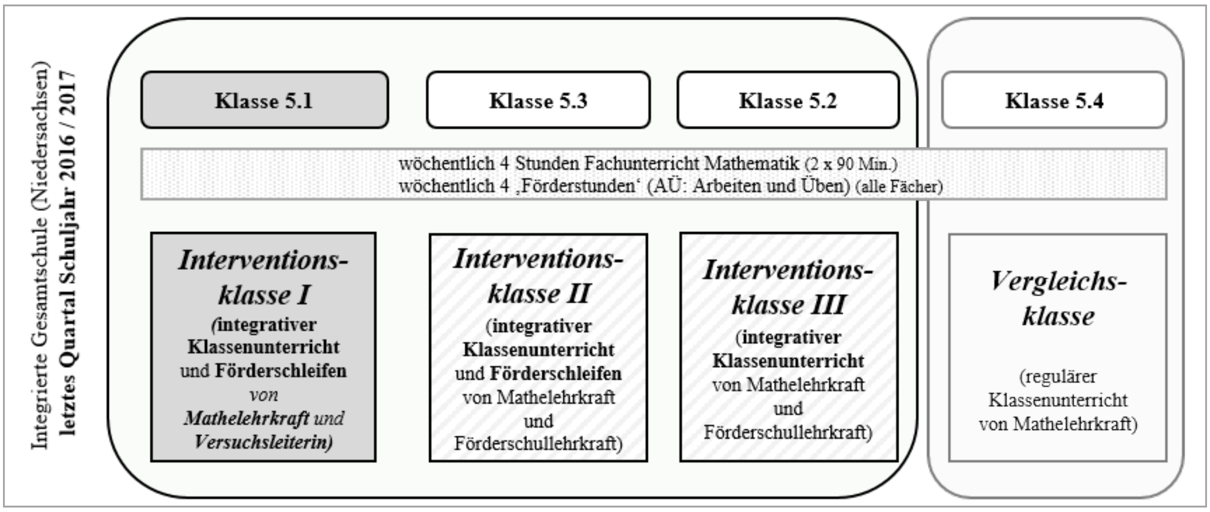


Abbildung 23: Stichprobe und Interventionsformen (eigene Darstellung)

Die drei Interventionsklassen I, II, III werden während des Interventionszeitraums nach dem entwickelten Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung unterrichtet. Aus den Interventionsklassen I und III nehmen jeweils die vier Schülerinnen und Schüler zusätzlich an der spezifischen Kleingruppenförderung teil, die (besondere) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zeigen. Die Lernenden der Vergleichsklasse nehmen am regulären Mathematikunterricht teil und werden weder nach dem konzipierten Klassenunterricht unterrichtet, noch erhalten sie die zusätzliche Förderung. Bei den Interventionsgruppen II und III kann aufgrund der praxisnahen Durchführung eine Diffundierung der Intervention erwartet werden, da beide Klassen von der gleichen Mathematiklehrerin unterrichtet werden.

Auswahl der zusätzlich geförderten Lernenden

Die Durchführung und Evaluation der Wirksamkeit des Förderkonzepts soll mit Lernenden stattfinden, die (besondere) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zeigen. Auswahlkriterium sind unzureichend entwickelte Kompetenzen im Bereich des mathematischen Basisstoffs sowie das Fehlen gesicherter elementarer Verstehensgrundlagen und dadurch bedingt wichtiger Voraussetzungen für ein stabiles Weiterlernen (vgl. Deutscher, Prediger & Selter, 2013, S. 252; 2013, S. 12). Dabei stellt die angemessene Zuordnung von Lernenden zu geeigneten Fördermaßnahmen eine Herausforderung dar. Nach Lorenz und Radatz (1993, S. 15) weisen ca. 15 % aller Lernenden eine mindestens förderungsbedürftige Rechenstörung auf, 6 % können als extrem rechenschwach eingeschätzt werden. Dieser Beurteilung zufolge lässt sich annehmen, dass in etwa zwei bis vier Schülerinnen und Schüler einer Schulklasse als so rechenschwach eingestuft werden können, dass sie einer spezifischen Förderung bedürfen (vgl. Freesemann, 2014, S. 128). Folglich wird eine Gruppengröße von je vier Schülerinnen und Schülern eingeplant. Für die beiden Teilstichproben der Interventionsklassen I und II (n = 52) gilt es, entsprechend der für die vorliegende Studie relevanten Differenzlinie der mathematischen Leistungen (vgl. Kap. 2.1.2), jeweils die vier Lernenden mit den größten Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu bestimmen. Vor dem Hintergrund empirischer Testergebnisse (u.a. Moser Opitz, Freesemann, Grob & Prediger, 2016), die eine formale Zuweisung sonderpädagogischer Unterstützungsbedarfe für den Mathematikunterricht nur als eingeschränkt aussagekräftig darstellen, erfolgt in der vorliegenden Forschungsarbeit die Zuteilung der Kinder zu den Förderschleifen mathematikbezogen und dynamisch (vgl. Ademmer et al., 2018, S. 304). Als Bezugsnorm wird sowohl die Sozialgruppe unabhängig von möglichem sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf als auch die kriteriumsorientierte Bezugsnorm herangezogen, um die Entscheidung auf inhaltlicher Ebene treffen zu können.

In mehreren Studien werden die im BASIS-MATH-G 4^{+}-5 (Moser Opitz et al., 2016) angesprochenen Kompetenzbereiche als zentrale Prädiktoren für die weitere mathematische Lernentwicklung hervorgehoben und deren Relevanz für weiterführende Inhalte in der Sekundarstufe I unterstrichen (u.a. Humbach, 2008; Moser Opitz, 2007, 2013).Vor diesem Hintergrund wird der standardisierte Mathematiktest (vgl. Kap. 6.3) in allen vier Klassen als Screeninginstrument eingesetzt.. Entsprechend der Normen für das vierte Quartal der fünften Klasse in Deutschland werden die Lernenden ausgewählt, die zwischen 0 und 30 Rohpunkten erreichen, somit unterdurchschnittliche Leistungen zeigen und den Grenzwert von einer Rohwertsumme von 41 nicht erreichen.[17] Die Testautoren (2016) erachten den Bedarf spezifischer Fördermaßnahmen für diese Kinder als erforderlich (S. 70).

Die Datenerhebung des Prätests erfolgte in allen vier Klassen mittels des selbstentwickelten Testinstruments „BruKo“. Anhand der Testergebnisse können nur begrenzte Aussagen getroffen werden, da es sich zum einen nur um „Momentaufnahmen“ (vgl. Kap. 2.3.1) handelte und zum anderen die Ergebnisse aus Teil II des „BruKos“ zum Testzeitpunkt nicht

[17] Um die Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit sehr schwachen Testergebnissen beurteilen zu können, kann zusätzlich eine Interpretation anhand des Grenzwerts des BASIS-MATH-G4+ sinnvoll sein. Ein entsprechender Grenzwert für die Einordnung der Rohwerte des BASIS-MATH-G 4^{+}-5 liegt bei 31 Punkten (Moser Opitz et. al., 2016, 67). Auch entsprechend der Normen für das vierte Schuljahr erreichen die ausgewählten Kinder, die eine zusätzliche Förderung erhalten, nicht den kritischen Grenzwert.

aufschlussfähig waren, da es sich um einen für alle Lernenden neuen Inhaltsbereich handelte. Zur Auswahl der Teilstichproben für die Förderschleifen wurden demnach in erster Linie nur die Ergebnisse des ersten Teils (mathematischer Basisstoff) als Ergänzung zu den Screening-Daten herangezogen; die Aufgaben des Bruchzahlverständnisses sollten keine Entscheidungsgrundlage darstellen, sie dienten zur zusätzlichen Untermauerung der Auswahl.

Im Sinne der Lernausgangslagendiagnose erlaubten die Ergebnisse des Prätests (vgl. Tab. 5) eine Einschätzung über die bereits vorhandenen individuellen inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen der Lernenden und lieferten für Unterricht und Förderung nutzbare Hinweise auf Vorerfahrungen und mögliche Anknüpfungspunkte (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 169; Hußmann et al., 2007, S. 2). Vor dem Hintergrund der quantitativen Daten des Prätests (vgl. Tab. 5) wurde die Auswahl der für die Förderschleifen vorgesehenen Kinder unter sozialen und pädagogischen Gesichtspunkten diskutiert. Die endgültige Zusammensetzung der beiden Fördergruppen (je $n = 4$) wurde kooperativ und in Absprache mit den beteiligten Lehrerinnen festgelegt. Die objektiven Daten des Screenings und des Prätests unterstützten und bestätigten die getroffene Auswahl.

Tabelle 5: Überblick der Ergebnisse des Prätests der ausgewählten Lernenden für die Förderschleifen sowie der Parallelkinder (Angaben in Rohwerten)

	VP	**Basis-Math-G 4^{+}-5**	**BruKo Teil I**	**BruKo Teil II** geschl. A.	**BruKo Teil II** o.A.
Förderschleife I (5.1)	1_11	22	19	35	20,5
	1_16	14	12	29	13
	1_22	22	20,5	28	16,5
	1_24	43	28	34	17
Förderschleife II (5.3)	3_09	21	16	32	16,4
	3_20	19	8	2	1
	3_26	30	18	30	2
	3_28	10	20	10	12,5
Parallelkinder (5.4)	4_02	22	11,5	2	0
	4_03	29	12	6	4
	4_04	13	9	9	6
	4_05	15	6	10	2
	4_06	30	18,5	8	3
	4_07	11	17	16	2
	4_11	11	10,5	0	2
	4_16	23	30	33	14

Um die individuelle Lernentwicklung der in den Förderschleifen geförderten Kinder vergleichen zu können, wurden aus der ungeförderten Vergleichsklasse die zum Zeitpunkt des Vortests ähnlichsten „Parallelkinder“ ausgewählt. Auch an dieser Stelle musste auf die für ein experimentelles Forschungsdesign notwendige Randomisierung der Gruppen zugunsten möglichst stabiler Lerngruppen verzichtet werden, sodass nur ein quasi-experimentelles Setting realisiert werden konnte (Bortz & Döring, 2006, S. 54). Im Sinne des in Kapitel 2.1.2 dargestellten Inklusions- und Heterogenitätsverständnisses wurde davon abgesehen, von vornherein Kinder mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf für die Förderschleifen auszuwählen. Prengel (2003) schlägt für pädagogische Interventionen vor, sich vorrangig an der individuellen Ebene zu orientieren, unabhängig von der eher schulorganisatorischen Kategorie des sonderpädagogischen Unterstützungsbedarfs.

6.2.3 Forschungskonzeption

Um in den drei Interventionsklassen eine möglichst hohe Standardisierung bei der Durchführung zu erreichen und um die mit dem Forschungsdesign potentiell einhergehende Gefahr der Versuchsleitereffekte gering zu halten (Bortz & Döring, 2006, S. 84), nahmen die beteiligten Lehrerinnen im Vorfeld an zwei vorbereitenden Treffen statt. Der erste Termin wurde zunächst genutzt, um das Gesamtprojekt mit seinem Aufbau und der theoretischen Konzeption zu erläutern, die Ziele vorzustellen und die praktische Umsetzung im Team zu besprechen. Darüber hinaus werden allgemeine organisatorische Hinweise zur Projektdurchführung geklärt. Der zweite Termin (in den Osterferien) dient primär der inhaltlichen Vorbereitung. Die beteiligten Lehrerinnen bekommen sowohl die theoretischen Planungen und Unterrichtsverläufe der ersten drei Bausteine sowie der dazugehörigen Förderschleifen ausgehändigt. Zusätzlich werden die wichtigen fachlichen, fachdidaktisch-methodischen und sonderpädagogischen Komponenten sowie die erforderlichen Kompetenzen zum Erreichen der intendierten Ziele besprochen. Die Bausteine werden bewusst sukzessive eingeführt, um den Lehrerinnen eine intensive Einarbeitung zu ermöglichen.

Über einen Zeitraum von ca. zwei Monaten finden im Vorfeld der Intervention insgesamt fünf Hospitationen der Versuchsleiterin in der Interventionsklasse I statt. Diese dienen dazu, die Lerngruppe besser kennenzulernen, den Beziehungsaufbau anzubahnen und einzelne, für die Intervention relevante, aber für die Lernenden noch unbekannte Methoden en passant einzuführen. Dabei geht es in erster Linie um Aufgabenformulierungen, die das entdeckende Lernen und eine kooperative Zusammenarbeit herausfordern und die Verbalisierung eigener Lösungsschritte erfordern. In den Interventionsklassen I und II werden dieselben Aufgaben von der unterrichtenden Mathematiklehrerin eingeführt. Die Lernenden sollen innerhalb ihres regulären Mathematikunterrichts beiläufig auf die Intervention vorbereitet werden. Dabei geht es allerdings nicht etwa darum, bestimmte Aufgaben vorab intensiv zu üben.

Im Verlauf der Durchführung fanden mit den beiden Lehrerinnen der Interventionsklassen II und III zu Beginn der ersten drei Wochen kurze Treffen statt. Diese zielen einerseits im Sinne der Retrospektive auf den Austausch über bereits durchgeführte Einheiten, sodass die Versuchsleiterin unmittelbare Rückmeldungen erhält. Andererseits ermöglichen diese Treffen die Klärung eventueller Unklarheiten und Verständnisprobleme hinsichtlich noch folgender Einheiten. Darüber hinaus erfolgt mit allen teilnehmenden Lehrerinnen ein aktiver Austausch im Schulalltag, der sich insbesondere mit der Förderschullehrerin vor dem Hintergrund der Durchführung der Förderschleifen intensiviert. Aufgrund der engen Zusammenarbeit zwischen der Mathematiklehrerin der Interventionsklasse I und der Versuchsleiterin werden in dieser Klasse keine separaten Treffen vereinbart.

Während der gesamten Durchführung fand ein intensiver und ergiebiger Austausch über bereits durchgeführte Einheiten, erforderliche Adaptionen sowie die Umsetzung bevorstehender Unterrichtstunden statt. Nach den ersten zwei Wochen der Intervention erhielten alle Lehrkräfte die theoretischen Planungen und Unterrichtsverläufe der verbleibenden zwei Bausteine. Das konkrete Material für jede Unterrichtsstunde und jede Förderschleife wird von der Versuchsleiterin in einem extra dafür vorgesehenen Regal im Kopierraum der Schule am Ende einer Woche für die darauffolgende Woche vorbereitet und strukturiert zur Verfügung gestellt. Die Mathematiklehrerin der Vergleichsklasse erhält im Vorfeld und während der Intervention keinerlei Informationen zum inhaltlichen Aufbau und zur Durchführung der Unterrichts- und Förderstunden. Sie hat lediglich einen Einblick in die Aufgabenformate durch den Vortest.

Zeitliche Planung der Intervention

Die Forschungsarbeit im Feld (Prätestphase, Intervention, Posttestphase) erstreckte sich über einen Zeitraum von 15 Wochen. Die Durchführung der Intervention betrug sieben Wochen und wurde zeitlich zwischen die Oster- und Sommerferien im vierten Quartal des fünften Schuljahres 2016/2017 gelegt. Das Forschungsdesign umfasst drei Messzeitpunkte: Prätest, Posttest und Follow-Up. Die Implementierung der Intervention sollte so praxisnah und für den regulären Unterricht angemessen wie möglich durchgeführt werden. Es wurde ein praktisch umsetzbarer Zeitrahmen gewählt, der dennoch Förderungen über einen längeren Zeitraum möglich machte, um die Wahrscheinlichkeit für fundierte Lernentwicklungen zu erhöhen.

Insgesamt waren für die Interventionsklassen 13 Einheiten à 90 Minuten Mathematikunterricht vorgesehen, was einem Gesamtumfang von 1170 Minuten entspricht. Die beiden Kleingruppen erhielten darüber hinaus 14 Fördereinheiten à 45 Minuten im Rahmen der Förderschleifen und wurden insgesamt 630 Minuten zusätzlich gefördert.

6.3 Messinstrumente

Zur Durchführung der Untersuchung und Erhebung der quantitativen Daten werden zwei verschiedene Testverfahren eingesetzt: der standardisierte Mathematiktest BASIS-MATH-G 4^{+}-5 (Moser Opitz et al., 2016) und das selbst entwickelte, informelle Testinstrument „BruKo“ zur Erfassung der verstehensorientierten Leistungen im Bereich des für die Intervention relevanten arithmetischen Basisstoffs und des grundlegenden Bruchzahlverständnisses. Im Folgenden wird der BASIS-MATH-G 4^{+}-5 im Überblick vorgestellt und dessen Anwendung und Funktion innerhalb des Forschungsdesigns beschrieben. Daran anschließend werden die eingesetzten Standortbestimmungen abgebildet. Eine ausführliche Darstellung der Entwicklung des „BruKos“ sowie dessen detaillierte Beschreibung erfolgt in Kapitel 7.

BASIS-MATH-G 4^{+}-5

Die allgemeine Mathematikleistung im Bereich des mathematischen Basisstoffs wurde anhand des standardisierten und curriculumbasierten Mathematiktests „Basisdiagnostik Mathematik für das vierte Quartal der 4. Klasse und für die 5. Klasse“ (Moser Opitz et al., 2016) erhoben. Als kriteriumsorientierter Test ermöglicht der BASIS-MATH-G 4^{+}-5 die individuelle Verortung von Lernenden auf einer Leistungsskala basaler arithmetischer Kompetenzen der Grundschulmathematik, die für die weitere mathematische Lernentwicklung als bedeutsam erachtet werden. Das Testinstrument überprüft, ob und inwieweit eine Schülerin oder ein Schüler den mathematischen Basisstoff beherrscht. Es differenziert im unteren Leistungsbereich und ist zur Abklärung von Rechenschwäche sowie zur Evaluation des Bedarfs an Fördermaßnahmen für rechenschwache Lernende geeignet. Dabei orientiert sich der Test an der empirisch belegten Erkenntnis, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen in der Sekundarstufe I zentrale mathematische Kompetenzen der Grundschularithmetik nicht oder nur unzureichend erworben haben und aus diesem Grund in ihren weiteren mathematischen Lernprozessen beeinträchtigt sind (Moser Opitz et al., 2016, S. 9). Das Instrument stützt sich somit nicht auf das vielfach kritisierte Diskrepanzkriterium.

Die Testhefte liegen in zwei Versionen mit jeweiligen Parallelformen vor und können im vierten Quartal der vierten Klasse und im ersten Quartal der fünften Klasse (BASIS-MATH-G 4^+) bzw. im vierten Quartal der fünften Klasse (BASIS-MATH-G 5) eingesetzt werden. Sie umfassen 16 bzw. 19 Aufgaben mit insgesamt 58 bzw. 61 Items, die folgende zentrale Kompetenzen der Grundschulmathematik überprüfen: Umgang mit Zahl und Maß, Operationen und Rechenverfahren in den Bereichen Arithmetik und Sachrechnen. Für die vorliegende Studie erweisen sich insbesondere die Aufgaben zur Zahlzerlegung (2a, 2b, 2c, 2d, 2e), zum Ergänzen (8a, 8b, 8c), zum Halbieren (5d, 5e, 5f) und Verdoppeln (5a, 5b, 5c) sowie zu Grundvorstellungen und dem Zahl- und Operationsverständnis bei der Multiplikation (6a, 6b, 7a, 15b, 15c, 15d) und Division (7b, 15e, 15f, 15g, 15h) als relevant (vgl. theoretische Darlegung in Kapitel 4.1). Da sich die hier untersuchte Stichprobe zum Testzeitpunkt am Beginn des vierten Quartals der fünften Klasse befand, wurden die Testhefte G5 eingesetzt und entsprechend der Normierungswerte für Deutschland ausgewertet.

Die Normierungsstichprobe für das vierte Quartal der fünften Klasse setzt sich aus Lernenden an Haupt- und Gesamtschulen sowie aus Lernenden der siebten Klasse an Förderschulen mit dem Förderschwerpunkt Lernen in NRW zusammen. Durch den Einbezug der Förderschülerinnen und -schüler weist die Normierungsstichprobe eine höhere Altersheterogenität auf. Entsprechend der gewählten Schulformen zeigt sich ein hoher Anteil an Lernenden, die den kritischen Grenzwert von 41 Punkten nicht erreicht haben (Moser Opitz et al., 2016, S. 23). Die Lernenden der fünften Klassen an Haupt- und Gesamtschulen erzielten einen Mittelwert von 37.0 mit einer Standardabweichung von 10.9, Lernende der siebten Klassen an Förderschulen mit dem Förderschwerpunkt Lernen erreichten einen Mittelwert von 26.2 mit einer Standardabweichung von 12.9.

Hinsichtlich der Testgütekriterien zeigt der BASIS-MATH-G 4^+-5 zufriedenstellende Werte. Die Objektivität ist sowohl im Hinblick auf die Durchführung, Auswertung und Interpretation durch die wörtlichen Instruktionen, die differenzierten Auswertungshinweise sowie die vorgegebenen Grenzwerte und Fallbeispiele gesichert. Die für kriteriumsorientierte Instrumente bedeutsame Inhaltsvalidität ist durch die Orientierung an fachdidaktischen Aspekten und an Ergebnissen empirischer Studien gewährleistet. Eine explorative Faktorenanalyse zur Bestimmung der Konstruktvalidität ergab 16 Faktoren, die verschiedene Teilkompetenzen erfassen und voneinander unterscheidbar sind (Moser Opitz et al., 2016,

S. 52). Hinsichtlich der Reliabilität erreicht der BASIS-MATH-G 4^{+}-5 in beiden Testvarianten einen Alpha-Koeffizienten von $\alpha = .90$ bis $\alpha = .93$ und damit eine sehr hohe interne Konsistenz. Für die Testhalbierungsreliabilität können ebenfalls zufriedenstellende Werte (zwischen $r_{tt} = .83$ von Anfang bis Ende der fünften Klasse und $r_{tt} = .87$ für Mitte bis Ende der fünften Klasse) und damit eine hohe Stabilität über eine mittellange Zeitspanne festgestellt werden (Moser Opitz et al., 2016, S. 57-58). Diese Daten sprechen für die Messgenauigkeit und die Zuverlässigkeit des BASIS-MATH-G 4^{+}-5.

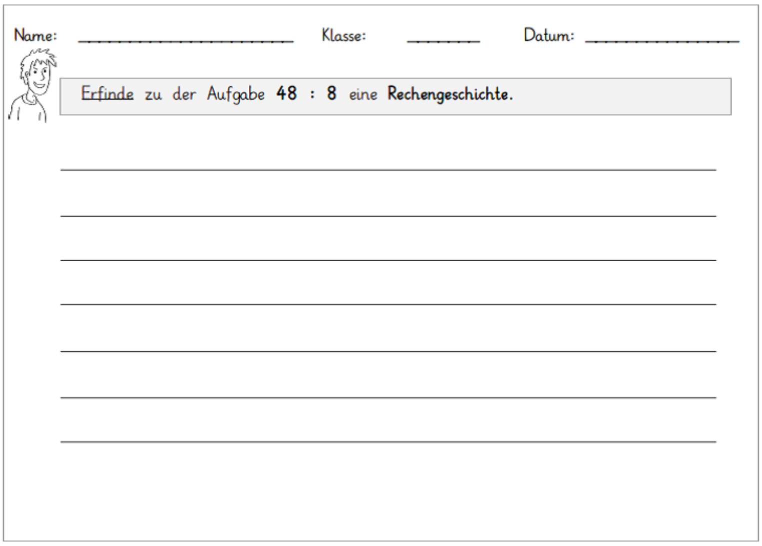
Standortbestimmungen

Während der siebenwöchigen Intervention wurden in den Interventionsklassen zusätzlich drei offene, verständnisorientierte Aufgabenformate als schriftliche Standortbestimmung eingesetzt, die hohes diagnostisches Potential aufweisen. Die Auswahl der Aufgaben fand in Anlehnung an die von Hußmann, Leuders und Prediger (2007, S. 7) vorgeschlagenen Eignungskriterien für Diagnosen statt: Konzentration auf bestimmte Kompetenzaspekte, Bearbeitung auf verschiedenen Niveaus, Aufforderung zur Produktion und Darstellung eines Lösungsweges. Die Aufgaben fragen nach aktuell entwickelten inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen sowie nach individuellen Vorstellungen, Vorgehensweisen und Strategien. Darüber hinaus sollen sie mögliche Schwierigkeiten aufdecken, die für den individuellen und gemeinsamen Lernprozess nutzbar gemacht werden können (Häsel-Weide & Prediger, 2017, S. 169; Sundermann & Selter, 2005, S. 5). In Kombination mit dem Testinstrument „BruKo“ werden die Standortbestimmungen als Art formative Beurteilung individueller Lernentwicklungen eingesetzt, sodass eine Diagnostik mit äußerst enger Verzahnung zu der Förderung stattfinden kann (Wilbert, 2014, S. 305). Idealerweise wird die immanente Doppelfunktion genutzt: einerseits erhalten die Lehrpersonen strukturierte Informationen über die individuellen Lernstände der Kinder, andererseits erfahren diese zunehmende Transparenz über ihre eigenen Lernprozesse (Sundermann, 2009, S. 1).

Jede der drei Aufgaben wurde innerhalb des Interventionszeitraums zweimal bearbeitet, um die Lernentwicklung der Kinder zu dokumentieren und zu vergleichen. Für die Lernenden stellen diese kurzen Aufgaben keine zusätzliche Testsituation dar. Vielmehr handelt es sich im Sinne der förderorientierten Lernbeobachtung um produktive Lernsituationen, die sich in den regulären Unterrichtsverlauf einreihen. Entsprechend der Inhalte der Intervention und des

Testinstruments umfassen die Standortbestimmungen sowohl eine Aufgabe zu dem arithmetischen Basisstoff als auch zwei Aufgaben zum grundlegenden Bruchzahlverständnis. Sie werden als Ergänzung der summativen quantitativen Daten sowie als zusätzliche Orientierung der individuellen Leistungen aus qualitativer Sicht eingesetzt.

Die Aufgabe zum arithmetischen Basisstoff (vgl. Abb. 24) überprüft das Operationsverständnis der Division und macht eine Unterscheidung zwischen Dividend und Divisor erforderlich. Analog zu den Testaufgaben 13 und 14 in Teil I des „BruKos“ setzt diese Aufgabe die Vernetzung von Darstellungsebenen voraus. In der Standortbestimmung wird der Transfer von der symbolisch dargestellten Rechenaufgabe in die Sachsituation gefordert, sodass – ergänzend zu den Testaufgaben – die Übertragung in beide Richtungen berücksichtigt wird. Anhand dieses offenen Aufgabenformats wird überprüft, ob die Lernenden über die relevanten inhaltlichen Grundvorstellungen zur Division verfügen und ob bzw. wie umfangreich sie diese zur Veranschaulichung und Interpretation nutzen können. Gleichzeitig weist die Aufgabe hohes diagnostisches Potential hinsichtlich der individuellen Vorstellungen der Lernenden auf (Hußmann et al., 2007, S. 5).


Name: ______ Klasse: ______ Datum: ______

Erfinde zu der Aufgabe **48 : 8** eine **Rechengeschichte.**

Abbildung 24: Standortbestimmung zum arithmetischen Basisstoff

Die erste Aufgabe, die sich auf ein grundlegendes Bruchzahlverständnis bezieht (vgl. Abb. 25) zielt auf das individuelle Verständnis der Lernenden. Aufgrund der vorgegebenen und zu kommentierenden Aussage ist sie allerdings nicht ganz offen. Der Fokus liegt auf dem

Argumentieren und Begründen der ersten Grundvorstellung. Durch den zweimaligen Einsatz im Verlauf der Intervention wird die Darstellung differenzierterer Ausführungen ermöglicht.

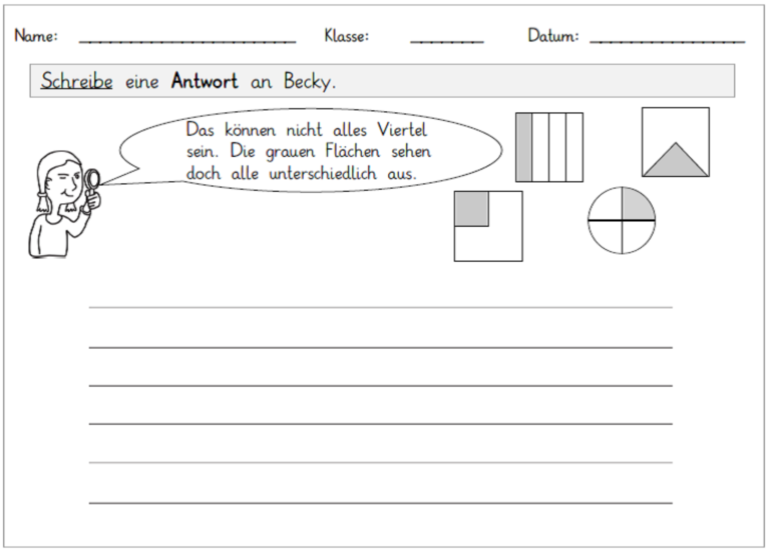


Abbildung 25: Standortbestimmung 1 zum grundlegenden Bruchzahlverständnis

Die zweite Aufgabe im Bereich des Bruchzahlverständnisses (vgl. Abb. 26) zielt auf die flexible Anwendung von (Grund-)Vorstellungen. Die sehr offene Aufgabenstellung ermöglicht eine Selbstdifferenzierung und die individuelle Bearbeitung auf verschiedenen Niveaus. Die Lernenden werden aufgefordert, einen bestimmten mathematischen Inhalt auf unterschiedliche Art und Weise darzustellen. Der doppelte Einsatz der Aufgabe sowohl zu Beginn als auch zum Abschluss der Intervention ermöglicht differenziertere Darstellungen des Bruchs (entsprechend GV1, GV2, Anteile von Mengen, Äquivalenz).

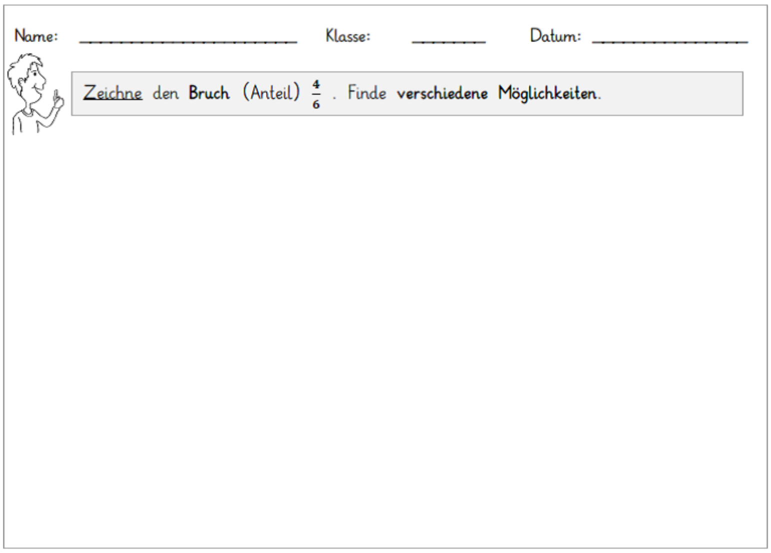


Abbildung 26: Standortbestimmung 2 zum grundlegenden Bruchzahlverständnis

Abbildung 27 zeigt den chronologischen Einsatz der Messinstrumente:

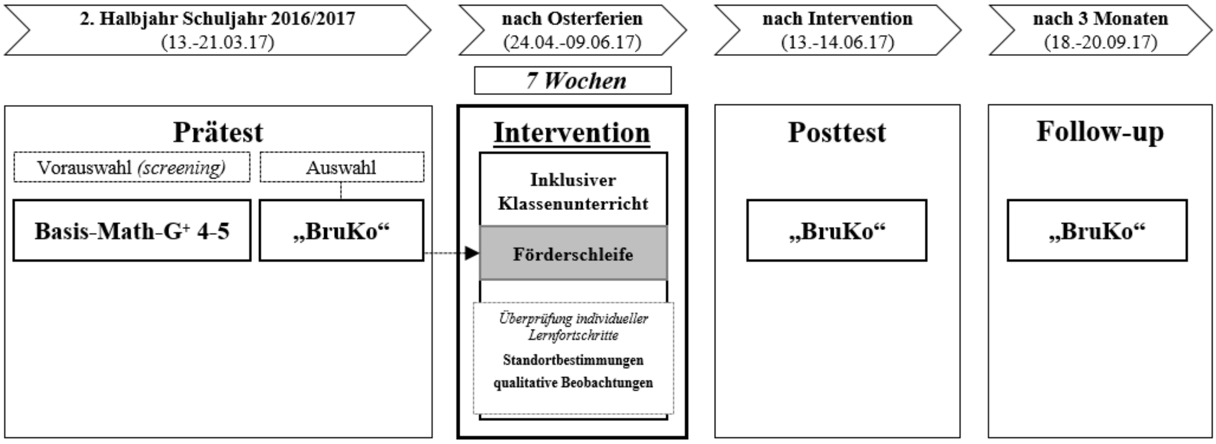


Abbildung 27: Datenerhebung (eigene Darstellung)

Der BASIS-MATH-G 4$^+$-5 wird von allen Schülerinnen und Schülern der teilnehmenden Klassen als Screening zum ersten Messzeitpunkt (Prätest) im Rahmen eines Gruppentests durchgeführt. Es wird einerseits das Ziel verfolgt, die Lernstände aller Kinder zu Beginn der Intervention zu erheben und dadurch die Ausgangslage der Gesamtstichprobe im Bereich des zentralen arithmetischen Basisstoffs zu erfassen. Andererseits wird das Screening-Instrument zur Erfassung von Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen eingesetzt, die in den genannten Inhaltsbereichen unterdurchschnittliche Mathematikleistungen zeigen. Die Ergebnisse liefern aufschlussreiche Hinweise darauf, welche Kinder potentiell für die Förderschleifen in Frage kommen, sodass die Daten der Basis-

Diagnostik als Grundlage für die vertiefende Diagnostik mit dem „BruKo“ dienen. Der im Rahmen der vorliegenden Studie entwickelte Mathematiktest „BruKo“ wird sowohl als Prätest zur Bestimmung der Ausgangslage der Gesamtstichprobe als auch als Posttest und Follow-Up zur Bestimmung der Lernfortschritte und Evaluation der Intervention eingesetzt. Es kommt zu allen drei Messzeitpunkten die gleiche Testversion in ihren Pseudo-Parallelformen zum Einsatz, Adaptionen werden nicht vorgenommen. Wilbert (2014) hebt die Bedeutung der wiederholten Messung „in mindestens zwei Situationen mit gleichem Aufforderungscharakter“ (S. 282) hervor, um Lernen, verstanden als Veränderung im Verhaltenspotential einer Person, zu diagnostizieren. Die schriftlichen Standortbestimmungen werden interventionsbegleitend am Ende einer Unterrichtswoche von den Lernenden bearbeitet. Der zweimalige Einsatz jeder Aufgabe ermöglicht die Dokumentation der individuellen Lernentwicklung über die Zeit.

6.4 Forschungsmethoden

Um fundierte Rückschlüsse auf die Wirksamkeit der Intervention ziehen zu können, müssen Lerneffekte und Lernentwicklungen der Schülerinnen und Schüler als Operationalisierung der Wirkung der Intervention verifizierbar gemacht werden. Im Rahmen der Studie werden in Abhängigkeit der Fragestellung und damit verbundenen Zielsetzung verschiedene statistische Verfahren eingesetzt. Quantitative Datenerhebungen eignen sich dazu, die Lernstände der Kinder vor und nach der Intervention darzustellen. Dazu werden objektiv messende standardisierte Testverfahren eingesetzt, die sich durch die für alle Lernenden vergleichbaren Bedingungen auszeichnen (Flick, 2016, S. 24; Hussy, Schreier & Echterhoff, 2013, S. 9). Anhand der inferenzstatistischen Auswertung der quantitativ erhobenen Daten soll nachgewiesen werden, ob gefundene Unterschiede bzw. Veränderungen in den Ergebnissen zufälligen Schwankungen unterliegen oder sie auf den Einfluss der Intervention zurückzuführen sind (Wilbert, 2014, S. 297). So können ergebnisbezogene Aussagen über Zusammenhänge zwischen Wirkungen und möglichen Einflussfaktoren getroffen werden, d.h. die effektbezogene Wirkung der Intervention wird untersucht. Insbesondere der diesem Forschungsdesign zugrundeliegende Prä-Posttest-Vergleich zwischen den Interventionsgruppen und der Kontrollgruppe ermöglicht Aussagen darüber, ob erfasste Lerneffekte vermutlich durch die Intervention erzielt wurden. Es lassen sich jedoch nur summative Aussagen machen, Aussagen zu einzelnen Wirkelementen sind nicht möglich.

Wie bereits in Kapitel 6.1 erläutert, findet die qualitative Datenanalyse hinsichtlich individueller Lernentwicklungen im Rahmen des Unterrichts- und Förderkonzepts an dieser Stelle nicht statt.

Die Eingabe und Auswertung der erhobenen quantitativen Daten erfolgt mit dem Programm „Statistical Package für Social Sciences [SPSS]“ für Windows, Version 25. Im Folgenden werden die eingesetzten deskriptiven und inferenzstatistischen Verfahren sowie deren Zielstellung im Rahmen der vorliegenden Untersuchung vorgestellt. Auf eine ausführliche Darstellung der mathematischen Formeln wird an dieser Stelle verzichtet.

Zusammenhangsanalysen – Korrelationen

Zur Untersuchung möglicher bivariater Zusammenhänge zwischen den beiden eingesetzten Testverfahren BASIS-MATH G 4^{+}-5 und „BruKo“ sowie zwischen den beiden Teilen des „BruKos“ wurden *Produkt-Moment-Korrelationen nach Pearson* berechnet. In Abhängigkeit von den Skalenniveaus der vorliegenden Daten sind verschiedene Korrelationsarten auszuwählen (Bortz & Döring, 2006, S. 507). Erforderlich zu überprüfen sind darüber hinaus die Normalverteilung der Daten, der lineare Variablenzusammenhang sowie der Ausschluss von Ausreißern mittels eines Streudiagramms (Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 206-207). Für intervallskalierte Daten wird die *Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson*, für ordinalskalierte Daten die *Rangkorrelation nach Spearman* berechnet. Die Stärke und Richtung eines linearen Zusammenhangs zwischen zwei (oder mehreren) Variablen wird durch den Korrelationskoeffizienten r ausgedrückt und durch einen Signifikanztest auf seine statistische Aussagekraft überprüft (Bortz & Döring, 2006, S. 507).

Der Korrelationskoeffizient kann als Maß für die Größe eines Effekts interpretiert werden. Orientiert an den Vorgaben Cohens (1992, S. 157) gilt ein Korrelationskoeffizient von r =.10 als schwacher, r = .30 als mittlerer und r = .50 als starker Effekt. Nach Field (2015, S. 270) sollte eine Interpretation der standardisierten Effektgrößen möglichst bezogen auf den jeweiligen Forschungskontext und vor dem Hintergrund theoretischer Überlegungen durchgeführt werden. In der Interdependenzanalyse gefundene Zusammenhänge erlauben auf deskriptiver Ebene Aussagen über die Art und Intensität eines Zusammenhangs zweier (oder mehrerer) Variablen, nicht jedoch über eine Kausalbeziehung (Bortz & Schuster, 2010, S. 160).

Normalverteilung

Als eine wichtige mathematisch-statistische Voraussetzung für die Entscheidung zur Auswahl parametrischer oder nicht-parametrischer Verfahren gilt die Normalverteilung (Bortz & Lienert, 2008, S. 59). Um die Daten auf Normalverteilung zu prüfen, wurden die in dieser Studie erhobenen Daten anhand des *Kolmogoroff-Smirnov-Anpassungstests* (KSA-Test) analysiert, der für Stichproben kleineren und mittleren Umfangs ($N \leq 100$) geeignet ist (Bortz, Lienert & Boehnke, 2008, S.81, S. 319). Ein nicht-signifikantes Ergebnis zeigt an, dass eine empirisch gegebene Verteilung relativ wenig von einer Normalverteilung abweicht, eine der wichtigen Voraussetzungen für die Anwendung parametrischer Testverfahren. Ein signifikantes Ergebnis zeigt an, dass sich die vorgefundene Verteilung von einer Normalverteilung statistisch signifikant unterscheidet und die Anwendung nicht-parametrischer Testverfahren unter Umständen vorzuziehen ist (Schäfer, T., 2011, S. 141).

Unterschiede der zentralen Tendenz / Mittelwertsunterschiede

Anhand inferenzstatistischer Analysen soll aufgezeigt werden, ob sich gefundene Unterschiede zwischen zwei oder mehreren Gruppen bezogen auf ihre Mittelwerte bzw. zentralen Tendenzen durch zufällige Schwankungen in den Daten erklären lassen oder ob diese Veränderungen eher auf den Einfluss einer Intervention hinweisen. Mögliche Unterschiede können mit verschiedenen Verfahren untersucht werden, die jeweils bedingt durch die vorliegende Stichprobe (Anzahl der Gruppen sowie Stichprobenumfang), die zu untersuchenden Variablen sowie die Beschaffenheit der vorliegenden Daten auszuwählen sind (Bortz & Döring, 2006, S. 25).

Parametrische Verfahren

t-Test für zwei unabhängige Stichproben

Der *t-Test für unabhängige Stichproben* prüft, ob sich die Mittelwerte von zwei Verteilungen systematisch voneinander unterscheiden (Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2014a, S. 33). Voraussetzung für dessen Anwendung sind die Intervallskalierung der Daten, die Normalverteilung sowie die Homogenität der Varianzen in den zu vergleichenden Gruppen (Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 399-400). Letztere ist anhand des Levene-Tests (Bortz &

Schuster, 2010, S. 129) zu überprüfen. Liegt eine mangelnde Homoskedastizität vor, sollte das Ergebnis des *t-Tests* mit Welch-Korrektur berichtet werden (Bortz & Schuster, 2010, S. 123).

Für den *t-Test* wurde das konventionell übliche Signifikanzniveau von 5 % zugrunde gelegt (Bortz & Döring, 2006, S. 26; Rasch et al., 2014a, S. 42). Liegt ein signifikantes Ergebnis vor, kann von einem statistisch bedeutsamen Mittelwertsunterschied zwischen den beiden untersuchten Gruppen ausgegangen werden. Um die Größe eines signifikanten Ergebnisses einschätzen zu können, ist die Effektstärke *d* nach Cohen (1992) zu berechnen (Bortz & Schuster, 2010, S. 127; Sheskin, 2011, S. 461). Ein kleiner Effekt liegt demnach ab d = .20, ein mittlere Effekt ab d =.50 und ein großer Effekt ab d = .80 vor (Cohen, 1992, S. 157). In der vorliegenden Arbeit wird mittels des *t-Tests für zwei unabhängige Stichproben* überprüft, ob sich die Interventionsgruppen und die Vergleichsgruppe in ihren Ausgangslagen, d.h. den Ergebnissen des Prätests, signifikant voneinander unterscheiden.

Einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung

Die *einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung* stellt eine Erweiterung der Varianzanalyse dar. Sie überprüft, ob sich die Ausprägung eines Merkmals zwischen zwei oder mehr Gruppen zu verschiedenen Messzeitpunkten unterscheidet und erlaubt die ststistische berücksichtigung von Unterschieden in der Ausprägung der abhängigen Variable zum ersten Messzeitpunkt (Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2014b, S. 66). Analog zu der ANOVA müssen die Voraussetzungen der Intervallskalierung und der Normalverteilung der Daten sowie der Varianzhomogenität gegeben sein. Da die Daten derselben Stichproben zu verschiedenen Zeitpunkten berücksichtigt werden, ist die Unabhängigkeit der Messwerte nicht gegeben. Stattdessen wird die Homogenität der Korrelationen zwischen den einzelnen Stufen des messwiederholten Faktors vorausgesetzt (Rasch et al., 2014b, S. 71).

Die ANOVA mit Messwiederholung liefert Aussagen zu drei Haupteffekten: Faktor Zeit (Zeiteffekt), Faktor Gruppe (Gruppeneffekt) und Faktor Messzeitpunkt x Gruppe (Interaktionseffekt). Der globale *F*-Test zur Überprüfung der Signifikanz zeigt im Falle eines signifikanten Ergebnisses nur das Vorhandensein eines Unterschieds zwischen zwei Faktorstufen an. Um die Größe eines Effekts einschätzen zu können, wird genauso wie bei der ANOVA das Maß η^2 zugrunde gelegt, das in *d* umgerechnet werden kann (Rosenthal, 1994,

S. 244). Für die ANOVA mit Messwiederholung ist zur Einschätzung eines Interventions- bzw. Fördereffekts die um Vortestunterschiede korrigierte Effektstärke d_{korr} zu berechnen (Klauer, 1993). Um die Gruppen einzeln miteinander vergleichen zu können, gilt es im Anschluss an die ANOVA mit Messwiederholung post-hoc-Tests zu berechnen, um über den paarweisen Vergleich Aussagen darüber treffen zu können, welche Gruppen sich hinsichtlich ihrer Mittelwerte unterscheiden.

Um die Interventions- und Fördereffekte der vorliegenden Stichprobe statistisch abzusichern und miteinander vergleichen zu können, wird die *einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung* eingesetzt. Es findet zunächst ein Vergleich der Veränderungen in der Mathematikleistung zwischen der Interventionsgruppe und der Vergleichsgruppe über drei Messzeitpunkte statt.

Bei einer Stichprobengröße von $n > 30$, wie sie im Rahmen dieser Studie vorliegt, können geringe Abweichungen bzw. die Verletzungen einer der drei Voraussetzungen vernachlässigt werden. Parametrische Verfahren, die sich auf die *t*-Verteilung (*t-Test*) oder die *F*-Verteilung (ANOVA) beziehen, gelten als relativ robust gegenüber Voraussetzungsverletzungen, sodass ihre Ergebnisse nur unerheblich beeinflusst werden (Bortz et al., 2008, S. 82-83; Bortz & Schuster, 2010, S.113-114, S. 122; Schäfer, T., 2011, S. 135; Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 569). Aufgrund der höheren Teststärke im Vergleich zu nicht-parametrischen Verfahren werden die ausgewählten parametrischen Verfahren auf die vorliegenden intervallskalierten Daten trotz der teilweise verletzten Voraussetzung der Normalverteilung angewendet (vgl. Kap. 8). Erfolgt kein Bezug auf die Voraussetzungen, kann deren Erfüllung angenommen werden.

Nicht-parametrische Verfahren

Nicht-parametrische Verfahren eignen sich insbesondere für kleine Stichproben (Bortz & Lienert, 2008, S. 60) und erfordern gegenüber parametrischen Verfahren geringere mathematische Voraussetzungen: die Daten können rangskaliert sein und die Versuchspersonen sollten zufällig den Gruppen zugeordnet werden (Rasch et al., 2014b, S. 94). Nicht-parametrische Verfahren können auch auf intervallskalierte Daten angewendet werden, die bei Voraussetzungsverletzungen für parametrische Verfahren wie Rangdaten behandelt werden sollen (Schäfer, T., 2011, S. 142). Zu berücksichtigen ist jedoch die geringere Teststärke nicht-parametrischer Verfahren, insbesondere bei kleinen Stichproben, die den Nachweis signifikanter Effekte erschwert (Rasch et al., 2014b, S. 104; Schäfer, T., 2011, S. 142).

Mann-Whitney-U-Test

Der *Mann-Whitney-U-Test* (*U*-Test) ist das nicht-parametrische Pendant des *t*-Tests für unabhängige Stichproben. Der *U*-Test überprüft, ob sich zwei unabhängige Stichproben (Sheskin, 2011, S. 531) hinsichtlich einer abhängigen Variable signifikant voneinander unterscheiden. Beim *U*-Test werden die Messwerte beider Stichproben in eine gemeinsame Rangreihe gebracht und es wird jedem Messwert ein Rangplatz zugeordnet (Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 571). Der *U*-Test prüft nicht das arithmetische Mittel, sondern den Median, d.h. den jeweils mittleren Rang einer Rangreihe und untersucht das Vorhandensein von Differenzen zwischen den Rangsummen der Stichproben. Die Prüfgröße des Signifikanztests ist der *U*-Wert, der den Abstand zwischen den mittleren Rängen ausdrückt (Schäfer, T., 2011, S. 144) und die Summe der Rangplatzüberschreitungen beschreibt. Ein signifikantes Ergebnis ist dann erzielt, wenn der empirische *U*-Wert (der kleinere Wert von *U* und *U*‘) genauso groß oder kleiner als der festgelegte kritische *U*-Wert für das gewählte Signifikanzniveau ist (Rasch et al., 2014b, S. 100).

Die Beurteilung der Größe eines Effekts erweist sich bei nicht-parametrischen Verfahren als schwierig, da kein eigenes Verfahren zur Bestimmung der Effekt- bzw. Teststärke existiert. Sind die vorliegenden Daten intervallskaliert, d.h. wird der *U*-Test aufgrund fehlender Normalverteilung bzw. Varianzhomogenität angewandt, kann als Ersatz auf das entsprechende Verfahren des parametrischen Pendants zurückgegriffen werden. Zu berücksichtigen ist jedoch, dass die Teststärke parametrischer Verfahren in der Regel höher ist als die ihrer nicht-parametrischen Entsprechungen, sodass die Teststärke des *U*-Tests in der Regel überschätzt wird und vorsichtig zu interpretieren ist (Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 581).

Der *Mann-Whitney-U-Test* findet in der vorliegenden Arbeit Anwendung bei dem Vergleich der in der Förderschleife geförderten Lernenden mit ihren ungeförderten Parallelkindern (je $n = 8$). Als abhängige Variable werden die jeweiligen Differenzwerte zwischen Prä- und Posttest sowie zwischen Prätest und Follow-Up in die Berechnungen einbezogen.

6.5 Erwartete Ergebnisse

Im Rahmen der vorliegenden Studie wird davon ausgegangen, dass Schülerinnen und Schüler, die nach dem in dieser Arbeit entwickelten Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung (IG^{Klasse}) unterrichtet werden, ein fundierteres Bruchzahlverständnis entwickeln und größere Lernfortschritte als Schülerinnen und Schüler machen, die keine spezifische Intervention erhalten (*VG*).[18] Es soll festgestellt werden, ob durch die konzipierte Unterrichtseinheit (Kap. 5) der Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses auf semantischer Ebene erreicht werden kann, d.h. ob sich die drei Interventionsklassen signifikant von der Vergleichsklasse unterscheiden. Vor dem Hintergrund der theoretisch und wissenschaftlich fundierten Ausführungen (vgl. Kap. 4) wird angenommen, dass sich ein fundiertes Bruchzahlverständnis durch einen verständnisorientierten Unterricht ausbildet, der den individuellen Aufbau von Grundvorstellungen fokussiert, stark an dem fachlichen Kern ausgerichtet ist und das inhaltliche Denken in den Vordergrund stellt. Aufgrund dessen wird ein signifikanter Unterschied zwischen den Interventionsklassen und der Vergleichsklasse, die nach dem herkömmlichen Unterricht unterrichtet wurde, erwartet. Zusätzlich wird vermutet, dass die positiven Lerneffekte zugunsten der Interventionsklasse I ausfallen, da die Durchführung des Unterrichts durch die Autorin zu einem Versuchsleitereffekt führen kann.

Weiterhin wird angenommen, dass Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen ($IG^{Förderung}$), die eine spezifische, mit den aktuellen Inhalten des Klassenunterrichts verknüpfte Förderung erhalten, im Verlauf der Unterrichtseinheit größere Fortschritte in der Mathematikleistung erzielen als Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen ($VG^{Parallel}$), die keine besondere Förderung erhalten. Die Betrachtungen auf theoretischer Ebene zeigen, dass die enge inhaltliche Verknüpfung des arithmetischen Basisstoffs mit aktuellen Inhaltsbereichen für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen die Möglichkeit bietet, bestehende Lücken aufzuarbeiten, Grundlagenwissen zu vertiefen und potentiellen neuen Schwierigkeiten präventiv entgegentreten zu können. Zudem wird davon ausgegangen, dass eine intensive Begleitung der Lernprozesse im Rahmen einer zusätzlichen Kleingruppenförderung die individuellen Lernentwicklungen förderlich unterstützen. Vor diesem Hintergrund wird

[18] Die Variablen werden in Kapitel 8 verständlich eingeführt.

erwartet, dass die Lernenden der Förderschleifen signifikant größere Lernfortschritte machen als ihre vergleichbaren Mitschülerinnen und Mitschüler in der Vergleichsklasse.

Ferner wird davon ausgegangen, dass gesicherte Kenntnisse im arithmetischen Basisstoff eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das erfolgreiche Bearbeiten der Bruchaufgaben sind. Folglich besteht die Annahme, dass Schülerinnen und Schüler, die mittlere bis hohe Ergebnisse in den Bruchaufgaben erzielen, auch in den arithmetischen Grundlagen gut abschneiden. Weiterführend werden die *geschlossenen* Bruchaufgaben aus Teil I des „BruKos“ als eine Voraussetzung für die *offenen* Bruchaufgaben in Teil II angesehen. Dahinter steht die Annahme, dass die *offenen* Aufgaben besser gelöst werden, wenn die Lernenden auch bei den *geschlossenen* Bruchaufgaben relativ viele korrekte Lösungen produziert haben.

6.6 Zusammenfassung

Als Übergang zur dritten Ebene, der Forschungsebene, wird in diesem Kapitel die wissenschaftliche und methodologische Rahmung der vorliegenden Interventionsforschung dargestellt. Ausgehend von den dargelegten Forschungsfeldern werden die Ziele dieser Arbeit aufgezeigt sowie die konkreten Forschungsfragen formuliert, die nach der Wirkung der entwickelten Unterrichts- und Förderkonzeption (Kap. 5) fragen und dabei unterschiedliche Aspekte fokussieren. Daraufhin werden das Forschungsdesign sowie die Messinstrumente und die Forschungsmethoden entwickelt bzw. abgeleitet. Dieses Kapitel endet mit der Formulierung erwarteter Ergebnisse, die im Rahmen der Ergebnisdarstellung (Kap. 8) mit den tatsächlichen Ergebnissen dieser Studie abgeglichen werden.

7 „BruKo“ Testinstrument zu grundlegenden Kompetenzen des Bruchzahlverständnisses

Die kritische Auseinandersetzung mit aktuell veröffentlichten Testverfahren im Bereich des Bruchzahlverständnisses hat ergeben, dass kein hinreichend geeignetes Instrument für den konkreten Einsatz im Rahmen des vorliegenden Projektes existiert, um sowohl das grundlegende Bruchzahlverständnis auf semantischer Ebene als auch damit eng verknüpfte relevante Aspekte des mathematischen Basisstoffs zu erfassen. Zwar liegen einerseits Testinstrumente im Bereich des Bruchzahlverständnisses vor (bspw. Hasemann, 1981; Neumann, 1997 oder Padberg 1995, S. 208-22 und S. 223-234; 2002b, S. 289-299 sowie Heckmann 2006, S. 641-654), jedoch sind diese in der Regel stark auf den Aspekt der Bruch*rechnung* ausgerichtet und erlauben nur eingeschränkte Aussagen über basale Verstehensprozesse sowie anschauliche Grundvorstellungen. Andererseits lässt sich eine zunehmende Entwicklung von Verfahren zur Überprüfung arithmetischer Basiskompetenzen am Übergang zur Sekundarstufe beobachten (bspw. „Lernstand 5“ von Schulz, Leuders und Rangel 2017; „BASIS-MATH-G 4^{+}-5“ von Moser Opitz, Freesemann, Grob und Prediger 2016 sowie „BASIS-MATH 4-8“ von Moser Opitz, Reusser, Moeri Müller, Anliker, Wittich und Freesemann 2010). Die für die weiterführende Lernentwicklung in der Sekundarstufe relevante Verbindung zwischen aktuellen Inhaltsbereichen und zentralen Bereichen des arithmetischen Basisstoffs (vgl. Kap. 4.1.3) lässt sich gegenwärtig jedoch in keinem Testinstrument konstatieren.

Vor dem Hintergrund der derzeitigen Inklusionsentwicklungen werden diagnostische Verfahren benötigt, die dem großen Heterogenitätsspektrum der Schülerinnen und Schüler gerecht werden (Wilbert, 2014, S. 282). Für die Evaluation der vorliegenden Interventionsstudie wird also einerseits ein Testverfahren benötigt, das genau das misst, was in der Intervention behandelt wurde. Die Diagnose individueller Kompetenzen eines Kindes bedarf einer kriteriengeleiteten Erfassung des Erreichens curricular ausgerichteter Inhalte und Ziele des Unterrichts (Klauer, 1987), sodass aktuelle *Lernstände* im Sinne der Zone der nächsten Entwicklung (Vygotsky) genau bestimmt werden können. Darüber hinaus ist das Sichtbarmachen individueller *Lernprozesse* eine zentrale Voraussetzung, „um frühzeitig zu erkennen, welche Kinder oder Jugendlichen weitergehender Unterstützung bedürfen“ (Wilbert, 2014, S. 282). Ziel einer prozessorientierten Diagnostik ist das Aufdecken kindlicher

Lösungsprozesse, um ein tieferes Verständnis individueller Denk- und Rechenwege zu erhalten (Schipper, 2009b, S. 97), welches die Voraussetzung für die Durchführung von Fördermaßnahmen darstellt. Mit der Intention, diese Forschungslücke zu füllen, wurde ein proximatives Testinstrument entwickelt, das sowohl das *Vorwissen* als auch die *Lernstände* sowie die *Lernprozesse* in den angesprochenen Inhaltsbereichen erfasst.

Das vorliegende Kapitel widmet sich zunächst der Entwicklung des Testinstruments, dessen Aufbau (Kap. 7.1) und Inhalte werden in Verbindung mit den jeweiligen Aufgaben skizziert (Kap. 7.1.1). Anschließend werden die eingesetzten Aufgabenformate (Kap. 7.1.2) vorgestellt und innerhalb der drei Anforderungsniveaus verortet. Es folgt eine detaillierte tabellarische Darstellung der einzelnen Testaufgaben vor dem Hintergrund ihrer Kompetenzschwerpunkte, der jeweiligen Anforderungen sowie möglicher Schwierigkeiten und Besonderheiten. Daran anschließend werden die verwendeten Darstellungen erläutert (Kap. 7.1.3) und Hinweise zum Einsatz und zur Durchführung des „BruKos“ dargelegt (Kap. 7.1.4). Im weiteren Verlauf werden erste Aussagen zur Skalierung des Testinstruments vorgenommen (Kap. 7.2). Das Verfahren wurde zwar nicht eigens geprüft, die im Zuge des ersten Einsatzes angefallenen Daten können allerdings zu einer ersten Skalierung und Reliabilitätsanalyse genutzt werden. Abschließend erfolgen die detaillierte Darstellung des entwickelten Auswertungsleitfadens (Kap. 7.3) sowie erste Hinweise zur Interpretation der gewonnenen Daten (Kap. 7.4). Eine Zusammenfassung (Kap. 7.5) schließt dieses Kapitel ab.

7.1 Aufbau und Struktur

Lienert und Raatz (2011) definieren einen Test als „ein wissenschaftliches Routineverfahren zur Untersuchung eines oder mehrerer empirisch abgrenzbarer Persönlichkeitsmerkmale mit dem Ziel einer möglichst quantitativen Aussage über den relativen Grad der individuellen Merkmalsausprägung“ (S. 1). Ein Test in dem hier dargestellten Sinne sollte sowohl wissenschaftlich begründet als auch routinemäßig, d.h. unter Standardbedingungen, durchführbar sein. Darüber hinaus sollte ein Test bestimmte empirisch abgrenzbare Fähigkeiten, Fertigkeiten oder Kenntnisse prüfen und auf dieser Grundlage eine relative Positionsbestimmung eines untersuchten Individuums in Bezug auf ein bestimmtes Kriterium oder innerhalb einer Gruppe von Individuen ermöglichen. Die Definition umfasst die wesentlichen Überlegungen, die es bei der Entwicklung und Operationalisierung diagnostischer

Instrumente zu berücksichtigen gilt (vgl. Schulz et al., 2017, S. 397): empirische Absicherung und messbare Evidenzen als Grundlage für diagnostische Urteile, ökonomische Einsetzbarkeit innerhalb des regulären Unterrichts sowie Fokussierung bedeutsamer, für den weiteren Lernverlauf relevanter Kompetenzbereiche unter Berücksichtigung der sogenannten kritischen Hürden.

Ausgangspunkt der Entwicklung des vorliegenden Testinstruments waren wissenschaftlich belegte fachliche und fachdidaktische Erkenntnisse zu den empirisch abgrenzbaren Inhaltsbereichen, die in den vorangegangen Kapiteln mit aktuellen Forschungsergebnissen untermauert wurden (vgl. Kap. 2.2.5, 2.3.4, 4.1.4 und 4.2.5). Vor dem Hintergrund einer ökonomischen und alltagstauglichen Anwendung im Schulkontext eignet sich ein Paper-Pencil-Gruppentest ohne Speed-Komponente, der mit der gesamten Schulklasse durchgeführt werden kann. Bei dem vorliegenden Testinstrument „BruKo“ handelt es sich um ein struktur- und kritieriumsorientiertes Verfahren. Es ermöglicht einerseits die summative Evaluation der Intervention insgesamt und kann andererseits zur Förderdiagnostik sowie Abbildung individueller Lernstände und Lernfortschritte eingesetzt werden. Das in diesem Sinne förderdiagnostisch zu verstehende Testinstrument umfasst eine „sachstrukturell-curricular zusammengestellte Aufgabensammlung“ (Heimlich, Lutz & Wilfert de Icaza, 2013, S. 28-29) zu den Bereichen des grundlegenden Bruchzahlverständnisses sowie dazu relevanten Aspekten des mathematischen Basisstoffs. Die Konstruktion des Aufgabeninventars beruht auf dem sachlogischen Aufbau der Inhaltsbereiche, um bereits vorhandene Lernvoraussetzungen (Prätest) als auch erworbene Kompetenzen (Posttest) erfassen zu können. Der Test soll helfen, möglichst detaillierte Erkenntnisse über die individuellen Vorstellungen der Lernenden zu gewinnen. In Anlehnung an Wilbert (2014) wird der Fokus der Diagnostik auf das Lernen als eine Veränderung gerichtet, „die einen Hinweis darauf geben soll, in welchem Maß eine Person von dem, was zwischen den Messungen stattgefunden hat [...] profitierte“ (S. 282). Solche

> Kompetenzen sind damit deutlich weniger statisch, als die angenommenen Konstrukte, die den meisten Intelligenztests, Persönlichkeits- und Begabungsdiagnostiken zugrunde liegen. Leistungen, die eine Person bei einer bestimmten Aufgabe zu einem bestimmten Zeitpunkt erbringt, ergibt sich demnach aus der durch Lernprozesse gewonnen Expertise, genau die geforderten Aufgabenformate zu bearbeiten. Diese Expertise baut sich aus unzähligen einzelnen konkreten Lerninstanzen auf und die Anwendung dieses

> Wissens führt wiederum zu dem Ausmaß an Expertise, die eine Person besitzt. (Wilbert, 2014, S. 282-283)

Offene Testaufgaben sollen tiefergehende Informationen über bereits aufgebaute individuelle Vorstellungen und Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler geben und ebenso deren Weiterentwicklung im Verlauf der Intervention aufzeigen. Um aussagekräftige und treffsichere diagnostische Ergebnisse für eine daran anschließende fokussierte Förderung erhalten zu können, folgt der „BruKo“ der didaktischen Leitidee der Verstehensorientierung. Neben der für Paper-Pencil-Tests klassischen Zielsetzung der Leistungsfeststellung im Sinne der Produktorientierung kommt deshalb der Prozessorientierung ein besonderer Stellenwert zu. Wartha und Schulz (2014) verweisen auf die Notwendigkeit des „Zusammenspiel[s] von defizitorientierter Sichtweise zur Identifikation von Förderschwerpunkten und kompetenzorientierter Perspektive zur Ermittlung des Lernstandes und der Anknüpfungspunkte von Förderung bzw. Unterricht“ (S. 21). Es sollen einerseits individuelle Lernstände und damit die „Voraussetzungen zum Erwerb neuen Wissens und Handelns“ (Bundschuh & Winkler, 2014, S. 348) erfasst werden. Andererseits gilt es, sichere Diagnosegrundlagen auf der Grundlage individueller Kompetenzen zu bilden, um diese für Fördersituationen zu nutzen. Der in Kapitel 2.3.1 dargelegte innere Zusammenhang von Diagnostik und Förderung ist hier von zentraler Bedeutung: Wenn effektive Förderung fokussiert und niveauspezifisch ist, muss auch das Diagnoseinstrument entsprechende Eigenschaften aufweisen, „um Lernende hinsichtlich ihrer spezifischen Fähigkeiten zu unterscheiden, und Diagnosebefunde als Entscheidungsgrundlage für möglichst konkrete Förderentscheidungen nutzen zu können“ (Pellegrino et al., 2001in Schulz et al. 2017, S. 414). Diesen Zusammenhang gilt es bereits bei der Entwicklung geeigneter Diagnoseinstrumente zu berücksichtigen, denn „schon die Auswahl der bei der Diagnose eingesetzten Aufgaben und Situationen beeinflusst in jedem Falle die Planung der späteren Förderung“ (Hußmann et al., 2014, S. 3).

Im Rahmen der fokussierten und produktiven Förderung gewinnen insbesondere solche diagnostischen Verfahren eine besondere Bedeutung, „die eng mit dem unterrichtlichen Geschehen in Verbindung stehen“ (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017c, S. 225). Dahinter steht die Frage nach der Passung zwischen Testinstrument und Fördermaterial. Um zuverlässige Aussagen zu vorliegenden inhaltlichen Schwierigkeiten im Mathematiklernen treffen zu können, sind Testinstrumente erforderlich, die „diejenigen Kompetenzen überprüfen, von denen bekannt ist, dass rechenschwache Lernende sie nicht beherrschen bzw. Inhalte umfassen, die gemäß aktuellem Forschungsstand für die mathematische Entwicklung bedeutsam sind“ (Moser Opitz & Ramseier, 2012, S. 102). Entsprechend der Konzipierung der Unterrichtseinheit und der Förderschleifen werden die bereits dargestellten theoretischen Konzepte und zentralen fachlichen Kernelemente in der Testkonzeption aufgegriffen und in den jeweiligen Aufgaben operationalisiert. Es liegen zwei strukturell vergleichbare Testformen (vgl. Form A in Anhang I 1) vor, die zwar leicht in der Aufgabenreihenfolge, nicht jedoch hinsichtlich der Aufgabenauswahl und der Zahlenwerte variieren. In beiden Versionen lässt sich ein Anstieg des Schwierigkeitsgrades von zunächst verhältnismäßig leichten zu komplexeren und tendenziell schwereren Aufgaben verzeichnen.

Nachfolgend werden zunächst die Testinhalte des „BruKos“ ausführlich dargestellt und darauf aufbauend die eingesetzten Aufgabenformate vorgestellt sowie die verwendeten Darstellungen beschrieben. Es folgen Ausführungen zum Einsatz und zur Durchführung des Testinstruments sowie eine kurze Darstellung seiner Bestandteile.

7.1.1 Testinhalte

Mit dem Ziel größtmöglicher Inhaltsvalidität orientieren sich die Aufgaben an curricularen Vorgaben sowie an empirischen Ergebnissen zu zentralen fachlichen und fachdidaktischen Überlegungen (vgl. Kap. 2.2.5, 2.3.4, 4.1.4 und 4.2.5). Um Aufgaben zu identifizieren, die ein grundlegendes Bruchzahlverständnis überprüfen, wurden die Aufgaben verschiedenen Expertinnen und Experten aus der Mathematikdidaktik sowie der Sonderpädagogik vorgelegt und es fand eine unabhängige Einschätzung von Aufgabenschwierigkeiten statt. Die Abstufung erfolgte in drei Stufen (I, II, III), welche die Anforderungsniveaus abbilden (vgl. Anhang I 2). Zukünftig gilt es, die Anforderungsniveaus in Übereinstimmung mit den entsprechenden Itemschwierigkeiten zu überarbeiten. In einem daran anschließenden Austausch wurden Aufgaben, die nach Meinung der jeweiligen Expertin bzw. des jeweiligen Experten als unverzichtbare Verstehensgrundlage für ein fundiertes Bruchzahlverständnis gelten, anhand der folgenden orientierunggebenden Entwicklungsfragen ausgiebig erörtert:

- Welche Erkenntnisse liefern die Ergebnisse der Aufgabe?
- Lässt sich die Aufgabe anhand von Konventionen bzw. Verfahren mit Kalkül lösen?
- Erfordert die Lösung ein grundlegendes (Operations-)Verständnis?
- Zielt die Aufgabe auf ein tiefergehendes Verständnis?

Nicht übereinstimmende Beurteilungen einzelner Aufgaben wurden intensiv diskutiert. Die finale Aufgabenauswahl erfolgte durch die Autorin der Arbeit, die neben ihrem wissenschaftlichen Hintergrund über praktische Erfahrungen als Lehrkraft für sonderpädagogische Unterstützung im inklusiven Mathematikunterricht verfügt.

Die mit dem „BruKo“ überprüften Inhaltsbereiche wurden bereits in der inhaltlichen Schwerpunktlegung im Rahmen der Sachanalyse in Kapitel 4 fachlich und fachdidaktisch begründet dargestellt. Im Folgenden wird überblicksartig skizziert, welche Inhalte mit den jeweiligen Aufgaben des „BruKos“ überprüft werden (vgl. Tabelle 6 und Tabelle 7). Es handelt sich um die Kompetenzbereiche, die sich auf die wesentlichen Inhalte der Intervention beziehen. Gleichzeitig stellen sie im Sinne des mathematischen Kerns bzw. der fundamentalen Idee die relevanten Aspekte dar, die für den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses in der hier definierten Bedeutung als unverzichtbar vorausgesetzt werden. Die aufgabenspezifischen Anforderungen sowie typischen Fehlvorstellungen stellen einen weiteren zentralen Ansatzpunkt für die Entwicklung des Testinstruments dar (vgl. Anhang I 2). Der „BruKo“ enthält Aufgaben zu sogenannten „Nadelöhren“, die nach Fritz und Ricken (2005) relevante Kompetenzen und notwendige Verstehensgrundlagen für die mathematische Wissensaneignung darstellen. Es sollen „diejenigen mathematischen Klippen inhalts- und prozessbezogen exakt identifiziert werden, die zu einem Scheitern des Kindes im aufeinander aufbauenden Prozess des Mathematiklernens“ (Wartha, 2009a, S. 161) führen könnten oder bereits geführt haben. Insgesamt wurde bei der Itemauswahl großer Wert darauf gelegt, dass die Aufgaben auch im Rahmen eines Paper-Pencil-Formats möglichst aufschlussreiche Aussagen über das konzeptuelle Verständnis der Schülerinnen und Schüler zulassen.

Teil I enthält Aufgaben zur Erfassung individueller Leistungen in zentralen curricularen Inhalten der Grundschulmathematik (vgl. Tab. 6). In Anlehnung an ausgewählte Aufgaben aus dem im Screening eingesetzten Gruppentest BASIS-MATH-G 4^+-5 (Moser Opitz et al., 2016) sowie aus dem Individualtest BASIS-MATH 4-8 (Moser Opitz et al., 2010) sollen vertiefende Hinweise zu den grundlegenden Inhaltsbereichen ermöglicht werden, die für den in der Intervention neu eingeführten Lerngegenstand des Bruchzahlverständnisses relevant sind. Die Aufgaben umfassen diejenigen Aspekte des mathematischen Basisstoffs, die für ein grundlegendes Bruchzahlverständnis als unverzichtbare Verstehensgrundlage erachtet werden (vgl. Kap. 4.1.2 und 4.1.4). Da sich diese Kompetenzen zunächst in kleineren Zahlenräumen entwickeln und deren Ausbau für das Verständnis in höheren Zahlenräumen demselben Verlauf folgt (Ennemoser et al., 2011, S. 231), beziehen sich die Aufgaben primär auf den Zahlenraum bis 100, vereinzelte Aufgaben auf den Zahlenraum bis 1000. Auf sprachlicher Ebene werden in Teil I des „BruKos“ Anforderungen an das arithmetische Basisvokabular der Grundschularithmetik im passiven Wortschatz gestellt.

Tabelle 6: Testinhalte des „BruKos" Teil I (anhand der Aufgabennummern aus Form A dargestellt)

Beziehungsreiche Multiplikation und Division		
„BruKo“ überprüft das Verständnis zu Multiplikation und Division mit den folgenden Aufgaben:		
Nr.	A1	Verdoppeln
	A5	Multiplikation im Zahlenraum bis 1000
	A2	Halbieren
	A6	Division im Zahlenraum bis 1000
Zahlzerlegung		
„BruKo“ überprüft die Zahlzerlegungskompetenz anhand folgender Aufgaben:		
Nr.	A3 a1-d1	Additive Zahlzerlegung
	A3 a2-d2	Multiplikative Zahlzerlegung / Verdoppeln
	A4 a1-d1	Subtraktive Zahlzerlegung
	A4 a2-d2	Divisorische Zahlzerlegung / Halbieren
Beziehungen zwischen Multiplikation und Division		
„BruKo“ überprüft die Einsicht in die Beziehungen zwischen Multiplikation und Division mittels folgender Aufgaben:		
Nr.	A7	Umkehraufgabe (Multiplikation – Division)
	A8	Umkehraufgabe (Division – Multiplikation)
Darstellungswechsel		
„BruKo“ überprüft die Kompetenz zum Darstellungswechsel mit folgenden Aufgaben:		
Nr.	A9	Malaufgabe zu Punktefeld
	A10 |	Geteiltaufgabe zu Punktegeld
	A11a	Hälfte einkreisen (Anbahnung (An-)Teile markieren)
	A12a	Punkte / Verdopplung ergänzen
	A11b, A12b	Aufgabe zu Punktefeld (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division)
Vertiefung der (Grund-)Vorstellung zur Division		
„BruKo“ überprüft die Mathematisierungsfähigkeit im Rahmen der Division anhand folgender Aufgaben:		
Nr.	A 13a, 14a	Textaufgabe – Zeichnung
	A 13b, 14b	Textaufgabe – Rechnung

	A 13c, 14c	Textaufgabe – Ergebnis
	A 13d, 14d	Textaufgabe – Antwort

Die Auswahl der Aufgaben für Teil II (vgl. Tab. 7) wurde in Anlehnung an den von Padberg (2002b) entwickelten Test „Anschauliche Vorkenntnisse in der Bruchrechnung“ und den Bruchrechentest von Neumann (1997) getroffen. Eine wesentliche Orientierung haben darüber hinaus Aufgaben aus den Standortbestimmungen des Förderkonzepts „Mathe sicher können“ (Prediger et al., 2014a) gegeben. Zum Teil wurden relevante Aufgaben, die für den vorliegenden Lerngegenstand als besonders geeignet erscheinen, übernommen und in ihren Zahlenwerten adaptiert. Die Aufgaben erfassen das grundlegende Bruchzahlverständnis auf semantischer Ebene und setzen das Basisvokabular des Bruchzahlverständnisses voraus. Ein verständiger Umgang mit Fachbegriffen sowie der Einsatz eines geeigneten Vokabulars zur Beschreibung operativer Veränderungen sind gefordert.

Tabelle 7: Testinhalte des "BruKos" Teil II (anhand der Aufgabennummern aus Form A dargestellt)

<table>
<tr><td rowspan="17">geshcl. A.</td><td colspan="3">Fachbegriffe zuordnen</td></tr>
<tr><td colspan="3">„BruKo“ überprüft das Begriffsverständnis anhand folgender Aufgaben:</td></tr>
<tr><td>Nr.</td><td>A1</td><td>zentrale Fachbegriffe zu symbolischer Darstellung zuordnen</td></tr>
<tr><td colspan="3">Anteile bestimmen</td></tr>
<tr><td colspan="3">„BruKo“ überprüft die Kompetenzen zur Bestimmung von Anteilen mit folgenden Aufgaben:</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Nr.</td><td>A4a-c, A5a-c, A6a, A7a-c</td><td>Stammbrüche bestimmen</td></tr>
<tr><td>A6b-c, A9, A10a-c, A11a-c, A14a, A20a-b, A21a-e, A24a-b, A25a1-c1</td><td>Nicht-Stammbrüche bestimmen</td></tr>
<tr><td>A14b-c</td><td>Anzahl der Teile und Ganze bestimmen</td></tr>
<tr><td colspan="3">Anteile erkennen</td></tr>
<tr><td colspan="3">„BruKo“ überprüft die Fähigkeit, Anteile in verschiedenen Repräsentationen zu erkennen mithilfe folgender Aufgaben:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nr.</td><td>A12a-12e, A18a-b</td><td>Anteile in ikonischen Repräsentationen erkennen, Qualität des Passens und Nicht-Passens identifizieren (Multiple Choice)</td></tr>
<tr><td>A19</td><td>Anteile in Sachsituationen erkennen</td></tr>
<tr><td colspan="3">Teile markieren</td></tr>
<tr><td colspan="3">„BruKo“ überprüft die Kompetenz, (An-)Teile in vorgegebenen Repräsentationen zu markieren, mit folgenden Aufgaben:</td></tr>
<tr><td>Nr.</td><td>A13a-d, A25a2-c2, c3</td><td>(An-)Teile in ikonischen Darstellungen markieren</td></tr>
<tr><td rowspan="3">o.A.</td><td colspan="3">„Beschreibe“-Aufgaben</td></tr>
<tr><td colspan="3">„BruKo“ überprüft das Erkennen und Beschreiben operativer Zusammenhänge anhand folgender Aufgaben:</td></tr>
<tr><td>Nr.</td><td>A5d, A7d, A10d, A11d, A13d, A15d, A24d</td><td>Konstanz, Veränderung und Wirkung beschreiben</td></tr>
</table>

„Erkläre“- Aufgaben		
„BruKo“ überprüft das Verständnis von grundlegenden Begriffen und Konzepten mit folgenden Aufgaben:		
Nr.	A2, A3	Verständnis zentraler Begriffe erklären
	A16	Begriffsverständnis durch Angabe eines Beispiels erklären
	A25d	Finden gleichwertiger Anteile erklären
	A26	Verständnis von Gleichwertigkeit erklären
„Zeichne“-/“Ergänze“-Aufgaben		
„BruKo“ überprüft das Verständnis im Rahmen von Darstellungswechseln mithilfe folgender Aufgaben:		
Nr.	A8	Vorgegebenen Bruch in ikonische Darstellung einzeichnen
	A15a-b, A23	Teile zu Ganzem ergänzen (diskrete und kontinuierliche Ganze), Bilden und Umbilden von Einheiten
	A17a-c	beliebige Bruchzahl symbolisch und ikonisch darstellen
	A22	Anteil in Sachsituationen bestimmen (symbolisch oder ikonisch), Transferaufgabe

Eine ausführliche Tabelle (Anhang I 2) listet für jede Testaufgabe detaillierte Informationen zu den jeweiligen Kompetenzschwerpunkten und den aufgabenspezifischen Anforderungen auf und verortet die Aufgaben innerhalb der drei Anforderungsniveaus. Darüber hinaus werden mögliche Besonderheiten und Fehlvorstellungen skizziert.[19]

7.1.2 Aufgabenformate

Die Testaufgaben des „BruKos“ umfassen sowohl *geschlossene* als auch *offene* Aufgabenformate, die jeweils unterschiedliche Anforderungen an die Bearbeitung implizieren.

Die sogenannten *geschlossenen* Aufgaben erfordern primär die reproduktive Anwendung von Konventionen und Rechenverfahren. Die Rechenaufgaben zu dem arithmetischen Basisstoff in Teil I lassen sich auf syntaktischer Ebene lösen, d.h. sie sind größtenteils ohne die Anwendung mathematischer Zusammenhänge lösbar (mit Ausnahme der Textaufgaben 13 und 14, denen jedoch in Alltag und Schule hohe Relevanz zukommt (Fischer, U. et al., 2017, S. 33) und deren

[19] Die tabellarische Übersicht bezieht sich nur auf Teil II des „BruKos“. Einerseits enthalten die Aufgaben zum arithmetischen Basisstoff aus Teil I verschiedene Teilaufgaben mit jeweils unterschiedlichen Anforderungsniveaus (bspw. in Abhängigkeit des zugrunde gelegten Zahlenraums), auf deren einzelne Darstellung aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wird. Andererseits werden die Aufgaben aus Teil I sowohl in der Gesamtauswertung des Tests als auch in der hier vorliegenden Interventionsstudie nicht differenziert betrachtet, sodass eine detaillierte Darstellung an dieser Stelle verzichtbar ist.

individuellen Lösungswege für das Abklären von (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen diagnostisch wichtige Hinweise geben). Gleichwohl sind die Aufgaben so ausgewählt, dass sie mithilfe grundlegender Zahl- und Operationsvorstellungen sowie dem Erkennen von Zusammenhängen geschickter gelöst werden können. Die Bearbeitung der Aufgaben ist auf Kopfrechenebene vorgesehen. Für einige der Aufgaben stehen Rechenkästchen zur freien Verfügung, um wahlweise Nebenrechnungen durchführen zu können. Dadurch entsteht die Möglichkeit, dynamische Lösungswege einzelner Schülerinnen und Schüler zu erfassen, die möglicherweise interessante Hinweise auf die individuellen Denkprozesse liefern. Die *geschlossenen* Aufgaben zum grundlegenden Bruchzahlverständnis in Teil II beziehen sich primär auf das Bestimmen von Anteilen und den Transfer ikonisch dargestellter Anteile in die symbolische Notation der Bruchzahl. Die Aufgaben variieren zwischen Stamm- und Nicht-Stammbrüchen mit standardmäßigen Einteilungen des Ganzen. Eine Ausnahme stellt Aufgabe 9 dar, in der ein Nicht-Stammbruch in einer nicht-standardmäßigen Einteilung bestimmt werden muss. Diese Aufgabe erfordert stärker als die anderen Aufgaben des gleichen Typs die Aktivierung von Zusammenhängen zwischen Teil, Anteil und Ganzem unter Berücksichtigung der Größe der Teile. Die Zuordnungsaufgaben erfordern einerseits die Verbindung passender Fachbegriffe zu einer symbolischen Repräsentation eines Bruchs. Andererseits setzen die Multiple-Choice-Formate die Entscheidung über eine Passung bzw. Nicht-Passung zwischen ikonischen Repräsentanten und einem symbolischen Bruch voraus. *Geschlossene* Aufgaben, die sich auf das Markieren von Anteilen beziehen, erfordern das Herstellen von Zusammenhängen und Übertragen von Teil-Anteil-Ganze-Strukturen. Beispiele für geschlossene Aufgaben werden in Abbildung 28 abgebildet.

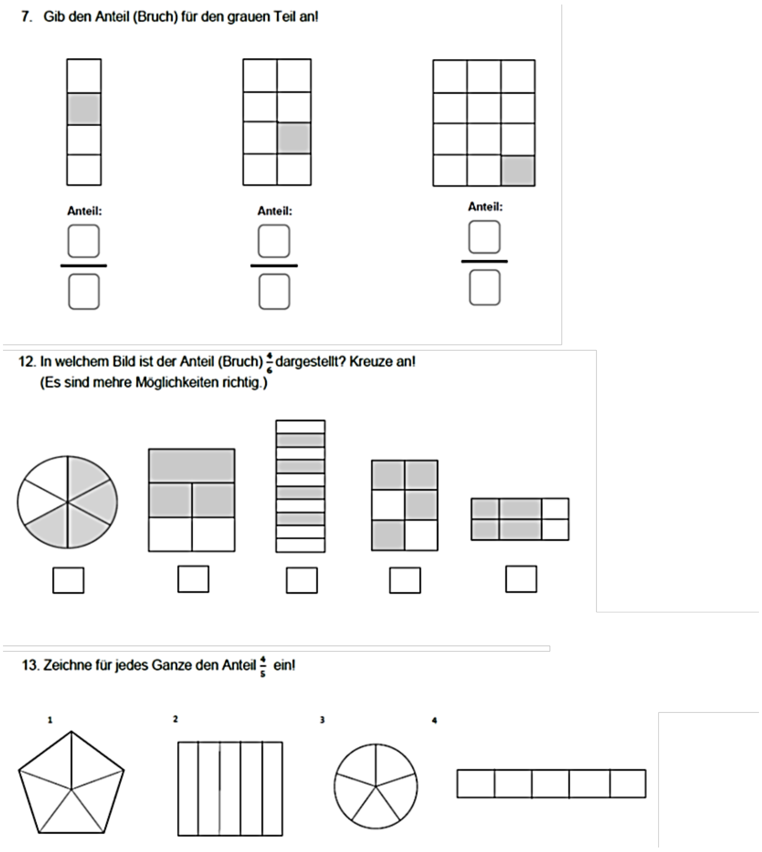


Abbildung 28: Beispiele für geschlossene Aufgaben aus Teil II des „BruKos“

Offene Aufgaben, die auf das Erfassen individueller Denkaktivitäten, Strategien und Probleme zielen, stellen besonders unter diagnostischer Perspektive ein „wichtiges Werkzeug“ (Scherer, 2015, S. 282) dar. Sie ermöglichen zum einen die Diagnose von Fehlstrategien und Lernschwierigkeiten, zum anderen eröffnen sie den Raum, individuelle Denkweisen und Ideen preisgeben zu können. Die *offenen* Aufgabenformate fordern die Schülerinnen und Schüler dazu auf, ihre individuellen Denkweisen zu explizieren und eine (ausführliche) freie Antwort zu formulieren. Zwar führen sie indirekt zielorientiert auf den jeweiligen Kompetenzschwerpunkt hin, lassen aber eine hinreichende Offenheit für divergierende Antworten zu, sodass unterschiedliche individuelle Sichtweisen in Bezug auf das grundlegende Bruchzahlverständnis abgebildet werden können. Indem die Bearbeitungswege der Lernenden offengelegt werden, können tragfähige bzw. ungünstige Denkprozesse im Sinne der Prozessorientierung analysiert werden (Wartha, 2017, S. 299). Zugrunde gelegt wird die Annahme von Mathematiklernen als interaktiver Prozess (Werner, 2019, S. 42), der die subjektiven, individuellen und heterogenen Lern- und Entwicklungswege anerkennt. Im Rahmen der Diagnostik steht vor diesem Hintergrund insbesondere die Frage nach individuellen Lösungswegen, individuellen Anwendung von Lösungsstrategien sowie dem Rückgriff auf eventuell vorhandene Lösungsmuster im Mittelpunkt. Um die individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler nicht zu verfälschen, wurden bewusst keine Formulierungsvorschläge für die Beantwortung der Fragen vorgegeben (bspw. in Form von Satzanfängen), gleichwohl dieses Aufgabenformat für viele Lernende mit Hemmungen bzw. der (ungewohnten) Schwierigkeit verbunden ist, ihr Vorgehen sowie ihre Denk- und Lösungswege zu verschriftlichen (Prediger, Selter, Hußmann & Nührenbörger, 2014b, S. 23). Die in Teil II des „BruKos“ eingesetzten *offenen* Aufgaben beziehen sich primär auf das Verallgemeinern und Reflektieren von Zusammenhängen. Im Mittelpunkt steht die Verständnisorientierung. Individuelle Erkenntnisse hinsichtlich mathematischer Strukturen und Zusammenhänge sollen erläutert und versprachlicht bzw. in Form von Ergänzungen und eigenen freien Darstellungen abgebildet werden. Neben den offenen Antwortmöglichkeiten auf sprachlicher Ebene zeigen auch die ikonischen Darstellungen eine „diagnostische Stärke“ (Schink, 2013a, S. 35) bezüglich individueller Vorstellungen. Sie liefern Hinweise auf die individuellen Strukturierungen der triadischen Zusammenhänge sowie deren relationales Verständnis. Im „BruKo“ bezieht sich der größere Anteil der *offenen* Aufgaben auf die Beschreibungsebene ($AV_{3beschreibe}$), die eine Erläuterung von Zusammenhängen und operativen Wirkungen zwar indirekt impliziert, nicht aber expliziert einfordert. Ein kleinerer Anteil der Aufgaben bezieht sich auf das Ergänzen ($AV_{3ergänze}$) sowie unmittelbar auf das Argumentieren ($AV_{3erkläre}$), das höhere Ansprüche an die prozessbezogenen Kompetenzen stellt.

Die *offenen* Aufgaben gelten als qualitativ auszuwertende Unterfragen. Sie beziehen das Verstehen und den Nutzen operativer Beziehungen zwischen einzelnen Aufgaben mit ein, die in der Auswertung quantitativ berücksichtigt werden. Forschungsergebnisse in diesem Bereich zeigen, dass operative Vorgehensweisen den Aufbau eines Verständnisses für Zusammenhänge unterstützen bzw. anbahnen können (Schink, 2013a, S. 353). Abbildung 29 zeigt beispielhafte Aufgaben:

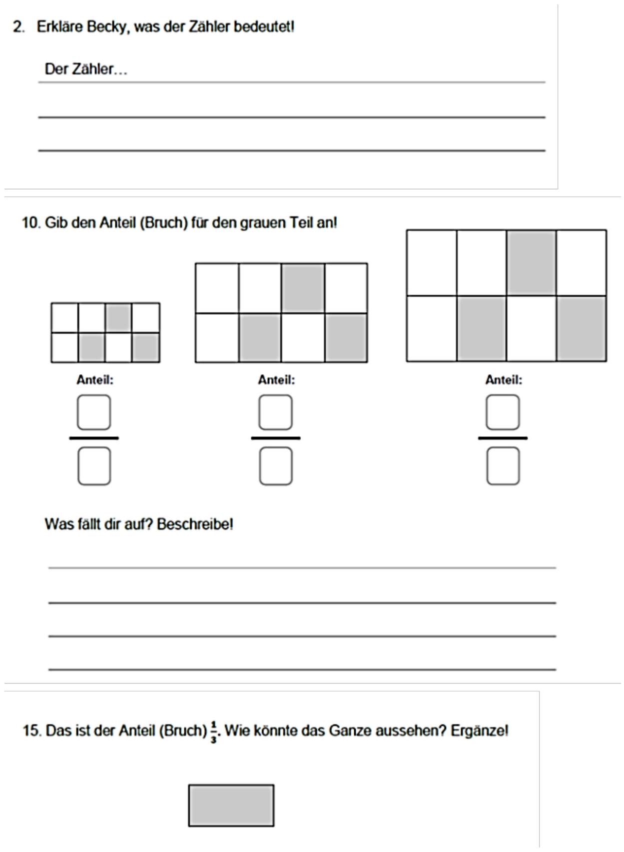


Abbildung 29: Beispiele für offene Aufgaben aus Teil II des „BruKos“

Die Zusammenschau der beiden Aufgabenformate ermöglicht eine umfangreiche Darstellung der individuellen Kompetenzen.

7.1.3 Darstellungen

Die Verwendung von Darstellungen ist nicht nur für eine effektive Förderung bedeutsam, wie bereits in Kapitel 2.3.1 dargelegt wurde, sondern auch diagnostisch relevant (Moser Opitz et al., 2010, S. 15). Im „BruKo“ werden strukturorientierte Darstellungen und Repräsentationen eingesetzt, mithilfe derer der Fokus auf den mathematischen Kern einer Aufgabe gerichtet werden kann. Auf lebensnahe Alltagsdarstellungen wird gezielt verzichtet, um den fachlichen Kern nicht zu verdecken. Es werden sowohl ikonische, ikonisch-symbolische als auch rein symbolische Repräsentanten verwendet. Die unterschiedlichen Darstellungsformen werden bewusst gewählt, um im Sinne des intermodalen Transfers (Schipper, 2009a, S. 36) das umfassende Verständnis erfassen zu können. Es lässt sich annehmen, dass ein Kind ein umfassendes Verständnis eines mathematischen Lerngegenstands erworben hat, wenn es flexibel zwischen den einzelnen Darstellungsformen (enaktiv – ikonisch – symbolisch) übersetzen und entsprechende Beziehungen herstellen kann. Im „BruKo“ werden kontinuierliche Flächen und diskrete Mengen als Repräsentanten von Anteilen, Teilen und Ganzen verwendet, die sich primär auf rechteckige und zum Teil auf runde Formen beziehen. Sie sind an konventionelle mathematische Darstellungen aus Schulbüchern angelehnt.

Die beiden fiktiven Kinder-Figuren „Ben“ und „Becky“, die eigens für die Interventionsstudie illustriert wurden, werden auch in das Testinstrument aufgenommen, um die inhaltliche Rahmung für die Schülerinnen und Schüler aufrecht zu erhalten. Darüber hinaus dienen sie in den Aufgaben 2, 3, 17, 19, 25 und 26 als motivierende Adressaten der individuellen Erklärungen.

7.1.4 Einsatz und Durchführung

Bei dem „BruKo“ handelt es sich um einen Gruppentest, der primär für den Zeitraum vor bzw. nach der Einführung des Bruchzahlverständnisses im fünften Schuljahr konzipiert wurde. Darüber hinaus kann er (erneut) im sechsten Schuljahr vor Einführung der Bruchrechnung bzw. bei Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten auch in höheren Schuljahren eingesetzt werden. Die Aufgaben können darüber hinaus in der Individualdiagnostik bei Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten oder (besonderen) Potentialen verwendet werden, denn insbesondere die *offenen* Aufgaben bieten die Möglichkeit für vertiefende diagnostische Gespräche. Das Testinstrument kann zu jedem der in Kapitel 2.3.1 dargestellten Diagnosezeitpunkte eingesetzt werden. Besonders geeignet ist es für die Lernausgangslagen- sowie Lernergebnisdiagnose. Zusätzlich lassen sich die *offenen* Aufgaben im Rahmen von Lernprozessdiagnosen bzw. diagnostischen Interviews einsetzen.

Die Bearbeitung des Gruppentests dauert im Schnitt ca. 75-90 Minuten bzw. zwei Schulstunden. Eine durchgehende Bearbeitung ist nicht zwingend nötig. Aufgrund der beiden Testteile kann die Durchführung auch an individuelle Konzentrationsspannen, Arbeitstempi oder andere Bedürfnisse angepasst werden. Die beiden Teile lassen sich unabhängig voneinander bearbeiten, Unterbrechungen sind möglich. Zur Durchführung der Testaufgaben sind keine weiteren Materialen außer der jeweiligen Testhefte erforderlich. Es handelt sich um eine integrierte Diagnostik (Schipper, 2009b, S. 97), die weder einer aufwändigen

Testvorbereitung, noch externer Expertinnen und Experten bedarf. Auf der Grundlage entsprechender fachdidaktischer und diagnostischer Kompetenzen kann der „BruKo“ im alltäglichen Mathematikunterricht eingesetzt werden. Die Lehrkräfte bzw. Testleiterinnen und -leiter erhalten Hinweise zur Durchführung sowie zu möglichen Hilfestellungen, die sie bei auftretenden Fragen während der Testdurchführung geben dürfen. Die Schülerinnen und Schüler bekommen vor der Bearbeitung eine standardisierte Einführung, die sowohl in Form einer mündlichen Erläuterung durch die jeweilige Testleitung wiedergegeben wird, als auch in schriftlicher Form auf den Testheften abgedruckt ist. Um den hohen sprachlichen Anforderungen, die insbesondere durch die offenen Aufgaben gegeben sind, im Vorfeld förderlich entgegenzuwirken, sollen die Schülerinnen und Schüler bei der Einführung des „BruKos“ motiviert werden, ihre Ideen zu den Aufgaben so aufzuschreiben, wie sie es denken. Außerdem soll im Sinne der Kompetenzorientierung der Hinweis gegeben werden, möglichst alles bzw. so viele Aspekte wie ihnen auffallen, zu notieren, um zu zeigen, was sie alles können. Der Motivationsaspekt spielt vor allem für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten eine wichtige Rolle, die unter Umständen durch häufige Testsituationen in ihrer Vergangenheit demotiviert sind.

7.1.5 Bestandteile

Insgesamt umfasst der „BruKo“ folgende Bestandteile (Lienert & Raatz, 2011, S. 5), die eine objektive Testdurchführung möglich machen: das Testmaterial in Form von zwei Aufgabenheften in Pseudo-Parallelformen, einen ausführlichen Auswertungsleitfaden mit Hilfen zur Bewertung, verbale und schriftlich abgedruckte Testanweisungen sowie Hinweise zur Testdurchführung und zu erlaubten Hilfestellungen. Die Entwicklung eines ausführlichen Manuals steht derzeit noch aus.

7.2 Skalierung

Bei der Entwicklung des „BruKos“ stand die Konzeption eines proximativen Testinstruments im Mittelpunkt, das innerhalb der vorliegenden Interventionsstudie eingesetzt werden kann. Es ging nicht darum, im Sinne der klassischen Testtheorie ein ausgereiftes Instrument zu entwickeln, gleichwohl wurden akzeptable Testgütekriterien bereits in dieser ersten

Entwicklungsphase angestrebt. Nachfolgend werden die im Rahmen der vorliegenden Studie angefallenen Daten dargestellt, um erste Aussagen hinsichtlich der Skalierbarkeit des „BruKos“ treffen zu können. Eine umfassende Validierung des Testinstruments steht perspektivisch noch aus.

Informelle Pilotierung

Im Vorfeld der Intervention fand eine informelle Pilotierung einer ersten Version des „BruKos“ in einer vierten Klasse (n = 22) sowie in einer sechsten Klasse (n = 27) statt. Die Ergebnisse der ersten Erprobung mit Lernenden, die der Stichprobe möglichst ähnlich sind, wurde zur formativen Evaluation des Testinstruments sowie zur Adaption der Testaufgaben genutzt. Die informelle Pilotierung sollte vor allem sicherstellen, dass die Items veränderungssensitiv sind, um die Anforderungen an ein kompetenzorientiertes Leistungsverständnis zu erfüllen: „Verfahren, die Lernverläufe mit einer solchen Zielsetzung diagnostizieren, müssen also in deutlich höherem Maß Entwicklungen und Veränderungen abbilden können als statusdiagnostische Verfahren. Messtheoretisch bezeichnet dies einen höheren Bedarf an Veränderungssensitivität“ (Wilbert, 2014, S. 284).

Reliabilität

Im Rahmen einer Reliabilitätsanalyse wurde Cronbachs Alpha (α) berechnet, um die interne Konsistenz der Skalen zu bestimmen. Cronbachs α ist ein Maß für die Homogenität eines Tests (Rost, 2013). Werte zwischen .8 und .9 gelten als gut, Werte über .9 als sehr gut (Beller, 2006, S. 55).

Neben der Berechnung des Gesamttests (*LS*[20]*_ges; 150 Items*) wurden folgende Skalen berücksichtigt: Die Testaufgaben aus Teil I des „BruKos“ wurden als *LS_BK_ges (48 Items)* zusammengefasst, da sie den arithmetischen Basisstoff überprüfen. Für Teil II des „BruKos“, mit dem das grundlegende Bruchzahlverständnis getestet wird, gibt es zwei Skalen: die geschlossenen Testaufgaben bilden die Skala *LS_Bruch_geschl_ges (52 Items),* die offenen Testaufgaben werden zu der Skala *LS_Bruch_oA_ges (41 Items)* zusammengefasst. Für eine differenziertere Betrachtung der offenen Testaufgaben wurden innerhalb der Skala *LS_Bruch_oA_ges* noch die Subskalen *LS_Bruch_beschr* und *LS_Bruch_erkl* sowie

[20] *LS* steht für Lernstandserhebung und wurde zu Beginn des Entwicklungsprozesses als Kodierung für die einzelnen Subskalen und Items verwendet.

LS_Bruch_erg gebildet. Die expliziten Aufgaben, die mit den Skalen gebündelt wurden, können einer Übersicht in Kapitel 7.1.1 entnommen werden.

Für die erste Validierung des neu entwickelten Testinstruments wird der erste Messzeitpunkt zugrunde gelegt. Der „BruKo“ als Gesamttest erreichte ein Cronbachs Alpha von .97 für die Untersuchungsstichprobe (n = 86), d.h. für die Skala konnte insgesamt eine hohe innere Konsistenz festgestellt werden. Eine nähere Betrachtung der einzelnen Skalen ergab unterschiedliche Ergebnisse für offene und geschlossene Aufgaben: Für die Items zum arithmetischen Basisstoff wurde ein Cronbachs Alpha von .95 erreicht. Die geschlossenen Bruchaufgaben erzielten ein α von .97. Für die offenen Bruchaufgaben wurde ein Wert von .79 ermittelt, wobei die Werte für die Subskalen der offenen Bruchaufgaben zwischen .68 und .82 streuten.

Itemschwierigkeit und Trennschärfe

Die unterschiedlichen Lösungswahrscheinlichkeiten der Testaufgaben lassen sich als Itemschwierigkeiten quantifizieren. Um Leistungsunterschiede sichtbar machen zu können, sind eine möglichst breite Schwierigkeitsstreuung und viele Items mit mittlerer Schwierigkeit (zwischen .2 und .8) wünschenswert (Bortz & Döring, 2006, S. 219). Die Trennschärfe, die anzeigt, „wie gut ein einzelnes Item das Gesamtergebnis eines Tests repräsentiert“ (Bortz & Döring, 2006, S. 219), sollte zugleich möglichst hoch sein. Sie wird über die Korrelation zwischen einem Item und der Gesamtskala geschätzt, Werte zwischen .3 und .5 werden als mittelgut, Werte über .5 als hoch eingestuft. Items mit einer geringeren Trennschärfe als .3 können als „schlechte Indikatoren des angezielten Konstrukts“ (Bortz & Döring, 2006, S. 220) betrachtet werden und sollten streng genommen aus einer Skala entfernt werden, wenn man Cronbachs Alpha erhöhen möchte. Zeigt die Itemanalyse jedoch keinen deutlich höheren Wert für α, wenn das Item weggelassen wurde (part-whole-corrected), dann kann eine sehr geringe Trennschärfe zugunsten curricularer bzw. inhaltlicher Gründe durchaus auch vernachlässigt werden (Rindermann & Geiser, 2010, S. 36). Sehr schwere und sehr leichte Aufgaben, die von vielen Testpersonen gelöst bzw. nicht gelöst wurden, gehen in der Regel mit einer geringen Trennschärfe einher, sollten jedoch oft aus Gründen der curricularen Validität beibehalten werden, auch wenn sich eine hohe Trennschärfe eher mit Aufgaben mittlerer Schwierigkeit erreichen lässt. Solche „Trennschärfeneinbußen in Kauf“ (Bortz & Döring, 2006, S. 220) zu nehmen empfiehlt sich, wenn ein diagnostisches Verfahren das gesamte Leistungsspektrum einer heterogenen Lerngruppe erfassen soll.

Die empirische Überprüfung der Itemschwierigkeit anhand des Mittelwerts und der Trennschärfe macht im Rahmen der vorliegenden Arbeit zum derzeitigen Validierungsstand nur für die offenen Aufgaben zum Bruchzahlverständnis Sinn. Aussagen zu den Items zum arithmetischen Basisstoff sowie zu den geschlossenen Bruchaufgaben, die mit 0 – 1 Punkt bzw. 0 – 0,5 – 1 Punkten (vier Aufgaben zum arithmetischen Basisstoff) bewertet werden, sind aufgrund der Bepunktung nicht aufschlussreich. An dieser Stelle gilt es, in weiterführenden Analysen bspw. Schwierigkeitsindexe zu berechnen, um differenziertere Aussagen treffen zu können.

Für die Skala der offenen Aufgaben zum Bruchzahlverständnis zeigen die Daten auf Itemebene, dass die Itemschwierigkeit von .01 und 1.52 streute. Die Trennschärfe bewegte sich zwischen .22 und .85. Insgesamt zeigen sich messtheoretische Kennwerte, die sich im akzeptablen bis zufriedenstellenden Bereich bewegen. Hinsichtlich der Subskalen wurden folgende Kennwerte erreicht: Die Skala *LS_Bruch_beschr* ergibt Itemschwierigkeiten zwischen .1 und 1.3, die Trennschärfen bewegen sich zwischen .16 und .57. Für die Skala *LS_Bruch_erkl* liegt die Itemschwierigkeit zwischen .32 und .58 und die Trennschärfen streuen zwischen .17 und .54. Die Skala *LS_Bruch_erg* weist Itemschwierigkeiten zwischen .3 und 1.5 sowie Trennschärfen zwischen .33 und .79 auf. Zwar zeigten einige Items niedrige Trennschärfekoeffizienten, aber α wurde nur wenig größer, wenn das jeweilige Item weggelassen wurde. Aus diesem Grund und wegen ihrer curricularen Relevanz wurden die Aufgaben nicht aus dem Testinstrument entfernt.

kritischer Wert

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein kritischer Wert in Form einer mindestens zu erreichenden Gesamtpunktzahl festgelegt, ab der von einem fundierten Bruchzahlverständnis gesprochen werden kann. Da der Fokus auf die Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen gerichtet ist, wird dieser nur für Teil II des „BruKos“ und nur pragmatisch festgelegt: Es müssen 81 Punkte von insgesamt 108 möglichen Punkten erreicht werden, das entspricht 75% der Gesamtpunktzahl. Eine statistisch fundierte Festlegung des kritischen Werts mithilfe der Methode von Angoff (1971, zitiert nach Zieky & Perie, 2006) sowie der Bookmark-

Methode (Zieky & Perie, 2006), wie sie bspw. für den BASIS-MATH 4-8 (Moser Opitz et al., 2010) durchgeführt wurde, steht derzeit noch aus.

7.3 Auswertungsleitfaden und Bewertung

Um die Lösungen der Lernenden auswerten zu können, wurde ein ausführlicher Auswertungsleitfaden (vgl. Anhang I 3) konzipiert. Dieser wurde zunächst vor dem Hintergrund theoretischer Annahmen für jede Aufgabe deduktiv erarbeitet und anschließend anhand erster Schülerbearbeitungen aus der informellen Pilotierung induktiv weiterentwickelt. Die Weiterentwicklung bezog sich insbesondere auf die Bewertung der *offenen* Aufgaben. Um die Konsistenz des Auswertungsprozesses bei den *offenen* Aufgaben sicher zu stellen, wurden einige der Testaufgaben von drei Expertinnen und Experten unabhängig voneinander analysiert und kodiert. Kritische Zweifelsfälle wurden im Rahmen der Interraterauswertung diskutiert. Anhand dieser Rückmeldungen fand eine weitere Ausdifferenzierung der Bewertungskategorien statt. Insgesamt wird ein konservativer Bewertungsstil zugrunde gelegt, sodass im Sinne der Auswertungsobjektivität möglichst wenig Interpretationsspielraum besteht. Das konservative Vorgehen soll darüber hinaus die Wahrscheinlichkeit erhöhen, Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten in den beiden Inhaltsbereichen zuverlässiger zu erfassen, gleichwohl dadurch in Kauf genommen wird, dass ggf. auch Schülerinnen und Schüler ermittelt werden, für die kein erhöhter Handlungsbedarf hinsichtlich einer zusätzlichen Förderung besteht.

Bei *geschlossenen* Aufgaben wird jede falsche Antwort mit 0 Punkten und jede richtige Antwort mit 1 Punkt codiert, in Ausnahmefällen erfolgt die Vergabe von Teilpunkten (0,5 Punkte). Bei Korrekturen wird die korrigierte Lösung gewertet. Aufgaben, die in sich richtig waren aber nicht zu der jeweiligen Aufgabenstellung passten, werden in der quantitativen Auswertung mit 0 Punkten codiert und in der noch ausstehenden qualitativen Auswertung berücksichtigt. Nicht bearbeitete Aufgaben erhalten den Code 0. Testteile, die komplett nicht bearbeitet wurden, werden zur Kennzeichnung der fehlenden Werte mit 99 codiert. Teil I besteht nur aus *geschlossenen* Aufgaben, hier kann eine Gesamtpunktzahl von 48 Punkten erreicht werden. In Teil II kann im Bereich der *geschlossenen* Aufgaben eine maximale Punktzahl von 54 Punkten erzielt werden.

Zur Klassifizierung der *offenen* Aufgaben werden die Lösungen nicht im Sinne der Produktorientierung allein nach „richtig“ oder „falsch“ bewertet, sondern deren Güte wird mithilfe einer Skala von 1 bis 3 Punkten eingeschätzt. Die differenziertere und prozessorientierte Auswertung der *offenen* Aufgaben nimmt einen besonderen Stellenwert ein, um tragfähige oder ungünstige individuelle Denkprozesse offenzulegen (Wartha, 2017, S. 299) und somit dem Ziel der sinnvollen Informationsgenerierung für mögliche Förderansätze gerecht werden zu können. Den Skalen liegen entsprechend der jeweiligen Aufgabenkategorie verschiedene Bezugsebenen zugrunde:

Die „Beschreibe“-Aufgaben im Sinne des operativen Prinzips stellen bei der Punktevergabe eine Ausnahme dar. Hier erfolgt die Bewertung der Lösungen in Bezug auf das operative Prinzip in drei Kategorien: *Konstanz, Veränderung, Wirkung*. Pro Kategorie wird eine richtige Lösung mit 1, eine falsche Lösung mit 0 codiert. Innerhalb dieser Aufgabe können insgesamt 3 Punkte erreicht werden. Die Kategorie *Wirkung* wird auch jeweils nur mit einem Punkt bewertet, da sowohl Erkenntnisse hinsichtlich der *Konstanz* bzw. der *Veränderung* keine Voraussetzungen für das Verständnis der *Wirkung* darstellen.

Die Lösungen bei den „Erkläre“-Aufgaben werden vor dem Hintergrund ihrer Tragfähigkeit eingeschätzt. Antworten, die als *nicht tragfähig* gelten, erhalten den Code 0. Antworten, die als *im Ansatz tragfähig* eingeschätzt werden, werden mit 1 und Antworten, die als *nahezu tragfähig* beurteilt werden, mit 2 codiert. *Vollumfänglich tragfähige* Lösungen erhalten den Code 3.

Innerhalb der „Ergänze“-/“Zeichne“-Aufgaben werden die Lösungen vor dem Hintergrund ihrer Angemessenheit eingeschätzt. Analog gilt hier: *nicht angemessene* Antworten erhalten den Code 0, *im Ansatz angemessene* Lösungen den Code 1 und mit 2 werden *nahezu angemessene* Lösung codiert. Für *vollumfänglich angemessene* Lösungen wird der Code 3 vergeben.

Die Unterteilung der *offenen* Aufgaben in die drei Aufgabenkategorien berücksichtigt die prozessbezogenen Kompetenzen und ermöglicht eine differenzierte Auswertung von Lösungen und Teillösungen, sodass nicht nur deren Korrektheit, sondern auch deren Vollständigkeit und Qualität berücksichtigt werden kann. Allerdings weisen insbesondere die *offenen* Fragen einen hohen Grad an Offenheit auf. Hinsichtlich der Ergebnisse bei „Beschreibe“- und „Erkläre“-Aufgaben ist nicht eindeutig festgelegt, auf welche Bezugsebene (ikonisch oder symbolisch) sich die Kinder bei ihrer Beantwortung beziehen sollen. Ebenso können verschiedene Bezugsebenen in unterschiedlichen Realisierungen der „Ergänze“-/“Zeichne“-Aufgaben berücksichtigt werden. Es findet auf konzeptioneller Ebene keine Unterscheidung zwischen den Ebenen in der Bewertung statt, da sowohl ikonisch als auch symbolisch dargestellte Bruchzahlen als gleichwertige Repräsentanten eines Bruchs angesehen werden. Diese Offenheit, die verschiedene Lösungswege zulässt, wurde bewusst gewählt, um möglichst viele Informationen über die individuellen Lösungsprozesse der Kinder gewinnen zu können. Auf diese Weise wird den verstehensorientierten Leistungen bei der Evaluation der Wirksamkeit des Unterrichts Rechnung getragen. Insgesamt kann bei den *offenen* Aufgaben eine Punktzahl von 54 erzielt werden. Die einzelnen *offenen* Aufgaben zeigen im Vergleich zu den *geschlossenen* Aufgaben eine höhere Wertigkeit auf, da diese vor dem Hintergrund der geforderten Kompetenzen über das Reproduzieren hinausgehen und das Herstellen von komplexeren Zusammenhängen sowie die Anwendung von Verständnis erfordern. In der Gesamtsumme werden beide Aufgabentypen unabhängig von ihrer jeweiligen Aufgabenanzahl mit der gleichen maximalen Wertigkeit von 108 Punkten berücksichtigt.

Zu jeder *offenen* Aufgabe sind im Auswertungsleitfaden für jede zu erreichende Punktzahl mögliche Antworten aufgeführt, die zwar einen Großteil zu erwartender bzw. geforderter Antworten aufnehmen, jedoch nicht den Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Zusätzlich werden ausgewählte Ankerbeispiele aus Bearbeitung der Schülerinnen und Schüler aufgelistet, die als Orientierung zur Einordnung undeutlicher bzw. nicht klar einzuschätzender Antworten dienen und die Auswertungsobjektivität gewährleisten sollen. Die Bewertung und Klassifizierung der bearbeiteten Testaufgaben setzt (umfassende) Erfahrungen der auswertenden Person sowie deren Kenntnis über mögliche Fehlstrategien voraus. Die Auswertung bleibt trotz des ausführlichen und mit vielen Beispielen unterlegten Auswertungsleitfadens mit einer nicht zu verhindernden Unsicherheit behaftet. Dieser gewisse Grad an fehlender Eindeutigkeit hinsichtlich der Bewertung der Lösungen der *offenen* Aufgaben wird aber vor dem Hintergrund des deutlich stärker zu gewichtenden intendierten Aspekts der Verständnisorientierung in Kauf genommen. Die erreichten Punktewerte werden anschließend entsprechend der beiden Aufgabenformate (*offene* und *geschlossene* Aufgaben) zu Subtestwerten aufsummiert. Auf die Berechnung eines Gesamtwerts für den zweiten Teil des „BruKos“ sowie eines Gesamtwerts für beide Testteile insgesamt wird aufgrund der inhaltlich nicht tragbaren Vergleichbarkeit der Subtests verzichtet.

7.4 Prägnante Fehlerphänomene

Das nachfolgende Kapitel verbindet in einem ersten Ansatz die theoretischen Ausführungen zu möglichen Schwierigkeiten im Verständnis von positiven rationalen Zahlen (vgl. Kap. 4.1.3) mit konkreten Bearbeitungsbeispielen zu Aufgaben des „BruKos“. Die qualitativen Daten für eine tiefergehende Analyse wurden derzeit noch nicht vollständig ausgewertet, sodass die prägnanten Fehlertypen hier nicht in aller Ausführlichkeit präsentiert werden können. Im Folgenden findet eine erste Betrachtung ausgewählter, in Kapitel 4.1.3 ausgeführter Schwierigkeiten exemplarisch anhand von Bearbeitungsergebnissen statt. In Anlehnung an Wartha und Wittmann (2009) soll im Folgenden für Fehler*phänomene*, die mithilfe des „BruKos“ erfasst werden können, sensibilisiert werden. Fehlerphänomene machen als „sichtbare[n] Produkte eines Wahrnehmungs- und Denkprozesses“ (2009, S. 77) einen Teilaspekt von Fehlern aus. Mögliche systematische Fehler*muster* sowie dahinter stehende Fehler*ursachen* werden an dieser Stelle nicht weiterführend konstatiert. Es werden sowohl Beispiele für die geschlossenen, eher auf Kalkül ausgelegten Aufgaben als auch Beispiele für die offenen, verständnisorientierten Aufgaben aus einer qualitativen Blickrichtung kurz dargestellt. Es handelt sich im Folgenden um einen Einblick, der keinen Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller Fehlerphänomene innerhalb der vorliegenden Aufgabenbearbeitungen des „BruKos“ erhebt. Die auf theoretischer Ebene implizierte Vielfalt bei den offenen Aufgabenformaten lässt sich auch auf praktischer Ebene in den Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler deutlich erkennen. Die Schülerdokumente zeigen ein großes Heterogenitätsspektrum. Die nachfolgend ausgewählten Dokumente bilden nur beispielhafte Bearbeitungen der jeweiligen Aufgabe ab. Zudem sollte stets auch die Möglichkeit von Flüchtigkeitsfehlern mit in Erwägung gezogen werden.

Ein weit verbreitetes Fehlerphänomen stellt die Verwechslung von Zähler und Nenner dar (vgl. Abb. 30), die aufgrund eines unzureichenden Begriffsverständnisses oder durch Flüchtigkeitsfehler entstehen kann.

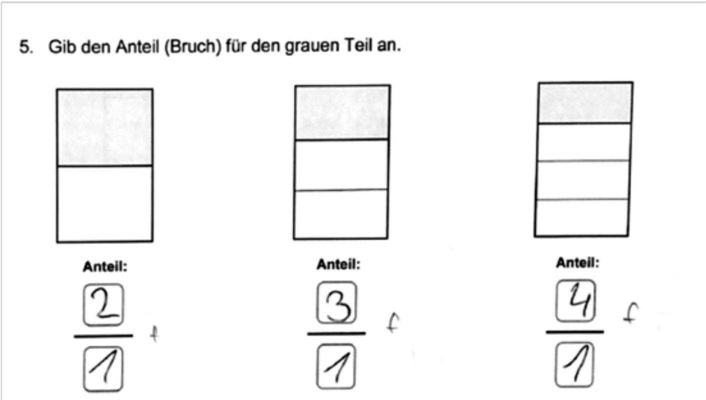


Abbildung 30: Fehlerphänomen Verwechslung Zähler und Nenner

Die beispielhafte Bearbeitung der nachfolgenden Aufgaben (vgl. Abb. 31) zeigt ein weiteres typisches Fehlerphänomen, nämlich das der Teil-zu-Teil-Strategie. Beim Transfer ikonisch dargestellter Bruchzahlen in ihre symbolische Schreibweise wird die Anzahl der markierten Teile des Ganzen in Beziehung zu der Anzahl der nicht markierten Teile gesetzt. Dies kann ein Indiz dafür sein, dass das Verständnis für die Trias Teil-Anteil-Ganzes nicht aufgebaut wurde.

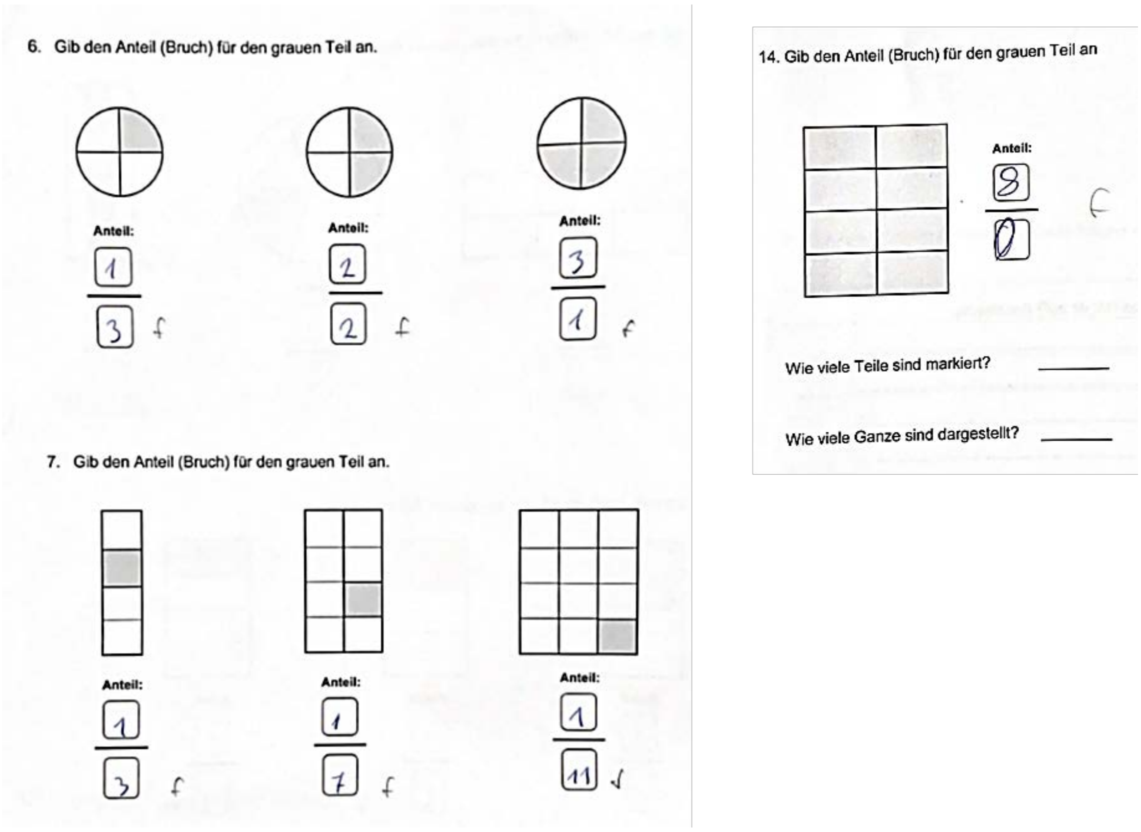


Abbildung 31: Fehlerphänomen Teil-zu-Teil-Strategie

Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse, dass vielen Lernenden der Transfer einer symbolisch dargestellten Bruchzahl in eine ikonische Repräsentationsform Schwierigkeiten bereitet, sowohl, wenn eine ikonische Repräsentation vollendet (vgl. Abb. 32), als auch wenn sie frei erstellt (vgl. Abb. 33) werden muss. Eine (gleichmäßige oder ungleichmäßige) Einteilung bzw. Strukturierung des Ganzen ohne Markierung des relevanten Teils deutet darauf hin, dass der Nenner als die Anzahl der zu betrachtenden Teile aufgefasst wird. Eine unterschiedliche Größe der eingezeichneten Teile kann als Hinweis verstanden werden, dass das grundlegende Verständnis der Notwendigkeit gleich großer Teile nicht aufgebaut und somit die Größe der Teile nicht beachtet wird. Denkbar ist gleichzeitig auch, dass zwar das dahinterliegende Verständnis angebahnt wurde, aber Schwierigkeiten beim Abschätzen bzw. Ausmessen des Ganzen und der daraufhin durchzuführenden korrekten Einteilung bestehen (vgl. Prediger et al., 2014a, S. 23).

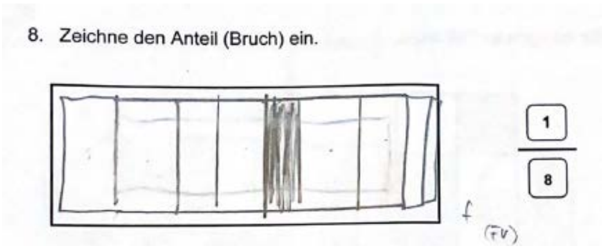


Abbildung 32: Fehlerphänomen ikonische Repräsentation vollenden

In dieser Aufgabe kann sich auch die Teil-zu-Teil-Strategie zeigen, nämlich dann, wenn neun Teile insgesamt eingezeichnet werden und ein Teil davon markiert wird.

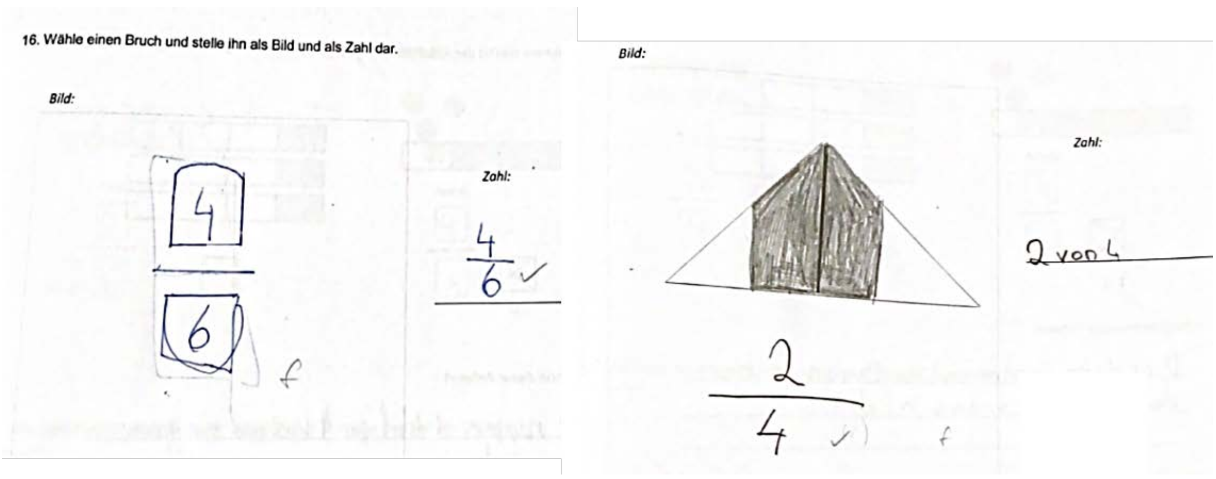


Abbildung 33: Fehlerphänomen ikonische Repräsentation frei erstellen

Das freie Zeichnen einer Bruchzahl erfordert neben der gleichmäßigen Strukturierung der einzelnen gleich großen Teile auch ein gleichmäßig bzw. exakt gezeichnetes Ganzes, das insbesondere bei der Darstellungsform des Kreises anspruchsvoll ist.

Hinsichtlich der offenen Bruchaufgaben verdeutlichen die Bearbeitungsergebnisse der vorliegenden Stichprobe vor allem in Bezug auf die strukturellen Zusammenhänge der Trias Teil-Anteil-Ganzes sowie deren operativen Veränderungen Schwierigkeiten.

Schwierigkeiten beim Verständnis von Zähler und Nenner bzw. eine vertauschte Bedeutungszuschreibung zeigen sich nicht nur in der symbolischen Anteilsbestimmung (s.o.), sondern auch in einer verständnisorientierten Begriffserklärung (vgl. Abb. 34). Fehlerhafte Antworten können ebenfalls durch die hohen sprachlichen Anforderungen begünstigt werden, die eine Erläuterung und Verschriftlichung individueller Vorstellungen implizieren.

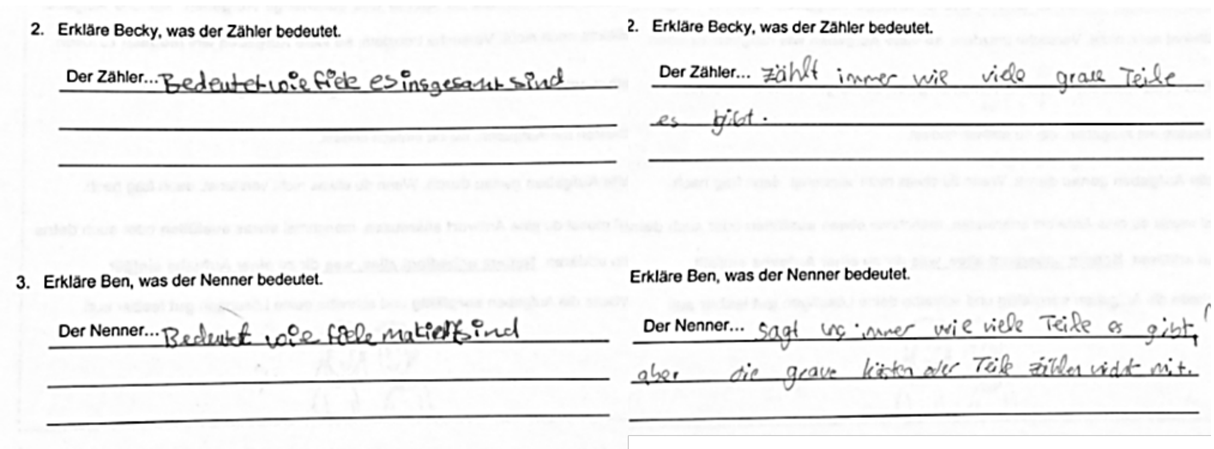


Abbildung 34: Fehlerphänomen Bedeutung Zähler und Nenner

Bei der nachfolgenden Aufgabe (vgl. Abb. 35) zeigt sich das Fehlerphänomen der „Dominanz des Nenners“, das für den Vergleich zwischen Bruchzahlen mehrfach dokumentiert wurde (u.a. Padberg & Krüger, 1997, S. 194; Padberg, 2009, S. 66 ff.). Ein Anteil wird bei Stammbrüchen als umso größer aufgefasst, je größer der jeweilige Nenner ist. Es lässt sich vermuten, dass die Invarianz der Größe des jeweils markierten Teils nicht in einen übergeordneten Zusammenhang zwischen Teil, Anteil und Ganzem gesetzt wird, sodass die Betrachtung des jeweiligen Anteils vor dem Hintergrund des Ganzen ausbleibt.

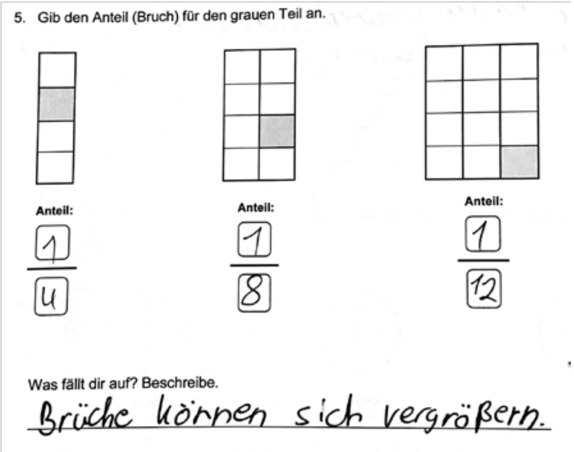


Abbildung 35: Fehlerphänomen Dominanz des Nenners

Die nachfolgende Aufgabenbearbeitung (vgl. Abb. 36) verdeutlicht das fehlende Verständnis für das Konstantbleiben des Anteils bei variierender Größe des Ganzen. Sichtbar wird zudem der hohe sprachliche Anspruch, sowohl in Bezug auf die Aufgabenbearbeitung als auch im Umgang mit den Fachbegriffen. Denkbar ist auch, dass mit „der Anteil“ eigentlich „das Ganze“ gemeint ist. Das Beispiel verdeutlicht darüber hinaus auf sprachlicher Ebene die enge Verknüpfung des Begriffs „Zähler“ mit den markierten Teilen einer ikonischen Repräsentation.

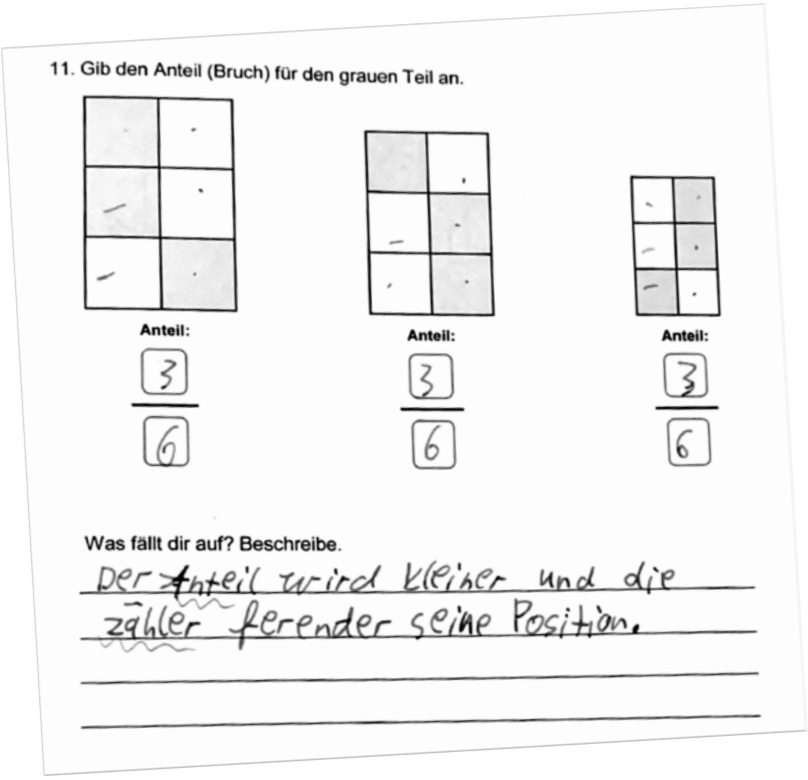


Abbildung 36: Fehlerphänomen Konstantbleiben des Anteils bei variierender Größe des Ganzen

Unabhängig von der eher konservativen und quantitativ ausgerichteten Bewertung der korrekten Bearbeitungen bieten diese Aufgaben ein hohes diagnostisches Potential für individuelle Denk- und Vorgehensweisen, die im Rahmen einer weiterführenden qualitativen Analyse an anderer Stelle vertieft werden. Dieser kurze Einblick soll aufzeigen, dass die Testaufgaben des „BruKos“ typische Schwierigkeiten und daraus resultierende Fehlerphänomene im grundlegenden Verständnis der positiven rationalen Zahlen offenlegen. Gleichermaßen begünstigt die Offenheit der Aufgaben in besonderer Weise auch die Darlegung individueller Kompetenzen und zeigt den Lernzuwachs der Testpersonen an.

7.5 Interpretation

Der ausführliche Auswertungsleitfaden ermöglicht neben der Darstellung und Auswertung der Gesamtpunktzahl für die Teilbereiche auf quantitativer Ebene eine qualitative Interpretation der Testergebnisse bezogen auf die Anforderungsniveaus und Inhaltsbereiche. Er gibt Auskunft darüber, in welchen Bereichen Lernende bereits Kompetenzen aufzeigen und an welchen Stellen sie Schwierigkeiten und damit Bedarf an vertiefender Diagnostik und spezifischer Förderung haben.

7.5.1 Interpretation der Gesamtleistung

Vor dem Hintergrund der noch ausstehenden statistischen Fundierung ist die Beurteilung der Gesamtleistung anhand des festgelegten kritischen Wertes, der als eine erste pragmatische Orientierung zu verstehen ist, mit Vorsicht zu interpretieren. Der summative Wert, den eine Person erreicht, sagt nichts über die Lösung einfacher oder schwieriger Aufgaben aus und er liefert keine aussagekräftigen Informationen auf inhaltlicher Ebene.

7.5.2 Interpretation auf Ebene der Anforderungsniveaus

Auch auf Grundlage der nach Lösungswahrscheinlichkeit geordneten Items (vgl. Kapitel 7.2) soll für die Interpretation der Ergebnisse sichtbar gemacht werden können, ob Lernende eher einfache oder schwierige Aufgaben gelöst haben. Aufgrund mangelnder Datenlage ist eine differenzierte Interpretation für die vorliegende Stichprobe allerdings nicht solide durchzuführen, weshalb zum jetzigen Zeitpunkt der Testevaluation darauf verzichtet wird.

7.5.3 Interpretation auf Ebene der inhaltlichen Kompetenzbereiche

Die Zuordnung der Testaufgaben zu den inhaltlichen Kompetenzbereichen soll tiefergehende Analysen der individuellen Ergebnisse ermöglichen. Jedoch zeigt sich aufgrund mangelnder Datenlage, dass eine Interpretation auf Ebene der Kompetenzbereiche nicht ergiebig ist.

7.6 Zusammenfassung

Der „BruKo“ leistet einen ersten Beitrag zur fokussierten und kompetenzorientierten Diagnose zu Beginn der Sekundarstufe I im Bereich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses und bezieht dabei ausgewählte Aspekte des arithmetischen Basisstoffs ein. Gleichwohl die empirische Überprüfung des Testinstruments noch nicht abgeschlossen ist, liefert der „BruKo“ vielversprechende Daten hinsichtlich der Testentwicklung, die es zukünftig vertiefend zu untersuchen gilt. Anhand der Testaufgaben lassen sich hilfreiche diagnostische Aussagen ermitteln, um darauf aufbauend eine verständnisorientierte Förderung umsetzen zu können. Die beispielhaften Fehlerphänomene schlagen einen Bogen zu den theoretisch dargestellten Schwierigkeiten im Bereich der positiven rationalen Zahlen und sprechen für eine aussagekräftige Auswahl der Testaufgaben des „BruKos“. Die Interpretation der Ergebnisse kann zum derzeitigen Evaluationsstand des Testinstruments anhand des Grenzwerts bzw. mithilfe des ausführlichen Auswertungsleitfadens erfolgen.

8 ERGEBNISSE

Die vorliegende Interventionsstudie ist als Felduntersuchung mit dem Ziel hoher externer Validität angelegt, um „ein Stück unverfälschter Realität“ (Bortz & Döring, 2006) abzubilden. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Natürlichkeit des Untersuchungsfeldes nur eine begrenzte Kontrolle möglicher Störfaktoren zulässt und relativ geringe interne Validität mit sich bringt. In einem ersten Schritt wird die konkrete Durchführung der Intervention unter den realen Bedingungen dargestellt und unter Rückbezug auf die theoretischen Planungen reflektiert (Kap. 8.1). Es werden prägnante, während der Intervention beobachtbare Abweichungen von der ursprünglichen Konzeption beschrieben, um eine der Realität entsprechende Ausgangslage zur Darstellung (Kap. 8.2) und Interpretation (Kap. 9.1) der erhobenen Daten zu schaffen. Daran anschließend erfolgt die Darlegung der erhobenen Daten, die sich aus Ressourcengründen im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf die quantitativen Daten bezieht.

8.1 Durchführung

Nachfolgend wird zunächst die Datenerhebung anhand der eingesetzten Messinstrumente dargestellt. Daran anschließend wird die Durchführung der mehrfach erprobten Unterrichtseinheit im Rahmen des hier entwickelten Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung erläutert.

8.1.1 Datenerhebung

Die Prä- und Posttests wurden im März bzw. Juni 2017 durchgeführt. Die Vortests, bestehend aus dem BASIS-MATH-G 4^+-5 und der Lernstandserhebung Teil I und Teil II, wurden von allen vier Schulklassen an drei Tagen vor den Osterferien separat bearbeitet. Für die Bearbeitung des BASIS-MATH-G 4^+-5 und für Teil I des „BruKos“ standen je 45 Minuten, für Teil II des „BruKos“ 90 Minuten zur Verfügung. Während der Datenerhebung anhand des BASIS-MATH-G 4^+-5 ergaben sich für viele Lernende Zeitschwierigkeiten, aufgrund derer einige der Testaufgaben nicht bearbeitet werden konnten. Sowohl der Nachtest als auch das Follow-Up, bestehend aus Teil I und Teil II des „BruKos“, wurden in insgesamt 90 Minuten bearbeitet. Die Durchführung des Posttests hat kurz vor den Sommerferien stattgefunden und wurde in allen vier Klassen als Mathematikarbeit geschrieben. Der dritte Messzeitpunkt fand ca. 3 Monate nach Beendigung der Intervention kurz vor den Herbstferien statt. Zu diesem Zeitpunkt befanden sich alle Schülerinnen und Schüler bereits im sechsten Schuljahr. Der zeitliche Bearbeitungsrahmen war in allen vier Klassen in gleicher Weise einzuhalten, um die Vergleichbarkeit sicher zu stellen. Individuelle Bearbeitungszeiten einzelner Kinder wurden nicht erfasst, d.h. es sind keine Aussagen über Zusammenhänge der Bearbeitungszeit und der Anzahl korrekt gelöster Aufgaben möglich. Vor dem Hintergrund der Anpassung an die alltagsnahen Bedingungen ergaben sich für die vier Interventionsklassen unterschiedliche Testzeitpunkte im Laufe eines Schultages, sodass die Testbedingungen an dieser Stelle nicht gleich sind. Um Testwiederholungseffekte bei der Bearbeitung des „BruKos" möglichst zu vermeiden und die tatsächlichen Kompetenzzuwächse zwischen den Messzeitpunkten abbilden zu können (Krajewski & Simanowski, 2017, S. 97), wurden die Pseudo-Parallelformen genutzt. Kinder, die im Vortest die Testform A (B) bearbeiteten, erhielten im Nachtest die Testform B (A) sowie im Follow-Up die Testform A (B).

Zu Beginn der jeweiligen Testdurchführung erhielten die Schülerinnen und Schüler eine standardisierte Einführungsinstruktion durch die Versuchsleiterin. Zusätzlich befinden sich die Informationen auf der jeweiligen Titelseite der einzelnen Testteile schriftlich abgedruckt. Für die Lehrkräfte wurden im Vorfeld Hinweise zur Durchführung sowie zu erlaubten Hilfestellungen gegeben. Vor dem Hintergrund der kompetenzorientierten Motivation wurden die Lernenden aufgefordert, ihre Ideen zu den (unbekannten) Aufgaben so aufzuschreiben, wie sie es denken und möglichst alles bzw. so viele Aspekte, wie ihnen einfallen, zu notieren und damit zu zeigen, was sie alles können. Auffälligkeiten während der Testdurchführung sollten notiert und ggf. bei der Auswertung im entsprechenden Datensatz berücksichtigt werden. Es konnten jedoch zu keinem der drei Messzeitpunkte auffällige Abweichungen in den Klassen festgestellt werden. Die Auswertung der erhobenen Daten erfolgte anhand des im Rahmen dieser Studie entwickelten ausführlichen Auswertungsleitfadens (Kap. 7.3). Eine Ausnahme bildete Aufgabe 18 (Testform A und B), die aufgrund von Unklarheiten während der entsprechenden Unterrichtsstunden nicht gewertet wurde (s.u.).

Für die Bewertung der einzelnen Testaufgaben wird entsprechend der Aufgabenkonzeption zwischen den *geschlossenen* und den *offenen* Aufgaben unterschieden. Die folgenden Tabellen (vgl. Tab. 8 bis 10) zeigen eine Übersicht der Punktevergaben nach den verschiedenen

Kategorien und konkreten Aufgaben. Die festgelegten Kategorien sind als qualitativ, die durch Generierung von Häufigkeitsdaten ermittelten Daten als quantitativ zu betrachten, wobei sich der Übergang fließend gestaltet.

Tabelle 8: Übersicht der Punktevergabe für Teil I des "BruKos"

		Codierung	**Aufgabe**
geschlossene Aufgaben	(beziehungsreiche) Multiplikation	0 | 1	**1** **5**
	(beziehungsreiche) Division	0 | 1	**2** **6**
	Zahlzerlegung (additiv und multiplikativ; subtraktiv und divisorisch)	0 | 1	**3** **4**
	Beziehungen zwischen Multiplikation und Division (Umkehraufgaben)	0 | 1	**7** **8**
	Darstellungswechsel (Hälfte einkreisen)	0 | 1	**11a**
	Darstellungswechsel (Punkte ergänzen)	0 | 1	**12a**
	Darstellungswechsel (zu Punktefeld passende Aufgaben finden)	0 | 0,5 | 1	**9a, 9b** **10** **11b** **12b**
	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Textaufgaben – Zeichnung)	0 | 0,5 | 1	**13a** **14a**
	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Textaufgaben – Rechnung)	0 | 0,5 | 1	**13b** **14b**
	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Textaufgaben – Ergebnis)	0 | 1	**13c** **14c**
	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Textaufgaben – Antwort)	0 | 0,5 | 1	**13d** **14d**
	Gesamtpunktzahl	**48 Punkte**	

Tabelle 9: Übersicht der Punktevergabe für Teil II des "Brukos" (geschl. A.)

		Codierung	Aufgabe
geschlossene Aufgaben	Fachbegriffe zuordnen	0 | 1	**1**
	Anteile bestimmen	0 | 1	**4a, 4b, 4c 5a, 5b, 5c 6a, 6b, 6c 7a, 7b, 7c 9 10a, 10b, 10c 11a, 11b, 11c 14a, 14b, 14c 20a, 20b 21a, 21b, 21c, 21d, 21e 24a, 24b 25a1, 25b1, 25c1**
	Anteile erkennen (M.C.)	0 | 1	**12a, 12b, 12c, 12d, 12e 18a, 18b 19**
	Teile markieren	0 | 1	**13a, 13b, 13c, 13d 25a2, 25b2, 25c2, 25c3**
	Gesamtpunktzahl	**54 Punkte**	

Tabelle 10: Übersicht der Punktevergabe für Teil II des "BruKos" (o. A.)

		Codierung		Aufgabe
offene Aufgaben	„Was fällt dir auf? Beschreibe!“	Konstanz	0 | 1	**5d 7d 10d 11d 13d 15c 24c**
		Veränderung	0 | 1	
		Wirkung	0 | 1	
		gesamt	0 -3 P.	
	„Erkläre, … !“	nicht tragfähig	0	**2 3 16 25d 26**
		im Ansatz tragfähig	1	
		nahezu tragfähig	2	
		vollumfänglich tragfähig	3	
		gesamt	0 -3 P.	
	„Zeichne / Ergänze!“	nicht angemessen	0	**8 15a, 15b 17a, 17b, 17c 22 23**
		im Ansatz angemessen	1	
		nahezu angemessen	2	
		vollumfänglich angemessen	3	
		gesamt	0 -3 P.	
		Gesamtpunktzahl	**54 Punkte**	

Die in Kapitel 6.3 erläuterten Standortbestimmungen wurden ab dem zweiten Baustein am Ende jeder Woche eingesetzt. Die Schülerinnen und Schüler hatten vor Unterrichtsschluss in etwa 5

Minuten Zeit, die jeweilige Wochenaufgabe zu bearbeiten. Da die Aufgabenformate durch ihre große Ähnlichkeit zu den in der Intervention eingesetzten Aufgaben bekannt waren, konnte die Bearbeitung der Standortbestimmungen in den normalen Unterrichtsablauf integriert werden.

Weitere erhobene Daten

Neben den erhobenen quantitativen Testergebnissen und den schülerspezifischen allgemeinen Daten wurden die zusätzlich geförderten Lernenden der Interventionsklasse I videographiert. Die Videoaufnahmen dienen der Implementationskontrolle und ermöglichen im Nachhinein eine fundierte Analyse der Lernentwicklung der an der Kleingruppenförderung teilnehmenden Kinder. Zudem liefern sie einen qualitativen Einblick in die Förderung, um die im Vorfeld theoretisch festgelegten Wirkfaktoren sowie die quantitativen Hauptdaten vertiefend zu analysieren. Sie liefern Hinweise auf die Plausibilität und die Hintergründe der quantitativ messbaren Effekte. Eine differenzierte Videoanalyse im Rahmen einer substantiierten qualitativen Auswertung konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden und bleibt einem weiteren Forschungsprojekt vorbehalten.

Nach Abschluss der Intervention erhielten die beteiligten Lehrerinnen Reflexionsanregungen (vgl. Anhang J 1), die nach der individuellen Einschätzung zu folgenden Aspekten fragen: Zufriedenheit mit der Durchführung insgesamt, Anmerkungen zu inhaltlichen Aspekten, Einschätzung zu methodischen Aspekten, Einschätzung zu Materialien, Ablauf und Struktur der Unterrichts- und Förderstunden sowie die Einschätzung des Gesamtprojekts. Darüber hinaus wurden die folgenden Satzanfänge zum Ergänzen angeboten: „Das hat mir gefehlt…“ bzw. „Das würde ich ergänzen…“ sowie „Besonders gelungen finde ich...“. Die vollständigen Antworten sind in Anhang J 2 nachzulesen und fließen teilweise in die Diskussion des entwickelten Unterrichts- und Förderkonzepts (vgl. Kap. 9.4.4) mit ein.

8.1.2 Unterrichtseinheit und Förderschleifen

Die Durchführung und Umsetzung der Unterrichtseinheit mit den dazugehörigen Förderschleifen durch die Lehrerinnen hatte zur Folge, dass nicht alle geplanten Schritte exakt so realisiert werden konnten, wie es die theoretischen Planungen vorgesehen haben - sie mussten den realen Bedingungen und Herausforderungen des täglichen Schul- und Unterrichtsgeschehens angepasst werden. In Bezug auf die Aussagekraft der

Forschungsergebnisse lässt sich dies im Vorfeld insgesamt als Vorteil ansehen, da reale Bedingungen mit in die Erforschung der Wirksamkeit einbezogen wurden. Im Hinblick auf die inferenzstatistischen Auswertungen ist dieser Aspekt jedoch kritisch zu betrachten, da Störfaktoren und Einflüsse wirksam sein können, die nicht kontrollierbar sind. Abgesehen von kleineren Abweichungen haben sich dennoch alle Interventionsklassen an die vorgegebene Konzeption gehalten, sodass die Unterrichts- und Förderkonzeption insgesamt weitestgehend einheitlich umgesetzt werden konnte. Lediglich in der Interventionsklasse II konnten aufgrund von Krankheit der Lehrkräfte, Feiertagen und festen Schulterminen die Einheiten 5.1, 5.2 und 5.3 nicht durchgeführt werden.

Im Verlaufe der Durchführung wurde aufgrund des anspruchsvollen Inhalts in allen beteiligten Interventionsklassen recht schnell deutlich, dass die geplanten Bausteine für die Einzelstunden nicht zielführend und effektiv umgesetzt werden können. Nach gemeinsamer Absprache wurde zunächst die Option eingeräumt, die Einzelstunden auf eine Doppelstunde auszuweiten. Letztlich fanden in allen Interventionsklassen zwei Doppelstunden pro Woche statt, um die Inhalte gewissenhaft bearbeiten zu können. Diese praxisrelevante Erkenntnis muss entsprechend bei erneuten Überarbeitung der Verlaufspläne berücksichtigt werden. Je nach Lerngruppe können die vorgesehenen Einzelstunden optional für 45 oder 90 Minuten angepasst werden. Entgegen der im Vorfeld getroffenen Absprachen mit der Mathematiklehrerin der Vergleichsklasse liegen der Autorin bis zu dem gegenwärtigen Zeitpunkt noch keine Informationen über die Inhalte des regulären Klassenunterrichts vor. Für die Interpretation der Daten ist zusätzlich zu berücksichtigen, dass die Mathematiklehrerin der Vergleichsklasse sowohl bei der Durchführung des Prätests anwesend war als auch ein Aufgabenheft des „BruKos“ während des Interventionszeitraums besaß. Während der gesamten Interventionszeit waren ihr die Aufgaben des Testinstruments bekannt, sodass ein „teaching to the test“ nicht ausgeschlossen werden kann.

Die Umsetzung der „Starter“- und weiterführenden Aufgaben verlief überwiegend reibungslos und hat zu einer zufriedenstellenden Differenzierung geführt. Vereinzelt konnte eine leichte Überforderung der Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen sowie eine leichte Unterforderung der leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler beobachtet werden. Für Lernende, die im Bereich der Schriftsprache Schwierigkeiten zeigen, erwiesen sich die Arbeitsaufträge teilweise als zu komplex. Die Tipp-Karten fanden in allen drei

Interventionsgruppen nur am Rande Beachtung. Einerseits waren die Schülerinnen und Schüler mit derartigem Unterstützungsmaterial, das zu einem selbstständigen Lernverhalten führen soll, noch nicht vertraut, andererseits wurde die Fülle an Material teilweise als verwirrend wahrgenommen. Sowohl die handlungsorientierte Erarbeitung und aktive Entdeckung des grundlegenden Bruchzahlverständnisses sowie das dafür vorgesehene reichhaltige Material haben in allen drei Interventionsklassen großen Anklang gefunden und zur Motivation der Lernenden beigetragen. Die fiktiven Figuren Ben, Becky und Bert wurden von den Lernenden überwiegend positiv aufgefasst, insbesondere in Aufgaben, die Fehlvorstellungen enthielten und in denen die Figuren als Adressaten für die kindlichen Erklärungen fungierten.

Die Visualisierung und damit verbundene Transparenz der Unterrichtsreihe sowie der Stundenziele und die wiederkehrende Struktur der Stunden haben insgesamt positive Auswirkungen auf die Lernenden gezeigt. Aufgrund fehlender Vertrautheit mussten diese didaktischen Gestaltungsprinzipien zunächst eingeübt werden, wurden aber nach kurzer Zeit von allen Lerngruppen als handlungsgebender Rahmen angenommen, was sich in einer stärkeren Selbstständigkeit und Verantwortung auf Seiten der Lernenden ausgedrückt hat. Die leicht variierende Strukturierung der Unterrichtsstunden (vgl. Abb. 8), die aus Einstiegen, Arbeits- und Reflexionsphasen sowie Stundenabschlüssen bestand, hat zusätzlich einen klaren Rahmen geschaffen. Insbesondere die handlungsorientierten Einstiege waren durch hohe Aufmerksamkeit und Motivation auf Seiten der Lernenden gekennzeichnet.

Die Reflexionsphasen verliefen nach intensiven Arbeitsphasen mit einem hohen Kommunikationsanteil zum Teil schleppend. Die Lernenden waren zeitweise unmotiviert, noch einmal die Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem zu verbalisieren. Das reine Ergebnisvergleichen auf auditiver und/oder visueller Ebene war den Schülerinnen und Schülern bekannt und verlief größtenteils erfolgreich, Transferreflexionen jedoch fielen allen Interventionsgruppen schwer. Auch die weiterführenden Rätsel haben sich oftmals als mühsam erwiesen. Ein weiterer Aspekt, der zu Einschränkungen in den Reflexions- und Abschlussphasen geführt hat, war Zeitmangel.

Die kooperative Zusammenarbeit der Forscherteams erwies sich zu Beginn der Unterrichtsreihe aufgrund fehlender Übung als Herausforderung. Im weiteren Verlauf konnte allerdings nach subjektiver Einschätzung der beteiligten Lehrkräfte bei nahezu allen Forscherteams eine deutliche Verbesserung der Kooperation beobachtet werden, die insbesondere bei den

Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten zu wertvollen Erfolgserlebnissen geführt haben. Einzelne Paare, die eine sehr große Leistungsheterogenität bzw. Schwierigkeiten im sozialen-emotionalen Bereich aufwiesen, zeigten während der gesamten Durchführung Schwierigkeiten in den kooperativen Arbeitsphasen. Dennoch lässt sich rückblickend in allen drei Interventionsgruppen eine deutliche Verbesserung hinsichtlich des sozialen Lernens feststellen.

Die bewusste Fokussierung der Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem sowie deren Verbalisierung erwies sich für einen Großteil der Schülerschaft als Problem. Viele Lernende der Stichprobe zeigen in der alltäglichen Kommunikation einen deutlich verarmten Wortschatz und haben Schwierigkeiten, Dinge präzise auszudrücken. Die vorgesehene fachspezifische Strukturfokussierung auf sprachlicher Ebene erwies sich als sehr komplex.

In Bezug auf die Durchführung der spezifischen Unterrichtsstunden ließen sich Umsetzungsschwierigkeiten innerhalb Baustein 3 feststellen. Das ohnehin anspruchsvolle Verständnis für die Ergebnisgleichheit von Grundvorstellung 1 und 2 wurde für die Lernenden zusätzlich dadurch erschwert, dass die im Unterricht verwendeten Darstellungen nicht das Ganze als Bezugsgröße bzw. Grundgesamtheit mitberücksichtigt haben. Am Beispiel von $\frac{3}{4}$ und dreimal $\frac{1}{4}$ konnte nicht deutlich herausgearbeitet werden, dass die Anzahl der markierten Teile in Bezug auf ein Ganzes gleich ist. Den Lernenden aller Interventionsklassen ist nicht klar geworden, dass es sich nicht um $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{12}$ handelt. Aufgrund der inhaltlichen Verwirrungen in den entsprechenden Unterrichtsstunden wurde Aufgabe 18 des „BruKos“ nicht mit in die Auswertung einbezogen.

Die Umsetzung der Förderschleifen verlief auf sozialer Ebene mit einer großen Selbstverständlichkeit, sowohl für die zusätzlich geförderten Kinder als auch deren Mitschülerinnen und Mitschüler in der Klasse. Alle Klassen sind es gewohnt, dass immer wieder Kleingruppenarbeiten mit der Förderschullehrerin außerhalb des Klassenraums mit wechselnder Besetzung stattfinden, sodass dieses Vorgehen der gesamten Lerngruppe vertraut war. Die Lernenden, die an den Förderschleifen teilnahmen, haben bis auf die ausgewählten „Expertenmomente“ keine Sonderrolle eingenommen. Im Klassenunterricht haben sie entsprechend der Absicht des gemeinsamen Lernens am gemeinsamen Gegenstand kein Extramaterial erhalten, sondern genauso wie ihre Mitschülerinnen und Mitschüler das differenzierte Aufgabenmaterial sowie die Möglichkeit erhalten, bei Bedarf auf Tippkarten und unterstützendes Material zurückzugreifen. Die Mathematiklehrkräfte der beiden Interventionsklassen, in denen die Förderschleifen durchgeführt wurden, haben über positive individuelle Entwicklungen der zusätzlich geförderten Kinder sowie von einer deutlich stärkeren Teilnahme der Lernenden am Klassenunterricht berichtet.

8.2 Quantitative Daten

Die Darstellung der Ergebnisse der quantitativen Analysen gliedert sich in mehrere Schritte, die eine zunehmende Detailliertheit hinsichtlich des Analysefokus zum grundlegenden Bruchzahlverständnis und den dafür relevanten Aspekten des arithmetischen Basisstoffs aufweisen. Zunächst erfolgt ein Überblick über die Ergebnisse des „BruKo"-Tests der Gesamtstichprobe, daran anschließend die Darstellung der Korrelationen zwischen den beiden Testteilen des „BruKos" sowie zwischen dem „BruKo" und dem BASIS-MATH-G 4^{+}-5. Auf dieser Grundlage finden schließlich die Vergleiche, zunächst auf Klassenebene, daran anschließend auf Förderebene, statt, die einen detaillierten Überblick über die jeweils erreichten Lernprogressionen der Schülerinnen und Schüler geben.

8.2.1 Ergebnisse des „BruKos" im Rahmen der Interventionsstudie

Sowohl vor dem Hintergrund des in Kapitel 6 dargelegten Forschungsinteresses auf Entwicklungsebene (Entwicklung eines Testinstruments zur Erfassung individueller verstehensorientierter Leistungen im Bereich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses) als auch zu einer ersten Orientierung über den Lernerfolg insgesamt, erfolgt zunächst eine Darstellung deskriptiver Analysen zu den Bearbeitungen des „BruKos" durch die Gesamtstichprobe. Dabei interessieren in einem ersten Schritt die Aufgaben zu dem arithmetischen Basisstoff (AV_1) sowie die geschlossenen (AV_2) und offenen (AV_3) Aufgaben, die sich auf ein grundlegendes Bruchzahlverständnis beziehen. Letztere umfassen die konkret geförderten Inhalte der Intervention. Die Inhalte der Aufgaben zu den ausgewählten Aspekten des arithmetischen Basisstoffs wurden nur in den Förderschleifen, nicht jedoch im Klassenunterricht zum konkreten Gegenstand der inhaltlichen Auseinandersetzung.

Daran anschließend werden beide Testteile des „BruKos“ auf mögliche Zusammenhänge untersucht. In Bezug auf die in Kapitel 4 erläuterten empirischen Erkenntnisse zur Relevanz des arithmetischen Basisstoffs für eine erfolgreiche Lernentwicklung in der Sekundarstufe I, erfolgt abschließend eine Darstellung der Zusammenhänge des BASIS-MATH-G 4^{+}-5 und des „BruKos“.

Dieses Kapitel zielt auf die Beantwortung der folgenden Teilfragen:

1. Inwieweit sind die arithmetischen Voraussetzungen im Basisstoff zum Zeitpunkt der Einführung des Bruchzahlverständnisses (Prätest) ausgebildet?
2. Welche Zusammenhänge lassen sich zwischen den Lösungen im arithmetischen Basisstoff und im grundlegenden Bruchzahlverständnis herstellen?

Lösungshäufigkeiten

Die Leistungen im Basis-Math-G 4^{+}-5 und im „BruKo“ der Gesamtstichprobe zu den drei Messzeitpunkten werden im Folgenden (Tab. 11) dargestellt:

Tabelle 11: Leistungen der Gesamtstichprobe im Basis-Math-G 4^{+}-5 und im "BruKo" zu drei Messzeitpunkten

	Prätest			**Posttest**			**Follow-up**		
	n	*m*	*SD*	*n*	*m*	*SD*	*n*	*m*	*SD*
Basis-Math-G 4^{+}-5 *(max. 63 Punkte)*	95	33.99	14.26	-	-	-	-	-	-
BruKo Teil I *(max. 48 Punkte)*	94	27.39	12.40	100	32.36	11.5	94	31.46	12.57
BruKo Teil II geschl. A. *(max. 54 Punkte)*	94	24.7	14.33	101	39.46	5.91	88	33.03	11.34
BruKo Teil II o.A. *(max. 54 Punkte)*	92	12.45	7.39	101	20.03	9.44	94	13.96	8.05

Gemessen an den erreichbaren Punktwerten erzielt die Gesamtstichprobe insgesamt eher niedrige Leistungen im „BruKo“. Im Vortest erreicht sie einen Mittelwert von 27.39 (*SD* = 12.402) von insgesamt 48 möglichen Punkten bei den Aufgaben zum arithmetischen Basisstoff. Für die geschlossenen Bruchaufgaben wurden im Mittel 24.7 (*SD* = 14.331) von 54 möglichen

Punkten sowie für die offenen Aufgaben zum Bruchzahlverständnis ein mittlerer Wert von 12.446 (*SD* = 7.393) von möglichen 54 Punkten erzielt. Die Standardabweichungen weisen auf eine große Streuung der Testwerte hin. Im Nachtest erzielt die Gesamtstichprobe in Teil I des „BruKos" einen Mittelwert von 32.36 (*SD* = 11.5) sowie Mittelwerte von 39.46 (*SD* = 5.91) bei den geschlossenen und 30.03 (*SD* = 9.44) bei den offenen Aufgaben zum Bruchzahlverständnis. Im Follow-Up erreichen die Lernenden der Gesamtstichprobe einen Mittelwert von 31.46 (*SD* = 12.57) bei den Aufgaben zum arithmetischen Basisstoff. Für die geschlossenen Aufgaben aus Teil II erzielen sie einen Mittelwert von 33.03 (*SD* = 11.34), für die offenen Aufgaben einen Mittelwert von 13.96 (*SD* = 8.05).

Den festgelegten kritischen Wert von 81 Punkten (vgl. Kap. 7.2) erreichten im nach der Intervention durchgeführten Posttest 6 % der Gesamtstichprobe. Betrachtet man die einzelnen Interventionsformen, zeigen sich folgende Ergebnisse: In der Interventionsklasse I (*n* = 21) konnten 24 % und in der Interventionsklasse II (*n* = 23) 9 % der Lernenden die mindestens zu erreichende Gesamtpunktzahl erzielen, ab der von einem fundierten Bruchzahlverständnis gesprochen werden kann, in der Interventionsklasse III sowie in der Kontrollgruppe waren es 0 %.

Auch die Ergebnisse des im Screening eingesetzten Testinstruments BASIS-MATH-G 4^{+}-5, das eine umfassendere Überprüfung des arithmetischen Basisstoffs vornimmt (vgl. Kap. 6.3), zeigen eher niedrige Leistungen. Mit einem Mittelwert von 33.99 (*SD* = 14.258) liegt die vorliegende Gesamtstichprobe leicht unter dem Mittelwert der Lernenden der Haupt- und Gesamtschulen der Normierungsstichprobe (*M* = 37.0, *SD* = 10.9), jedoch über dem Mittelwert der Lernenden an Förderschulen mit dem Förderschwerpunkt Lernen (*M* = 26.2, *SD* = 12.9).

Korrelationen

Die Überprüfung möglicher Zusammenhänge zwischen den beiden Teilen des „BruKos" sowie zwischen dem BASIS-MATH-G 4^{+}-5 und dem „BruKo" erfolgt mittels der *Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson.* Aufgrund der teilweise verletzten Normalverteilung wurde zusätzlich die *Rangkorrelation nach Spearman* berechnet. Da sich hier jedoch nur minimalste Abweichungen zeigen und der Korrelationskoeffizient nach Pearson robust gegenüber

Verletzungen der Voraussetzungen ist, werden im Folgenden die Berechnungen nach Pearson (vgl. Tab. 12) zugrunde gelegt.

Tabelle 12: Korrelationen zwischen den Teilen des „BruKos“ sowie dem „BruKo“ und dem Basis-Math G4⁺-5

		Basis-Math	Prätest			Posttest			Follow-Up	
		G^4+-5	**AV_1**	**AV_2**	**AV_3**	**AV_1**	**AV_2**	**AV_3**	**AV_1**	**AV_2**
Prätest	**AV_1**	$.749^{**}$	-							
	AV_2	$.237^{*}$	$.446^{**}$	-						
	AV_3	$.294^{**}$	$.464^{**}$	$.794^{**}$	-					
Posttest	**AV_1**	$.762^{**}$	$.760^{**}$	$.414^{**}$	$.503^{**}$	-				
	AV_2	$.382^{**}$	$.382^{**}$	$.381^{**}$	$.374^{**}$	$.423^{**}$	-			
	AV_3	$.244^{*}$	$.402^{**}$	$.503^{**}$	$.572^{**}$	$.401^{**}$	$.559^{**}$	-		
Follow-Up	**AV_1**	$.656^{**}$	$.677^{**}$	$.480^{**}$	$.446^{**}$	$.808^{**}$	$.513^{**}$	$.488^{**}$	-	
	AV_2	$.491^{**}$	$.345^{**}$	$.361^{**}$	$.346^{**}$	$.415^{**}$	$.524^{**}$	$.351^{**}$	$.556^{**}$	-
	AV_3	$.319^{**}$	$.360^{**}$	$.452^{**}$	$.544^{**}$	$.472^{**}$	$.538^{**}$	$.623^{**}$	$.433^{**}$	$.717^{**}$

Anmerkungen: Pearson. ** Signifikanzniveau $p<.01$, * Signifikanzniveau $p<.05$

Die Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson verweist hinsichtlich der Einzelfaktoren (AV_1, AV_2, AV_3) des „BruKos“ zu allen drei Messzeitpunkten auf positiv signifikante Korrelationen (vgl. Tab. 12). Moderate und starke Effekte mit hoher Signifikanz ($p < .001$) zeigen sich insbesondere zwischen den Faktoren des gleichen inhaltlichen Schwerpunkts. Schülerinnen und Schüler, die in einem Inhaltsbereich zu einem Messzeitpunkt hohe Ergebnisse erreicht haben, konnten diese auch zu den anderen beiden Messzeitpunkten erzielen.

Vor dem Hintergrund der in Kapitel 4 erläuterten Relevanz des arithmetischen Basisstoffs für den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses gilt es zu überprüfen, ob ausgeprägte Kenntnisse im arithmetischen Basisstoff mit ausgeprägten Kenntnissen im Bruchzahlverständnis zusammenhängen. Für die Aufgaben der beiden Testteile des „BruKos“ besteht die Annahme, dass ein positiver linearer Zusammenhang besteht, d.h. dass ein hohes Testergebnis in Teil I (AV_1) mit einem hohen Testergebnis in dem jeweiligen Teil II (AV_2 und AV_3) einhergeht. Die Ergebnisse in Tabelle 12 zeigen sowohl für den Prätest als auch den Posttest positive signifikante Effekte mit moderater Größe. Die Ergebnisse des Follow-Ups verweisen zwischen den Faktoren „BruKo“ Teil I und „BruKo“ Teil II bezüglich der geschlossenen Aufgaben auf einen starken Effekt. Insgesamt zeigen die Daten, dass Lernende mit hohen Ergebnissen im Bereich des arithmetischen Basisstoffs (AV_1) auch hohe Ergebnisse in den beiden Aufgabenformaten zum Bruchzahlverständnis (AV_2 und AV_3) aufweisen.

Diese Annahme wird durch ein weiteres Ergebnis bestätigt: Tabelle 12 zeigt, dass die Ergebnisse des BASIS-MATH-G 4^{+}-5 hoch mit den entsprechenden Inhaltsbereichen des „BruKo“ (AV_1) korrelieren. Schülerinnen und Schüler, die bereits im Screening hohe Ergebnisse im Bereich des umfassenden arithmetischen Basisstoffs erzielten, konnten diese Ergebnisse ebenso für den „BruKo“ zu allen drei Messzeitpunkten halten. Die Vermutung, dass ein positives Abschneiden im BASIS-MATH-G 4^{+}-5 auch mit einem positiven Abschneiden in den geschlossenen und offenen Bruchaufgaben des „BruKos“ (AV_2 und AV_3) einhergeht, kann jedoch nur durch schwach bis moderat ausgeprägte Zusammenhänge bestätigt werden.

Für das entwickelte Testinstrument „BruKo“ besteht weiterhin die Annahme, dass die Aufgabenformate in Teil II korrelieren, d.h. dass gute Ergebnisse in den geschlossenen Bruchaufgaben (AV_2) mit guten Ergebnissen in den offenen Bruchaufgaben (AV_3) einhergehen (vgl. Kap. 6.5). Tabelle 12 verweist für die Variablen offene und geschlossene Bruchaufgaben zum jeweiligen Messzeitpunkt auf positive signifikante Korrelationen, deren

Korrelationskoeffizienten nach Cohen (1992, S. 157) jeweils als starke Effekte gelten. Zwischen den einzelnen Messzeitpunkten besteht ebenfalls ein positiver signifikanter Zusammenhang mit moderater bis hoher Effektstärke.

8.2.2 Inferenzstatistische Analysen

Um die Wirksamkeit der Interventionsstudie insgesamt und den Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses in enger Verknüpfung zu relevanten Aspekten des arithmetischen Basisstoffs für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten zu Beginn der fünften Klasse im Besonderen zu untersuchen, wurden verschiedene inferenzstatistische Analysen zur Beantwortung der Fragestellungen durchgeführt. Für die Berechnungen werden die verschiedenen Interventionsformen wie folgt berücksichtigt: Die beiden Interventionsklassen mit Förderschleife sowie die Interventionsklasse ohne Förderschleife werden zu der Interventionsgruppe (IG^{Klasse}) zusammengefasst. IG^{Klasse} schließt jedoch nur die Kinder ein, die ausschließlich im Klassenverband gelernt haben. Die acht Schülerinnen und Schüler, die zusätzlich an den Förderschleifen teilgenommen haben, werden als $IG^{\text{Förderung}}$ einzeln berücksichtigt. Dadurch sollen zum einen die Ergebnisse auf Klassenebene nicht beeinflusst werden. Zum anderen ermöglicht die getrennte Analyse entsprechend des in dieser Arbeit verfolgten Forschungsschwerpunktes detaillierte Aussagen über die Lernentwicklung der Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen. Die ungeförderte Klasse, die an dem regulären Mathematikunterricht teilnahm, wird als Vergleichsgruppe (*VG*) aufgeführt. Darin enthalten sind auch die acht Lernenden, die als sogenannte *Parallelkinder* zum Vergleich der $IG^{Förderung}$ herangezogen werden. Im Folgenden werden vor dem Hintergrund des übergeordneten Forschungsinteresses zunächst die beiden unabhängigen Variablen IG^{Klasse} und *VG* auf Klassenebene miteinander verglichen, daran anschließend erfolgt entsprechend des spezifischen Forschungsinteresses ein Vergleich der in den Förderschleifen zusätzlich geförderten Kinder ($IG^{Förderung}$) mit ihren Parallelkindern ($VG^{Parallel}$).

8.2.2.1 Vergleich auf Klassenebene

Um die Wirksamkeit der Intervention auf Klassenebene beurteilen zu können, erfolgt zunächst ein Vergleich der Interventionsklassen (IG^{Klasse}) mit der Vergleichsklasse (*VG*). Neben der ersten Forschungsfrage

---

Eignet sich das Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung, um allen Schülerinnen und Schülern einer heterogenen Lerngruppe individuelle Lernzuwächse zu ermöglichen?

---

sollen auch die beiden nachstehenden Folgefragen beantwortet werden:

1. Welche Kompetenzen zeigen die Schülerinnen und Schüler mit Fokus auf ein grundlegendes Bruchzahlverständnis?
2. Welche Kompetenzen zeigen die Schülerinnen und Schüler mit Fokus auf ausgewählte Bereiche des arithmetischen Basisstoffs?

Nachfolgend werden die abhängigen Variablen BK (AV_1), geschlossene Bruchaufgaben (AV_2) und offene Bruchaufgaben (AV_3) betrachtet. An die Darstellung der Ausgangslage der beiden Gruppen zum ersten Messzeitpunkt schließt sich die Veränderung der Lernleistungen über alle drei Messzeitpunkte an. Im Fokus stehen sowohl der unmittelbare Interventionseffekt, der sich auf den Lernzuwachs vom ersten zum zweiten Messzeitpunkt bezieht, sowie der Follow-Up-Effekt, der den langfristigen Lernzuwachs zwischen dem ersten und dem dritten Messzeitpunkt beschreibt. Daran anschließend werden die offenen Bruchaufgaben getrennt nach ihren Kompetenzbereichen ($AV_{3beschreibe}$, $AV_{3erkläre}$, $AV_{3ergänze}$) betrachtet, um entsprechend des Schwerpunkts der Verständnisorientierung gezieltere Aussagen hinsichtlich der Lernprogressionen der jeweiligen Gruppen treffen zu können. Es wird überprüft, ob die Lernenden, die an der Intervention teilgenommen haben, mindestens vergleichbare bzw. größere Lernfortschritte gemacht haben als die Lernenden der Vergleichsklasse.

Ausgangslage auf Klassenebene (Prätest)

Ergänzend zu der Ausgangslage der Gesamtstichprobe (Kap. 8.2.1) werden im Folgenden die Ergebnisse der Interventionsklassen (IG^{Klasse}) und der Vergleichsklasse (*VG*) zum ersten Messzeitpunkt beschrieben, um auf dieser Grundlage weitere Ergebnisse einordnen zu können.

Da sich die drei Interventionsklassen nicht signifikant voneinander unterscheiden, wird auf eine differenzierte Darstellung der einzelnen Interventionsklassen verzichtet. Im BASIS-MATH-G 4^{+}-5 erreichten die drei Interventionsklassen (n = 62) einen Mittelwert von 34.68 (SD = 14.205), die Vergleichsklasse (n = 25) einen Mittelwert von 35.92 (SD = 14.323). Der t-Test für unabhängige Stichproben ergibt keine statistisch signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Gruppen in Bezug auf die Ergebnisse des Screenings ($t(85) = -0.368$, $p = .714$, $d = .087$). Bei den Aufgaben zum arithmetischen Basisstoff („BruKo“ Teil I) erzielte die Interventionsgruppe (n = 57) zum ersten Messzeitpunkt im Mittel 30.05 Punkte (SD = 11.810) und liegt damit leicht über der Vergleichsklasse (n = 24, M = 25.438, SD = 13.693). Es zeigt sich anhand des t-Tests für unabhängige Stichproben kein statistisch signifikanter Unterschied ($t(79) = 1.531$, $p = .130$, $d = .361$). Innerhalb der geschlossenen Bruchaufgaben („BruKo“ Teil II) weist die Interventionsgruppe mit einem Mittelwert von 30.325 (SD = 11.802) im Vergleich zu der Vergleichsklasse (M = 13.125, SD = 12.526) deutlich höhere Werte auf. Dieser Unterschied kann statistisch signifikant abgesichert werden und zeigt eine große Effektstärke zugunsten der Interventionsgruppe ($t(79) = 5.882$, $p < .001$, $d = 1.413$). Eine ungleiche Ausgangsbedingung zeigt sich auch bei den offenen Bruchaufgaben („BruKo“ Teil II): Die Interventionsgruppe (M = 15.018, SD = 6.412) erreichte im Mittel eine höhere Punktzahl als die Vergleichsklasse (M = 7.083, SD = 6.745). Die varianzanalytische Auswertung mittels des t-Tests für unabhängige Stichproben verweist auf einen statistisch signifikanten Unterschied zwischen den Gruppen mit großer Effektstärke ($t(79) = 5.008$, $p < .001$, $d = 1.206$). Beide Gruppen weisen hinsichtlich des arithmetischen Basisstoffs nahezu gleiches mathematisches Potential auf, unterscheiden sich jedoch deutlich entsprechend ihrer Vorkenntnisse in Bezug auf ein grundlegendes Bruchzahlverständnis. Die Ergebnisse spiegeln die realen Gegebenheiten der bestehenden Klassen wider und deuten eine Schwierigkeit des explorativen Designs an (vgl. Kap. 9.1.2).

Lernzuwächse auf Klassenebene

Die Überprüfung der mittel- und langfristigen Lernfortschritte vom Prätest zum Posttest und vom Prätest zum Follow-Up erfolgt mittels der einfaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung. Es werden jeweils die 3 Haupteffekte berichtet, jedoch ist der Faktor Gruppe x Messzeitpunkt, d.h. der Interaktionseffekt, die „wichtige, relevante statistische Größe zur Beurteilung der Wirksamkeit einer Förderung, da hier nur die Signifikanz dieser

Wechselwirkung anzeigt, ob sich die Fördergruppe durch die Förderung besser entwickelte als die andere[n] Gruppe[n]“ (Rasch et. al. 2006 in Krajewski & Simanowski, 2017, S. 101). Die Analysen zwischen den verschiedenen Messzeitpunkten sollen Hinweise darüber liefern, in welchem Maß die Lernenden von der Intervention profitiert haben, d.h. inwiefern eine Veränderung stattgefunden hat (Wilbert, 2014, S. 282).

Die varianzanalytischen Auswertungen weisen für die beiden nachfolgend dargestellten Variablen (AV_2 und AV_3) signifikante bzw. auffällige Ergebnisse auf. Hinsichtlich der übrigen Variablen ist anzunehmen, dass sich die beiden Gruppen zwar unterscheiden und insgesamt zwischen den jeweiligen Messzeitpunkten über die Zeit weiterentwickelt haben, sich in ihrer Lernprogression (Interaktionseffekt Gruppe x Messzeitpunkt) aber nicht bedeutsam voneinander unterscheiden. Nicht signifikante Unterschiede in Leitungszuwächsen können auf Zufällen beruhen und sind deshalb nicht als Fördererfolg zu interpretieren (Krajewski & Simanowski, 2017, S. 101).

Die Variable geschlossene Bruchaufgaben (AV_2) weist in Bezug auf den Interventionseffekt, d.h. den Zeitraum zwischen dem ersten und dem zweiten Messzeitpunkt, einen signifikanten Haupteffekt für den Faktor Zeit ($F(1, 81) = 182.935$, $p < .001$) mit mittlerer bis hoher Effektstärke (partielles $\eta^2 = .693$) auf. Alle Schülerinnen und Schüler haben während des Interventionszeitraums bedeutsame Lernzuwächse erreicht. Hinsichtlich der Faktoren Gruppe ($F(1, 81) = 20.932$, $p < 001$, $\eta^2 = .926$) sowie Gruppe x Messzeitpunkt ($F(1, 81) = 40.229$, $p < .001$, $\eta^2 = .332$) unterscheiden sich die Interventionsklassen und die Vergleichsklasse signifikant voneinander. Die Größe des Interaktionseffekts ist mit einer hohen um Vortestunterschiede korrigierten Effektstärke als groß einzuschätzen ($d_{korr} = -1.359$). Die Richtung des Interaktionseffekts verweist auf eine größere Lernentwicklung innerhalb der Vergleichsklasse. In Bezug auf einen langfristigen Effekt (Follow-Up-Effekt) zeigen sich für die Variable geschlossene Bruchaufgaben (AV_2) ähnliche Ergebnisse zugunsten der Vergleichsklasse: es gibt sowohl einen signifikanten Haupteffekt für den Faktor Zeit ($F(1,70) = 55.277$, $p < .001$, $\eta^2 = .441$), der bedeutsame Lernzuwächse über die beiden Messzeitpunkte anzeigt, als auch einen statistisch bedeutsamen Effekt hinsichtlich des Faktors Gruppe ($F(1, 70) = 13.128$, $p < .001$, $\eta^2 = .158$). Der Interaktionseffekt wird für den Faktor Gruppe x Messzeitpunkt mit einer hohen korrigierten Effektstärke ebenfalls signifikant ($F(1, 70) = 24.073$, $p < .001$, $\eta^2 = .256$, $d_{korr} = -1.243$).

Für die Variable offene Bruchaufgaben (AV_3) gibt die einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung zwar einen signifikanten Follow-Up-Effekt für den Faktor Gruppe an ($F(1, 73) = 21.427$, $p < .001$, $\eta^2 = .227$), nicht jedoch für die Faktoren Zeit ($F(1, 73) = 3.252$, $p > .05$, $\eta^2 = .043$) und Gruppe x Messzeitpunkt ($F(1, 73) = 1.409$, $p = 0.239$, $\eta^2 = .019$). Die Größe des nicht signifikant abzusichernden Interaktionseffekt ist mit $d_{korr} = -0.338$ als klein einzuordnen. Diese Ergebnisse deuten auf den hohen Anspruch bei der Bearbeitung der offenen Aufgaben sowie bei dem Aufbau eines verständnisorientierten Bruchzahlverständnisses hin (vgl. Kap. 9.1.1).

Die offenen Bruchaufgaben (AV_3) nehmen im Kontext der vorliegenden Untersuchung eine bedeutsame Rolle ein, da sie im Rahmen des Paper-Pencil-Tests einen tieferen Einblick in die kindlichen Verstehensprozesse ermöglichen. Vor diesem Hintergrund ist trotz der oben dargelegten Ergebnisse für die Gesamtvariable AV_3 eine differenziertere Betrachtung ihrer drei Inhaltsbereiche durchzuführen, um eventuelle Unterschiede hinsichtlich spezifischer Kompetenzen auf einer detaillierten Ebene zu untersuchen. Prägnante Ergebnisse werden nachfolgend für die drei Kompetenzbereiche $AV_{3beschreibe}$, $AV_{3erkläre}$ sowie $AV_{3ergänze}$ berichtet. In Bezug auf die hier nicht genannten Vergleiche zwischen einzelnen Variablen und Messzeitpunkten ist anzunehmen, dass zwar jeweils eine Lernentwicklung über die Zeit stattgefunden hat und sich die Interventionsklassen und die Vergleichsklasse in Bezug auf den Faktor Gruppe voneinander unterscheiden, sich aber zwischen den Messzeitpunkten (Interaktionseffekt Gruppe x Messzeitpunkt) in keinem bedeutsamen Maß unterschiedlich voneinander entwickelt haben.

Hinsichtlich der Variable $AV_{3ergänze}$ weist die einfaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung zwischen dem ersten und dem zweiten Messzeitpunkt signifikante Haupteffekte für die Faktoren Zeit ($F(1, 79) = 38.268$, $p < .001$, partielles $\eta^2 = .326$) und Gruppe ($F(1, 79) = 11.800$, $p = .001$, partielles $\eta^2 = .130$) auf. Ebenso zeigt sich ein signifikanter Interaktionseffekt ($F(1, 79) = 7.599$, $p = .007$, $\eta^2 = .088$) mit einer um Vortestunterschiede korrigierten mittleren Effektstärke von $d_{korr} = -.648$. Ein ähnliches Abschneiden zugunsten der Vergleichsklasse lässt sich darüber hinaus zwischen dem ersten und dem dritten Messzeitpunkt feststellen. Für alle drei Hauptfaktoren, Zeit ($F(1, 74) = 11.339$, $p < .001$, partielles $\eta^2 = .133$), Gruppe ($F(1, 74) = 13.140$, $p = .001$, partielles $\eta^2 = .151$) und Interaktionseffekt ($F(1, 74)= 4.592$, $p =.035$, partielles $\eta^2 = .058$) werden die Unterschiede zwischen der Interventionsgruppe und der Vergleichsgruppe zugunsten letzterer signifikant. Der Interaktionseffekt zeigt hier mit d_{korr} = -.526 eine mittlere Effektstärke an.

Für die Variablen $AV_{3beschreibe}$ und $AV_{3erkläre}$ lassen sich hinsichtlich des Follow-Up-Effekts in Bezug auf den Faktor Gruppe signifikante Unterschiede zwischen den beiden Gruppen feststellen ($AV_{3beschreibe}$: $F(1, 75) = 17.071$, $p < .001$, partielles $\eta^2 = .815$; $AV_{3erkläre}$: $F(1, 76) = 8.264$, $p = .005$, partielles $\eta^2 = .098$). Bezogen auf die Faktoren Zeit und Gruppe x Messzeitpunkt können keine statistisch bedeutsamen Unterschiede abgesichert werden. Es hat weder für eine der beiden Variablen eine signifikante Lernentwicklung über die Zeit stattgefunden ($AV_{3beschreibe}$: $F(1, 75) = .012$, $p = .913$, partielles $\eta^2 = .000$; $AV_{3erkläre}$: $F(1, 76) = .240$, $p = .625$, partielles $\eta^2 = .003$), noch konnten signifikante Interaktionseffekte nachgewiesen werden ($AV_{3beschreibe}$: $F(1, 75) = .368$, $p = .546$, partielles $\eta^2 = .005$, $d_{korr} = -.191$; $AV_{3erkläre}$: $F(1, 76) = .748$, $p = .390$, partielles $\eta^2 = .010$, $d_{korr} = -.027$). Somit lässt sich vermuten, dass die Schülerinnen und Schüler auf Klassenunterrichtsebene keinen nachhaltig bedeutsamen Lernzuwachs bei den Beschreibe- und Erkläre-Aufgaben erzielen konnten.

8.2.2.2 Vergleich auf Förderebene

Vor dem Hintergrund des spezifischen Forschungsinteresses der vorliegenden Arbeit werden im Anschluss an die Analysen auf Klassenebene die gleichen Analysen zwischen den geförderten Kindern ($IG^{Förderung}$) und ihren Parallelkindern ($VG^{Parallel}$) ausgeführt. Aufgrund der kleinen Stichprobe (je $n = 8$) erfolgen die Berechnungen auf Förderebene mittels des nicht-parametrischen *Mann-Whitney-U-Tests* für unabhängige Stichproben.

Dieses Kapitel zielt auf die Beantwortung der zweiten Forschungsfrage

---

Führt die enge Verzahnung von ausgewählten Aspekten des mathematischen Basisstoffs und relevanten Aspekten des Bruchzahlverständnisses bei Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zu einer Verbesserung der individuellen Leistungen in beiden Bereichen?

---

sowie der nachstehenden Folgefragen

1. Welche Kompetenzen zeigen die Schülerinnen und Schüler mit Fokus auf ein grundlegendes Bruchzahlverständnis?
2. Welche Kompetenzen zeigen die Schülerinnen und Schüler mit Fokus auf ausgewählte Bereiche des arithmetischen Basisstoffs?
3. Zeigt die Interventionsform einen Einfluss auf den individuellen Lernfortschritt bei Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht?

Ausgangslage auf Förderebene

Im BASIS-MATH-G4^{+}-5 zeigen die geförderten Kinder (*Median* = 21.50, *MW* = 22.63, *SD* = 10.141) zwar leicht höhere Werte in den zentralen Tendenzen als ihre Parallelkinder (*Median* = 18.50, *MW* = 19.25, *SD* = 7.797), der Unterschied wird allerdings nicht statistisch signifikant (exakter Mann-Whtiney-U-Test: *U* = 28.500, *p* = .721, *r* = -.095 bzw. d = -.191). Beide Gruppen weisen eine ähnliche Ausgangslage in Bezug auf die arithmetischen Grundkompetenzen des screenings auf (vgl. Kap. 6.2).

Bezüglich der drei abhängigen Variablen des „BruKos" (AV_1, AV_2, AV_3) erreichen die beiden Gruppen unterschiedliche Werte in den zentralen Tendenzen (vgl. Tab. 13), die insbesondere bei den geschlossenen und offenen Bruchaufgaben auf höhere Werte zugunsten der geförderten Kinder hindeuten. Es zeigt sich für die Aufgaben zum grundlegenden Bruchzahlverständnis auf Förderebene in der Tendenz ein ähnliches Muster wie auf Klassenebene: die geförderten Kinder ($IG^{Förderung}$) weisen leicht höhere Ausgangsbedingungen auf als ihre Parallelkinder ($VG^{Parallel}$). Diese Unterschiede sind jedoch nicht inferenzstatistisch abgesichert, sodass eine annähernd gleiche Ausgangslage vorausgesetzt werden kann.

Lernzuwächse auf Förderebene

Im Folgenden richtet sich der Fokus auf die Lernprogression beider Gruppen über die drei Messzeitpunkte. Zunächst erfolgt ein Überblick über die Werte der zentralen Tendenzen auf deskriptiver Ebene. Daran anschließend werden sowohl der Interventionseffekt als auch der Follow-Up-Effekt entsprechend der drei abhängigen Variablen im Allgemeinen (AV_1, AV_2, AV_3) sowie im Speziellen ($AV_{3beschreibe}$, $AV_{3erkläre}$, $AV_{3ergänze}$) inferenzstatistisch betrachtet. Als

Grundlage für die Berechnungen des Mann-Whitney-U-Tests werden die Differenzwerte zwischen den jeweiligen Messzeitpunkten herangezogen.

Die folgende Tabelle (Tab. 13) stellt die Leistungen der beiden Teilstichproben ($IG^{Förderung}$ und $VG^{Parallel}$) im Basis-Math-G 4⁺-5 sowie im „BruKo“ zu den drei Messzeitpunkten dar:

Tabelle 13: Leistungen der zusätzlich geförderten Lernenden und ihrer Parallelkinder im Basis-Math-G 4⁺-5 und im "BruKo" zu drei Messzeitpunkten

		Prätest		**Posttest**		**Follow-Up**	
		Mdn	*m (SD)*	*Mdn*	*m (SD)*	*Mdn*	*m (SD)*
Basis-Math-G 4⁺-5 *(max. 63 Punkte)*	$IG^{Förderung}$	21.50	22.63 (10.14)				
	$VG^{Parallel}$	18.50	19.25 (7.8)				
BruKo Teil I *(max. 48 Punkte)*	$IG^{Förderung}$	18.50	17.69 (6.0)	27.75	30.56 (8.67)	27.00	24.79 (13.39)
	$VG^{Parallel}$	11.75	14.31 (7.52)	18.50	17.94 (9.04)	15.75	16.75 (8.45)
BruKo Teil II geschl. A. *(max. 54 Punkte)*	$IG^{Förderung}$	30.50	24.88 (12.91)	41.50	41.50 (3.86)	34.50	30.38 (13.41)
	$VG^{Parallel}$	7.00	9.25 (10.18)	39.50	38.06 (5.13)	31.00	27.63 (12.4)
BruKo Teil II o.A. *(max. 54 Punkte)*	$IG^{Förderung}$	14.75	12.38 (7.16)	28.25	25.63 (12.69)	17.50	13.94 (10.81)
	$VG^{Parallel}$	2.50	4.13 (436)	16.00	13.25 (9.42)	6.50	6.44 (4.57)

Vor dem Hintergrund der in Kapitel 3.1 erläuterten Herausforderungen von Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen sowie der insgesamt eher niedrigen Ausgangslage der vorliegenden (Gesamt-)Stichprobe zeigen die Schülerinnen und Schüler der Teilstichprobe auf Förderebene zwar erwartbar niedrige Werte, jedoch lässt sich für beide Gruppen ein Lernzuwachs über die Zeit erkennen. Der Tabelle (Tab. 13) ist zu entnehmen, dass die zusätzlich geförderten Lernenden zu allen drei Messzeitpunkten leicht bis deutlich höhere Werte in den zentralen Tendenzen erreichen als ihre nicht geförderten Vergleichskinder.

Der *U*-Test zeigt für die Variable arithmetischer Basisstoff (AV_1) einen signifikanten Interaktionseffekt zwischen den beiden Gruppen: $U = 4.000$, $p = .004$. Mit $r = .718$ bzw. $d =$

2.065 ist die Größe des Effekts nach Cohen (1992) als stark einzuordnen. Für die Lernentwicklung im Bereich des arithmetischen Basisstoffs (BruKo Teil I, AV_1) zwischen dem ersten und dem zweiten Messzeitpunkt kann eine positive Wirkung für die Förderschleifen statistisch abgesichert werden. Es zeigt sich ein proximaler Effekt. Auch bezüglich des Follow-Up-Effekts zeigen die geförderten Schülerinnen und Schüler (*Median* = 7.000, *MW* = 7.413, *SD* = 9.552) höhere Werte in den zentralen Tendenzen auf als ihre Vergleichskinder (*Median* = 1.000, *MW* = 2.438, *SD* = 7.867). Dieser Unterschied wird aber nicht statistisch signifikant (U = 23.000, $p > .05$, r = -.150 bzw. d = -.302). Der Follow-Up-Effekt fällt damit erwartungsgemäß niedriger aus als der Interventionseffekt.

Im Bereich der geschlossenen Bruchaufgaben (BruKo Teil II, AV_2) schneiden die ungeförderten Schülerinnen und Schüler ($VG^{Parallel}$) trotz ihrer leicht niedrigeren Ausgangslage besser ab als die geförderten Kinder ($IG^{Förderung}$). Zwischen dem ersten und zweiten Messzeitpunkt ($VG^{Parallel}$: *Median* = 28.500, *MW* = 28.813, *SD* = 10.717; $IG^{Förderung}$: *Median* = 13.000, *MW* = 16.623, *SD* =10.378) sowie zwischen dem ersten und dritten Messzeitpunkt ($VG^{Parallel}$: *Median* = 19.500, *MW* = 18.375, *SD* = 12.035; $IG^{Förderung}$: *Median* = 7.000, *MW* = 5.500, *SD* = 17.912) erreichen sie höhere Werte auf deskriptiver Ebene. Es zeigen sich jedoch weder zwischen Prä- und Posttest (U = 13.000, $p > .05$, r = -.448 bzw. d = -1.003), noch zwischen Prätest und Follow-Up (U = 16.500, $p > .05$, r = -.344 bzw. d = -.733) statistisch bedeutsame Unterschiede zwischen den Gruppen.

Für die Variable offene Bruchaufgaben (BruKo Teil II, AV_3) erreichen die Lernenden der Förderschleifen (*Median* = 11.750, *MW* = 13.250, *SD* = 6.803) hinsichtlich des Interventionseffekts höhere Werte in den zentralen Tendenzen als ihre Parallelkinder (*Median* = 6.750, *MW* = 9.125, *SD* = 10.021). Trotz der tendenziell besseren Ausgangslage können diese Unterschiede allerdings nicht statistisch signifikant abgesichert werden (U = 19.000, $p > .05$, r = -.269 bzw. d = -.559). Für den Follow-Up-Effekt zeigen sich auf deskriptiver Ebene höhere Werte bei den Parallelkindern ($VG^{Parallel}$: *Median* = 1.000, *MW* = 2.313, *SD* = 5.168; $IG^{Förderung}$: *Median* = 2.500, *MW* = 1.5625, *SD* = 7.370), der Unterschied zwischen den beiden Gruppen wird jedoch nicht signifikant (U = 27.500, $p > .05$, r = -.015 bzw. d = -.03).

Sowohl für die offenen als auch die geschlossenen Aufgaben des „BruKos“ (Teil II) lässt sich auf Förderebene keine effektive Wirkung der Förderschleifen nachweisen.

In Bezug auf den spezifischen Forschungsschwerpunkt der vorliegenden Arbeit interessieren im weiteren Verlauf die drei Kompetenzbereiche der offenen Bruchaufgaben ($AV_{3beschreibe}$, $AV_{3erkläre}$ sowie $AV_{3ergänze}$), gleichwohl sich auf übergeordneter Ebene keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Gruppen zeigen. Allerdings lassen sich anhand des *Mann-Whitney-U-Tests* weder für den Interaktionseffekt, noch für den Follow-Up-Effekt für eine der drei Variablen statistisch signifikante Unterschiede zwischen den beiden Gruppen ($VG^{Parallel}$ und $IG^{Förderung}$) absichern, sodass an dieser Stelle auf die noch ausstehenden qualitativen Analysen zu verweisen ist.

8.3 Zusammenfassung

Die Darstellungen der Datenerhebung sowie der Ausführung des klassenintegrierten Mathematikunterrichts mit den zusätzlichen Förderschleifen liefern ein realistisches Abbild des Interventionszeitraums. Anhand der Darlegungen lässt sich eine relativ hohe Übereinstimmung zwischen den theoretischen Planungen im Vorfeld und der Umsetzung im praxisnahen Forschungsfeld Schule bzw. Mathematikunterricht feststellen.

Die quantitative Übersicht über die Daten liefert erste wichtige und aufschlussreiche Hinweise auf die Wirksamkeit des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten und erprobten Unterrichts- und Förderkonzepts. Die erhobenen Daten stellen die Grundlage für die empirische Analyse aus quantitativer Sicht dar.

9 Diskussion

Die Erforschung von komplexen Unterrichtskonzepten in realen inklusiven Unterrichtssettings wie im Rahmen dieser quasi-experimentellen Studie dargestellt, implizieren sowohl auf der praktischen Durchführungsebene als auch auf der methodischen Forschungsebene Herausforderungen, die gleichzeitig zu Limitationen führen und als Grenzen eines solchen Untersuchungsdesigns angesehen werden können. Ziel der Arbeit war es, das entwickelte und in der Praxis erprobte Unterrichts- und Förderkonzept im Hinblick auf seine Wirksamkeit für den inklusiven Mathematikunterricht im Ganzen und für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen im Speziellen empirisch zu evaluieren.

Ausgehend von den Ergebnissen (Kap. 8) sollen zunächst die quantitativen Daten (Kap. 9.1) sowie die forschungsmethodischen Grenzen (Kap. 9.2) diskutiert werden. In einem nächsten Schritt erfolgt die kritische Betrachtung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Testinstruments „BruKo“ (Kap. 9.3). Daran anschließend wird die entwickelte Unterrichts- und Förderkonzeption in Bezug auf das gemeinsame Lernen in einem inklusiv orientierten Mathematikunterricht sowie vor dem Hintergrund des Einsatzes für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten kritisch diskutiert (Kap. 9.4). Eine Zusammenfassung (Kap. 9.5) schließt dieses Kapitel ab.

9.1 Quantitative Daten

Um die Ergebnisse der quantitativen Datenauswertung entsprechend ihrer Aussagekraft einordnen zu können, ist an dieser Stelle zu berücksichtigen, dass sich die Ausbildung von Verständnis auf einem Kontinuum bewegt.

> It is possible to say that we know something or we do not. That is, knowledge is something that we either have or don't have. In contrast, *understanding* can be defined as a measure of the quality and quantity of connections that an idea has with existing ideas. Understanding is never an all-or-nothing proposition. It depends on the existence of appropriate ideas and on the creation of new connections. [Hervorheb. im Original] (van de Walle & Lovin, 2006, S. 2)

Die Wirksamkeit einer verständnisorientierten Förderung kann sich bei einzelnen Lernenden individuell und zeitlich versetzt zeigen, d.h. es gibt Phasen, in denen ein bestimmter Lerninhalt möglicherweise schon in Ansätzen verstanden wird, die Ausbildung und Festigung eines grundlegenden Verständnisses jedoch erst deutlich später stattfindet (Freesemann, 2014, S. 175). Es gilt kritisch zu berücksichtigen, dass Ergebnisse in der Regel grobe Einschätzungen des aktuellen mathematischen Entwicklungsstandes abbilden. Für die vorliegenden Testergebnisse spielt das insofern eine Rolle, als dass sich die individuellen Entwicklungen im Verständnis nicht unmittelbar in der jeweils erreichten Punktzahl eines Kindes ausdrücken müssen. Kahlert und Heimlich (2012) sprechen in diesem Zusammenhang von einer unüberwindbaren „Erkenntnisgrenze“ und heben hervor, dass man „nie [erhält man] Einblick in das [erhält, R.-F.K.], was tatsächlich gerade im lernenden Kind vor sich geht, sondern nur Einblick in das, was die jeweilige Beobachtungsweise hergibt“ (S. 159). Diese Begrenzung ist insbesondere vor dem Hintergrund einer quantitativen Datenauswertung von Relevanz.

Dieses Kapitel widmet sich zunächst der Diskussion der erhobenen quantitativen Daten auf Klassenebene und richtet dann den Blick auf die erhobenen Daten auf Förderebene. Abschließend wird ein Ausblick auf weitere Daten gegeben.

9.1.1 Klassenebene

Die Daten des Prätests zeigen eine große Leistungsstreuung innerhalb der gesamten Stichprobe. Die Ergebnisse spiegeln wider, dass ein beachtlicher Teil der Gesamtstichprobe im vierten Quartal des fünften Schuljahres keine fundierten Kenntnisse im mathematischen Basisstoff entwickelt hat und somit nicht über ein entsprechendes Wissensfundament verfügt, das die Grundlage der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen trägt (Schmidt, S., 2009, S. 126). Damit reihen sich die vorliegenden Ergebnisse in bekannte Studien, wie bspw. die von Freesemann (2014), Humbach (2008), Moser Opitz (2007, 2013) und Schäfer (2005), ein. Die Beantwortung der Frage, inwieweit sich diese Stichprobe von der Grundgesamtheit der Lernenden im 5. Schuljahr unterscheidet, war nicht Ziel der vorliegenden Studie und kann auf der Grundlage der erhobenen Daten nicht beantwortet werden.

Die unterschiedlichen Ausgangslagen in den Teilstichproben verdeutlichen die Schwierigkeiten einer Feldstudie, die mit bestehenden Gruppen arbeiten muss und keine systematische oder zufällige Stichprobenbildung betreiben kann. Für die Intervention, die den Fokus auf einen verständnisorientierten Aufbau eines anspruchsvollen neuen Inhaltsbereichs wie den des Bruchzahlverständnisses legt, erweist sich die Lernausgangslage vor diesem Hintergrund als schwierig. Die zentralen und voraussetzungsvollen arithmetischen Grundlagen sind nicht hinreichend entwickelt, sodass innerhalb des kurzen Interventionszeitraums nur reduzierte Lernfortschritte im neuen Inhaltsbereich erwartet werden können. Die niedrigen Mittelwerte im Bereich der Bruchaufgaben waren zum ersten Messzeitpunkt erwartungskonform, da es sich um einen für alle Lernenden neuen Inhaltsbereich handelt, dessen spezifische Einführung erst nach dem Prätest stattgefunden hat. Gleichwohl zeigt sich, dass die Gesamtstichprobe auf ein eher niedriges Vorwissen in diesem Bereich zurückgreifen kann.

Die mit der vorliegenden Untersuchung verfolgte Forschungsfrage nach der Wirksamkeit des Konzepts der unterrichtsintegrierten Förderung auf die individuellen Lernzuwächse einer heterogenen Lerngruppe lässt sich allgemein betrachtet nur auf deskriptiver Ebene beantworten. Die Daten verdeutlichen, dass alle Schülerinnen und Schüler einen Lernzuwachs erzielen konnten. Dieser lässt sich jedoch nicht explizit durch die statistischen Daten zugunsten des Förderkonzepts absichern, sodass davon ausgegangen werden muss, dass unabhängig von der Interventionsform ein Leistungszuwachs stattfindet, wenn die Lernenden entsprechenden Unterricht erhalten.

Entgegen der in Kapitel 6.5 formulierten erwarteten Ergebnisse zeigen die inferenzstatistischen Auswertungen, dass die Lernenden, die nach dem Konzept der unterrichtsintegrierten Förderung (IG^{Klasse}) unterrichtet wurden, kein fundierteres Bruchzahlverständnis entwickeln als die Schülerinnen und Schüler der Vergleichsgruppe (*VG*). Trotz der signifikant besseren Ausgangslage der Interventionsgruppe hinsichtlich des grundlegenden Bruchzahlverständnisses (AV_2 und AV_3) weist die Vergleichsgruppe für die Variable geschlossene Bruchaufgaben (AV_2) sowohl einen signifikanten Interventionseffekt als auch einen signifikanten Follow-Up-Effekt auf. Es lässt sich vermuten, dass die Lernenden der Vergleichsgruppe die Aufgaben im Prätest möglicherweise nicht verstanden haben, nach dem (mechanischen) Lernen jedoch einen großen Lernzuwachs aufweisen können und aufgrund ihrer schlechteren Ausgangslage einen höheren Lernzuwachs zeigen als die Lernenden der Interventionsgruppe, die sich infolge ihrer besseren Ausgangslage nicht so stark weiterentwickeln. Darüber hinaus lässt sich vorsichtig annehmen, dass ein „traditioneller“, regulärer Unterricht möglicherweise einen größeren Fokus auf das systematische Vorgehen bei der Anteilsbestimmung legt, ohne dabei die Verständnisorientierung in den Mittelpunkt zu stellen. Folglich lässt sich vermuten, dass die Lernenden der Vergleichsgruppe das Verfahren eventuell auswendig gelernt und angewendet haben, ohne jedoch möglicherweise das dahinter stehende Grundverständnis aufgebaut zu haben. Das Ergebnis zeigt, dass im Bereich der geschlossenen Bruchaufgaben, die sich größtenteils auf die symbolische Anteilsbestimmung beziehen, ein systematisches, nicht so stark auf Verständnisorientierung ausgerichtetes Vorgehen erfolgreicher sein kann.

Auch in Bezug auf die offenen Bruchzahlaufgaben (AV_3) zeigen sich für die Interventionsgruppen keine nachhaltig bedeutsamen Lernzuwächse im Vergleich zu der Vergleichsgruppe. Vergleicht man die beiden Gruppen auf deskriptiver Ebene anhand ihrer Mittelwerte, so zeigen sich bei den Interventionsklassen zu allen drei Messzeitpunkten höhere Werte. Insbesondere die höheren Mittelwerte zum dritten Messzeitpunkt können vorsichtig als Indiz für einen längerfristigen Lernerfolg des verständnisorientierten Unterrichts gedeutet werden. Bei der Interpretation ist jedoch Zurückhaltung geboten, denn die ungleichen Ausgangsbedingungen beider Gruppen belaufen sich auf eine in etwa gleiche Lernentwicklung. Das signifikant bessere Abschneiden der Vergleichsklasse bei den offenen Bruchaufgaben $AV_{3\text{ergänze}}$ lässt sich vermutlich dadurch erklären, dass „Ergänzen“ im Vergleich zu „Beschreiben“ bzw. „Erklären“ weniger Verständnis voraussetzt bzw. systematischer bearbeitet werden kann und einen deutlich geringeren sprachlichen Anspruch bei der Aufgabenbearbeitung stellt als die anderen beiden offenen Aufgabenformate. Darüber hinaus sind die „Ergänze“-Aufgaben überwiegend auf Niveau II angesiedelt und somit vom Schwierigkeitsgrad her als leichter eingestuft als viele der „Erkläre“/“Ergänze“-Aufgaben auf Niveau III. Der ausbleibende nachhaltige Lernzuwachs bei den offenen Bruchaufgaben $AV_{3\text{beschreibe}}$ und $AV_{3\text{erkläre}}$, der in allen Klassen festzustellen war, spiegelt den hohen Anspruch an den Aufbau verständnisorientierter Grundlagen wider. Gleichzeitig stellen die Ergebnisse einen erwartungskonformen Befund dar, da es sich bei der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen um einen für alle Lernenden neuen Inhaltsbereich handelt. Zwar wurde der Fokus im Rahmen der Intervention verstärkt auf ein verständnisorientiertes Lernen gerichtet, jedoch lässt sich kein bedeutsamer Unterschied im Vergleich zu dem traditionellen Mathematikunterricht konstatieren. Bedingt durch die Tatsache, dass die Interventionsgruppen zunächst stärker durch die neuen Aufgabenformate und veränderten Schwerpunkte im Unterricht (Verständnisorientierung, Handlungsorientierung, aktiv-entdeckendes, kooperatives Lernen, anderes, ggf. bisher unbekanntes Material bzw. Aufgabengestaltung) beeinflusst

wurden, lässt sich annehmen, dass diese Veränderungen zunächst zusätzlichen Lernstoff dargestellt haben. Das hier erprobte Unterrichtsformat erfordert viel Übung und mehr Zeit, als es im Rahmen der Intervention möglich war, um nachhaltig effektiv zu sein.
Es kann zudem nicht ausgeschlossen werden, dass in der Vergleichsgruppe ein „teaching to the test“ stattgefunden haben könnte. Zwar hatte die Mathematikehrkraft keinen direkten Einblick in die Inhalte der Intervention, jedoch waren ihr die Aufgaben des „BruKos“ aus dem Prätest bekannt.
Die Ergebnisse des Posttests lassen erkennen, dass die Gesamtstichprobe einen Leistungszuwachs erzielen konnte, der zwar im Follow-Up geringer zurück ging aber erhalten blieb und im Bereich des arithmetischen Basisstoffs sowie bei den offenen Aufgaben zum Bruchzahlverständnis eher gering ausfiel. Der arithmetische Basisstoff wurde im Rahmen des Klassenunterrichts nicht explizit gefördert, sondern nur am Rande berücksichtigt. Die Ergebnisse lassen jedoch die Annahme zu, dass auch zu Beginn der Sekundarstufe 1 der unterrichtliche Fokus für alle Lernenden noch stärker auf die Sicherung der arithmetischen Grundlagen in Verbindung mit den aktuellen Inhaltsbereichen gerichtet werden muss.

Betrachtet man die Ergebnisse bezüglich des kritischen Werts zeigt sich, dass nur ein kleiner Anteil (6 %) der Gesamtstichprobe ein grundlegendes Bruchzahlverständnis aufbauen konnte. Ein differenzierter Blick auf die einzelnen Interventionsformen verdeutlicht jedoch eine positive Entwicklung bei den Interventionsklassen I und II, wenngleich der Anteil der Lernenden, die den kritischen Wert erreicht bzw. überschritten haben, gering ausfällt.

Standortbestimmungen

Die wöchentlichen Bearbeitungen der Standortbestimmungen wurden zwar eingesammelt, es wurde jedoch in allen Interventionsklassen versäumt, individuelle förderorientierte Rückmeldungen zu geben. Die Chance, die Transparenz über die eigene Lernentwicklung zu erhöhen, konnte auf Seiten der Schülerinnen und Schüler somit nicht genutzt und das praktische Potential der Aufgaben nicht ausgeschöpft werden. Vor diesem Hintergrund gilt es kritisch zu hinterfragen, welche Sinnhaftigkeit die Aufgabenbearbeitungen der Standortbestimmungen für die Lernenden eingenommen hat. Die im Sinne der lernförderlichen Leistungskultur als wichtig zu erachtende Selbsteinschätzung sowie der Einbezug der Lernenden in die transparente Auswertung konnte nicht umgesetzt werden (Sundermann, 2009, S. 5). Es ist deutlich geworden, dass die sinnhafte Realisierung von Standortbestimmungen im Unterrichtsalltag eine bewusste und durchaus zeitintensive Begleitung auf Seiten der Lehrkräfte erfordert und ggf. eher vereinzelt, dafür aber bedacht eingesetzt werden sollte, um das volle Potential ausschöpfen zu können. Für die Forschung versprechen die individuellen Bearbeitungen von Standortbestimmungen einen hohen qualitativen Nutzen, der jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt werden soll.

Die Ergebnisse der Untersuchung machen insgesamt deutlich, dass die auf Verständnis ausgerichtete unterrichtsintegrierte Förderung mit all ihren mathematik- und inklusivdidaktischen Prinzipien innerhalb eines vergleichsweise kurzen Zeitraums nicht per se erfolgreicher zu sein scheint als ein „traditioneller“ Mathematikunterricht.

9.1.2 Förderebene

Nachfolgend wird die Frage nach der Wirksamkeit der engen Verzahnung von ausgewählten Aspekten des mathematischen Basisstoffs und relevanten Aspekten des Bruchzahlverständnisses im Rahmen der Förderschleifen genauer betrachtet. Für die geförderten Kinder ($IG^{Förderung}$) und ihre Parallelkinder ($VG^{Parallel}$) konnte in allen Inhaltsbereichen ein Lernzuwachs über die Zeit festgestellt werden. Die Lernenden der $IG^{Förderung}$ erreichten leicht bis deutlich höhere Mittelwerte als die Lernenden der $VG^{Parallel}$. Obwohl die in der Tendenz bessere Lernausgangslage der geförderten Kinder ähnlich wie auf Klassenebene kritisch zu betrachten ist, konnten sie keinen statistisch signifikanten Lernzuwachs gegenüber den ungeförderten Parallelkindern erreichen. Das lässt vermuten, dass die zusätzliche Förderung zwar beim Lernen unterstützt, der erhoffte Effekt jedoch moderat ausfällt.

Mit Blick auf die einzelnen Variablen lässt sich ein signifikanter Interventionseffekt zugunsten der geförderten Schülerinnen und Schüler bei der Variable AV_1 feststellen, was tendenziell als positive Wirkung der Förderung interpretiert werden kann. Der Follow-Up-Effekt fällt jedoch niedriger aus als der Interventionseffekt. Dieser Befund ist erwartungsgemäß und verständlich, denn insbesondere Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen sind auf ein konstantes und den Lernverlauf begleitendes Üben angewiesen, um ihre mathematischen Kompetenzen halten bzw. weiter ausbauen zu können. Jedoch deuten die Ergebnisse darauf hin, dass die zusätzlich geförderten Kinder eine voraussetzungsvolle Grundlage für ein nachhaltiges

Lernen schaffen konnten. Die Förderung des arithmetischen Basisstoffs wurde nach der Intervention jedoch nicht mehr fortgesetzt. Es sollte dennoch berücksichtigt werden, dass die Lernenden der Förderschleifen im Gegensatz zu ihren Parallelkindern in diesem Inhaltsbereich eine zusätzliche Förderung erhalten haben und ein Lernzuwachs aufgrund der inhaltlichen Auseinandersetzung anzunehmen ist. Eine erste positive Tendenz hinsichtlich eines längerfristigen Lernerfolgs bei den geförderten Schülerinnen und Schülern deuten allerdings auf deskriptiver Ebene die höheren Werte in den zentralen Tendenzen an, auch wenn diese nicht inferenzstatistisch abgesichert werden konnten.

Hinsichtlich der geschlossenen Bruchaufgaben (AV_2) zeichnet sich auch auf Förderebene ein vergleichbares Muster wie auf Klassenebene ab: Zwar lassen sich mithilfe des *U*-Tests keine signifikanten Ergebnisse absichern, jedoch werden die geschlossenen Testaufgaben zum grundlegenden Bruchzahlverständnis im Mittel von den ungeförderten Parallelkindern der Vergleichsgruppe besser gelöst als von den geförderten Lernenden der Interventionsgruppen. Auch an dieser Stelle kann aus mathematikdidaktischer Sicht vermutet werden, dass eine auf grundlegendes Verständnis ausgerichtete Kleingruppenförderung für das Lösen von Kalkülaufgaben nicht die erhofften Lernvorteile erzielt.

Entgegen der Erwartungen zeigen sich in Bezug auf die offenen Bruchaufgaben (AV_3) keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Gruppen zugunsten der zusätzlich geförderten Schülerinnen und Schüler. Die Ergebnisse auf deskriptiver Ebene lassen jedoch bezogen auf den Interventionseffekt erste vorsichtige Vermutungen zu, die tendenziell für einen Lernvorteil auf Seiten der $IG^{Förderung}$ sprechen. Diese Tendenz kann für den Follow-Up-Effekt allerdings nicht gehalten werden. Die Ergebnisse bezüglich der offenen Bruchaufgaben verdeutlichen erneut die Notwendigkeit eines konstanten und den Lernverlauf begleitenden Lernens für Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen, um nachhaltige Kompetenzen aufbauen zu können. Darüber hinaus gilt es zu berücksichtigen, dass der erhoffte Lerneffekt auch auf Klassenebene, d.h. bei Lernenden, die keine (besonderen) Schwierigkeiten aufzeigen, gering ausfiel und somit bei den Aufgaben zum Bruchzahlverständnis insgesamt von einem für alle Schülerinnen und Schüler schwierigen Inhaltsbereich auszugehen ist.

Im Hinblick auf die in dieser Arbeit verfolgte Frage nach dem Einfluss der Interventionsform auf den individuellen Lernfortschritt bei Schülerinnen und Schülern mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematikunterricht kann aus quantitativer Perspektive abschließend keine ausdrücklich positive Wirkung der Förderschleifen belegt werden. Die noch zur Analyse anstehenden qualitativen Daten deuten bei einzelnen Lernenden positive individuelle Lernverläufe an, die für eine erfolgreiche Wirkung sprechen. Grundsätzlich muss berücksichtigt werden, dass es sich bei den zusätzlich geförderten Lernenden um Schülerinnen und Schüler handelt, die große Schwierigkeiten im Mathematiklernen und somit schwache Leistungen zeigten. Es ist davon auszugehen, dass diese Kinder weniger und langsamer lernen als Lernende, die ebendiese Schwierigkeiten nicht zeigen. Die großen Lücken im Bereich des arithmetischen Basisstoffs verdeutlichen die fehlende gefestigte Grundlage für ein erfolgreiches Weiterlernen an den darauf aufbauenden Inhaltsbereichen, es zeigt sich ein Schereneffekt in Bezug auf das Vorwissen. Um ausgleichende Lernzuwächse erzielen zu können, müssten die Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten einerseits deutlich schneller lernen als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler und andererseits auch deutlich schneller lernen, als sie es bislang getan haben. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten zusätzlichen Förderschleifen sind für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten von großer Relevanz, damit sie überhaupt Lernfortschritte machen und Lücken schließen können. Die Erwartungshaltungen an die individuellen Lernfortschritte sollten jedoch realistisch bleiben und eher niedrigschwellig formuliert werden.

9.1.3 Ausblick auf weitere Ergebnisse

Neben den statistischen Ergebnissen zu den drei Hauptvariablen (AV_1, AV_2, AV_3) sowie den Untervariablen der offenen Bruchaufgaben ($AV_{3beschreibe}$, $AV_{3erkläre}$, $AV_{3ergänze}$) können aus qualitativer Perspektive sowohl die verschiedenen Bearbeitungsebenen der offenen Bruchaufgaben insgesamt als auch die Bezugsebenen (*Konstanz*, *Veränderung*, *Wirkung*) der „Beschreibe"-Aufgaben ($AV_{3beschreibe}$) aufschlussreiche Einblicke und informative Hinweise zur Interpretation der Ergebnisse liefern. Darüber hinaus interessieren besonders die individuellen Lernverläufe, d.h. die Lernentwicklungen, die zwischen den Messzeitpunkten stattgefunden haben. Nachfolgend wird ein kurzer Ausblick auf vertiefende qualitative

Analysemöglichkeiten gegeben, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit aus Ressourcengründen nicht weiter verfolgt werden.

Bearbeitungsebene

Die genauere Betrachtung der Bearbeitungsebene, anhand derer die Schülerinnen und Schüler die offenen Aufgaben gelöst haben, kann Aufschluss darüber geben, ob die Beantwortung der offenen Fragen eher ikonisch und/oder symbolisch erfolgte bzw. ob eine Verbindung beider Ebenen stattgefunden hat. In der Bewertung der Aufgaben findet keine Unterscheidung bzw. Gewichtung zwischen den Bearbeitungsebenen statt, da beide jeweils als gleichwertige Repräsentationen eines Bruchs gelten. Im Hinblick auf die Annahme, dass die Berücksichtigung beider Ebenen auf ein umfangreiches Grundverständnis schließen lässt, kann eine spezifische Betrachtung an dieser Stelle interessante Hinweise zu individuellen Verständnisprozessen liefern.

Bezugsebene

Die offenen „Beschreibe"-Aufgaben werden in Bezug auf die drei Kategorien des operativen Prinzips (*Konstanz, Veränderung, Wirkung)* mit einer Gesamtpunktzahl (0-3 Punkte) bewertet. Gleichwohl die Hauptergebnisse bezüglich dieser Variable ($AV_{3beschreibe}$) keine signifikanten Effekte liefern, kann ein differenzierter Blick auf die jeweilige Bezugsebene weiterführend eine Möglichkeit darstellen, erste Vermutungen darüber abzuleiten, wie umfänglich die Lernenden ein fundiertes Bruchzahlverständnis zum jeweiligen Messzeitpunkt aufbauen konnten.

Individuelle Lernentwicklungen

Für die qualitativen Analysen bieten sich zwei Ansätze an: Einerseits können ausgewählte Lernende hinsichtlich ihrer individuellen Lernentwicklungen anhand spezifischer Aufgabenbearbeitungen aus der siebenwöchigen Intervention näher untersucht werden. Andererseits bietet es sich vor dem Hintergrund der konzeptionellen Ebene auch an, einzelne Aufgaben hinsichtlich verschiedener Bearbeitungsmöglichkeiten zu analysieren.

9.2 Forschungsmethodische Grenzen des Designs

Der hier gewählte praxisnahe, am alltäglichen Unterricht orientierte Forschungszugang wirft einige forschungsmethodische Fragen auf, die kritisch betrachtet werden sollen. Mit Blick auf die Forschungsfragen auf Entwicklungsebene sind im Rahmen dieser Arbeit Aussagen über eine globale Wirksamkeit möglich, aber zwei Limitationen sind zu beachten:

- Ein expliziter Nachweis über die Effektivität einzelner didaktischer Prinzipien sowie deren Auswirkungen auf den täglichen Unterricht und die Lernentwicklung der Schülerinnen und Schüler lässt sich im Rahmen einer Komponentenanalyse nicht führen. Insbesondere die didaktischen (Gestaltungs-)Prinzipien bzw. Leitideen, die in Kapitel 2.3.1 und 2.3.2 ausführlich dargestellt wurden, lassen sich aufgrund ihrer Multivalenz, Kontextabhängigkeit und häufig eher allgemeinen Formulierung nur schwer operationalisieren und empirisch überprüfen (Wember, 2016a, S. 93). Eine vergleichende Analyse von Einzelelementen würde hochkontrollierte Laborstudien erfordern, die in der täglichen Unterrichtspraxis unrealistisch und nicht umzusetzen wären. Zudem können aus rein quantitativer Perspektive keine Aussagen über das individuelle Verständnis der Lernenden getroffen werden, dazu bedarf es eines qualitativen Forschungszugriffs sowie eingehender Tiefenanalysen mathematischer Lehr- und Lernprozesse.
- Während der Intervention konnte nicht tiefergehend untersucht werden, ob die gemeinsamen Lernsituationen im Sinne der natürlichen Differenzierung tatsächlich auch zu einem von- und miteinander Lernen sowie der produktiven Teilhabe aller Kinder geführt haben. Es lässt sich im Rahmen dieser Untersuchung also nicht darlegen, ob die initiierten Phasen des gemeinsamen Lernens Inklusions- und/oder unter Umständen sogar auch Exklusionsprozesse begünstigt haben.

Die vorliegende Interventionsstudie wurde mit nur einer Kontrollgruppe durchgeführt. Eine weitere Kontrollgruppe mit einer alternativen, unspezifischen Förderung, um bspw. Zuwendungs- oder Placeboeffekte auszuschließen, konnte nicht realisiert werden. Die Effekte in der Gruppe der zusätzlich geförderten Lernenden könnten zum Teil darauf beruhen, dass überhaupt eine zusätzliche Förderung stattgefunden hat, deren Umsetzung in einem sehr intensiven Rahmen realisiert wurde (Wessel, 2015, S. 175). Insbesondere bei den Förderschleifen muss ein solcher Zuwendungseffekt berücksichtigt werden, da Prozesse sozialer Zuwendung starken Einfluss haben können und motivationale Aspekte nicht kontrolliert werden konnten.

Ein Merkmal von Praxisforschung ist die eingeschränkte Kontrollierbarkeit der Implementation von Interventionen. In diesem Projekt sollten in den Vergleichsklassen II und III laut Versuchsplan Stundenprotokolle geführt werden, die jedoch aus Zeitgründen im realen Unterrichtsalltag nicht konsequent ausgefüllt wurden, sodass nur eine punktuelle und sehr abgeschwächte Form der Kontrolle möglich war. Weiterhin kann aufgrund der praxisbezogenen Umsetzung eine Defundierung der Intervention vermutet werden, weil beide Versuchsgruppen von den gleichen Lehrkräften unterrichtet wurden. Zusätzlich ist davon auszugehen, dass die Förderschulehrkraft, die in der Versuchsgruppe II die Förderschleifen durchgeführt hat, in der Versuchsgruppe III jedoch nicht, ihr spezifisches Wissen in den Klassenunterricht der Versuchsgruppe III eingebracht hat. In einer größeren Replikation der Unterrichtsstudie bedarf es differenzierterer Analysen anhand von Videoaufnahmen. Diese erleichtern die Einschätzung der Umsetzungsqualität sowie die Interpretation der Gruppenunterschiede (Wittich, 2017, S. 167).

Bei Unterrichtsforschungen, die sich auf grundlegende mathematische Kompetenzen beziehen und die in einem größeren Rahmen angelegt sind, ist es sinnvoll, weitere spezifische Kontrollvariablen wie bspw. den IQ, das Arbeitsgedächtnis sowie sprachliche Kompetenzen zu erfassen, um weitere Einflussfaktoren klären zu können. Signifikante Effekte könnten sich so differenzierter auf Gruppenunterschiede oder andere Ressourcen zurückführen lassen, falls enstprechend große Stichproben solche Analysen zulassen.

Kritisch zu beachten ist die Stichprobengröße der vorliegenden Interventionsstudie. Ein Datensatz von N = 103 erfordert in Praxisforschung einen hohen Aufwand, ist jedoch begrenzt aussagefähig, da bei kleinen Stichproben die Schwierigkeit besteht, mittlere oder kleinere Effekte signifikant abbilden zu können. Folglich empfiehlt es sich, nicht nur die Ergebnisse der Signifikanzprüfungen, sondern auch die Effektstärken zu beachten; denn statistisch nicht signifikante Effekte könnten von theoretischer und praktischer Bedeutsamkeit sein, auch wenn deren Interpretation aufgrund der geringen Stichprobengröße erschwert ist (Hager, 2000, S. 162; Rost, 2013, S. 237). Andererseits gilt es zu berücksichtigen, dass ein statistisch signifikantes Ergebnis noch nicht bedeutet, dass auch die Effektgröße von praktischer

Bedeutung ist (Kuhl & Sinner, 2015, S. 172). Empirische Ergebnisse sind vor dem Hintergrund ihres (praktischen) Kontextes zu beurteilen. Auch im Hinblick auf die nicht-parametrischen Verfahren muss die geringere Teststärke bei kleinen Stichproben berücksichtigt werden. Zur weiteren statistischen Absicherung des entwickelten Unterrichts- und Förderkonzepts auf Grundlage von Inferenztestergebnissen sind demnach umfangreichere Untersuchungen mit einer größeren Stichprobe erforderlich. Um Erwartungseffekte auszuschließen, sollte darüber hinaus darauf geachtet werden, dass die Lehrkräfte, die den Unterricht bzw. die Förderschleifen umsetzen, nicht gleichzeitig auch die Vor- und Nachtests durchführen (Ludwig, H. P., 2008).

Einer kritischen Reflektion bedarf aus forschungsmethodischer Sicht auch das Verhältnis des Interventionszeitraums von sieben Wochen und den bisherigen Lernerfahrung der Schülerinnen und Schüler von fünf Jahren Mathematikunterricht, das bereits in Kapitel 9.1 dargelegt und diskutiert wurde. Für erfolgreiche Interventionen empfiehlt Slavin (2008) eine Dauer von mindestens 12 Wochen. In dem hier zur Verfügung stehenden Zeitraum waren große Effekte eher nicht zu erwarten, zumal der Unterricht anders und abweichend von dem bisher gewohnten Unterricht konzipiert wurde. Darüber hinaus gilt es aus praxisnaher Perspektive zu berücksichtigen, dass die Interventionsgruppe 5.1 durch die Versuchsleiterin unterrichtet wurde, d.h. durch eine ihnen bisher unbekannte Lehrkraft.

„Schulische Realität und damit auch der Unterricht sind sehr komplexe Forschungsgegenstände. Daher ist es nicht möglich sämtliche Wirkungen und Bedingungsfaktoren von Schule und Unterricht zu erfassen und zu kontrollieren“, schreiben Kuhl und Euker (2016, S. 25). Letztlich ist Unterricht allerdings mehr als das Zusammensetzen kleiner Bausteine, d.h. in einem ersten Schritt ist es positiv zu bewerten, dass die vorliegende Studie zeigen kann, dass in einem inklusiven Unterrichtssetting alle Kinder auf ihrem Niveau angemessen lernen und Lernzuwächse machen können.

9.3 Diskussion des entwickelten Testinstruments

Im Folgenden sollen die Möglichkeiten und Grenzen des „BruKos“ im inklusiven Mathematikunterricht diskutiert werden. Die Herausforderung bei der Testentwicklung bestand darin, ein Instrument zu entwickeln, mit dem Veränderungen in den individuellen Lernentwicklungen erfasst werden können. Beim Einsatz eines Testinstruments für alle

Schülerinnen und Schüler einer heterogenen Lerngruppe besteht die Gefahr, dass der Eindruck entsteht, dass Lernzielgleichheit angestrebt wird (Korff, 2016b, S. 23). Der hohe Anteil von offenen Aufgaben im „BruKo“ bietet jedoch ausreichend Potential, um individuelle Lösungswege abbilden und somit der Heterogenität der Lernenden gerecht werden zu können.

Die Ergebnisse der Zusammenhangsanalysen zwischen den eingesetzten Messinstrumenten erweisen sich als erwartungskonform. Auch wenn sie keine Kausalität belegen können, sind sie als Hinweise auf Zusammenhänge und somit als Orientierungshilfe zu interpretieren (Sedlmeier & Renkewitz, 2013, S. 213).

Im Hinblick auf die Konstruktion der Testitems konnten im Rahmen der Reliabilitätsanalyse (Kap. 7.2) zum jetzigen Zeitpunkt nur erste, zukünftig noch zu ergänzende Aussagen getroffen werden. Gleichwohl eine umfassende Validierung bislang noch aussteht, konnten gute bis sehr gute Werte für die interne Konsistenz der Skalen erreicht werden. Selbst für die Skala der offenen Bruchaufgaben, deren Entwicklung und Auswertung eine Herausforderung der vorliegenden Testkonzeption darstellen, konnte mit $\alpha = .79$ ein sehr zufriedenstellender Wert ermittelt werden, der darauf schließen lässt, dass die Items inhaltlich zueinander passen. Wie bereits dargelegt, war die Darstellung der Itemschwierigkeit über die Mittelwerte nur für die offenen Aufgaben zum Bruchzahlverständnis sinnvoll. Die Itemanalyse zu den offenen Bruchaufgaben, insbesondere zu den „Erkläre“-Aufgaben, zeigt, dass die Items eher zu schwer sind. Das war für den Prätest zu erwarten, da es sich beim grundlegenden Bruchzahlverständnis um einen neuen Inhaltsbereich handelt, der von allen Testpersonen zuvor noch nicht behandelt worden war. Insgesamt deuten die bisherigen Werte auf genügende Ergebnisse hin, die viel Potential für vertiefende Analysen auf Itemebene liefern. Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, dass auch das offene Aufgabenformat, das den Schülerinnen und Schülern bisher noch nicht geläufig war, zu den hohen Aufgabenschwierigkeiten beigetragen haben dürfte.

Ein methodisches Problem der vorliegenden Interventionsstudie könnte die Sensitivität des eingesetzten Messinstruments sein. Das hier gewählte Format eines Paper-pencil-Tests lässt sich vor dem Hintergrund seines intendierten Ziels, ein grundlegendes Bruchzahlverständnis abzubilden, kritisch diskutieren. Quantitative Paper-pencil-Daten sind in ihrer Aussagekraft begrenzt, denn sie bilden im Sinne einer Statusdiagnostik zwar Momentaufnahmen ab, die von einer Person erreichte Punktzahl spiegelt jedoch nicht ihr individuelles Verständnis wieder, das sich auf einem Kontinuum entwickelt. Zwar lässt die Gesamtpunktzahl des „BruKos“ eine intrapersonelle Vergleichbarkeit zwischen den Testzeitpunkten zu, in Bezug auf eine interpersonelle Vergleichbarkeit ist sie jedoch stark begrenzt. Schwierig für einen interpersonellen Vergleich erweist sich auch die Tatsache, dass Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen mit gleicher Punktzahl bewertet werden. Um die begrenzte Aussagekraft hinsichtlich der quantitativen Datenauswertung aus qualitativer Perspektive zu unterstützen, besteht ein Schwerpunkt des „BruKos“ in offenen, verständnisorientierten Aufgaben, die auf die Erhebung des individuellen Verständnisses der Testpersonen zielen. Im Rahmen des Paper-pencil-Tests kann eine Analyse der schriftlichen Dokumente jedoch nur die entstandenen Endprodukte erfassen. Zwar beinhalten die offenen Aufgaben auch dynamische Lösungswege (bspw. durchgestrichene Zwischenergebnisse oder erste Lösungsansätze), individuelle Denkprozesse lassen sich allerdings oft nur näherungsweise erkennen bzw. vermuten.

> Komplexe Gedankengänge, Geistesblitze, aber auch Irrwege bei der Lösungsfindung (die manchmal auch gerade zum richtigen Ergebnis geführt haben mögen) lassen sich im Allgemeinen in den schriftlichen Produkten nicht in der Reichhaltigkeit (wie im Interview) erkennen, was in der Form der Erhebungsmethode begründet ist. (Schink, 2013a, S. 124)

Aufgrund der bereits in Kapitel 7.1.2 dargelegten Charakteristika der offenen Aufgaben ist nicht eindeutig festgelegt, auf welche Bearbeitungsebene (ikonisch, symbolisch bzw. symbolisch und ikonisch) sich die Lernenden bei ihrer Beantwortung beziehen sollen. Die jeweilige Aufgabe enthält sowohl ikonische als auch symbolische Darstellungen, auf welche die Testpersonen Bezug nehmen können und i.S. eines umfassenden Bruchzahlverständnisses und der intendierten Lösung auch sollen. Die Auswertung der individuellen Bearbeitungen erlauben vor diesem Hintergrund nur erste Eindrücke und Hinweise. Es lässt sich nicht beurteilen, ob ein Kind beispielsweise nur eine der Ebenen fokussiert und aufgeschrieben hat, die andere Ebene aber mit bedacht und möglicherweise gleichermaßen erkannt hat, ohne sie aufzuschreiben. Es ist nicht auszuschließen, dass eine nicht ganz vollständige Antwort auch durch die hohe sprachliche Anforderung mitbeeinflusst wurde. Aussagen wie bspw. „Dass es immer (einer) mehr wird.“ oder „Es wird weniger.“ können im Rahmen eines Paper-pencil-Tests nicht eindeutig einer Ebene zugeordnet werden. Für eine unmissverständliche Bewertung wäre eine Gesprächssituation, wie sie bspw. in einem qualitativen Interview gegeben ist, aussagekräftiger. In der Bewertung der Aufgaben werden keine Gewichtungen zugunsten einer der Ebenen gemacht, da sowohl ikonische als auch symbolische Darstellungen gleichwertige Repräsentanten eines Bruchs darstellen. Aufgrund der Uneindeutigkeit erfolgt bezüglich der Beispiele eine konservative Bewertung von 0 Punkten. Die Auswertung der Testergebnisse berücksichtigt unabhängig von der Punktevergabe die Bearbeitungsebene und kann somit aus qualitativer Sicht weiterführende diagnostische Hinweise liefern.

Einschränkungen lassen sich auch bei den „Beschreibe“-Aufgaben hinsichtlich der Bezugsebene feststellen. Die Aufgabenstellung beinhaltet explizit das Verb „beschreiben“, d.h. genau genommen kann das Formulieren eines Zusammenhangs i.S. der Wirkung nicht erwartet werden. Die intendierten prozessbezogenen Kompetenzen des Begründens von (operativen) Zusammenhängen werden in der Aufgabenstellung nicht deutlich. Genauso ist es möglich, dass Schülerinnen und Schüler nur die Wirkung beschreiben und sich nicht auf die Konstanz und/oder Veränderung beziehen. In diesem Fall sind die Voraussetzungen als erfüllt anzunehmen, um die Wirkung zu beschreiben, jedoch wurden diese nicht in der Antwort formuliert. Die Abbildung der prozessbezogenen Kompetenzen in den offenen Aufgabenstellungen über eine quantitative Skala stellt vor diesem Hintergrund eine große Herausforderung dar und führt zu Einschränkungen der Aussagekraft und Interpretation der jeweiligen Ergebnisse. In der Weiterentwicklung des Testinstruments wäre eine Änderung der Aufgabenstellung in *„Was fällt dir auf? Beschreibe und Erkläre!“* angezeigt, um den Fokus stärker auf die strukturellen Zusammenhänge zu lenken.

Gleichwohl bei der Erstellung des Auswertungsleitfadens der Fokus auf größtmöglicher Objektivität lag, lassen insbesondere die offenen Aufgaben je nach Interpretation der Ergebnisse durchaus unterschiedliche Bewertungen zu. Die Auswertung erfordert an dieser Stelle fundiertes fachliches Wissen, um die Antworten der Lernenden entsprechend einordnen und bewerten zu können. Einzelne Aufgabenbewertungen lassen sich durchaus kritisch betrachten. Bei den Aufgaben 16 und 26 (vgl. Anahng I 1) stellt sich die Frage, ob eine bedeutungsbezogene Antwort nicht ergiebiger ist für ein grundlegendes Bruchzahlverständnis als eine formalbezogene Antwort. Vor diesem Hintergrund gilt es zu diskutieren, ob die Vergabe der Punkte (2 Punkte für Antworten, die nahezu tragfähig bzw. 3 Punkte für Aufgaben, die vollumfänglich tragfähig sind) getauscht werden sollten. Weiterhin lässt sich die angelegte Metrik bei Aufgabe 23 (vgl. Anhang I 1) insofern kritisch hinterfragen, als dass sich eine gleichmäßige Einteilung beim Zeichnen der kleinen Punkte schwierig gestaltet. Diese stellt letztlich zwar eine unabdingbare Voraussetzung für das zugrunde gelegte Verständnis dar, lässt sich zeichnerisch aber nur bedingt umsetzen. Weiterhin geben auch Aufgaben, die nicht bearbeitet und mit 0 Punkten bewertet wurden, keinen Aufschluss darüber, aus welchen Gründen die Schülerin oder der Schüler die Aufgabe nicht bearbeitet hat. Im Rahmen eines Paper-Pencil-Tests lässt sich nicht feststellen, ob eine Aufgabe bewusst ausgelassen wurde, weil die entsprechend erforderlichen Kompetenzen zur Bearbeitung dieser nicht vorhanden waren und die Nicht-Bearbeitung darauf schließen lässt, dass das Kind in dem jeweiligen Inhaltsbereich über unzureichende Kompetenzen verfügt. Darüber hinaus ermöglicht die Auswertung keine Aussagen darüber, ob die Nicht-Bearbeitung aufgrund von Sprach- und Verständnisproblemen hinsichtlich der Aufgabenstellung, bedingt durch Motivationsprobleme oder durch eine generelle Mathematik- bzw. Testangst erfolgte.

In der Weiterentwicklung des „BruKos“ sollten Aufgaben ergänzt werden, die nicht explizit gefördert wurden. Vor diesem Hintergrund können mögliche Transfereffekte analysiert werden, die „schließlich das Zielkriterium [darstellen, R.-F.K.], wenn es um die Prävention von Rechenschwäche geht“ (Krajewski & Simanowski, 2017, S. 97).

Allgemein besteht eine hohe sprachliche Herausforderung für die Lernenden in den offenen Aufgabenstellungen. Hußmann et al. (2014, S. 3) heben hervor, dass „die schriftsprachliche Darstellung zusätzliche Anforderungen“ stellt und dadurch die Abbildung individueller mathematischer Einsichten eingeschränkt sein kann. Aufgaben, die auf eine Beschreibung der Veränderung des Anteils abzielen, sind nach Wessel (2015, S. 3) sowohl konzeptuell als auch sprachlich herausfordernd. Insbesondere bei Lernenden mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen müssen eventuelle Schwierigkeiten beim Schreiben berücksichtigt werden. Der sprachliche Aspekt ist bei allen offenen Aufgaben grundlegend, jedoch liegt der Fokus auf der konzeptuellen innermathematischen Struktur. Der Auswertungsleitfaden berücksichtigt die benutzten sprachlichen Mittel nur implizit vor dem Hintergrund des verwendeten Fachvokabulars. Die sprachlichen Kompetenzen der Stichprobe wurden im Vorfeld überschätzt. Für Folgeprojekte ist es ratsam, bspw. das Salzburger Lese-Screening (SLS 2-9) oder den Salzburger Lese- und Rechtschreibtest (SLRT II) durchzuführen. Die korrelativen Werte, die diese Tests liefern, sind in ihrer Aussagekraft jedoch auch begrenzt, sodass weitere Variablen, wie bspw. der IQ, aufgenommen und überprüft werden müssten. Um wirklich ein fundiertes, grundlegendes Verständnis erfassen zu können, bietet sich eher eine Ergänzung um qualitative Interviews zu ausgewählten Aufgaben bzw. halbstandardisierte Leitfadeninterviews an, um zu überprüfen, ob die Lernenden mündlich mehr verbalisieren können.

Im Vergleich zu anderen Testinstrumenten stellt der hohe Anteil der offenen, verständnisorientierten Aufgaben eine Besonderheit dar und liefert auf Ebene der qualitativen Auswertung und Interpretation im Gegensatz zu geschlossenen Aufgaben wertvolle vertiefende Hinweise. Aus diesem Grund werden die angesprochenen Einschränkungen hinsichtlich der Testauswertung in Kauf genommen. Diese untermauern gleichzeitig die Herausforderung, Items zu entwickeln, die zur sensitiven Messung von Lernfortschritten über mehrere Messzeitpunkte geeignet sind (Tröster, 2009, S. 88 ff.)

Ein weiterer Aspekt, der im Nachhinein kritisch betrachtet werden muss, sind die in Teil I abgebildeten Rechenkästchen für optionale Nebenrechnungen. Diese haben während der Datenerhebung zu Missverständnissen bei einigen Schülerinnen und Schülern geführt. Aus den Aufgabenstellungen geht nicht deutlich genug hervor, ob (halb-)schriftliche Nebenrechnungen erwünscht sind oder nicht. Einige Lernende der Stichprobe haben sich (zeitlich) daran aufgehalten und die entsprechenden Aufgaben schriftlich berechnet, obwohl deren Bearbeitung ursprünglich auf das Kopfrechnen abzielt und die Möglichkeit des schriftlichen Rechnens nur optional ist. Letzteres bedarf bei der Einführung des „BruKos“ eines deutlicheren Hinweises und sollte auch in der schriftlichen Einführung auf Testebene angegeben werden.

Aus ökonomischer Perspektive lassen sich die relativ kurze Bearbeitungszeit sowie die Möglichkeit der flexiblen Testdurchführung positiv hervorheben. Als Gruppentest ohne zusätzlichen Materialeinsatz eignet sich der „BruKo“ besonders für inklusive Klassen. Aber auch im Rahmen diagnostischer Zielsetzungen bei Kleingruppen bzw. einzelnen Schülerinnen und Schülern ist der „BruKo“ insbesondere aufgrund der offenen, verständnisorientierten Aufgaben vielversprechend, um sowohl Aussagen über Lernstände als auch individuelle Vorstellungen treffen zu können.

9.4 Diskussion des Unterrichts- und Förderkonzepts

Das nachfolgende Kapitel diskutiert die Grenzen und das Potential des entwickelten Unterrichts- und Förderkonzepts hinsichtlich seines Einsatzes im inklusiv orientierten Mathematikunterricht. Vor dem Hintergrund der praxisnahen Durchführung beeinflussen die gegebenen Rahmenbedingungen sowohl die gesamte Untersuchungsstichprobe als auch die Durchführung des Unterrichts in den Klassen sowie die Arbeit in den Förderschleifen. Auf der einen Seite enthält das Forschungsfeld Schule viele Faktoren, die für die Versuchsleitung unkontrollierbar sind, auf der anderen Seite erhöhen aber genau diese auch die Praxistauglichkeit. Feldforschung und die damit verbundene Anpassung an reale Bedingungen der Praxis, d.h. ein Unterricht, der in der täglichen Schulpraxis durchgeführt wird, erfordert Kompromisse

> zwischen dem Wunsch nach möglichst differenzierter Erfassung und Berücksichtigung der Lernvoraussetzungen jedes einzelnen Kindes und dem Zwang, unter den Bedingungen knapper pädagogischer Ressourcen eine für alle zufriedenstellende und förderliche Lernumgebung zu gestalten: Zeit, Aufmerksamkeit für den einzelnen Schüler, Wahrnehmung von Lernschwierigkeiten und -fortschritte sind nicht beliebig vermehrbar. (Kahlert & Heimlich, 2012, S. 159)

In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus auf der konzeptionellen Entwicklung und Erprobung des Unterrichts- und Förderkonzepts sowie auf dessen Bedeutung für inklusionsorientierte Entwicklungsprozesse aus fachlicher, fachdidaktischer und sonderpädagogischer Perspektive. In diesem Kontext werden Möglichkeiten und Herausforderungen, die sich auf Seiten der Lehrkräfte ergeben, nur am Rande berücksichtigt, gleichwohl letzteres ebenfalls eine zentrale Komponente für die Entwicklung und praktische Umsetzbarkeit eines guten inklusiven Mathematikunterrichts darstellt (vgl. Korff, 2016b, S. 117). Nachfolgend werden zunächst ausgewählte Aspekte auf Klassenebene, daran anschließend auf Ebene der Förderschleifen erläutert, die kritisch zu betrachten sind und in der Weiterentwicklung des Unterrichts- und Förderkonzepts adaptiert werden sollten. Darüber hinaus werden die Aspekte hervorgehoben, die auf deskriptiver Ebene aus einer theoretischen Perspektive besonderes Potential für den inklusiv orientierten Mathematikunterricht versprechen, gleichwohl sie durch die Daten des vorliegenden Unterrichtsversuchs empirisch nicht belegt werden können. Eine genaue Analyse der didaktischen Gestaltungsmerkmale aus empirischer Perspektive ist aufgrund des Forschungsdesigns an dieser Stelle nicht zu leisten.

9.4.1 Klassenebene

Für den Einsatz im inklusiven Mathematikunterricht muss berücksichtigt werden, dass die vorliegende Unterrichts- und Förderkonzeption nicht für alle Kinder aller Entwicklungsstufen Lernmöglichkeiten im Sinne Feusers (2008) bereithält. Vor dem Hintergrund des Forschungsschwerpunktes ist sie für heterogene Lerngruppen im inklusiven Mathematikunterricht konzipiert. Die erste Durchführung hat allerdings gezeigt, dass die eingesetzten Aufgaben grundlegende Kenntnisse und elementare Kompetenzen im Bereich der Grundschulmathematik, bspw. hinsichtlich des kleinen Einmaleins, voraussetzen. Diese sind nicht nur bei Kindern mit (besonderen) Schwierigkeiten nach der Grundschulzeit jedoch häufig nicht hinlänglich aufgebaut, wie die Ergebnisse dieser und weiterer Studien zeigen. Die hier entwickelte Unterrichts- und Förderkonzeption bietet allerdings nicht den Raum, um bspw. das kleine Einmaleins verständnisorientiert anzubahnen, aufzubauen bzw. zu festigen. Dennoch weist sie exemplarisch eine hohe Bedeutsamkeit für ein fachlich orientiertes und differenziertes gemeinsames Lernen auf, indem sie die notwendigen Rahmenbedingungen für ein Lernen „miteinander am gleichen Gegenstand auf verschiedenen Stufen“ (Freudenthal, 1974, S. 166) bereitstellt. Die Verknüpfung beider Inhaltsbereiche ist als besonders vielversprechend hervorzuheben. In der Weiterentwicklung gilt es zu entscheiden, in welcher Form für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten zusätzlich kurze Phasen der direkten Instruktion integriert werden können, um bspw. noch gezielter an einzelnen Inhaltsbereichen arbeiten zu können. Zu überlegen ist auch, ob einzelne Phasen der direkten Instruktion eine die Lernentwicklung unterstützende Ergänzung zu dem hohen Anteil kommunikativ-kooperativer Lernformen darstellen können.

Hinsichtlich der didaktischen Leitideen lassen sich die zahlreichen fachlichen, fachdidaktischen und sonderpädagogischen Elemente hervorheben, die aus theoretischer und wissenschaftlicher Sicht vielversprechend für positive Lernentwicklungen sind. Sie wurden bereits ausführlich erläutert (Kap. 2.3 und 3.2) und werden an dieser Stelle nicht erneut differenziert aufgegriffen. Zwar war eine gezielte Analyse der einzelnen Gestaltungselemente im Rahmen dieses Forschungsprojektes nicht möglich, aber aus bereits dargelegten Gründen wird an den positiven und günstigen Auswirkungen der Unterrichts- und Förderkonzeption insgesamt festgehalten. Diese gilt es in weiteren Studien empirisch abzusichern. Dabei wird die Leitidee der unterrichtsintegrierten Diagnostik in Form von Standortbestimmungen konsequenter umzusetzen und zu nutzen sein.

Für die vorliegende Stichprobe gilt es zu berücksichtigen, dass die Zusammensetzung der Lerngruppen zum Zeitpunkt der Interventionsdurchführung erst seit ca. einem halben Jahr bestand und noch nicht gefestigt war. Aus sozialer Perspektive kann diese Tatsache durchaus Einfluss auf die individuellen Lernentwicklungen sowie das Gelingen kooperativer Lernformen nehmen. Die Einführung und das Einüben kooperativer Lernformen benötigt nicht nur bei neu zusammengesetzten Lerngruppen Zeit, die innerhalb der siebenwöchigen Intervention vermutlich nicht hinlänglich gegeben war. Die unterrichtlichen Veränderungen, die sich für die Schülerinnen und Schüler der Interventionsklassen im Zuge der siebenwöchigen Unterrichtseinheit ergeben haben, waren für einige Lernende zunächst vielmehr Lernstoff als Lernerleichterung (bspw. Gebrauch von Tipp-Karten, bevor die Lehrkraft um Hilfe gefragt wird).

Insgesamt scheint empfehlenswert zu sein, das sehr ausführliche Material an geeigneten Stellen zu kürzen, um den Umfang für die praktische Umsetzung in realen Unterrichtssettings zu reduzieren. In Kapitel 8.1.2 wurde auf die teilweise unterschiedliche Implementation in den Interventionsklassen hingewiesen. Diese erschwert die Analyse der vorliegenden Daten, denn eine zeitweise schwache Umsetzung des Unterrichts- und Förderkonzepts lässt nicht per se auf eine schwache Intervention schließen.

9.4.2 Förderebene

Bei Planung und Durchführung der Förderschleifen erwies sich die Verknüpfung von arithmetischen Grundlagen mit dem aktuellen Inhaltsbereich der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen einerseits als herausfordernd, andererseits als fruchtbar. Die inhaltliche Ausrichtung in den Förderschleifen hätte für die vorliegende Teilstichprobe durchaus noch basaler ansetzen können. Insbesondere Aufgaben wie bspw. „Lege die Aufgabe $2 \cdot 5$. Wie viele Plättchen benötigst du? Schiebe die Hälfte beiseite und finde eine passende Geteiltaufgabe.“, die u.a. zur Wiederholung des Halbierens und Verdoppelns sowie zur Festigung des kleinen Einmaleins eingesetzt wurden, setzen zumindest grundlegende Kenntnisse des arithmetischen Basisstoffs voraus. Für Kinder, die ohne Kompetenzen in diesem

Inhaltsbereich in die Sekundarstufe wechseln, stellen Aufgaben dieser Art eine Herausforderung dar. Die zur Verfügung stehende Zeit im Rahmen der Förderschleifen reicht jedoch nicht aus, um den Lernenden überhaupt erst einmal einen ersten Zugang zum kleinen Einmaleins ermöglichen zu können. Zumindest nicht dann, wenn der Fokus unter Berücksichtigung realistischer Gegebenheiten anstelle eines „Hinterherförderns“ der Grundschulmathematik auf der Verbindung des arithmetischen Basisstoffs mit aktuellen Inhaltsbereichen liegt. Die vorliegende Studie zeigt, dass im Kontext einer verständnisorientierten Förderung zu einem aktuellen Inhaltsbereich und den dafür relevanten Aspekten des arithmetischen Basisstoffs hinreichend Möglichkeiten zur Individualisierung und Differenzierung bereitgestellt werden müssen. Das Ermitteln individueller Lernstände im Sinne einer differenzsensiblen Unterrichtsplanung konnte im Rahmen der Intervention nur bedingt umgesetzt werden. Aufgrund der Tatsache, dass die Unterrichts- und Fördereinheit nicht explizit für die Stichprobe geplant wurde, sondern den Anspruch vertritt, einen allgemeingültigen Charakter zu haben, konnte sie in weiten Teilen zwar angepasst, jedoch nicht explizit auf die individuellen Bedürfnisse zugeschnitten werden. Didaktische und diagnostische Elemente, wie bspw. wöchentliche Standortbestimmungen, könnten im Rahmen einer intensiveren Analyse einen ersten Ansatzpunkt darstellen. Darüber hinaus stellt sich die Frage nach einer ausreichenden Adaptivität der Förderschleifen vor dem Hintergrund auftretender Disziplinprobleme der Lernenden, die teilweise zum Verlust wertvoller Lernzeit führten.

Das zweimalige Durchführen der Förderschleife pro Woche kostet zwar Personalressourcen, bewährt sich jedoch vor dem Hintergrund der dargestellten Ergebnisse (Aufarbeiten des Basisstoffs sowie Teilhabe und Teilnahme am Unterricht, was in den noch ausstehenden qualitativen Analysen darzustellen sein wird). Das vorliegende Unterrichts- und Förderkonzept kann demnach als erfolgsversprechend für den inklusiven Mathematikunterricht angesehen werden, da es einen „nachhaltigen Beitrag zur Sicherung der Teilhabe“ (Werner, 2019, S. 169) vieler Lernender in einer sozialen Situation wie dem Mathematikunterricht leistet. Der Ansatz, die zusätzlich geförderten Lernenden als Experten in den Klassenunterricht einzubinden, erwies sich als vielversprechend, ihn gilt es im Rahmen der Weiterentwicklung und für zukünftige Durchführungen noch stärker umzusetzen.

Kritisch betrachtet werden muss jedoch der Zeitpunkt, zu dem die Förderschleifen im regulären Unterrichtsbetrieb im Rahmen der vorliegenden Interventionsstudie durchgeführt werden konnten. Die zusätzliche Kleingruppenförderung fand überwiegend zwischen 14:00 und 15:00 Uhr und am Ende eines langen Schultages statt, was sich deutlich in mangelnder Motivation und vor allem fehlender Konzentration der Schülerinnen und Schüler mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen sowie teilweise auftretenden Disziplinproblemen gezeigt hat. Hier gilt es, in Zukunft andere Uhrzeiten zu finden, um die Effektivität der Förderung zu verbessern.

9.5 Zusammenfassung

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Testinstrument „BruKo“ zur Erhebung der quantitativen Daten liefert einen ersten Beitrag für ein kompetenzorientiertes Diagnostikinstrument für die Sekundarstufe I, das sowohl einen aktuellen Inhaltsbereich als auch die dafür relevanten Grundlagen des arithmetischen Basisstoffs erfasst. Mit dem Testinstrument können sowohl individuelle Lernstände als auch Lernprozesse abgebildet werden. Insbesondere die offenen, auf Verständnis orientierten Aufgaben bieten ein aussagekräftiges Potential für die tiefergehende Analyse des individuellen Bruchzahlverständnisses.

Vor dem Hintergrund der diskutierten Daten ist das Verhältnis der siebenwöchigen Intervention zu den bisherigen Lernjahren der Schülerinnen und Schüler zu beachten. Es ist nicht zu erwarten, dass eine derart neue und umfangreiche Unterrichts- und Förderkonzeption, wie sie im Rahmen der vorliegenden Dissertation erprobt wurde, in der Kürze des Interventionszeitraums das Lernen komplett umstellen kann. Darüber hinaus kann sie nur in der gesamten Komplexität des Unterrichtsalltags seriös evaluiert werden. Gleichzeitig führt eben diese Komplexität zu einer Überlagerung einzelner Gestaltungsprinzipien, die deren exakte Abbildbarkeit erschweren. Vor dem Hintergrund dieses praxisnahen Untersuchungsdesigns sind auch die dargestellten forschungsmethodischen Grenzen entsprechend einzuordnen.

Mit der vorliegenden Interventionsstudie konnte gezeigt werden, dass inklusiver Mathematikunterricht, der fachdidaktisch und sonderpädagogisch solide umgesetzt wurde, nach sieben Wochen keine großen empirischen Effekte zeigte. „Dass bestimmte Methoden nur schwache Evidenz produzieren heißt nicht, dass diese verzichtbar oder unbrauchbar sind. Gerade zu Beginn eines Evaluationsprozesses werden Verfahren benötigt [,] die erste Hinweise zur Brauchbarkeit geben und qualitative Informationen zum Zwecke der Überarbeitung liefern“ (Kuhl & Euker, 2016, S. 28). Für Rost (2013) ist „jede angemessene Datenanalyse, auch wenn als Ergebnis keine statistisch signifikanten Unterschiede herauskommen, sinnvoll“ (S. 203). Mit der vorliegenden Interventionsstudie liegt ein erster empirischer Ansatz vor, der zeigt, wie schwierig eine gezielte Förderung im inklusiven Mathematikunterricht ist und dass keine schnellen Effekte zu erwarten sind. Nach Kahlert und Heimlich (2012) lässt sich ohnehin kein Unterrichtskonzept „unter den Bedingungen von Inklusion“ (S. 161) ohne weiteres übertragen. Mit der hier entwickelten Unterrichts- und Förderkonzeption liegt ein umfangreiches Angebot vor, das über die Bereitstellung beispielhafter Aufgaben hinausgeht und eine differenzierte, vollständige Unterrichtseinheit mit dazugehörigen Förderschleifen liefert. Dieses sollte als praxiserprobtes und orientierungsgebendes Beispiel angesehen werden, das sowohl inhaltlich als auch methodisch an die jeweilige Lerngruppe sowie an die gegebenen Rahmenbedingungen angepasst werden muss. Denn: „Lehre ist immer ein Lernangebot und kann deswegen misslingen. Erfolgreich gelernt wird nur, wenn es dem Schüler gelingt, die äußerlich präsentierte Struktur der Informationen innerlich in eine adäquate Repräsentation zu überführen“ [Hervorheb. im Original] (Edelmann, 2000, S. 8).

10 Fazit und Implikationen für Forschung und Praxis

Die vorliegende Dissertation mit dem Titel „*Brüche inklusive – Eine Interventionsstudie zum Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses durch unterrichtsintegrierte Förderung im inklusiv orientierten Mathematikunterricht auch für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen*“ beschäftigt sich mit der Entwicklung, Erprobung und Evaluation einer komplexen Unterrichts- und Förderkonzeption zur anschaulichen Einführung der Zahlbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen. Darüber hinaus wird ein inhaltlich eng verknüpftes Testinstrument („BruKo“) zur differenzierten Diagnostik individueller verstehensorientierter Kompetenzen entwickelt und empirisch erprobt. Auf theoretischer Ebene werden fachliche und fachdidaktische Aspekte mit sonderpädagogischen Förderansätzen vereint und auf Entwicklungsebene in einer umfangreichen praxisorientierten Unterrichts- und Fördereinheit konkretisiert. Ein Schwerpunkt liegt auf dem Von- und Miteinanderlernen an einem grundlegenden Gegenstand in heterogenen Lerngruppen. Besonders berücksichtigt werden Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen. Mit dem Ziel des anschlussfähigen Lernens erhalten sie im Rahmen von präventiv ausgerichteten Förderschleifen eine mit dem Klassenunterricht inhaltlich und methodisch eng verzahnte Kleingruppenförderung zu relevanten Aspekten des arithmetischen Basisstoffs sowie zu zentralen Aspekten des grundlegenden Bruchzahlverständnisses. Eine unter realen Bedingungen der Schulpraxis durchgeführte empirische Erprobung erfolgte in einer siebenwöchigen quasiexperimentellen explorativen Interventionsstudie im Prä-/Posttest-Design mit drei Interventionsklassen und einer Vergleichsklasse in einem fünften Jahrgang an einer Integrierten Gesamtschule (N = 103). Als Messinstrumente wurden ein standardisierter Mathematiktest sowie der selbstentwickelte „BruKo“ eingesetzt. Im Rahmen der quantitativen Datenauswertung zeigen die inferenzstatistischen Analysen, dass der verständnisorientierte Aufbau eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses im Vergleich zum traditionellen Mathematikunterricht ein höchst anspruchsvoller Prozess ist und vermutlich eines längeren Interventionszeitraums bedarf. Die Interventionsgruppen konnten auf Klassenebene keine nachhaltig bedeutsamen Lernzuwächse erreichen. Auch auf Ebene der Förderschleifen fallen die erhofften Effekte moderat aus. Eine positive Wirkung zeigt sich in Bezug auf den arithmetischen Basisstoff, für das grundlegende Bruchzahlverständnis konnte diese allerdings nur in Tendenzen nachgewiesen werden. Insgesamt wurde ein vielversprechender Ansatz für den inklusiv orientierten Mathematikunterricht vorgelegt, der gleichzeitig die Komplexität derart praxisnaher Untersuchungen aufzeigt.

Die Ergebnisse der vorliegenden Interventionsstudie weisen hohe praktische Relevanz auf, auch wenn aus Studien wie dieser nicht unmittelbar Konsequenzen für die Unterrichtspraxis abgeleitet werden können. Sie stellen vielmehr erste Orientierungspunkte für inklusive Lernumwelten dar, die einer "pädagogischen Interpretation und eigenständigen Übertragung in bewusst gestaltete Praxis in Schule und Unterricht bedürfen" (Wember, 2015, S. 457). Dass im Rahmen dieser Forschungsarbeit erste, eher ernüchternde Ergebnisse vorlegt werden, schmälert nicht ihren Wert, denn auch eine angemessene Datenanalyse, die keine statistisch signifikanten Effekte bilanzieren kann, leistet einen wertvollen Beitrag zum Stand der Forschung (Rost, 2013, S. 203). Nachfolgend sollen vor dem Hintergrund der in Kapitel 8 dargestellten und in Kapitel 9 diskutierten Ergebnisse Schlussfolgerungen gezogen und Implikationen für die weitere Forschung und Praxis aufgezeigt werden.

Bei der in dieser Arbeit entwickelten, erprobten und evaluierten Unterrichts- und Förderkonzeption handelt sich nicht um eine gesonderte Förderung zu ausgewählten Inhaltsbereichen, sondern um einen aufwändigen und umfangreichen Ansatz für den inklusiv orientierten Mathematikunterricht, der nicht nur von der Versuchsleiterin, sondern auch von anderen Lehrkräften im Rahmen des regulären Unterrichts eingesetzt wurde. Im Mittelpunkt stand die Entwicklung eines Prototyps von Unterricht, der versucht, bestimmte zentrale fachliche, fachdidaktische und sonderpädagogische Merkmale zu konkretisieren und deren inklusionsdidaktisches Potential in einer ersten praktischen Erprobung herauszustellen, um erste grundlegende und richtungsweisende Erkenntnisse gewinnen zu können.

Die Unterrichtsstudie ist exemplarisch für die Implementation einer unterrichtsintegrierten Förderung, die ausgehend von einem gemeinsamen inhaltlichen Schwerpunkt (Einführung des grundlegenden Bruchzahlverständnisses) darauf abzielt, sowohl den Klassenunterricht im Kontext des Gemeinsamen Lernens für alle Schülerinnen und Schüler lernförderlich zu gestalten als auch eine vertiefende Auseinandersetzung mit zentralen Aspekten des mathematischen Basisstoffs in eng mit dem Unterricht verknüpften Förderschleifen für die lernschwächsten Rechnerinnen und Rechner zu unterstützen. Insgesamt ist in den unterrichtspraktischen Erfahrungen und in den Forschungsaktivitäten deutlich geworden, dass die enge Verknüpfung zwischen Fachdidaktik und Sonderpädagogik, zwischen unterrichtsintegrierter Förderung und Förderschleifen sowie zwischen arithmetischem Basisstoff und aktuellem Unterrichtsinhalt durchaus anspruchsvoll ist, gleichzeitig aber vielfältige inklusivdidaktische Chancen birgt. Insbesondere für Lernende mit (besonderen) Schwierigkeiten im Mathematiklernen zeigen die Verknüpfungen auf den drei Ebenen reichhaltiges lernförderliches Potential. Kinder mit (besonderen) Lernschwierigkeiten besuchen die Sekundarschule und sie benötigen einen inklusiv orientierten, verständnisorientiert und differenziert zu gestaltenden Mathematikunterricht für alle, wie er im Rahmen der vorliegenden Studie exemplarisch realisiert wurde.

LITERATURVERZEICHNIS

Ademmer, C., Prediger, S. & Reiche, A. (2018). Gemeinsam und individuell. Eine inklusive Unterrichtseinheit zu Verstehensgrundlagen der Arithmetik in Klasse 5. *MNU Journal* (5). Zugriff am 05.09.2019. Verfügbar unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/18-MNU-Ademmer-etal-Gemeinsam-Individuell-Arithmetik-Original.pdf

Aebli, H. (1963 (Original 1951)). *Psychologische Didaktik. Didaktische Auswertung der Psychlogie von Jean Piaget*. Stuttgart: Klett.

Aebli, H. (1963). *Über die geistige Entwicklung des Kindes*. Stuttgart: Klett.

Aebli, H. (1976). *Grundformen des Lehrens. Eine allgemeine Didaktik auf kognitionspsychologischer Grundlage*. Stuttgart: Klett.

Aebli, H. (1985). Das operative Prinzip. *mathematik lehren*, 4-6.

Aebli, H. (2001). *Zwölf Grundformen des Lehrens* (11. Aufl.). Stuttgart: Klett.

Ahrbeck, B., Bleidick, U. & Schuck, K. D. (1997). Pädagogischpsychologische Modelle der inneren und äußeren Differenzierung für lernbehinderte Schüler. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie* (S. 739-769). Göttingen u.a.: Hogrefe.

Ainscow, M. (2010). Developing Inclusive Education System: What are the Levers for Change? In P. Hicks & G. Thomas (Hrsg.), *Inclusion and diversity in education. Developing Inclusive Schools and School systems* (S. 1-13). Los Angeles: Sage.

Ainscow, M., Dyson, A., Booth, T. & Farell, P. (2006). *Improving schools, developing inclusion* (Improving learning TLRP series). London u.a.: Routledge.

Ainscow, M., Dyson, A., Goldrick, S. & West, M. (2013). Making schools effective for all: rethinking the task. *School Leadership & Management, 32* (3), 197-213.

Amrhein, B. & Reich, K. (2014). Inklusive Fachdidaktik. In B. Amrhein & M. Dziak-Mahler (Hrsg.), *Fachdidaktik inklusiv. Auf der Suche nach didaktischen Leitlinien für den Umgang mit Vielfalt in der Schule* (1. Aufl., S. 31-44). Münster: Waxmann.

Andermann, E. M. & Midgley, C. (1997). Changes in Achievement Goal Orientations, Perceived Academic Competence, and Grades across the Transition to Middle-Level Schools. *Contemporary Educational Psychology, 22,* 269-298. Verfügbar unter https://pdfs.semanticscholar.org/9260/c8df707ef945978d84a379031d6026bb9738.pdf

Arndt, A.-K., Stenger, S. & Werning, R. (2014). Gestaltung und Entwicklung inklusiven Unterrichts. *Schulmanagement-Handbuch 152* (4), 6-24.

Artelt, C., Neuenhaus, N., Lingel, K. & Schneider, W. (2012). Entwicklung und wechselseitige Effekte von metakognitiven und bereichsspezifischen Wissenskomponenten in der Sekundarstufe. *Psychologische Rundschau, 63* (1), 18-25.

Artiles, A. & Dyson, A. (2009). Inclusive education in the globalization age: the promise of a comparative cultural-historical analysis. In D. Mitchell (Hrsg.), *Contextualising Inclusive*

Education. Evaluating Old and New International Perspectives (S. 37-62). London: Routledge.

Aster, M. v. (2013). Wie kommen Zahlen in den Kopf und was kann sie daran hindern? Ein Modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen. In M. v. Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik; mit 8 Tabellen* (2., überarb. und erw. Aufl., S. 15-38). Göttingen u.a.: Vandenhoeck & Ruprecht.

Aster, M. v. & Shalev, R. S. (2007). Number development and development dyscalculia. *Developmental Medicine and Child Neurology, 49* (11), 868-873.

Balzer, L., Fritz, A., Ricken, G. & Jäger, R. S. (2007). Der Rechenschwäche auf der Spur - eine Re-Analyse von Mathematik-Leistungsdaten eines kompletten Schülerjahrgangs der achten Klassenstufe in Rheinland-Pfals. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 54,* 177-190.

Bartnitzky, H. (2012). Fördern heißt Teilhabe. Heft 1. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern - Kompetenzen stärken in der Eingangsstufe (Kl. 1 und 2)* (Heft 1: Fördern - warum, wer, wie, wann?, S. 6-36). Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Bauer, L. (1993). Das operative Prinzip als umfassendes, allgemeingültiges Prinzip für das Mathematiklernen? Didaktisch-methodische Überlegungen zum Mathematikunterricht in der Grundschule. *ZDM* (2), 76-83.

Bauer, L. (2008). Wie übt man Bruchrechnen? *Lernchancen, 11* (61-62), 16-23.

Bauer, L. (2009). Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht der Hauptschule. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (1. Aufl., S. 141-166). Weinheim: Beltz.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1-56). Köln: Aulis-Verl. Deubner.

Behrensen, B., Gläser, E. & Solzbacher, C. (2015). Individuelle Förderung in der Grundschule. Eine bedeutsame Aufgabe aller Fachdidaktiken. In B. Behrensen, E. Gläser & C. Solzbacher (Hrsg.), *Fachdidaktik und individuelle Förderung in der Grundschule* (S. 1-10). Hohengeren: Schneider.

Beller, S. (2006). *Empirisch forschen lernen. Konzepte, Methoden, Fallbeispiele, Tipps* (2. überarb. Aufl.). Bern: Huber.

Besuden, H. (2000). Bruch- und Prozentrechnung. Einfach und schülergerecht. *Lernchancen, 3* (17), 4-9.

Bittrich, K. & Blankenberger, S. (2011). *Experimentelle Psychologie. Experimente planen, realisieren, präsentieren*. Weinheim: Beltz.

Blackorby, J., Schiller, E., Knokey, A.-M. & Wagner, M. (2007). Relationships between the school programs of students with disabilities and their longitudinal outcomes. In J.

Blackorby, A.-M. Knokey, M. Wagner, P. Levine, E. Schller & C. Sumi (Hrsg.), *SEELS: What makes a difference? Influences on outcomes for students with disabilities .*

Bleidick, U. & Heckel, G. (1970). *Praktisches Lehrbuch des Unterrichts in der Hilfsschule (Lernbehindertenschule)* (2., durchges. u. erw. Aufl.). Berlin: Marhold.

Bless, G. (2007). *Zur Wirksamkeit der Integration. Forschungsüberblick, praktische Umsetzung einer integrativen Schulform, Untersuchungen zum Lernfortschritt* (3., unveränd. Aufl.). Bern u.a.: Haupt.

Bless, G., Klaghofer, R., Haeberlin, U. & Moser, U. (2003). *Die Integration von Lernbehinderten. Versuche, Theorien, Forschungen, Enttäuschungen, Hoffnungen* (4., unveränd. Aufl.). Bern u.a.: Haupt.

Blumenthal, Y. & Mahlau, K. (2017). Diagnostik und Inklusion. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 86* (4), 340-342.

Boaler, J. (2014). Ability Grouping in Mathematics Classrooms. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 1-5). Dordrecht: Springer.

Boban, I. & Hinz, A. (2003). *Index für Inklusion. Lernen und Teilhabe in der Schule der Vielfalt entwickeln.* Halle-Wittenberg: Martin-Luther-Universität.

Bönsch, M. (2009). *Intelligente Unterrichtsstrukturen. Eine Einführung in die Differenzierung.* Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Bönsch, M. (2015). Die inklusive Schule braucht gute Differenzierungskonzepte. Innere Differenzierung gelungen umsetzen. *Schulverwaltung: Zeitschrift für Schulentwicklung und Schulmanagement, 24* (12), 342-344.

Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler* (4., überarb. Aufl.). Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

Bortz, J. & Lienert, G. A. (2008). *Kurzgefasste Statistik für die klinische Forschung. Leitfaden für die verteilungsfreie Analyse kleiner Stichproben* (3., aktual. u. bearb. Aufl.).

Bortz, J., Lienert, G. A. & Boehnke, K. (2008). *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik* (3., korr. Aufl.). Heidelberg: Springer.

Bortz, J. & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7., vollst. überarb. u. erw. Aufl.).

Bosch, F. (2010). *Kooperatives Lehren und Lernen im schulischen Unterricht* (1. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Bosch, F. (2015). *Kooperatives Lernen. Theorie - Anwendung - Wirksamkeit* (2., überarb. u. erw. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Brandt, B. & Nührenbörger, M. (2009). Kinder im Gespräch über Mathematik. Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht. *Die Grundschulzeitschrift, 23* (222/223), 28-33.

Brauner, U., Hußmann, S., Matull, I., Prediger, S. & Verschraegen, J. (2011). *Mathewerkstatt. Mittlerer Schulabschluss - Allgemeine Ausgabe 5. Schuljahr* (Barzel, B. von, Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S., Hrsg.): Cornelsen (Rechenbausteine. Diagnose und Fördern. Handreichung für den Unterricht. Mit Lösungen zu den Rechenbausteinen).

Bruder, R., Linneweber-Lammersitten, H. & Reibold, J. (2015). Individualisieren und differenzieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 513-534). Berlin Heidelberg: Springer.

Brügelmann, H. & Brinkmann, E. (1994). Individualisierung "von unten" statt Differenzierung "von oben". Fehlerverständnis und Fehlertoleranz als Grundlage wirksamer Förderung. *Grundschulunterricht Mathematik, 41* (2), 9-12.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J. S. (1970). *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Berlin-Verl. [u.a.].

Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie* (Sprache und Lernen, Bd. 5). Berlin: Berlin-Verl. [u.a.].

Bruner, J. S. (1996). *The Culture of Education*. Cambridge: Harvard University Press.

Brüning, L. & Saum, T. (2009). *Erfolgreich unterrichten durch Kooperatives Lernen. Strategien zur Schüleraktivierung. Band 1* (5. überarb. Aufl.). Essen: Neue Deutsche Schule.

Büchter, A. (2006). Kompetenzorientierte Diagnose im Mathematikunterricht. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik ; Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 6.3. bis 10.3.2006 in Osnabrück* (S. 155-158). Hildesheim: Franzbecker; IEEM Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts.

Büchter, A. (2014). Das Spiralprinzip. Begegnen - Wiederaufgreifen - Vertiefen. *mathematik lehren, 31* (182), 2-9.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Budde, J. & Blasse, N. (2017). Forschung zu inklusivem Unterricht. In B. Lütje-Klose, S. Miller, S. Schwab & B. Streese (Hrsg.), *Inklusion: Profile für die Schul- und Unterrichtsentwicklung in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Theoretische Grundlagen - Empirische Befunde - Praxisbeispiele* (Beiträge zur Bildungsforschung, Bd. 2, S. 239-252). Münster / New York: Waxmann.

Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (Hrsg.). (1997). *Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts*. Zugriff am 08.02.2018. Verfügbar unter http://www.blk-bonn.de/papers/heft60.pdf

Bundschuh, K. & Winkler, C. (2014). *Einführung in die sonderpädagogische Diagnostik*. München: Ernst Reinhardt Verlag.

Carle, U. (2017). Eckpunkte für die Entwicklung inklusiven Unterrichts. In F. Hellmich & E. Blumberg (Hrsg.), *Inklusiver Unterricht in der Grundschule* (S. 15-33). Stuttgart: Kohlhammer.

Cohen, J. (1992). A Power Primer. *Psychological Bulletin, 112* (1), 155-159.

Deutsche UNSECO-Kommission e.V. (2014). *Inklusion: Leitlinien für die Bildungspolitik* (3., erw. Aufl.). Bonn.

Deutscher, T., Akinwunmi, K. & Selter, C. (2014). Operationsverständnis - Hinweise zu den Diagnose- und Förderbausteinen. In S. Prediger, C. Selter, S. Hußmann & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen.* Berlin: Cornelsen.

Deutscher, T., Prediger, S. & Selter, C. (2013). Mathe sicher können - Sicherung mathematischer Basiskompetenzen in der unteren Sekundarstufe I. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster* (S. 252-255). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Deutscher Bildungsrat. (1973). *Zur pädagogischen Förderung behinderter und von Behinderung bedrohter Kinder und Jugendlicher. Empfehlungen der Bildungskommission*. Bonn: Klett-Cotta.

Deutscher Bundestag. (2008). Gesetz zu dem Übereinkommen der Vereinten Nationen vom 13. Dezember 2006 über die Rechte von Menschen mit Behinderungen sowie zu dem Fakultativprotokoll vom 13. Dezember 2006 zum Übereinkommen der Vereinten Nationen über die Rechte von Menschen mit Behinderungen (Teil II). Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter www.un.org/depts/german/uebereinkommen/ar61106-dbgbl.pdf

Dhaouadi, Y. (2008). Förderplanung und Förderpläne. In K.-H. Arnold, O. Graumann & A. Rachkockine (Hrsg.), *Handbuch Förderung. Grundlagen, Bereiche und Methoden der individuellen Förderung von Schülern* (S. 150).

Diener, M. & Schmassmann, M. (2012). *Lernschwierigkeiten entschärfen - aber wie?* Zürich: Veband Dyslexie (S. 5-13). Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter https://phzh.ch/MAP_DataStore/81707/publications/Lernschwierigkeiten.pdf

Dilling, H., Mombour, W. & Schmidt, M. H. (2015). *Internationale Klassifikation psychischer Störungen. ICD-10 Kapitel V F). Klinisch-diagnostische Leitlinien*. Bern: Hogrefe.

Drews, D. (2008). Children's mathematical errors and misconceptions: perspectives on the teacher's role. In A. Hansen (Hrsg.), *Children's errors in mathematics. Understanding common misconceptions in primary school* (14-21). Exeter: learning matters.

Edelmann, W. (2000). Erfolgreicher Unterricht. Was wissen wir aus der Lernpsychologie? *Pädagogik* (3), 6-9.

Ehlert, A., Fritz, A., Arndt, D. & Leutner, D. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 34* (2), 237-263.

Ehlert, A., Fritz, A. & Langhorst, P. (2011). Das Teil-Teil-Ganze-Konzept. *MNU PRIMAR, 3* (1), 10-17.

Ennemoser, M. & Krajewski, K. (2007). Effekte der Förderung des Teil-Ganzes-Verständnisses bei Erstklässlern mit schwachen Mathematikleistungen. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 76* (3), 228-240.

Ennemoser, M., Krajewski, K. & Schmidt, S. (2011). Entwicklung und Bedeutung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen und eines basalen Konventions- und Regelwissens in den Klassen 5 bis 9. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 43* (4), 228-242.

Fenell, F. S. & Karp, K. (2017). Fraction Sense: Foundational Understandings. *Journal of learning disabilities, 50* (6), 648-650.

Fennell, F. & Karp, K. S. (2017). Fraction Sense: Foundational Understandings. *Journal of learning disabilities, 50* (6), 618-650.

Feuser, G. (1989). Allgemeine integrative Pädagogik und entwicklungslogische Didaktik. *Behindertenpädagogik* (28), 4-48.

Feuser, G. (1995). *Behinderte Kinder und Jugendliche. Zwischen Integration und Aussonderung*. Darmstadt: Wiss. Buchges.

Feuser, G. (1998). Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand. Didaktisches Fundamentum einer Allgemeinen (integrativen) Pädagogik. In A. Hildeschmidt & I. Schnell (Hrsg.), *Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle* (S. 19-35). Weinheim und München: Juventa-Verl.

Feuser, G. (2005). *Behinderte Kinder und Jugendliche. Zwischen Integration und Aussonderung* (2., unveränd. Aufl.). Darmstadt: Wiss. Buchges.

Feuser, G. (2008). Lernen am "gemeinsamen Gegenstand". In K. Argger & E. M. Waibel (Hrsg.), *Entwicklung der Person durch Offenen Unterricht. Das Kind im Mittelpunkt: Nachhaltiges Lernen durch Persönlichkeitserziehung* (S. 151-165). Brigg Pädagogik Verlag.

Feuser, G. (2009). Momente entwicklungslogischer Didaktik einer Allgemeinen (integrativen) Pädagogik. In H. Eberwein & S. Knauer (Hrsg.), *Handbuch Integrationspädagogik* (7. Auflage, S. 280-294). Weinheim und Basel: Beltz.

Feuser, G. (2011). Entwicklungslogische Didaktik. In A. Kaiser, D. Schmetz, P. Wachtel & B. Werner (Hrsg.), *Didaktik und Unterricht* (S. 86-100). Stuttgart: Kohlhammer.

Feuser, G. (2013). Die "Kooperation am Gemeinsamen Gegenstand". *Behinderte Menschen - Zeitschrift für gemeinsames Leben, Lernen und Arbeiten* (2), 17-35.

Field, A. (2015). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics* (4th edition). London: Sage.

Fischer, U., Roesch, S. & Moeller, K. (2017). Diagnostik und Förderung bei Rechenschwäche. *Lernen und Lernstörungen, 6* (1), 25-38.

Flick, U. (2016). *Sozialforschung. Methoden und Anwendungen. Ein Überblick für die BA-Studiengänge.* (3. Auflage). Reinbek: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

Freesemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen* (Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, Bd. 16). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1974). Die Stufen im Lernprozeß und die heterogene Lerngruppe im Hinblick auf die Middenschool. *Neue Sammlung* (14), 161-172.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1987). Theoriebildung zum Mathematikunterricht. *ZDM, 3,* 96-103.

Fritz, A. & Ricken, G. (2005). Früherkennung von Kindern mit Schwierigkeiten im Erwerb von Rechenfertigkeiten. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), *Diagnostik von Mathematikleistungen* (Tests und Trends, N.F., 4, S. 5-27). Göttingen: Hogrefe.

Fritz, A. & Ricken, G. (2008). *Rechenschwäche*. München: Reinhardt.

Fritz, A., Ricken, G. & Balzer, L. (2009). Warum fällt manchen Kindern das Rechnen schwer? In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (1. Aufl., S. 12-29). Weinheim: Beltz.

Fröhlich, I. & Prediger, S. (2008). Sprichst du Mathe? Kommunizieren in und mit Mathematik. *Praxis der Mathematik in der Schule, 49* (24), 1-8.

Fuchs, L. S., Malone, A. S., Schumacher, R. F., Namkung, J. & Wang, A. (2017). Fraction Intervention for Students With Mathematics Difficulties: Lessons Learned From Five Randomized Controlled Trials. *Journal of learning disabilities, 50* (6), 631-639.

Füssel, H.-P. & Kretschmann, R. (1993). *Gemeinsamer Unterricht für behinderte und nichtbehinderte Kinder*. Witterschlick/Bonn: Verlag Marg.

Gaidoschik, M. (2008). "Rechenschwäche" in der Sekundarstufe: Was tun? *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 29* (3/4), 287-294.

Gaidoschik, M. (2009). *"Das muss man sich einfach merken"??? Schwierigkeiten mit dem Einmaleins: Einige Anregungen für Vorbeugung und Abhilfe* (überarb. u. erw. Fassung). Zugriff am 29.10.2019. Verfügbar unter http://www.recheninstitut.at/wp-content/uploads/2011/10/einmaleins1.pdf

Gaidoschik, M. (2012). Mit den Waffen der Mathematik gegen "Rechenschwäche". In G. N. Müller, C. Selter & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben.* (S. 144-149). Stuttgart: Klett.

Gaidoschik, M. (2015). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten* (2 Aufl.). Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

Gebhardt, M., Oelkrug, K. & Tretter, T. (2013). Das mathematische Leistungsspektrum bei Schülerinnen und Schülern mit sonderpädagogischem Förderbedarf in der Sekundarstufe. *Empirische Sonderpädagogik* (2), 130-143.

Generalversammlung der Vereinten Nationen. (2006). Übereinkommen über die Rechte von Menschen mit Behinderungen (Convention on the Rights of Persons with Disabilities) vom 13.12.2006.

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P. & Flojo, J. (2009). Mathematics Instruction for Students with Learning Disabilities: A Meta-Analysis of Instructional Components. *Review of Educational Research, 79* (3), 1202-1242.

Gersten, R. & Jordan, N. C. (2017). Introduction to the Special Series on Fraction Learning. *Journal of learning disabilities, 50* (6), 712-613.

Gerster, H.-D. (2013). Anschaulich rechnen - im Kopf, halbschriftlich, schriftlich. In M. v. Aster (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (2., überarb. u. erw. Aufl., S. 195-229). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Gillies, R. M. & Ashman, A. F. (2000). The Effects of Cooperative Learning on Students with Learning Difficulties in the Lower Elementary School. *Journal of special education, 34,* 19.27.

Ginsburg-Block, M., Rohrbeck, C. A. & Fantuzzo, J. W. (2006). A Meta-Analytic Review of Social, Self-Concept, and Behavioral Outcomes of Peer-Assisted Learning. *Journal of Educational Psychology, 98* (4), 732-749.

Girulat, A., Nührenbörger, M. & Wember, F. B. (2013). Fachdidaktisch fundierte Reflexion von Diagnose und individueller Förderung im Unterrichtskontext - am Beispiel des Faches Mathematik unter Beachtung sonderpädagogischer Förderung. In S. Hußmann & C. Selter (Hrsg.), *Diagnose und individuelle Förderung in der MINT-Lehrerfortbildung. Das Projekt dortMINT* (S. 150-167). Münster/New York/München/Berlin: Waxmann.

Götze, D. (2007). *Mathematische Gespräche unter Kindern*. Hildesheim: Franzbecker.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Desgin research from a learning design perspective. In Akker, Jan J. H. van den, K. Gravemeijer, S. McKenny & N. Nieven (Eds.), *Educational design research* (pp. 17-51). London: Routledge.

Griebel, W. & Niesel, R. (2004). *Transitionen: Fähigkeit von Kindern in Tageseinrichtungen fördern, Veränderungen erfolgreich bewältigen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Grosche, M. (2015). Was ist Inklusion? Ein Diskussions- und Positionsartikel zur Definition von Inklusion aus Sicht der empirischen Bildungsforschung. In P. Kuhl, P. Stanat, B. Lütje-Klose, C. Gresch, H. A. Pant & M. Prenzel (Hrsg.), *Inklusion von Schülerinnen und Schülern mit sonderpädagogischem Förderbedarf in Schulleistungserhebungen* (S. 17-39). Wiesbaden: Springer VS.

Grosche, M., Piezunka, A. & Schaffus, T. (2017). Vier Definitionen von schulischer Inklusion und ihr konsensueller Kern. Ergebnisse von Experteninterviews mit Inklusionsforschenden. *Unterrichtswissenschaft, 45* (4), 207-222.

Grünke, M. (2006). Zur Effektivität von Fördermethoden bei Kindern und Jugendlichen mit Lernstörungen. *Kindheit und Entwicklung, 15* (4), 239-254.

Hager, W. (2000). Zur Wirksamkeit von Interventionsprogrammen: Allgemeine Kriterien der Wirksamkeit von Programmen in einzelnen Untersuchungen. In W. Hager, J.-L. Patry & H. Brezing (Hrsg.), *Handbuch Evaluation psychologischer Interventionsmaßnahmen. Standards und Kriterien* (1. Aufl., S. 153-168). Verlag Hans Huber.

Häsel-Weide, U. (2015). Gemeinsam Mathematik lernen. Überlegungen für den inklusiven Mathematikunterricht. *GS aktuell* (130), 3-7.

Häsel-Weide, U. (2016a). Mathematik gemeinsam lernen - Lernumgebungen für den inklusiven Mathematikunterricht. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht – Mathematiklernen in ausgewählten Förderschwerpunkten. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2016* (Bd. 6, S. 9-24). University of Bamberg Press.

Häsel-Weide, U. (2016b). "Mathematik inklusive": Lernchancen im inklusiven Anfangsunterricht. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 07. bis 11. März 2016 in Heidelberg* (S. 365-368). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Häsel-Weide, U. (2016c). Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen. In S. Hußmann, M. Nührenbörger, S. Prediger & C. Selter (Hrsg.), *Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Häsel-Weide, U. (2017). Inklusiven Mathematikunterricht gestalten. Anforderungen an die Lehrerausbildung. In J. Leuders, T. Leuders, S. Prediger & S. Ruwisch (Hrsg.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen. Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung* (S. 17-28). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2012). Fördern im Mathematikunterricht. Heft 4. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern - Kompetenzen stärken in der Eingangsstufe (Kl. 1 und 2)* (Heft 4, S. 6-48). Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2013a). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern - Kompetenzen stärken (ab Klasse 3)* (Bd. 2). Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2013b). Mathematiklernen im Spiegel von Heterogenität und Inklusion. *Mathematik differenziert* (2), 6-8.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2015a). Aufgabenformate für einen inklusiven Arithmetikunterricht. In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. M. Lüken (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 58-74). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2015b). Individuelle Förderung im Mathematikunterricht. In B. Behrensen, E. Gläser & C. Solzbacher (Hrsg.), *Fachdidaktik und individuelle Förderung in der Grundschule* (S. 29-42). Hohengeren: Schneider.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2017a). *Gemeinsam Mathematik lernen. Mit allen Kindern rechnen* (Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 144). Frankfurt am Main: Grundschulverband e.V.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2017b). Grundzüge des inklusiven Mathematikunterrichts. Mit allen Kindern rechnen. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen. Mit allen Kindern rechnen* (Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 144, S. 8-21). Frankfurt am Main: Grundschulverband e.V.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2017c). Produktives Fördern im inklusiven Mathematikunterricht - Möglichkeiten einer mathematisch ausgerichteten Diagnose und individuellen Förderung. In F. Hellmich & E. Blumberg (Hrsg.), *Inklusiver Unterricht in der Grundschule* (S. 213-228). Stuttgart: Kohlhammer.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2014). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen* (2. Aufl.). Seelze: Klett Kallmeyer.

Häsel-Weide, U. & Prediger, S. (2017). Förderung und Diagnose im Mathematikunterricht - Begriffe, Planungsfragen und Ansätze. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter & C. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 167-181). Seelze: Klett Kallmeyer.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 71-87.

Hasemann, K. (1986). Bruchvorstellungen und die Addition von Bruchzahlen. *mathematik lehren* (16), 16-19.

Hasemann, K. (1993). Individuelle mathematische Lernprozesse. *mathematica didactica, 16* (2), 56-75.

Hasemann, K. & Mangel, H.-P. (1999). Individuelle Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern bei der Einführung der Bruchrechnung im 6. Schuljahr. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 20* (2-3), 138-165.

Hattermann, M., Meckel, K. & Schreiber, C. (2014). Inklusion im Mathematikunterricht - das geht! In B. Amrhein & M. Dziak-Mahler (Hrsg.), *Fachdidaktik inklusiv. Auf der Suche nach didaktischen Leitlinien für den Umgang mit Vielfalt in der Schule* (1. Aufl., S. 201-219). Münster: Waxmann.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen*. Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern - Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos Verlag.

Heckmann, K. & Padberg, F. (2008). *Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, Bd. 1). Heidelberg: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. *mathematik lehren* (78), 20-22, 47-48.

Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern - Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis Mathematik, 48* (11), 1-7.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77-115). Berlin Heidelberg: Springer.

Heimlich, U. (2008). Heil- und Sonderpädagogik. In H. Faulstich-Wieland & P. Faulstich (Hrsg.), *Erziehungswissenschaft. Ein Grundkurs.* (S. 510-531). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Heimlich, U. (2009). *Lernschwierigkeiten*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Heimlich, U. (2014). Teilhabe, Teilgabe oder Teilsein? Auf der Suche nach den Grundlagen inklusiver Bildung. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 83* (1), 1-5.

Heimlich, U. (2016). Gemeinsamer Unterricht im Rahmen inklusiver Didaktik. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (3. Aufl., S. 67-80). Stuttgart: Kohlhammer.

Heimlich, U., Lutz, S. & Wilfert de Icaza, K. (2013). *Ratgeber Förderdiagnostik. Feststellung des sonderpädagogischen Förderbedarfs im Förderschwerpunkt Lernen*. Hamburg: Prolog-Verlag.

Heinrich, M., Urban, M. & Werning, R. (2013). Ausbildung und Professionalisierung von Fachkräften zur Realisierung inklusiver Bildung in Deutschland. In H. Döbert & H. Weishaupt (Hrsg.), *Inklusive Bildung professionell gestalten. Situationsanalyse und Handlungsempfehlungen* (1. Aufl., S. 69-133). Münster: Waxmann.

Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.). (2009). *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht*. Münster: Waxmann.

Helmke, A. (2010). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze: Klett/Kallmeyer.

Helmke, A. (2015). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts* (7. aktual. Aufl.). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Helmke, A. & Jäger, R. S. (2002). *Das Projekt MARKUS. Mathematik-Gesamterhebung Rheinland-Pfalz: Kompetenzen, Unterrichtsmerkmale, Schulkontext*. Landau: Verlag Empirische Pädagogik.

Herden, G. & Pallack, A. (2000). Zusammenhänge zwischen verschiedenen Fehlerstrategien in der Bruchrechnung. Empirische Erhebung über 244 SchülerInnen der Klassen sieben von Gymnasien. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 21* (3-4), 259-279.

Hericks, U. & Kunze, I. (2008). Forschung zu Didaktik und Curriculum. In W. Helsper & J. Böhme (Hrsg.), *Handbuch der Schulforschung* (2., durchges. u. erw. Aufl., S. 747-778). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden.

Heß, B. & Nührenbörger, M. (2017). Produktives Fördern im inklusiven Mathematikunterricht. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen. Mit allen Kindern rechnen* (Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 144, S. 275-287). Frankfurt am Main: Grundschulverband e.V.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.

Hinz, A. (2002). Von der Integration zur Inklusion - terminologisches Spiel oder konzeptionelle Weiterentwicklung? *Zeitschrift für Heilpädagogik, 53* (354-361).

Hinz, A. (2004). Vom sonderpädagogischen Verständnis der Integration zum integrationspädagogischen Verständnis der Inklusion!? In I. Schnell & A. Sander (Hrsg.), *Inklusive Pädagogik* (S. 41-74). Bad Heilbrunn/Obb.: Verlag Julius Klinkhardt.

Hinz, A. (2008). Integration von Schülern mit (und ihnen zugeschriebenen) Behinderungen. In R. Lehberger & U. Sandfuchs (Hrsg.), *Schüler fallen auf. Heterogene Lerngruppen in Schule und Unterricht* (S. 127-136). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hinz, A. (2013). *Inklusion – von der Unkenntnis zur Unkenntlichkeit!? - Kritische Anmerkungen zu einem Jahrzehnt Diskurs über schulische Inklusion in Deutschland.* Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter http://www.inklusion-online.net/index.php/inklusion-online/article/view/26/26

Hirt, U. & Wälti, B. (Hrsg.). (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Hirt, U., Wälti, B. & Wollring, B. (2008). Grundlagen. In U. Hirt & B. Wälti (Hrsg.), *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte* (S. 12-37). Seelze: Klett Kallmeyer.

Holzbrecher, A. (2015). Differenzsensibel lehren lernen - Entwicklungsperspektiven für Schulentwicklung. In A. Holzbrecher & U. Over (Hrsg.), *Handbuch Interkulturelle Schulentwicklung* (S. 349-361). Weinheim: Beltz.

Homfeldt, H. G. (1996). Die Schule für Lernbehinderte unter labelingtheoretischen Aspekten - Konsequenzen für schulisches Lernen. In H. Eberwein (Hrsg.), *Handbuch Lernen und Lern-Behinderung* (S. 176-191). Weinheim und Basel: Beltz.

Höveler, K. (2016). Mit substantiellen Lernumgebungen rechnen. Der Heterogenität im Mathematikunterricht gerecht werden. *Grundschulunterricht Mathematik* (4), 4-8.

Huber, C., Grosche, M. & Schütterle, P. (2013). Inklusive Schulentwicklung durch response-to-intervention (RTI) - Realisierungsmöglichkeiten des RTI-Konzepts im Förderbereich Lesen. *Zeitschrift für Inklusion, 21* (2), 79-90.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen*. Berlin: Verlag Dr. Köster.

Hunting, R. P. (1984). Understanding equivalent fractions. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 7* (1), 26-33.

Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen - Diagnose im Alltag. *Praxis Mathematik, 49* (15), 1-8.

Hußmann, S., Nührenbörger, M., Prediger, S., Selter, C. & Drüke-Noe, C. (2014). Schwierigkeiten in Mathematik begegnen. *Praxis Mathematik, 56* (56), 2-8.

Hußmann, S. & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen - Differenzieren und Individualisieren. *Praxis Mathematik, 49* (17), 1-8.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S. & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign: Zur Begründung und Umsetzung genuin fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25-42). Münster u.a.: Waxmann.

Hussy, W., Schreier, M. & Echterhoff, G. (2013). *Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor* (2., überar. Aufl.). Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag.

Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2008). *Lehrbuch der Pädagogischen Diagnostik* (6. Auflage). Weinheim: Beltz.

Ise, E., Dolle, K., Pixner, S. & Schulte-Körne, G. (2012). Effektive Förderung rechenschwacher Kinder. *Kindheit und Entwicklung, 21* (3), 181-192.

Jacobs, C. & Petermann, F. (2007). *Rechenstörungen*. Göttingen: Hogrefe.

Jenessen, S. & Wagner, M. (2012). Alles so schön bunt hier!? Grundlegendes und Spezifisches zur Inklusion aus sonderpädagogischer Perspektive. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 63* (8), 335-344.

Johnson, D. W. & Johnson, R. P. (1999). *Learning together and alone: cooperative, competitive and individualistic learning* (5. Aufl.). Boston u.a.: Allyn and Bacon.

Johnson, D. W., Johnson, R. P. & Stanne, M. B. (2000). *Cooperative Learning Methods: A Meta-Analysis.* Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter https://www.researchgate.net/profile/David_Johnson50/publication/220040324_Cooperative_learning_methods_A_meta-analysis/links/00b4952b39d258145c000000.pdf

Jordan, N. C., Hanich, L. B. & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comobrid mathematics and reading difficulties. *Child Development Perspectives, 74,* 834-850.

Jordan, N. C., Resnick, I., Rodrigues, J., Hansen, N. & Dyson, N. (2017). Delaware Longitudinal Study of Fraction Learning: Implications for Helping Children With Mathematics Difficulties. *Journal of learning disabilities, 50* (6), 621-630.

Kahlert, J. & Heimlich, U. (2012). Inklusionsdidaktische Netze - Konturen eines Unterrichts für alle (dargestellt am Beispiel des Sachunterrichts). In U. Heimlich & J. Kahlert (Hrsg.), *Inklusion in Schule und Unterricht. Wege zur Bildung für alle* (S. 153-190). Stuttgart: Kohlhammer.

Kanter, G. O. (1970). Neuere Ergebnisse der Entwicklungspsychologie und ihre Konsequenzen für die Didaktik und Methodik der Sonderschule für Lernbehinderte. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 21,* 248-264.

Käpnick, F., Nolte, M. & Walther, G. (2005). *Talente entdecken und unterstützen. SINUS-Transfer Grundschule Mathematik* (Bd G5). Kiel: IPN.

Käter, C. (2017). *Die Förderung mathematischer Basiskompetenzen zu Beginn der Sekundarstufe I. Evaluation und Implementation eines Trainingsprogramms zur Förderung der mathematischen Basiskompetenzen im inklusiven Setting zu Beginn der Sekundarstufe I.* Dissertation, Carl von Ossiezky Universität. Oldenburg. Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter http://oops.uni-oldenburg.de/3444/1/kaefoe17.pdf

Kiel, E., Esslinger-Hinz, I. & Reusser, K. (2014). Einführung in den Thementeil 'Allgemeine Didaktik für eine inklusive Schule'. In K. Zierer & K. Reusser (Hrsg.), *Jahrbuch für Allgemeine Didaktik 2014. Thementeil: Allgemeine Didaktik für eine inklusive Schule* (S. 9-15). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Kiel, E. & Weiß, S. (2016). Sekundarbereich. In I. Hedderich, G. Biewer, J. Hollenweger & R. Markowetz (Hrsg.), *Handbuch Inklusion und Sonderpädagogik* (S. 277-288). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Kirchhof, R.-F. (2017). Aufbau eines fundierten Bruchzahlverständnisses im Kontext unterrichtsintegrierter Förderung auf der Grundlage tragfähiger Basiskompetenzen. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 86* (4), 343-344.

Klafki, W. & Stöcker, H. (1985). Innere Differenzierung des Unterrichts. In W. Klafki (Hrsg.), *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Beiträge zur kritisch-konstruktiven Didaktik* (S. 119-154). Weinheim: Beltz.

Klauer, K. J. (1987). *Kriteriumsorientierte Tests. Lehrbuch der Theorie und Praxis lehrzielorientierten Messens*. Göttingen u.a.: Verl. für Psychologie Hogrefe.

Klauer, K. J. (1993). *Denktraining für Jugendliche. Ein Programm zur intellektuellen Förderung. Handanweisung*. Göttingen u.a.: Hogrefe.

Klein, G. (1971). Kritische Analyse gegenwärtiger Konzeptionen der Sonderschule für Lernbehinderte. *Sonderpädagogik, 1* (1), 1-13.

Klemm, K. (2015). *Integration in Deutschland. Daten und Fakten*. Gütersloh: Bertelsmann Stiftung.

Klemm, K. (Bertelsmann Stiftung, Hrsg.). (2018). *Unterwegs zur inklusiven Schule. Lagebericht 2018 aus bildungsstatistischer Perspektive.* Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter https://www.bertelsmann-stiftung.de/fileadmin/files/BSt/Publikationen/GrauePublikationen/Studie_IB_Unterwegs-zur-inklusiven-Schule_2018.pdf

Klieme, E. & Warwas, J. (2011). Konzepte der Individuellen Förderung. *Zeitschrift für Pädagogik, 57,* 805-818.

KMK/HRK. (2015). Lehrerbildung für eine Schule der Vielfalt. Gemeinsame Empfehlung von Hochschulrektorenkonferenz und Kultusministerkonferenz. Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2015/2015_03_12-Schule-der-Vielfalt.pdf

Konrad, K. & Traub, S. (2016). *Kooperatives Lernen. Theorie und Praxis in Schule, Hochschule und Erwachsenenbildung* (6. unveränd. Aufl.). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Korff, N. (2012). Inklusiver Unterricht - Didaktische Modelle und Forschung. In R. Benkmann, S. Chilla & E. Stapf (Hrsg.), *Inklusive Schule - Einblicke und Ausblicke* (Theorie und Praxis der Schulpädagogik, Bd. 13, S. 138-157). Immenhausen: Prolog-Verlag.

Korff, N. (2016a). "… und dann kommst du aber in eine Klasse, die gewohnt ist nur Arbeitsblätter zu bearbeiten." Herausforderungen der Lehrer*innenbildung für inklusiven Unterricht. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht – Mathematiklernen in ausgewählten Förderschwerpunkten. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2016* (Bd. 6, S. 25-40). University of Bamberg Press.

Korff, N. (2016b). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe. Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen* (Basiswissen Grundschule, Bd. 31). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Korff, N. & Schulz, A. (2017). Inklusive Fachdidaktik Mathematik. In K. Ziemen (Hrsg.), *Lexikon Inklusion* (1. Aufl., S. 118-120). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kornmann, R. (2015). 84 Indikatoren inklusiver Unterrichtspraxis. In I. Schnell (Hrsg.), *Herausforderung Inklusion. Theoriebildung und Praxis* (S. 242-252). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Krähenmann, H., Labhart, D., Schnepel, S., Stöckli, M. & Moser Opitz, E. (2015). Gemeinsam lernen - individuell fördern: Differenzierung im inklusiven Mathematikunterricht. In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. M. Lüken (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 43-57). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Krajewski, K. (2008). Prävention von Rechenschwäche. In M. Hasselhorn & W. Schneider (Hrsg.), *Handbuch der Pädagogischen Psychologie* (S. 360-370). Göttingen: Hogrefe.

Krajewski, K. (2013a). Wie bekommen die Zahlen einen Sinn? Ein entwicklungspsychologisches Modell der zunehmenden Verknüpfung von Zahlen und Größen. In M. v. Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik; mit 8 Tabellen* (2., überarb. und erw. Aufl., S. 155-179). Göttingen u.a.: Vandenhoeck & Ruprecht.

Krajewski, K. (2013b). Wie bekommen Zahlen einen Sinn? Ein entwicklungspsychologisches Modell der zunehmenden Verknüpfung von Zahlen und Größen. In M. v. Aster (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (2., überarb. u. erw. Aufl., S. 155-179). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2010). Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen in der Sekundarstufe. *Empirische Pädagogik, 24* (4), 353-370.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Early development of quantity achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year-longitudinal study. *Learning and Instruction, 19* (6), 513-526.

Krajewski, K. & Simanowski, S. (2017). Qualitätskriterien für Förderansätze zur Prävention von Rechenschwäche. *Frühförderung interdisziplinär, 36*, 93-107.

Krämer, P., Przibilla, B. & Grosche, M. (2016). Woran erkennt man schulische Inklusion? Indikatoren zur operationalen Definition von schulischer Inklusion. *Heilpädagogische Forschung, 42* (2), 83-95.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik - Grundschule* (4. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2008). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Wiesbaden: Spektrum.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule.* Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht - Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.

Kretschmann, R. (2008). Individuelles Fördern. Von der Förderdiagnose zum Förderplan. *Schulmagazin 5-10* (4), 5-8.

Kronig, W., Haeberlin, U. & Eckhart, M. (2007). *Immigrantenkinder und schulische Selektion. Pädagogische Visionen, theoretische Erklärungen und empirische Untersuchungen zur Wirkung integrierender und separierender Schulformen in den Grundschuljahren* (2., unveränd. Aufl.). Bern u.a.: Haupt.

Krummheuer, G. (1992). *Lernen mit "Format". Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie - Diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Kuhl, J. & Euker, N. (2016). Evidenzbasierung von Unterricht und Förderung - Chancen und Grenzen des Konzepts. In J. Kuhl & N. Euker (Hrsg.), *Evidenzbasierte Diagnostik und Förderung von Kindern und Jugendlichen mit intellektueller Beeinträchtigung* (S. 19-38). Bern: Hogrefe.

Kuhl, J. & Hecht, T. (2014). Prävention von Lernschwierigkeiten durch die Implementierung von Diagnostik und Förderung. Ein Praxisbeispiel für das erste Schuljahr. *Zeitschrift für Heilpädagogik* (11), 406-415.

Kuhl, J. & Sinner, D. (2015). Effektstärken. In K. Koch & S. Ellinger (Hrsg.), *Empirische Forschungsmethoden in der Heil- und Sonderpädagogik. Lehrbuch* (S. 166-172). Göttingen u.a.: Hogrefe.

Kühnel, J. (1925). *Methodik des Mathematikunterrichts*. Ansbach: Prögel.

Kühnel, J. (1966). *Neubau des Rechenunterrichts* (11. Auflage). Leipzig: Klinkhardt.

Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Bonn: KMK.

Kultusministerkonferenz. (2004a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss nach Klasse 9*. Bonn: KMK.

Kultusministerkonferenz. (2004b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Jahrgangsstufe 4 (Primarstufe)*. Bonn: KMK.

Kultusministerkonferenz. (2011). *Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in Schulen. Beschluss der Kultsministerkonferenz vom 20.10.2011*.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In G. Harel & J. Confrey (Hrsg.), *The development of multiplicative reasoning in the learning o mathematics* (S. 89-120). Albany: SUNY.

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning. Toward a Theoretical Framework for Research. In F. K. Lester, JR. (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Landerl, K. & Kaufmann, L. (2008). *Dyskalkulie. Modelle, Diagnostik, Intervention*. München: Ernst Reinhardt Verlag.

Lassnitzer, E. & Gaidoschik, M. (Rechenschwäche Institut Wien - Graz, Hrsg.). (2008). *Brüche in der Volksschule - und was VolksschullehrerInnen darüber hinaus über Brüche wissen sollten. Theoretische Grundlagen und didaktische Anregungen für die vierte Schulstufe.* Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter http://www.recheninstitut.at/

Lauter, J. (1997). *Fundament der Grundschulmathematik. Pädagogisch-didaktische Aspekt des Mathematikunterrichts in der Grundschule* (3. Auflage). Donauwörth: Auer.

Lazarus, R. S. (1995). Streß und Streßbewältigung - Ein Paradigma? In S.-H. Filipp (Hrsg.), *Kritische Lebensereignisse* (3. Aufl., S. 198-232). Weinheim: Psychologie-Verl.-Union Beltz.

Lehmann, R. H. & Peek, R. (2011). LAU 5 Aspekte der Lernausgangslage und der Lernentwicklung - Klassenstufe 5 -. Ergebnisse einer längsschnittlichen Untersuchung in Hamburg im September 1996. In *LAU - Aspekte der Lernausgangslage und der*

Lernentwicklung (Hanse - Hamburger Schriften zur Qualität im Bildungswesen, Bd. 8, S. 9-120). Münster: Waxmann.

Leisen, J. (2005). Wechsel der Darstellungsformen. Ein Unterrichtsprinzip für alle Fächer. *Der Fremdsprachliche Unterricht Englisch, 78,* 9-11.

Lenze, M. & Lutz-Westphal, B. (2015). Fachdidaktische Ansätze für einen inklusiven Mathematikunterricht am Beispiel der Einführung in die beschreibende Statistik. In J. Riegert & O. Musenberg (Hrsg.), *Inklusiver Fachunterricht in der Sekundarstufe.* (S. 43-57). Stuttgart: Kohlhammer.

Lenzen, D. (1989). *Pädagogische Grundbegriffe* (Band 1). Reinbek: Rowohlt.

Leuders, T. (2007). Fachdidaktik und Unterrichtsqualität im Bereich Mathematik. In K.-H. Arnold (Hrsg.), *Fachdidaktik und Unterrichtsqualität* (S. 205-234). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Leuders, T. & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. Cognitive Activation in Mathematics Instruction. *Unterrichtswissenschaft, 39* (3), 213-230.

Leuders, T. & Leuders, J. (2014). Erfolgreiches Lernen ermöglichen. Konzepte und Prinzipien des Förderns im Mathematikunterricht. *Friederich Jahresheft,* 72-75.

Leuders, T. & Prediger, S. (2012). "Differenziert Differenzieren" - Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht - Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35-65). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Leuders, T. & Prediger, S. (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht. Sekundarstufe I+II.* Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. & Prediger, S. (2017). Flexibel differenzieren erfordert fachdidaktische Kategorien. In J. Leuders, T. Leuders, S. Prediger & S. Ruwisch (Hrsg.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen: Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung* (S. 3-16). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Leuders, T. & Wittmann, G. (2017). Differenzieren im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe - Traditionen, Konzepte, Befunde. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter & C. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 182-199). Seelze: Klett Kallmeyer.

Lewis, A. & Norwich, B. (2005). *Special teaching for special children?* Maidenhead: Open University Press.

Lienert, G. A. & Raatz, U. (2011). *Testaufbau und Testanalyse* (6. Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz.

Lindmeier, B. (2017). Sonderpädagogische Professionalität und Inklusion. In C. Lindmeier & H. Weiß (Hrsg.), *Pädagogische Professionalität im Spannungsfeld von sonderpädagogischer Förderung und inklusiver Bildung* (Sonderpädagogische Förderung heute, 1. Beiheft, S. 51-77). Weinheim: Beltz Juventa.

Lindmeier, C. & Weiß, H. (Hrsg.). (2017). *Pädagogische Professionalität im Spannungsfeld von sonderpädagogischer Förderung und inklusiver Bildung* (Sonderpädagogische Förderung heute, 1. Beiheft). Weinheim: Beltz Juventa.

Lingel, K., Neuenhaus, N., Artelt, C. & Schneider, W. (2014). Der Einfluss des metakognitiven Wissens auf die Entwicklung der Mathematikleistung am Beginn der Sekundarstufe 1. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 35,* 49-77.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lorenz, J. H. (1991). Rechenschwache Schüler in der Grundschule. Erklärungsversuche und Förderstrategien. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 12,* Teil I: 3-34, Teil II: 171-198.

Lorenz, J. H. (2000). Aus Fehlern wird man … Irrtümer in der Mathematikdidaktik des 20. Jahrhunderts. *Grundschule* (1), 19-22.

Lorenz, J. H. (2002). Das arithmetische Denken von Grundschulkindern. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 59-81). Offenburg: Mildenberger.

Lorenz, J. H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Schroedel Verlag GmbH.

Löser, J. M. & Werning, R. (2013). Inklusion aus internationaler Perspektive - ein Forschungsüberblick. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 6* (1), 21-33.

Ludwig, H. P. (2008). Erwartungseffekte. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (S. 144-150). Weinheim: Belz.

Lütje-Klose, B. & Miller, S. (2015). Inklusiver Unterricht - Forschungsstand und Desiderata. In A. Peter-Koop, T. Rottmann & M. M. Lüken (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 10-32). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Lütje-Klose, B., Schwinger, M. & Wild, E. (Hrsg.). (2015). *Inklusive und exklusive Förderung von Kindern mit sonderpädagogischem Förderbedarf. Themenheft der Zeitschrift Unterrichtswissenschaft 1, 43. Jg*. Weinheim: Beltz, Juventa.

Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building an informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 5,* 422-441.

Mahlau, K., Blumenthal, Y., Diehl, K., Schöning, A., Sikora, S., Voß, S. et al. (2014). Das Rügener Inklusionsmodell (RIM) - RTI in der Praxis. In M. Hasselhorn (Hrsg.), *Lernverlaufsdiagnostik* (Tests und Trends, N.F., 12, S. 101-125). Göttingen: Hogrefe.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren* (123), 4-8.

Malle, G. & Huber, S. (2004). Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Rechenoperationen. *mathematik lehren* (123), 20-39.

Markowetz, R. (2012). Inklusive Didaktik (k)eine Neuschöpfung!? Ein Beitrag zur didaktischen Diskussion über Gemeinsamen Unterricht. In C. Breyer, G. Fohrer, W.

Goschler, M. Heger, C. Kießling & C. Ratz (Hrsg.), *Sonderpädagogik und Inklusion* (Lehren und Lernen mit behinderten Menschen, Bd. 26, 1. Aufl., S. 141-160). Oberhausen: Athena-Verl.

Mathe inklusiv mit PIKAS. Deutsches Zentrum für Lehrerbildung. Zugriff am 17.10.2020. Verfügbar unter https://pikas-mi.dzlm.de/node/338

McGee, C., Ward, R., Gibbons, J. & Harlow, A. (2003). *Transition to Secondary School: A Literature Review. Report to the Ministry of Educaton.* Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.621.2039&rep=rep1&type=pdf

McLeskey, J. & Waldron, N. L. (2011). Educational Programs for Elementary Students with Learning Disabilities: Can They Be Both Effective and Inclusive. *Learning Disabilities Research & Practice, 26* (1), 48-57.

McMaster, K. L. & Fuchs, D. (2002). Effects of Cooperative Learning in the Academic Achievement of Students with Learning Disabilities: An Update of Tateyama-Sniezek's Review. *Learning Disabilities Research & Practice, 17* (2), 107-117.

Melzer, C., Meyer, M., Ehlscheid, M. & Schlicht, S. (2016). Inklusive Bildung braucht ein allgemeines inklusives Kerncurriculum - Denkwege und Umsetzungsmöglichkeiten. *Teilhabe, 55* (4), 192-197.

Meyer, H. (2018). *Was ist guter Unterricht?* (13. Auflage). Berlin: Cornelsen.

Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht - Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *Praxis der Mathematik in der Schule, 54* (45), 2-9.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden. *Pädagogische Rundschau*, *65* (4), 401-426.

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Mißling, S. & Ückert, O. (2014). *Inklusive Bildung. Schulgesetze auf dem Prüfstand*. Berlin: Dt. Inst. für Menschenrechte.

Möckel, A. (2001). *Geschichte der besonderen Grund- und Hauptschule* ("Edition S", 4., erw. Aufl.). Heidelberg: Winter.

Montague, M. & Appelgate, B. (2000). Middle school student's perceptions, persistence and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly, 23*, 215-226.

Mosandl, C. & Sprenger, L. (2014). Von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalzahlen - nicht immer ein einfacher Weg! *Praxis Mathematik*, *56* (56), 16-21.

Moser Opitz, E. (2005). Lernschwierigkeiten Mathematik in Klasse 5 und 8. Eine empirische Untersuchung zu fehlenden mathematischen Basiskompetenzen. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete*, *74,* 113-128.

Moser Opitz, E. (2007, 2013). *Rechenschwäche / Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern, Stuttgart, Wien: Haupt Verlag.

Moser Opitz, E. (2008). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen* (Beiträge zur Heil- und Sonderpädagogik, Bd. 27, 3. Aufl.). Bern: Haupt.

Moser Opitz, E. (2009a). Erwerb grundlegender Konzepte der Grundschulmathematik als Voraussetzung für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (1. Aufl., S. 29-41). Weinheim: Beltz.

Moser Opitz, E. (2009b). Rechenschwäche diagnostizieren: Umsetzung einer entwicklungs- und theoriegeleiteten Diagnostik. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (2. Aufl., S. 286-307). Weinheim und Basel: Beltz.

Moser Opitz, E. (2010). Diagnose und Förderung: Aufgaben und Herausforderungen für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik. Gemeinsame Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 08.03. bis 12.03.2010 in München* (S. 11-18). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Moser Opitz, E. (2013). Individuell fördern? Überlegungen zur Förderung im Mathematikunterricht. *Mathematik differenziert* (2), 9-11.

Moser Opitz, E. (2014). Inklusive Didaktik im Spannungsfeld von gemeinsamen Lernen und effektiver Förderung. Ein Forschungsüberblick und eine Analyse von didaktischen Konzeptionen für inklusiven Unterricht. In K. Zierer & K. Reusser (Hrsg.), *Jahrbuch für Allgemeine Didaktik 2014. Thementeil: Allgemeine Didaktik für eine inklusive Schule* (S. 52-68). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Moser Opitz, E. (2018). Inklusive (Fach-)Didaktik - Übersicht und Reflexion zu ausgewählten Konzeptionen. In M. Walm, T. Häcker, F. Radisch & A. Krüger (Hrsg.), *Empirisch-pädagogische Forschung in inklusiven Zeiten. Konzeptualisierung, Professionalisierung, Systementwicklung* (S. 223-233). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Moser Opitz, E. & Freesemann, O. (2012). Rechenschwäche: Diagnose, Merkmale, Fördermöglichkeiten. *Schweizerische Zeitschrift für Heilpädagogik, 18* (6), 6-14.

Moser Opitz, E., Freesemann, O., Grob, U. & Prediger, S. (2016). *BASIS-MATH-G 4+-5. Gruppentest zur Basisdiagnostik Mathematik für das vierte Quartal der 4. Klasse und für die 5. Klasse*. Bern: Hogrefe.

Moser Opitz, E. & Nührenbörger, M. (2015). Diagnostik und Leistungsbeurteilung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 491-512). Berlin Heidelberg: Springer.

Moser Opitz, E. & Ramseier, E. (2012). Rechenschwach oder nicht rechenschwach? Eine kritische Auseinandersetzung mit Diagnosekonzepten, Klassifikationssystemen und Diagnoseinstrumenten unter besonderer Berücksichtigung von älteren Schülerinnen und Schülern. *Lernen und Lernstörungen, 1* (2), 99-117.

Moser Opitz, E., Reusser, L., Moeri Müller, M., Anliker, B., Wittich, C. & Freesemann, O. (2010). *BASIS-MATH 4-8. Basisdiagnostik Mathematik für die Klassen 4-8*. Bern: Verlag Hans Huber.

Müller, A., Ehlert, A. & Fritz, A. (2017). Inklusiver Mathematikunterricht - notwendige methodische und organisatorische Veränderungsprozesse. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 460-477). 3., vollst. überarb. u. erw. Aufl.

Müller, G. N. (1995). Kinder rechnen mit der Umwelt. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 42-63). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Müller, G. N., Steinbring, H. & Wittmann, E. C. (Hrsg.). (2004). *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (o.J.). *Mathematiklernen in jahrgangsbezogenen und jahrgangsgemischten Klassen mit dem Zahlenbuch.* Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter http://www.zahlenbu.ch/cms/media/archive3/kursunterlagen_zahlenbuch/10_Text_Wittmann_Mehrklassenunterricht.pdf

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe* (3. Auflage). Braunschweig: Vieweg.

Müller, G. N. & Wittmann, E. C. (1998). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe: Ziele, Inhalte, Prinzipien , Beispiele*. Braunschweig: Vieweg.

Müller, H. (1988). Integration aus Sicht der Schulbehörde. In H. Wocken, G. Antor & A. Hinz (Hrsg.), *Integrationsklassen in Hamburger Grundschulen. Bilanz eines Modellversuchs.* (S. 25-48). Hamburg: Curio.

Musenberg, O. & Riegert, J. (2015). Inklusiver Fachunterricht als didaktische Herausforderung. In J. Riegert & O. Musenberg (Hrsg.), *Inklusiver Fachunterricht in der Sekundarstufe.* (S. 13-28). Stuttgart: Kohlhammer.

Neubert, B. (2013). Den Übergang gestalten! Inhaltliche Vernetzungen von der Grundschule und Sekundarstufe als wichtige Bedingung für die Anschlussfähigkeit. *Grundschulunterricht Mathematik* (4), 4-6.

Neumann, R. (1997). *Probleme von Gesamtschülern bei ausgewählten Teilaspekten des Bruchzahlbegriffs: eine empirische Untersuchung. Mathematik.* Dissertation. Lage.

Neumann, R. (1999). Probleme von Gesamtschülern bei ausgewählten Teilaspekten des Bruchzahlbegriffs — eine empirische Untersuchung. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 20* (1), 72-74.

Niedersächsisches Kultusministerium. (2006). *Kerncurriculum für die Grundschule Schuljahrgänge 1-4. Mathematik*. Hannover.

Niedersächsisches Kultusministerium. (2012). *Kerncurriculum für die Integrierte Gesamtschule Schuljahrgänge 5-10. Mathematik*. Hannover.

Niedersächsisches Kultusministerium. (2018). Niedersächsisches Schulgesetz. NSchG.

Nührenbörger, M. (2011). Jahrgangsgemischter Anfangsunterricht - Erfahrungen und Chancen. In M. M. Lüken & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Mathematischer Anfangsunterricht - Befunde und Konzepte für die Praxis* (1. Aufl., S. 114-135). Offenburg: Mildenberger.

Nührenbörger, M. (2014). Produktives Fördern zwischen individuellem und gemeinsamem Lernen. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 863-866). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Nührenbörger, M. & Pust, S. (2011). *Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien im differenzierten Anfangsunterricht Mathematik* (2. Aufl.). Seelze: Klett Kallmeyer.

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2010). Die Entwicklung mathematischen Wissens in sozial-interaktiven Kontexten. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbecke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 73-81). Seelze: Klett Kallmeyer.

Oehl, W. (1965). *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*. Hannover: Schroedel Verlag.

Padberg, F. (1986). Über typische Schülerschwierigkeiten in der Bruchrechnung - Bestandsaufnahme und Konsequenzen. *Mathematikunterricht* (3), 58-77.

Padberg, F. (1995). *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche - Dezimalbrüche.* (2. Aufl.). Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, F. (2000). Die Bruchrechnung - ein Auslaufmodell? *Mathematikunterricht* (2), 5-23.

Padberg, F. (2002a). Anschauliche Vorerfahrungen zum Bruchzahlbegriff zu Beginn der Klasse 6. *Praxis Mathematik, 44* (3), 112-117.

Padberg, F. (2002b). *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche - Dezimalbrüche* (3. Aufl.). Heidelberg Berlin: Spektrum Akad. Verl.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung* (4. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, 4. erw., stark überarb. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Padberg, F. & Bienert, T. (2000). Zur Entwicklung des Bruchzahlverständnisses und der Rechenoperationen mit gemeinen Brüchen innerhalb eines Schuljahres. *Mathematikunterricht* (2), 24-37.

Padberg, F., Danckwerts, R. & Stein, M. (2010). *Zahlenbereiche. Eine elementare Einführung.* Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Padberg, F. & Krüger, H. (1997). Bruchzahlverständnis. systematische Fehlerstrategien und Fehlvorstellungen. *Praxis Mathematik, 39* (5), 193-195.

Padberg, F. & Neumann, R. (1997). Zum Einfluß der beiden Grundvorstellungen der Bruchrechnung auf das Verständnis der Bruchzahlen als Maßzahlen. Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. *Praxis Mathematik, 39* (6), 246-249.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Parmar, R. S. & Cawley, J. F. (1997). Preparing teachers to teach mathematics students with learning disabilities. *Journal of learning disabilities, 30,* 188-197.

Pekrun, R., Vom Hofe, R., Blum, W., Götz, T., Wartha, S., Frenzel, A. et al. (2006). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA). Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen in der Sekundarstufe I. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 19-53). Münster/New York/München/Berlin: Waxmann.

Pellegrino, J. W., Chudowsky, N. & Glaser, R. (2001). *Knowing what students know. The science and design of educational assessment*. Washington DC: National Academy Press.

Peter-Koop, A., Rottmann, T. & Lüken, M. M. (Hrsg.). (2015). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule*. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Pfister, M., Stöckli, M., Moser Opitz, E. & Pauli, C. (2015). Inklusiven Mathematikunterricht erforschen: Herausforderungen und erste Ergebnisse aus einer Längsschnittstudie. *Unterrichtswissenschaft, 43* (1), 53-66.

Piaget, J. (1969). *Das Erwachen der Intelligenz beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

PIKAS (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, Hrsg.). *Haus 4: Sprachbildung.* Zugriff am 12.11.2020. Verfügbar unter https://pikas.dzlm.de/node/1181

Platte, A. (2014). Inklusive Bildungsprozesse - Teilhabe am Lernen und Lehren in einer Schule für alle. In T. Rihm (Hrsg.), *Teilhabe an Schulen. Zu den Chancen wirksamer Einflussnahme auf Schulentwicklung* (2., erw. und aktual. Aufl., S. 73-86). Wiesbaden: Springer VS.

Pool Maag, S. & Moser Opitz, E. (2014). Inklusiver Unterricht - grundsätzliche Fragen und Ergebnisse einer explorativen Studie. *Empirische Sonderpädagogik, 6* (2), 133-149.

Popp, K., Melzer, C. & Methner, A. (2017). *Förderpläne entwickeln und umsetzen* (3., überarb. Aufl.). München Basel: Ernst Reinhardt Verlag.

Prediger, S. (2004). Brüche bei Brüchen - angreifen oder umschiffen? *mathematik lehren* (123), 10-13.

Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. *Praxis Mathematik, 48* (11).

Prediger, S. (2008a). Discontinuities for mental models - A source for difficulties with the multiplication of fractions. In D. de Bock, B. D. Sondergaard, B. A. Gómez & C. C. L. Cheng (Hrsg.), *Proceedings of ICME-11 - Topic Study Group 10, Research and Development of Number Systems and Arithmetic* (S. 29-37). Mexico: Monterrey.

Prediger, S. (2008b). The relevance of didactical categorie for analysing obstacles in conceptual change. Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18* (1), 3-17.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (1. Aufl., S. 213-234). Weinheim: Beltz.

Prediger, S. (2011). Vorstellungentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. *Mathematikunterricht* (3), 5-14.

Prediger, S. (2014). Nicht nur individuelle, sondern auch fokussierte Förderung - Fachdidaktische Ansprüche und Forschungs- und Entwicklungsnotwendigkeiten an ein Konzept. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 931-934). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Prediger, S., Freesemann, O., Moser Opitz, E. & Hußmann, S. (2013). Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristiger Reparatur - Förderung bei mathematischen Lernschwierigkeiten in Klasse 5. *Praxis der Mathematik in der Schule, 55* (51), 12-17.

Prediger, S., Hußmann, S., Leuders, T. & Barzel, B. von. (2011). "Erstmal alle auf einen Stand bringen…" Diagnosegeleitete und individualisierte Aufarbeitung arithmetischen Basiskönnens. *Pädagogik, 63* (5), 20-24.

Prediger, S., Krägeloh, N. & Wessel, L. (2013). Wieso 3/4 von 20, und wo ist der Kreis? Brüche für Teile von Mengen handlungsorientiert und operativ erarbeiten. *Praxis Mathematik, 56* (52), 9-14.

Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung - ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In H. Bayrhuber, U. Harms, B. Muszynski, B. Ralle, M. Rothgangel, L.-H. Schön et al. (Hrsg.), *Formate Fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte - historische Analysen - theoretische Grundlegungen* (S. 29-45). Münster/New York/München/Berlin: Waxmann.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B. & Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen - Fachdidaktische Entwicklungsforschung am Dortmunder Modell. *MNU, 65* (8), 452-457.

Prediger, S. & Schink, A. (2014). Verstehensgrundlagen aufarbeiten im Mathematikunterricht. Fokussierte Förderung statt rein methodischer Individualisierung. *Pädagogik, 66* (5), 21-25.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S. & Nührenbörger, M. (Hrsg.). (2014a). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Brüche, Prozente, Dezimalzahlen*. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S., Selter, C., Hußmann, S. & Nührenbörger, M. (2014b). *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Brüche, Prozente, Dezimalzahlen*. Berlin: Cornelsen.

Prediger, S. & Wessel, L. (2012). Darstellungen vernetzen. Ansatz zur integrierten Entwicklung von Konzepten und Sprachmitteln. *Praxis der Mathematik in der Schule, 54* (45), 28-33.

Prediger, S. & Wittmann, G. (2009). Aus Fehlern lernen - (wie) ist das möglich? *Praxis der Mathematik in der Schule, 51* (51), 1-8.

Prengel, A. (2006). *Pädagogik der Vielfalt* (3. Auflage). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Prengel, A. (2011). Zwischen Heterogenität und Hierarchie in der Bildung - Studien zur Unvollendbarkeit der Demokratie. In L. Ludwig, H. Luckas, F. Hamburger & S. Aufenanger (Hrsg.), *Bildung in der Demokratie* (S. 83-94). Opladen: Buddrich.

Prengel, A. (2013). *Inklusive Bildung in der Primarstufe. Eine wissenschaftliche Expertise des Grundschulverbandes.* Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Prengel, A. (2014). Inklusive Didaktische Diagnostik und Leistungsbewertung. *Lehren & Lernen* (8|9), 66-71.

Prengel, A. & Heinzel, F. (2012). Heterogenität als Grundbegriff inklusiver Pädagogik. *Zeitschrift für Inklusion* (3).

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht 2. Schuljahr. Anregungen zur Unterrichtspraxis*. Braunschweig: Schroedel Verlag GmbH.

Ramful, A. & Olive, J. (2008). Reversibility of thought: An instance in multiplicative tasks. *The Journal of Mathematical Behavior, 27* (2), 138-151.

Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W. & Naumann, E. (2014a). *Quantitative Methoden 1. Einführung in die Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer.

Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W. & Naumann, E. (2014b). *Quantitative Methoden 2. Einführung in die Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (4., überarb. Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer.

Rehle, C. (2009). Grundlinien einer inklusiven, entwicklungsorientierten Didaktik. In P. Thoma & C. Rehle (Hrsg.), *Inklusive Schule. Leben und Lernen mittendrin* (S. 183-193). Heilbrunn: Klinkhardt.

Reich, K. (2012). *Inklusion und Bildungsgerechtigkeit. Standards und Regeln zur Umsetzung einer inklusiven Schule* (Pädagogik). Weinheim u.a.: Beltz.

Reich, K. (2014). *Inklusive Didaktik. Bausteine für eine inklusive Schule* (Inklusive Pädagogik). Weinheim: Beltz.

Reinmann-Rothmeier, G. & Mandl, H. (2001). Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (4. Aufl., S. 601-646). München: PsychologieVerlagsUnion/Beltz.

Reiser, H., Klein, G., Kreie, G. & Kron, M. (1986). Integration als Prozeß. *Sonderpädagogik, 16* (3 und 4), 115-122 und 154-160.

Reiss, K. (2009). Mathematische Kompetenz zwischen Grundschule und Sekundarstufe: Zusammenhang und Forschungsdesiderata. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 117-121). Münster: Waxmann.

Reiss, K. & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*.

Resnick, L. B. (1993). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 109-151). New York: Academic Press.

Rezat, S. (2013). Fundamentale Ideen der Mathematikdidaktik -Ein Beitrag zur Theoriendiskussion? In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Beiträge zur 4. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster* (S. 813-816). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Riegert, J. & Musenberg, O. (Hrsg.). (2015). *Inklusiver Fachunterricht in der Sekundarstufe.* Stuttgart: Kohlhammer.

Riegert, J., Rink, R. & Wachtel, G. (2017). Mathematik mit heterogenen Lerngruppen. Eine Kooperation zwischen Fachdidaktik und Sonderpädagogik. In J. Leuders, T. Leuders, S. Prediger & S. Ruwisch (Hrsg.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen. Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung* (S. 117-184). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rindermann, H. & Geiser, C. (2010). Testtheoretische und methodische Grundlagen der Entwicklungsdiagnostik. In C. Quaiser-Pohl & H. Rindermann (Hrsg.), *Entwicklungsdiagnostik* (S. 27-56). München Basel: Ernst Reinhardt Verlag.

Röhr, M. (1992). "Alle Teller sind 4x6" - Ein Bericht über die ganzheitliche Einführung des Einmaleins. *Die Grundschulzeitschrift* (6), 26-28.

Rohrbeck, C. A., Ginsburg-Block, M., Fantuzzo, J. W. & Miller, T. R. (2003). Peer-Assisted Learning Interventions With Elementary School Students: A Meta-Analytic Review. *Journal of Educational Psychology, 95* (2), 240-257.

Rosenthal, R. (1994). Parametric Measures of Effect Size. In H. M. Cooper & L. V. Hedges (Hrsg.), *The handbook of research synthesis* (S. 231-244). New York: Russel Sage Foundation.

Rost, D. H. (2013). *Interpretation und Bewertung pädagogisch-psychologischer Studien* (3. Auflage). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Röthlisberger, H. (1999). Heterogenität als Herausforderung: Standortbestimmungen am Schulanfang. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S. 22-28). Zürich: Klett und Balmer AG.

Ruf, U. & Gallin, P. (2014). *Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik* (Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, / Urs Ruf, Peter Gallin ; Band 1, 5. Aufl.). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Ruijs, N. M. & Peetsma, T. (2009). Effects of inclusion on students with and without special educational needs reviewed. *Educational Research Review, 4* (2), 67-79.

Salomon, G. (1975). Heuristische Modelle für die Gewinnung von Interaktionshypothesen. In R. Schwarzer & K. Steinhagen (Hrsg.), *Adaptiver Unterricht. Zur Wechselwirkung von Schülermerkmalen und Unterrichtsmethoden* (S. 127-145). München: Kösel.

Sander, A. (2004). Konzepte einer inklusiven Pädagogik. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 55*, 240-244.

Sander, A. & Christ, K. (1994). *Schulreform Integration. Entwicklungen der gemeinsamen Erziehung behinderter und nichtbehinderter Kinder und Jugendlicher im Saarland 1990 - 1993* (Saarbrücker Beiträge zur Integrationspädagogik, Bd. 8). St. Ingbert: Röhrig.

Sauer, S., Ide, S. & Borchert, J. (2007). Zum Selbstkonzept von Schülerinnen und Schülern an Förderschulen und in integrativer Beschulung. *Heilpädagogische Forschung, 23* (3), 135-142.

Schäfer, J. (2005). *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen - eine empirische Studie:* Verlag Dr. Kovac.

Schäfer, T. (2011). *Statistik II. Inferenzstatistik*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Scherer, P. (1994). Fördern durch Fordern - Aktiv-entdeckende Lernformen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 45* (11), 761-773.

Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte*. Heidelberg: Winter.

Scherer, P. (1997). Lernen in kleinen Schritten oder in komplexen Umgebungen - Was ist geeignet für Kinder mit Lernschwäche? *Grundschule, 29* (3), 28-31.

Scherer, P. (2008). Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Raachkockine, O. Graumann & K.-H. Arnold (Hrsg.), *Handbuch Förderung: Grundlagen, Bereiche und Methoden der individuellen Förderung von Schülern* (S. 275-283). Weinheim und Basel: Beltz.

Scherer, P. (Hrsg.). (2009). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Förderung durch Fordern* (5. Aufl.). Horneburg: Persen.

Scherer, P. (2015). Inklusiver Mathematikunterricht der Grundschule. Anforderungen und Möglichkeiten aus fachdidaktischer Perspektive. In T. Häcker & M. Walm (Hrsg.), *Inklusion* *als Entwicklung. Konsequenzen für Schule und Lehrerbildung* (S. 267-284). Heilbrunn: Klinkhardt.

Scherer, P. (2017). Gemeinsames Lernen oder Einzelförderung? - Grenzen und Möglichkeiten eines inklusiven Mathematikunterrichts. In F. Hellmich & E. Blumberg (Hrsg.), *Inklusiver Unterricht in der Grundschule* (S. 194-212). Stuttgart: Kohlhammer.

Scherer, P. (2018). Mathematik Inklusiv - Herausforderungen und Möglichkeiten für Unterricht und Lehrerbildung. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zur 52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 05.-09.03.2018 in Paderborn* (S. 41-48). Münster: WTM-Verlag.

Scherer, P. & Hähn, K. (2017). Ganzheitliche Zugänge und Natürliche Differenzierung. Lernmöglichkeiten für alle Kinder. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen. Mit allen Kindern rechnen* (Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 144, S. 24-33). Frankfurt am Main: Grundschulverband e.V.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Wiesbaden: Spektrum.

Scherer, P. & Weigand, H.-G. (2017). Mathematikdidaktische Prinzipien. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter & C. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 28-42). Seelze: Klett Kallmeyer.

Schindler, M. (2017). Inklusiver Mathematikunterricht am gemeinsamen Gegenstand. *mathematik lehren* (201), 6-10.

Schink, A. (2013a). *Flexibler Umgang mit Brüchen. Empirische Erhebung individueller Strukturen zu Teil, Anteil und Ganzem*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schink, A. (2013b). Strukturelle Zusammenhänge bei Brüchen herstellen - Diagnose und förderung für Lernende mit Schwierigkeiten. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Beiträge zur 47. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 4. bis 8. März 2013 in Münster* (S. 878-881).

Schink, A. (2013c). Strukturelle Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem. Herausforderungen und Ressourcen beim flexiblen Umgang mit Brüchen nutzen. *Praxis Mathematik, 55* (52), 15-19.

Schink, A. & Meyer, M. (2013). Teile vom Ganzen - Brüche beziehungsreich verstehen. *Praxis Mathematik, 55* (52), 2-8.

Schink, A. & Prediger, S. (2014). Bruchverständnis - Hinweise zu den Diagnose- und Förderbausteinen. In S. Prediger, C. Selter, S. Hußmann & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Mathe sicher können. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Brüche, Prozente, Dezimalzahlen* (S. 21-46). Berlin: Cornelsen.

Schipper, W. (1996). Kompetenz und Heterogenität im arithmetischen Anfangsunterricht. *Die Grundschulzeitschrift, 10* (96), 11-15.

Schipper, W. (2002). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 23* (3/4), 243-261.

Schipper, W. (2009a). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel Verlag GmbH.

Schipper, W. (2009b). Prozessorientierte Diagnostik von Rechenstörungen. In C. Fischer & Westphal, Ursel (Hrsg.), *Individuelle Förderung: Lernschwierigkeiten als schulische Herausforderung. Lese-Rechtschreibschwierigkeiten - Rechenschwierigkeiten* (S. 92-111). Münster: LIT-Verlag.

Schlee, J. (2008). 30 Jahre "Förderdiagnostik" - eine kritische Bilanz. *Zeitschrift für Heilpädagogik* (4), 122-131.

Schmassmann, M. (2009). "Geht das hier ewig weiter?" Dezimalbrüche, Größen, Runden und der Stellenwert. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (1. Aufl., S. 167-185). Weinheim: Beltz.

Schmassmann, M. & Diener, M. (2014). Wie viele Punkte hat das Hunderterfeld? Wie didaktische Materialien die Einsicht in mathematische Strukturen ermöglichen. *Grundschulmagazin* (1), 7-13.

Schmidt, S. (2009). Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Orientierungen für den arithmetischen Unterricht. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (1. Aufl., S. 124-140). Weinheim: Beltz.

Schneider, W., Küspert, P. & Krajewski, K. (2016). *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen* (2., aktu. und erw. Auflage). Paderborn: Schöningh.

Schöler, J. (1999). *Integrative Schule - integrativer Unterricht. Ratgeber für Eltern und Lehrer* (Buchreihe Gemeinsames Leben und Lernen, 2., überarb. Aufl.). Neuwied u.a.: Luchterhand.

Schuck, K. D. (2011). Unterricht bei heterogenen Voraussetzungen. In A. Kaiser, D. Schmetz, P. Wachtel & B. Werner (Hrsg.), *Didaktik und Unterricht* (S. 101-109). Stuttgart: Kohlhammer.

Schulz, A., Leuders, T. & Rangel, U. (2017). Arithmetische Basiskompetenzen am Übergang zu Klasse 5 - eine empirie- und modellgestützte Diagnostik als Grundlage für spezifische Förderentscheidungen. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 396-417). 3., vollst. überarb. u. erw. Aufl.

Schulz, A., Leuders, T., Rangel, U. & Kowalk, S. (2015). Guter Start in die Sekundarstufe. Lernstand 5 in Baden-Württemberg: Diagnose und Förderung arithmetischer Basiskompetenzen. *mathematik lehren* (192), 14-17.

Schulz, A. & Schülke, C. (2017). Aufbau von Zahlvorstellungen mit Hilfe von Materialien. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen. Mit allen*

Kindern rechnen (Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 144, S. 132-142). Frankfurt am Main: Grundschulverband e.V.

Schumann, B. (2007). *"Ich schäme mich ja so!" Die Sonderschule für Lernbehinderte als "Schonraumfalle"*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Schümer, G. (2004). Zur doppelten Benachteiligung von Schülern aus unterprivilegierten Gesellschaftsschichten im deutschen Schulwesen. In G. Schümer, K.-J. Tillmann & M. Weiss (Hrsg.), *Die Institution Schule und die Lebenswelt der Schüler: vertiefende Analysen der PISA-2000-Daten zum Kontext von Schülerleistungen* (73-116). Wiesbaden: Springer-Verlag.

Schwank, I. (2009). Um wie viel geht es? Orientierung im Zahlenraum mit Bruchzahlen. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (1. Aufl., S. 109-122). Weinheim: Beltz.

Sedlmeier, P. & Renkewitz, F. (2013). *Forschungsmethoden und Statistik. Ein Lehrbuch für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (2., aktual. u. erw. Aufl.). Münster u.a.: Pearson.

Seitz, S. (2005). *Zeit für inklusiven Sachunterricht* (Basiswissen Grundschule, Bd. 18). Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

Seitz, S. (2006). Inklusive Didaktik: Die Frage nach dem 'Kern der Sache'. *Zeitschrift für Inklusion. Online-Ausgabe, 1* (1).

Seitz, S. (2008). Leitlinien didaktischen Handelns. *Zeitschrift für Heilpädagogik* (8), 226-233.

Seitz, S. & Scheidt, K. (2012). Vom Reichtum inklusiven Unterrichts - Sechs Ressourcen zur Weiterentwicklung. *Zeitschrift für Inklusion* (1), ohne Paginierung. Zugriff am 02.10.2020. Verfügbar unter http://www.inklusion-online.net/index.php/inklusion-online/article/view/62/62

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland. (1994). *Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung in den Schulen in der Bundesrepublik Deutschland. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 06.05.1994*.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland. (2011). *Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in Schulen. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 20.10.2011*.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland. (2019). *Sonderpädagogische Förderung in allgemeinen Schulen (ohne Förderschulen) 2017/2018.* Zugriff am 03.10.2020. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Statistik/Dokumentationen/Aus_SoPae_Int_2017.pdf

Selter, C. (2006). Mathematik lernen in heterogenen Lerngruppen. In P. Hanke (Hrsg.), *Grundschule in Entwicklung. Herausforderungen und Perspektiven für die Grundschule heute* (S. 128-144). Münster/New York/München/Berlin: Waxmann.

Selter, C. & Lübke, S. (2015). Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht. In B. Behrensen, E. Gläser & C. Solzbacher (Hrsg.), *Fachdidaktik und individuelle Förderung in der Grundschule* (S. 133-141). Hohengeren: Schneider.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2014). *Mathe sicher können - Natürliche Zahlen. Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose und Förderkonzept*. Berlin: Cornelsen.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett.

Sheskin, D. J. (2011). *Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M. et al. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23* (7), 691-697.

Siegler, R. S. & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental psychology, 49* (10), 1994-2004.

Sirsch, U. (2000). *Probleme beim Schulwechsel. Die subjektive Bedeutung des bevorstehenden Wechsels von der Grundschule in die weiterführende Schule*. Münster: Waxmann.

Slavin, R. E. (1995). *cooperative leraning: theory, research, and practice* (2. Aufl.). Boston u.a.: Allyn and Bacon.

Slavin, R. E. (2008). Perspectives on evidence-based research in education: What works? Issues in synthesizing educational program evaluations. *Educational Researcher, 37* (1), 5-14.

Smith, K. A. (1996). Cooperative learning: Making "groupwork" work. *New Directions for Teaching and Learning, 67,* 71-82.

Söbbecke, E. (2008). "Sehen und Verstehen" im Mathematikunterricht - Zur besonderen Funktion von Anschauungsmitteln für das Mathematiklernen. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Online. Vorträge auf der 42. Tagung für Didaktik der Mathematik Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 13.03. bis 18.03.2007 in Budapest* (S. 701-708). Münster: Martin Stein Verlag.

Söbbecke, E. & Welsing, F. (2016). Theoretische Grundlegung & erste Orientierungen zur Analyse sprachlicher Mittel bei der Interpretation mathematischer Anschauungsmittel. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht – Mathematiklernen in ausgewählten Förderschwerpunkten. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2016* (Bd. 6, S. 73-77). University of Bamberg Press.

Souvignier, E. (2016). Kooperatives Lernen. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (3. Aufl., S. 138-148). Stuttgart: Kohlhammer.

Sparks, S. D. (2013). Federal Research Suggests New Approach to Teaching Fractions. *Education Week,* Vol. 32, Issue 37. Zugriff am 28.11.2017. Verfügbar unter https://www.edweek.org/ew/articles/2013/07/18/37fractions.h32.html?tkn=TZQF7yozo%2FHWKGzn2KNa%2B63GIKKpFCTtESVi&cmp=clp-edweek

Spiegel, H. & Walter, M. (2005). Heterogenität im Mathematikunterricht der Grundschule. In K. Bräu & U. Schwerdt (Hrsg.), *Heterogenität als Chance. Vom produktiven Umgang mit Gleichheit und Differenz in der Schule* (Paderborner Beiträge zur Unterrichtsforschung und Lehrerbildung, Bd. 9, S. 219-238). Münster: LIT-Verlag.

Stebler, R. & Reusser, K. (2017). Adaptiv Unterrichten - jedem Kind einen persönlichen Zugang ermöglichen. In B. Lütje-Klose, S. Miller, S. Schwab & B. Streese (Hrsg.), *Inklusion: Profile für die Schul- und Unterrichtsentwicklung in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Theoretische Grundlagen - Empirische Befunde - Praxisbeispiele* (Beiträge zur Bildungsforschung, Bd. 2, S. 253-264). Münster / New York: Waxmann.

Stern, E. (2008). Verpasste Chance? Was wir aus der LOGIK-Studie über den Mathematikunterricht lernen können. In W. Schneider (Hrsg.), *Entwicklung von der Kindheit bis zum Erwachsenenalter. Befunde der Münchener Längsschnittstudie LOGIK.* Weinheim und Basel: Beltz.

Straka, G. A. & Macke, G. (2002). *Lern-lehr-theoretische Didaktik* (Lernen, organisiert und selbstgesteuert - Forschung - Lehre - Praxis, Bd. 3). Münster: Waxmann.

Streefland, L. (1986a). Pizzas - Anregungen, ja schon für die Grundschule. *mathematik lehren* (16), 8-11.

Streefland, L. (1986b). Über die N-Verführer in der Bruchrechnung und Maßnahmen zu ihrer Bekämpfung. *Mathematikunterricht* (3), 45-52.

Sundermann, B. (Grundschulverband, Hrsg.). (2009). *Standortbestimmungen. Als ein Instrument der dialogischen Lernbeobachtung und -förderung.* Pädagogische Leistungskultur. Zugriff am 01.11.2016. Verfügbar unter http://www.grundschulverband.de/fileadmin/BGK/F_11.HandoutStandort.pdf

Sundermann, B. & Selter, C. (2005). SINUS-Transfer Grundschule Mathematik. Modul G9: Lernerfolg begleiten - Lernerfolg beurteilen. In IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik an der Universität Kiel (Hrsg.), *SINUS an Grundschulen.* Kiel. Zugriff am 03.10.2020. Verfügbar unter http://www.sinus-transfer.de/fileadmin/Materialien/Modul9.pdf

Sundermann, B. & Selter, C. (2013). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht* (4., überarb. Neuauflage). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Swanson, H. L. (1999). Reading Research for Students with LD: A Meta-Analysis of Intervention Outcomes. *Journal of learning disabilities, 32* (6), 504-532.

Swanson, H. L. & Sachse-Lee, C. (2000). A meta-analysis of single-subject-design intervention research for students with LD. *Journal of learning disabilities, 33* (2), 114-136.

Terhart, E. (2010). Heterogenität der Schüler - Professionalität der Lehrer: Ansprüche und Wirklichkeiten. In S. Ellger-Rüttgardt & G. Wachtel (Hrsg.), *Pädagogische Professionalität* *und Behinderung. Herausforderungen aus historischer, nationaler und internationaler Perspektive* (Heil- und Sonderpädagogik, S. 89-104). Stuttgart: Kohlhammer.

Ternoth, H. E. (2010). Sonderpädagogische Professionalität - zur Geschichte ihrer Entwicklung. In S. Ellger-Rüttgardt & G. Wachtel (Hrsg.), *Pädagogische Professionalität und Behinderung. Herausforderungen aus historischer, nationaler und internationaler Perspektive* (Heil- und Sonderpädagogik, S. 13-27). Stuttgart: Kohlhammer.

Therrien, W. J., Zaman, M. & Banda, D. R. (2011). How can meta-analysis guide practice? A review of the learning disability research base. *Remedial and Special Education, 32* (3), 206-218.

Thumm, M. (1987). Schwierigkeiten beim Bruchrechnen und der Einsatz des Taschenrechners als Hilfsmittel in der SFL. *Sonderschule in Baden-Württemberg: Mitteilungsbl. d. Landesverbandes Bade-Württemberg e.V. im Verband Deutscher Sonderschulen, Fachverband für Behindertenpädagogik Verband, 20* (4), 176-178.

Tian, J. & Siegler, R. S. (2017). Fractions Learning in Children With Mathematics Difficulties. *Journal of learning disabilities, 50* (6), 614-620.

Trickett, L. & Sulke, F. (1993). Mathematikunterricht mit schulschwachen Kindern: Fördern heißt fordern! *Die Grundschulzeitschrift, 7* (68), 35-38.

Tröster, H. (2009). *Früherkennung im Kindes- und Jugendalter. Strategien bei Entwicklungs-, Lern und Verhaltensstörungen*. Göttingen: Hogrefe.

Ufer, S. (2009). Der Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 87-103). Münster: Waxmann.

UNESCO. (1994). Die Salamanca-Erklärung und der Aktionsrahmen zur Pädagogik für besondere Bedürfnisse. Angenommen von der Weltkonferenz "Pädagogik für besondere Bedürfnisse: Zugang und Qualität". Zugriff am 03.10.2020. Verfügbar unter https://www.unesco.de/fileadmin/medien/Dokumente/Bibliothek/salamanca-erklaerung.pdf

Van de Walle, John A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally* (8th ed.): Pearson.

Van de Walle, John A. & Lovin, L. H. (2006). *Teaching student-centered mathematics. Grade 3-5* (2 Bände). Boston u.a.: Pearson.

Vehkakoski, T. M. (2012). 'More homework for me, too'. Meanings of differentiation constructed by elementary-aged students in classroom interaction. *European Journal of Special Needs Education, 27* (2), 157-170.

Verband Sonderpädagogik Landesverband Nordrhein-Westfalen e.V. (2010). *Fördern planen. Förderzielorientierter Unterricht auf der Basis von Förderplänen* (2., erw. Aufl.). Lüdinghausen: vds.

Verboom, L. (2012). Zieldifferenziert Lernen im gemeinsamen Mathematikunterricht. In K. Metzger, E. Weigl & E. Breitenbach (Hrsg.), *Inklusion - praxisorientiert. Didaktische und methodische Anregungen; erprobte Modelle und Materialien; für alle Jahrgangsstufen* (Lehrerbücherei Grundschule kompakt, 1. Aufl., S. 64-75). Berlin: Cornelsen.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Vom Hofe, R., Hafner, T., Blum, W. & Pekrun, R. (2009). Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe - Ergebnisse der Längsschnittstudie PALMA. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 125-146). Münster: Waxmann.

Vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W. & Pekrun, R. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I - theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), *Diagnostik von Mathematikleistungen* (Tests und Trends, N.F., 4, S. 263-292). Göttingen: Hogrefe.

Vom Hofe, R. & Tiedemann, K. (2017). Inklusion. Eine Herausforderung auch für den Mathematikunterricht. *mathematik lehren* (4), 2-5.

Vom Hofe, R. & Wartha, S. (2005). Grundvorstellungen als Fehlerquelle bei der Bruchrechnung. In H.-W. Henn (Hrsg.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festschrift für Werner Blum* (S. 202-211). Hildesheim: Franzbecker.

Vygotskij, L. S. (2002 (russ. Originalausgabe 1934)). *Denken und Sprechen. Psychologische Untersuchungen*. Weinheim und Basel: Beltz.

Waasmeier, S. (2009). *Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Hauptschule*. Hildesheim: Franzbecker.

Walgenbach, K. (2017). *Heterogenität - Intersektionalität - Diversity in der Erziehungswissenschaft* (2. durchgesehene Auflage). Opladen: Budrich.

Wartha, S. (2007a). Kompetenzen im Bruchrechnen - die Rolle von Grundvorstellungen. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 25.3. bis 30.3.2007 in Berlin* (S. 187-190). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Wartha, S. (2007b). *Längsschnittliche Untersuchung zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim: Franzbecker.

Wartha, S. (2009a). Rechenstörungen in der Sekundarstufe: Die Bedeutung des Übergangs von der Grundschule zur weiterführenden Schule. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 157-180). Münster: Waxmann.

Wartha, S. (2009b). Zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs — Didaktische Analysen und empirische Befunde. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 30* (1), 55-79.

Wartha, S. (2011). Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Der Mathematikunterricht, 57* (3), 15-24.

Wartha, S. (2017). Rechenschwäche in der Sekundarstufe: Auswirkungen nicht überwundener Lernhürden der Primarstufe auf das Arbeiten mit Brüchen. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 286-306). 3., vollst. überarb. u. erw. Aufl.

Wartha, S. & Güse, M. (2009). Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischem Grundwissen. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 30* (3-4), 256-280.

Wartha, S. & Schulz, A. (2014). *Rechenproblemen vorbeugen.* (3. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Wartha, S. & Vom Hofe, R. (2005). Probleme bei Anwendungsaufgaben in der Bruchrechnung. *mathematik lehren* (128), 10-15.

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009). Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (1. Aufl., S. 73-108). Weinheim: Beltz.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). Constructing and Using Meaning for Mathematical Symbols: The Case of Decimal Fractions. In J. Hiebert & M. Behr (Hrsg.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (2. Aufl., S. 220-235).

Weber, A. & Stefanek, J. (1998). Überblick über die Längsschnittstudie LOGIK. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Entwicklung im Kindesalter* (S. 39-52). Weinheim und Basel: Beltz.

Weidner, M. (2009). *Kooperatives Lernen in der Schule. Das Arbeitsbuch* (5. Aktual.). Hannover: Kallmeyer.

Weinert, F. E. (2000). *Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche an das Lernen in der Schule. Vortrag, gehalten am 29.2.2000 im Pädagogischen Zentrum Rheinland-Pfalz in Bad Kreunach. Sonderdruck.* Pädagogische Nachrichten, Bad Kreuznach.

Weinert, F. E. & Helmke, A. (1987). Die Münchener Studie: Schulleistungen - Leistungen der Schule oder der Kinder. *Bild der Wissenschaft, 24* (1), S. 62–73.

Weinert, F. E. & Treiber, B. (1985). *Gute Schulleistungen für alle?* Weinheim: Beltz.

Weissbach, B. (1986). Sekundarstufenschock in Gesamtschulen. Ursachen, Erscheinungsformen … u. was Schule dagegen tun kann. *Westermanns pädagogische Beiträge, 1,* 21-25.

Wember, F. B. (1988). Sonderpädagogische Ansätze für eine entwicklungspsychologisch begründete Unterrichtskonzeption nach Piaget. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 39* (3), 151-1663.

Wember, F. B. (1998). Zweimal Dialektik: Diagnose und Intervention, Wissen und Intuition. *Sonderpädagogik, 28* (2), 106-120.

Wember, F. B. (2001). Adaptiver Unterricht. *Sonderpädagogik, 31* (3), 161-181.

Wember, F. B. (2009a). Individuelle Förderung - Kern der sonderpädagogischen Förderung und zentrales Instrument der Qualitätssicherung. In F. B. Wember (Hrsg.), *Standards der sonderpädagogischen Förderung. Mit 7 Tabellen* (Sonderpädagogik, 1. Aufl., S. 89-108). München u.a.: Reinhardt.

Wember, F. B. (2009b). Mathematik unterrichten - eine subsidiäre Aktivität? Nicht nur bei Kindern mit Lernschwierigkeiten! In P. Scherer (Hrsg.), *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Förderung durch Fordern* (5. Aufl., S. 230-247). Horneburg: Persen.

Wember, F. B. (2013). Herausforderung Inklusion: Ein präventiv orientiertes Modell schulischen Lernens und vier zentrale Bedingungen inklusiver Unterrichtsentwicklung. *Zeitschrift für Heilpädagogik* (10), 380-388.

Wember, F. B. (2015). Unterricht professionell: Orientierungspunkte für einen inklusiven Unterricht mit heterogenen Lerngruppen. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 66* (10), 456-473.

Wember, F. B. (2016a). Didaktische Prinzipien und Qualitätssicherung im Förderunterricht. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (3. Aufl., S. 81-95). Stuttgart: Kohlhammer.

Wember, F. B. (2016b). Direkter Unterricht. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (3. Aufl., S. 163-175). Stuttgart: Kohlhammer.

Wember, F. B. (2017). Kompetenzerfahrungen beim Mathematiklernen. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen. Mit allen Kindern rechnen* (Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 144, S. 58-67). Frankfurt am Main: Grundschulverband e.V.

Werner, B. (1999). Rechenschwäche - oder nicht geförderte Fähigkeiten? *Zeitschrift für Heilpädagogik* (10), 471-475.

Werner, B. (2017a). Inklusive Fachdidaktik? Mathematikdidaktische und sonderpädagogische Überlegungen zur Gestaltung zieldifferenter Bildungsangebote im Sekundarbereich I. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 27.02. bis zum 03.03.2017 in Potsdam.* (S. 1021-1024). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Werner, B. (2017b). Inklusiver Mathematikunterricht aus sonderpädagogischer Perspektive. In J. Leuders, T. Leuders, S. Prediger & S. Ruwisch (Hrsg.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen. Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung* (S. 211-220). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Werner, B. (2019). *Mathematik inklusive. Grundriss einer inklusiven Fachdidaktik* (1. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Werning, B. & Arndt, A.-K. (2015). Unterrichtsgestaltung und Inklusion. In E. Kiel (Hrsg.), *Inklusion im Sekundarbereich* (S. 53-96). Stuttgart: Kohlhammer.

Werning, B. & Avici-Werning, M. (2015). *Herausforderung Inklusion in Schule und Unterricht. Grundlagen, Erfahrungen, Handlungsperspektiven*. Seelze: Klett Kallmeyer.

Werning, B. & Lütje-Klose, B. (2016). Entdeckendes Lernen. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (3. Aufl., S. 149-162). Stuttgart: Kohlhammer.

Werning, R. (2014). Stichwort. Schulische Inklusion. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 17* (4), 601-623.

Werning, R. (2016a). Inklusive Bildung. *Lernchancen, 19* (110/111), 2-7.

Werning, R. (2016b). Schulische Inklusion. In J. Möller, M. Köller & T. Riecke-Baulecke (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Schule und Unterricht Lehren und Lernen* (S. 153-169). Seelze: Klett Kallmeyer.

Werning, R. (2017). Aktuelle Trends inklusiver Schulentwicklung in Deutschland. Grundlagen, Rahmenbedingungen und Entwicklungsperspektiven. In B. Lütje-Klose, S. Miller, S. Schwab & B. Streese (Hrsg.), *Inklusion: Profile für die Schul- und Unterrichtsentwicklung in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Theoretische Grundlagen - Empirische Befunde - Praxisbeispiele* (Beiträge zur Bildungsforschung, Bd. 2, S. 17-30). Münster / New York: Waxmann.

Werning, R. & Baumert, J. (2013). Inklusion entwickeln: Leitideen für Schulentwicklung und Lehrerbildung. In J. Baumert, V. Masuhr, J. Möller, T. Riecke-Baulecke, H.-E. Tenorth & R. Werning (Hrsg.), *Inklusion. Forschungsergebnisse und Perspektiven* (Schulmanagement-Handbuch, Bd. 32.2013,146, S. 38-55). München: Oldenbourg.

Werning, R. & Lütje-Klose, B. (2016). *Einführung in die Pädagogik bei Lernbeeinträchtigungen*. München: Reinhardt.

Wessel, L. (2015). *Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wessel, L., Büchter, A. & Prediger, S. (2018). Weil Sprache zählt - Sprachsensibel Mathematikunterricht planen, durchführen und auswerten. *mathematik lehren* (206), 2-7.

Wielpütz, H. (1998). Erst verstehen, dann verstanden werden. *Grundschule, 30* (3), 9-11.

Wielpütz, H. (2010). Qualitätsanalyse und Lehrerbildung. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenbörger, R. Schwarzkopf & E. Söbbecke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 109-114). Seelze: Klett Kallmeyer.

Wiener, J. & Tardif, C. Y. (2004). Social and emotional functioning children with learning disabilities: Does special education placement make a difference? *Learning Disabilities Research & Practice, 19* (1), 20-32.

Wilbert, J. (2014). Instrumente zur Lernverlaufsmessung: Gütekriterien und Auswertungsherausforderung. In M. Hasselhorn (Hrsg.), *Lernverlaufsdiagnostik* (Tests und Trends, N.F., 12, S. 281-308). Göttingen: Hogrefe.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren* (2), 4-16.

Winter, H. (1996). *Mathematik entdecken: Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule; Reformen und Gegenreformen; Entdeckendes Lernen; Kreatives Üben* (4. Auflage). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1998). Mathematik als unersetzbares Fach einer Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft Hamburg,* 75-83.

Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*.

Winter, H. (2001). *Fundamenale Ideen in der Grundschule.* Zugriff am 03.10.2020. Verfügbar unter http://grundschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/grundschule.bildung-rp.de/Downloads/Mathemathik/Winter_Inhalte_math_Lernens.pdf

Winter, H. (2004). Ganze und zugleich gebrochene Zahlen. *mathematik lehren* (123), 14-18.

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (3., aktual. Aufl.). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wittich, C. (2017). *Mathematische Förderung durch kooperativ-strukturiertes Lernen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1985). Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren* (11), 7-11.

Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als "design science". *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 13* (1), 55-70.

Wittmann, E. C. (1995a). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht - vom Kind und vom Fach aus. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10-41). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Wittmann, E. C. (1995b). Mathematics education as a 'Design Science'. *Educational Studies in Mathematics, 29* (4), 355-374.

Wittmann, E. C. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule vom FACH aus. *Grundschulunterricht, 43* (6).

Wittmann, E. C. (1998a). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikstruktur. *Beiträge zur Lehrerbildung, 16* (3), 329-342.

Wittmann, E. C. (1998b). Standard Number Representations in the Teaching of Arithmetic. *JMD (Journal für Mathematik-Didaktik), 19* (2-3), 149-178. Zugriff am 03.10.2020. Verfügbar unter https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBF03338866.pdf

Wittmann, E. C. (2009). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6., neu überarb. Aufl.). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Wittmann, E. C. (2013). Strukturgenetische didaktische Analyse - die empirische Forschung erster Art. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster* (S. 1094-1097). Münster: WTM Verl. für Wiss. Texte und Medien.

Wittmann, E. C. (2015). Das systemische Konzept von Mathe 2000+ zur Förderung "rechenschwacher" Kinder. In H. Schäfer & C. Rittmeyer (Hrsg.), *Handbuch Inklusive Diagnostik* (Beltz Pädagogik, S. 199-213). Weinheim u.a.: Beltz. Zugriff am 11.05.2016.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (2. Aufl., 1 Band). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2004). *Das Zahlenbuch 1/2. Lehrerband*. Leipzig: Klett.

Wittmann, G. (2007). Mit Bruchzahlen experimentieren. Darstellungen wechseln - Grundvorstellungen entwickeln. *mathematik lehren* (142), 17-23.

Wocken, H. (1978). Die klassische Hilfsschulmethodik. Versuch einer systematischen Rekonstruktion. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 29* (8), 469-478.

Wocken, H. (1987). Integrationsklassen in Hamburg. In H. Wocken & G. Antor (Hrsg.), *Integrationsklassen in Hamburg. Erfahrungen - Untersuchungen - Anregungen* (S. 65-90). Oberbiel: Pädagogische Verlags-Buchhandlung Jarick.

Wocken, H. (1998a). Gemeinsame Lernsituationen. Eine Skizze zur Theorie des gemeinsamen Unterrichts. In A. Hildeschmidt & I. Schnell (Hrsg.), *Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle* (S. 37-52). Weinheim und Münnchen: Juventa-Verl.

Wocken, H. (1998b). Gemeinsame Lernsituationen. Eine Skizze zur Theorie des gemeinsamen Unterrichts. In A. Hildeschmidt & I. Schnell (Hrsg.), *Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle* (S. 37-52). Weinheim: Juventa-Verl.

Wocken, H. (2007). Fördert die Förderschule? Eine empirische Rundreise durch Schulen für "optimale Förderung". In I. Demmer-Dieckmann & A. Txtor (Hrsg.), *Integrationsforschung und Bildungspolitik im Dialog* (S. 35-59). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Wocken, H. (2010). Was ist inklusiver Unterricht? Eine Checkliste zur Zertifizierung schulischer Inklusion. *Gemeinsam leben, 18,* 203-2008.

Wocken, H. (2011a). Was ist inklusiver Unterricht? Eine Checkliste zur Zertifizierung schulischer Inklusion. Teil II. *Gemeinsam leben, 19,* 41-49.

Wocken, H. (2011b). Was ist inklusiver Unterricht? Eine Checkliste zur Zertifizierung schulischer Inklusion. Teil III. *Gemeinsam leben, 19,* 52-62.

Wocken, H. (2014). Frei herumlaufende Irrtümer. Eine Warnung vor pseudoinklusiven Betörungen. *Gemeinsam leben, 22* (1), 52-62.

Wocken, H. (2015). *Das Haus der inklusiven Schule. Baustellen - Baupläne - Bausteine* (Lebenswelten und Behinderung, 6. Aufl.).

Wocken, H. & Gröhlich, C. (2009). Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern an Hamburger Förderschulen. In W. Bos, M. Bonsen & C. Gröhlich (Hrsg.), *KESS 7. Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern an Hamburger Schulen zu Beginn der Jahrgangsstufe 7.* (S. 133-142). Münster: Waxmann.

Zieky, M. & Perie, M. (2006). *A primer on setting cut scores on tests of educational achievement*. Princeton: ETS. Zugriff am 03.10.2020. Verfügbar unter https://www.ets.org/Media/Research/pdf/Cut_Scores_Primer.pdf

Zielinski, W. (1998). *Lernschwierigkeiten. Ursachen, Diagnostik, Intervention* (Kohlhammer-Standards Psychologie, 3. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Ziemen, K. (2017). Inklusive Didaktik. In K. Ziemen (Hrsg.), *Lexikon Inklusion* (1. Aufl., S. 107-108). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Zierer, K. & Saalfrank, W.-T. (2017). *Inklusion*. Paderborn: Schöningh.

Zimmermann, K. R. (2014). *Rechenschwierigkeiten erkennen und bewältigen. Den Erwerb mathematischer Kompetenz erleichtern* (Pädagogik Praxis, 1. Aufl.). Weinheim, Bergstr: Beltz, J.

ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

Abb.	Abbildung
AP	Arbeitsphase
bspw.	beispielsweise
EA	Einzelarbeit
etc.	et cetera
geschl. A.	geschlossene Aufgaben
ggf.	gegebenenfalls
GV	Grundvorstellung
Hervorh.	Hervorhebung
HRK	Hochschulkonferenz
i.A.a.	in Anlehnung an
i.B.a.	in Bezug auf
i.d.R.	in der Regel
i.S.	im Sinne
Kap.	Kapitel
KG	Kleingruppe
KMK	Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland
LuFöl	Lehrerin und Förderschullehrerin
M.C.	Multiple Choice Aufgabe(n)
nat. Z.	natürliche Zahl(en)
NSchG	Niedersächsisches Schulgesetz
o.A.	offene Aufgaben
o.J.	ohne Jahresangabe
PA	Partnerarbeit
RTI-Modell	Response-to-Intervention-Modell
RZI	Regionale Beratungs- und Unterstützungszentren Inklusive Schule
sic.	sīc erat scriptum
s.o.	siehe oben

s.u.	siehe unten
SuS	Schülerin oder Schüler bzw. Schülerinnen oder Schüler
Tab.	Tabelle
T-A-G	Teil-Anteil-Ganze(s)
u.a.	unter anderem
vgl.	vergleiche
VN BRK	Vereinte Nationen Behindertenrechtskonvention
Wdh.	Wiederholung
z. B.	zum Beispiel
z.T.	zum Teil

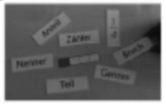
ANHANG[21]

[21] Aufgrund des Umfangs der vorliegenden Arbeit werden in diesem Anhang nur ausgewählte Dokumente aufgegriffen, der vollständige Anhang befindet sich auf einer zusätzlichen SD Karte. Die originalen Aufgabenhefte des „BruKos“ liegen bei der Autorin zur Einsicht vor. Bei Interesse an den Inhalten des gesamten Anhangs kontaktieren Sie bitte ria.kirchhof@tu-dortmund.de

A 1 Exemplarischer Unterrichtsverlaufsplan für den Klassenunterricht

Planungsraster Einzeleinheit

Bau-stein	Ein-heit	geplanter Unterrichtsverlauf	angestrebte Kompetenzen	methodisch-didaktischer Kommentar
2	1	*Einstieg / Erarbeitung* [ca. 10 Min.] - LuFöl begrüßen Klasse - SuS erklären mit eigenen Worten visualisierten Stundenablauf - L. greift Thema der letzten Stunde auf und gibt Frageimpuls - SuS erarbeiten gemeinsam mit LuFöl verschiedene Faltvorgänge und leiten erste Stammbrüche daraus ab	- Verständnis für „gerechtes" Verteilen festigen (Falten gleich großer Flächen) - handlungsorientiertes Herstellen u Darstellen von Bruchteilen / Erkunden verschiedener Darstellungsmöglichkeiten durch Falten - Kennenlernen Notation u Fachbegriffe - Umbruch zu nat. Zahlen thematisieren - Fokus auf gleiches Ganzes, gleicher Zähler, unterschiedlicher Nenner - Erkennen erster Strukturen T-A-G in gefaltetem Papier	- ritualisierter Einstieg - Zieltransparenz - Aktivierung Vorwissen / Motivation - Sachkontext - erste Abstraktion / Transfer der alltagsbezogenen Erarbeitung in Einheit 1 auf strukturfokussiertes Falten - Zugang systematischer / abstrakter, jedoch gleiche Form, d.h. Rückgriff auf Sachkontext (+ggf. Papier-Modelle) jederzeit möglich - Schaffung und Visualisierung gemeinsamer Arbeitsgrundlage - Handlungsorientierung - LuFöl als sprachliches Modell
		Arbeitsphase I [ca.20 Min.] - Kooperationspartner finden zusammen, bearbeiten selbstdifferenzierenden Arbeitsauftrag gemeinsam - L. steht für individuelle Hilfestellungen / anregende Unterstützungen für alle SuS bereit - Fö.L. unterstützt lernschwächste SuS bei enaktiver Bearbeitung (ggf. in KG)	- handlungsorientiertes Herstellen und Darstellen von Bruchteilen eines Ganzen (Stammbrüche) im Kontext des gerechten Verteilens - Bruchteile erkennen und Stammbrüche bestimmen - Anbahnung GV 1 - erstes Verständnis Zusammenhang T-A-G - symbolische Notation von Brüchen (Umbruch zu nat. Z. thematisieren) - Erkenntnis: verschiedene Faltmöglichkeiten, um gleichen Anteil darzustellen - Erkenntnis: gleicher Anteil bei untersch. Papiergrößen (gleiche Form) kleiner / größer (absolute Größe) - Erkenntnis: gleicher Anteil bei unterschiedlichen Papierformen kleiner/größer bzw. unterschiedliche Form - Förderung Kommunikations- u Kooperationsfähigkeit - erster Größenvergleich	- Übergang struktur-fokussierter Kontext - niedrigschwelliges Einstiegsniveau - verschiedene Herangehensweisen - selbstdifferenzierend - ermöglicht konkrete Erfahrungen, die sukzessive verallgemeinert + erweitert werden können - handlungsorientierter Zugang durch systematisch-probierendes Falten (vorausschauendes, geplantes, systematischen Falten möglich) - halboffene Problemlöseaufgabe - unterschiedliche Erkenntnismöglichkeiten - motorischer Anspruch (Handlung des Faltens) - kommunikative und kooperative Zusammenarbeit an grundlegendem Lerngegenstand - Zusammenführen unterschiedlicher Vorgehensweisen und Entdeckungen / unterschiedlich vertiefter Zusammenhänge - Nachvollziehen anderer Vorgehensweisen - in unterschiedlichen Vorgehensweisen das Gemeinsame entdecken
		Reflexion / Abschluss [ca.15 Min.] - SuS ordnen gefaltete Brüche den Stammbrüchen an Tafel zu - SuS vergleichen verschiedene Darstellungen u stellen Erkenntnisse aus AP II vor - SuS KG präsentieren Lernplakat mit Begriffen - SuS ordnen exemplarisch gefaltete Begriffe zu - LuFöl greifen Bsp. auf u führen Fachbegriffe ein - LuFöl geben gezielte Impulse, um Zusammenhänge abschließend für alle zu verbalisieren - LuFöl würdigen Ergebnisse, geben Ausblick auf nächste Stunde und beenden die Stunde	- Förderung der Argumentations-/ Präsentationsfähigkeit - Kennenlernen der Fachbegriffe und erkunden der konzeptueller Bedeutung - Lesen von Stammbrüchen (auditive Zahldarstellung) - Schreibweise / Notation (symbolische Zahldarstellung) - erster Größenvergleich / erste Erkundungen Zusammenhänge T-A-G	- Verbindung handelnde Ebene zu systematischem Sortieren - beachten: Nicht immer nur 1.Teil färben, auch Teile mitten in Abbildung (Variabilität) - Festigen und Konkretisieren der Erkenntnisse aus AP II - gemeinsame Erarbeitung Lernplakat (Stammbrüche und Fachbegriffe) als Verständnisgrundlage / Unterstützungshilfe - SuS KG als „Experten"; enge Verzahnung Fö.schleifen - Ausblick auf nächste Stunde / Transparenz - Würdigung der Ergebnisse

Sozialform / Kooperationsform	Aufgabenformate	Darstellungsmittel / Repräsentation / HM
Plenum ○ Halbkreis vor der Tafel	- *i.A. an Mathe sicher können, B1 A, 1.1* ○ Wie kann ich dieses Rechteck in gleich große Flächen falten? ○ Bspw. Halbieren: Wie viele Teile sind es insgesamt? Was passiert, wenn noch einmal halbieren? Gibt es verschiedene Möglichkeiten? ○ Wie heißt ein Teil? ○ Bruch ableiten (Teil einfärben) ○ Bezug zu Ganzem herstellen ○ Notation Anteil  ○ Bedeutung Zähler und Nenner erkunden ○ *(ggf. Kontext Kuchen aufgreifen: Stell dir vor, das ist ein Kuchen, der auf… Kinder aufgeteilt werden soll)*	○ Tafel ○ visualisierter Stundenverlauf ○ Magnete ○ große Papierstreifen zum Falten ○ *Oberpunkte und Anzahl der Kinder an Tafel vorgegeben; Bruchteile markieren und Bruch notieren*
PA	○ *i.A. a. Mathewerkstatt, 113, 24* (Papier auf verschiedene Weisen falten und Anteile markieren); Mathe Stationen 6. ○ Faltet jeweils ein Papier in 2, 4, 8 gleich große Teile und malt immer einen Teil aus! Wie viele Teile sind es insgesamt? Wie heißt ein Teil? Wie heißt der Bruch? Schreibe ihn in den bunten Teil! ○ Wählt ein anderes Papier (andere Größe / Form) und faltet genauso! Was fällt euch auf? Notiert! ○ Könnt ihr auch 3, 5, 7 gleich große Teile falten? Wie heißt der Bruch? Bzw. Welche Brüche könnt ihr noch falten? ○ Welche Form eignet sich am besten? Begründet! ○ Vergleicht euer gefaltetes Papier! Wie seid ihr jeweils vorgegangen? Was fällt euch auf? Begründet! ○ Sortiert gleiche Brüche / Anteile zueinander! Woran könnt ihr erkennen, dass ihr gleiche Brüche / Anteile gefaltet habt? ○ Vergleicht den gleichen Bruch mit den unterschiedlichen Papiergrößen! Was fällt euch auf? ○ Vergleicht den gleichen Bruch mit den unterschiedlichen Papierformen! Was fällt euch auf? ○ Vergleicht $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$. Was fällt euch auf? Begründet! ○ Vergleicht $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$. Was fällt euch auf? Begründet!	○ verschiedene Papierformen zum Falten ○ Quadrate/Rechtecke/Kreise ○ verschiedene Papiergrößen einer Form ○ z.T. vorstrukturiert ○ ikonische Darstellungen zum Nachfalten ○ Tafel mit grundlegendem Arbeitsauftrag ○ Teil-Arbeitsblätter ○ Tafel mit symbolisch notierten Brüchen (aus AP I) ○ Magnete
Plenum ○ Halbkreis vor der Tafel	- Sortiert jeweils 2 gefaltete Brüche an der Tafel zu! ○ Was ist euch aufgefallen? Warum ist das so? Begründet! ○ Vergleicht die verschiedenen Brüche / Papiere! Was fällt euch auf? - SuS KG stellen Lernplakat mit Wortnamen der Stammbrüche vor ○ Wie heißen die dazugehörigen Brüche / Anteile? Wie schreibt man sie auf? Wie spricht man sie aus? - Fachbegriffe erkunden  ○ Ordnet die Kärtchen zu! Welche Begriffe gehören zum Bruch und zum Bild? ○ Was bedeutet „Zähler"? Was bedeutet „Nenner"? ○ Was bedeutet Teil, Anteil, Ganzes?	○ Tafel ○ Magnete ○ Arbeitsergebnisse aus PA I ○ Fachbegriffe auf Karten (Beispielbruch in symbolischer Darstellung, Begriffe Zähler, Nenner, Bruchstrich, Teil, Anteil, Ganzes; ergänzen um Wort (bspw. 1 Viertel)) ○ ggf. Lernplakat

A 2 Exemplarische Planungsübersicht für den Klassenunterricht

Bausteinnummer 2

Einheitsnummer 1

Einzelstunde

Kooperationsform

Partnerarbeit ●●

Kompetenzschwerpunkt

Grundvorstellung 1 (GV 1)

Teil eines Ganzen

„Papier auf verschiedene Weisen falten und Anteile markieren" / Stammbrüche ablesen, bestimmen, darstellen

Spanne möglicher Kompetenzen
- Bruchteile durch Falten herstellen (ein Ganzes in gleiche Teile teilen; handlungsorientiert)
    - verschiedene Faltmöglichkeiten, um gleichen Anteil darzustellen
    - absolute Größe des Ganzen hat Auswirkungen auf absolute Größe des Teils; gleicher Anteil bei unterschiedlichen Papierformen (Ganzen), unterschiedlicher Teil
- **Verständnis „gerechtes" Teilen i.S. gleich groß**
- **Bruchteile bzw. Anteile (Stammbrüche) erkennen, markieren, ablesen, bestimmen**
- Erkunden erster Zusammenhänge T-A-G
    - Fokus auf Teile / Unterteilung; **Ganzes als Bezugsgröße; Erkenntnis, dass 1 Teil in Zusammenhang mit allen restlichen Teilen steht**
    - **Erkenntnis, dass 1 Ganzes in verschiedene Teile zerlegt werden kann und alle Teile zusammen 1 Ganzes ergeben**
- **Fachbegriffe, Schreibweise u Aussprechweise kennenlernen**
- Konzeptuelle Bedeutung Fachbegriffe erkunden (**Bedeutung Zähler und Nenner erkunden**)
- Lesen von (symbolisch dargestellten) Brüchen

Differenzierungsspanne
- Erkunden unterschiedlicher Faltmöglichkeiten
    - zunächst leichte Stammbrüche mit geradem Nenner, um einfacher Falten zu können
    - Leichte Stammbrüche; untersch. Möglichkeiten bei gleichem Papier (unterschiedliche Halbe, Viertel, Sechstel, Achtel,...)
    - Leichte Stammbrüche ; untersch. Möglichkeiten bei versch. großem Papier
    - Leichte Stammbrüche; untersch. Möglichkeiten bei untersch. Formen (welche Form ist am geeignetsten?
    - Vergleiche: Gleicher Anteil bei untersch. Papiergrößen bspw. kleiner / größer (gleiche Form)
    - Vergleiche: Gleicher Anteil bei untersch. Papierformen bspw. kleiner / größer
    - Erkunden, welche Form sich am besten zum Falten eignet.
- erste Erkundungen Beziehungen T-A-G (Unterteilung des Papiers stellt Nenner dar bzw. gibt Nenner an, in wie viele Stücke Ganzes zerlegt wird, d.h. gibt Einteilung / Faltungen vor)

Material
- 1 großes rechteckiges Papier (Einstiegsaufgabe)
- rechteckiges Papier in verschiedenen Größen
- Kreise, Quadrate
- Arbeitsaufträge EA + PA
- Stammbrüche (symbolisch; magnetisch) für Tafel
- Fachbegriffe (magnetisch) für Tafel

-> 5.1 + 5.3: Lernplakat Förderschleife

geplanter Verlauf

<u>Einstieg: (Sitzkreis)</u>: Großes Rechteckt zum Falten *(Bruchstreifen? i.A.a. Einführungsbeispiel)*
- kognitiver Konflikt: **Wie kann ich in gleich große Flächen falten?** bspw. Halbieren: wie viele Teile habe ich? Was passiert, wenn ich nochmal halbiere? Gibt es verschiedene Möglichkeiten?

-> Bruch ableiten (Bezug auf ein (gefärbtes) Teil; Bezug zu Ganzem: Anteil; Notation)

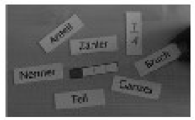
-> **Bedeutung Zähler und Nenner erkunden**

<u>Überleitung AP I (PA)</u>
- Falte jeweils ein Papier, in **2, 4, 6, 8 gleich große Teile und färbe immer einen Teil. Wie viele Teile sind es insgesamt? Wie heißt ein Teil? Wie heißt der Bruch / Anteil?** Schreibe ihn in das bunte Feld!
- Falte ein **anderes Papier** genauso. Vergleiche! Was fällt dir auf? Notiere!
- Welche Brüche kannst du noch falten? / Kannst du auch 3, 5, 7 gleich große Teile falten? Wie heißt der Bruch?
- **Welche Form eignet sich am besten?** Begründe.
- Findet ihr unterschiedliche Möglichkeiten? -> **gefaltete Brüche vergleichen und sortieren** (Woran könnt ihr erkennen, dass ihr gleiche Brüche gefaltet habt?)
- Vergleicht $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$! Was fällt euch auf?

<u>Reflexion: (Halbkreis vor Tafel)</u>
- **Stammbrüche an Tafel zuordnen** (Verbindung handelnde Ebene zu systematischem Sortieren)
- Blick auf Ergebnisse: Was fällt euch auf? Was habt ihr entdeckt? Woran kann man erkennen, dass ihr $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. , ... dargestellt habt?
- impliziter Vergleich der Stammbrüche (bspw. $\frac{1}{4}$ ist halb so groß wie $\frac{1}{2}$ etc.)
- SuS KG präsentieren Lernplakat mit Begriffen, SuS ordnen exemplarisch gefaltete Brüche zu
- 1 Bsp. aufgreifen, um Fachbegriffe einzuführen

Aufgaben

[i.A.a. Mathewerkstatt, 113, 24; Mathe Stationen. Klasse 6; M.s.k. B1A, 2.1]



Innermathematische Substanz
- niedrigschwelliges Einstiegsniveau
- unterschiedliche Erkenntnismöglichkeiten
- selbstdifferenzierend
- verschiedene Herangehensweisen
- ermöglicht konkrete Erfahrungen, die sukzessive verallgemeinert und erweitert werden können
- handlungsorientierter Zugang durch systematisch-probierendes Falten
- vorausschauendes, geplantes, systematisches Falten möglich
- erste Systematisierung / Abstraktion des sachkontextbezogenen Erkundens in Einstieg

Hürden / kritische Stellen
- motorischer Anspruch: gleichmäßiges Falten
- gleichmäßige Einteilung (Verständnis nachgeschaltet)
- erste Strukturen T-A-G in gefaltetem Papier erkennen
- Transfer, Markieren des Teils und Bestimmung des Anteils, d.h. Transfer in symbolische Notation

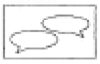
Möglichkeiten individueller Unterstützungen
- gleiche Form wie in Einstiegsstunde ermöglicht jederzeit Rückgriff auf Sachkontext und ggf. Papiermodelle
- gemeinsame Erarbeitung API in KG für rechenschwächste SuS

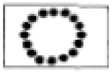
Bezug BK
- Halbieren / Verdoppeln
- Division (Aufteilen)

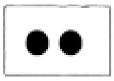
B 1 Exemplarische Zieltransparenz für die Unterrichtseinheit

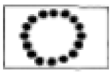
B 2 Exemplarische Zieltransparenz für den Klassenunterricht

Einheit 1.1 – Einführung von Bruchzahlen

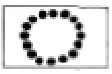
 Wir erforschen die Bruchzahlen – los geht's!

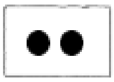
 Wie kann der Kuchen gerecht aufgeteilt werden?

 verschiedene Pappkuchen erforschen

 Kuchen gerecht aufteilen

Einheit 2.1 – ein Teil von einem Ganzen

 *oder*  Stammbrüche erkunden

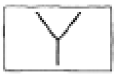
 Stammbrüche falten

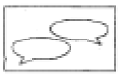
 Stammbrüche vergleichen

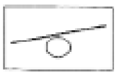
Einheit 2.2 – ein Teil von einem Ganzen

 Fehlersuche

Was passiert?

 Stammbrüche erkunden

 Entdeckungen vergleichen

 Memory mit Stammbrüchen

C 1 Regeln für Forscher-Teams

Regeln für Forscher - Teams

1. Wir arbeiten als **Team**.

2. Wir **bearbeiten gemeinsam** Forscher - Aufträge.

3. Wir sind **beide** für die **Lösung** der Aufgaben **verantwortlich**.

4. Wir **sprechen** (leise) **über unsere Forscher - Aufgabe** (30cm - Stimme).

5. Wir **hören** uns gegenseitig **zu.**

6. Wir **fragen** uns **gegenseitig,** wenn wir etwas nicht verstanden haben.

7. Wir **erklären** uns unsere **Lösungen**.

C 2 Forscher-Urkunde Klassen

U R K U N D E

Die Klasse 5.3

hat erfolgreich

an der Unterrichtseinheit

- Wir erforschen die Bruchzahlen -

teilgenommen.

VIELEN DANK!

Datum: ______________ Unterschrift: ______________

C 3 Forscher-Urkunde Lernende

U R K U N D E

____

hat erfolgreich an der Unterrichtseinheit

- Wir erforschen die Bruchzahlen -

teilgenommen und ist nun

Bruchzahl – Forscher(in).

Datum: ____________ Unterschrift: ____________

D Exemplarische Planungsübersicht für die Förderschleifen

Baustein 1 – Förderschleife 1

- Verdoppeln / Halbieren (als zentrale operative Beziehungen kleines 1·1 / 1:1)
- Mal 2 / Geteilt durch 2
- Halbieren und Verdoppeln als Umkehroperationen erkennen
- Erkenntnis, dass Halbieren nur bei gerader Zahl ohne Rest aufgeht (Grenzen Halbieren nat. Zahlen)
- Erkenntnis, dass bisher kleinste bekannte Größe (Eins) zerkleinert, d.h. in gleich große Stücke aufgeteilt werden kann und kleiner als 1 ist

		Material	Fokus

Einstieg (Plenum)	**Spiel zu Halbieren / Verdoppeln**
	- Kind 1 zieht Zahlenkarte und nennt dargestellte Zahl
	- Kind 2 zieht Aktionskarte (Verdoppeln / Halbieren) und nennt entsprechende Zahl
	  o Zahlenkarten mit symbolischen und ikonischen (Punktefeld, Dienes, Finger) geraden Zahlen
	  o Aktionskarten (Verdoppeln / Halbieren)
	  o Zunächst ZR 10 (automatisiert), dann analog ganze 10er/100er/1000er
	  o 5er Zahlen (hier nur Verdoppeln möglich)
	  o gemischte Zahlen (ZR 100)
	  o ggf. mit Material legen lassen
		Kartenset „Zahlenkarten" / "Aktionskarten" Dienes-Material	

Erarbeitung	**„Rechenregel" erkennen | Umkehraufgaben | beziehungsreiches 1·1**
	- Halbieren bedeutet : 2
	- Verdoppeln bedeutet · 2
	  o Begrifflicher Fokus: x ist die Hälfte von y bzw. halbieren; x ist das Doppelte von y bzw. verdoppeln
	  o mit Material legen (Dienes, Plättchen, Punktestreifen)
	  o parallele Notation der Aufgabe auf blanko Papier
		blanko Papier, Edding	*erste Verknüpfung zu Stammbruch $\frac{1}{2}$*

AP I (EA)	**Verdoppeln und Halbieren am Punktefeld | Mal- und Geteiltaufgaben finden | Umkehraufgaben** 1. Finde eine passende Malaufgabe zu dem Bild! Finde auch eine passende Geteiltaufgabe! 2. ikonische Punktedarstellungen halbieren und Aufgabe notieren 3. Verdoppeln am Punktefeld einzeichnen und Aufgabe notieren - zwei Hälften ergeben ein Ganzes - hier noch kein Fokus auf Anteilsbestimmung von Mengen, sondern auf Mal-/Geteiltaufgaben als Umkehroperationen sowie Stammbruch ein Halb ($\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$)	AB (kann zunächst in Mitte gefaltet werden)	Beziehung zwischen Aufgaben / Ergebnissen untersuchen
AP II (PA)	**Ergebnisse mit PA vergleichen** - Vergleicht eure Ergebnisse mit eurem Partner! - Wie habt ihr die Aufgaben bearbeitet? Erklärt und begründet!	sprachliche Begleitung (Hälfte, Doppeltes; Hälfte + Hälfte = 1 Ganzes; ggf. auch bei Knicken des Blattes) thematisieren: Hälften können untersch. aussehen	

Abschluss (Plenum)	**(un)gerade Anzahl homogener Objekte aufteilen**
	- zunächst grade Anzahl gerecht aufteilen
	- dann ungerade Anzahl
	  o Wann ist Halbieren möglich, wann nicht?
	  o bspw. 5 Rechtecke halbieren bzw. gerecht auf 2 Kinder aufteilen -> 1 bleibt über
	  -> 1 Rechteck als „Ganzes" aufgreifen, das wiederum aufgeteilt bzw. halbiert wird
	    ▪ In wie viele Teile aufgeteilt? Wie viele Hälften?
	  o weitere ungerade Anzahl an Objekten, sodass immer 1 Objekt übrig bleibt, das halbiert wird
	  -> Ableitung Stammbruch ein Halb $\frac{1}{2}$
	    ▪ ein Halb $\frac{1}{2}$ wieder verdoppeln = 1 Ganzes
		kleine Papier-rechtecke	*erster Bezug Notwendigkeit Bruchzahlen*

E Kompetenzspanne für den Klassenunterricht

Woche	**Bau-stein**	**Ein-heit**	**Kompetenzschwerpunkt Bruchzahlen**
1	**1**	1	*Die Lernenden* - teilen ein Ganzes gerecht auf - erzeugen durch Handlungen Bruchteile - lernen Bruchteile als Teile eines Ganzen kennen - lernen Bruchteile als Ergebnis von Aufteilsituationen kennen (GV1: ein Ganzes ohne Rest aufteilen) - lernen einfache Stammbrüche kennen - lernen „Wortnamen" einfacher Stammbrüche kennen (Halb/Hälfte, Drittel, Viertel, Sechstel, Achtel) - untersuchen erste Zusammenhänge T-A-G o Fokus auf Teile / Unterteilung o Ganzes als Bezugsgröße - finden über systematisches Ausprobieren eine Lösung, wie ein Ganzes gerecht auf alle Kinder aufgeteilt werden kann - erkunden indirekte Größenvergleiche *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - die bisher kleinste bekannte Größe (Eins) zerkleinert, d.h. in gleich große Teile aufgeteilt werden kann - gerechtes Aufteilen i.S. „gleich groß" bedeutet, dass alle Teile gleich groß sein müssen - ein Teil im Zusammenhang mit allen restlichen Teilen steht - ein Ganzes in verschiedene Teile zerlegt werden kann und alle Teile zusammen ein Ganzes ergeben *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Aufstellen von Vermutungen; Begründen; Beschreiben von Beobachtungen - Kommunizieren o Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Vermutungen aufstellen, systematisch ausprobieren und reflektieren; Übertragen von Lösungsbeispielen; Erschließen von Zusammenhängen
	2	1	*Die Lernenden* - stellen Bruchteile / Stammbrüche durch Falten her (ein Ganzes in gleiche Teile teilen) - erkunden verschiedene Faltmöglichkeiten und Papierformen, um (gleichen) Anteil darzustellen - lernen die Fachbegriffe, symbolische Notation und Aussprechweise von Stammbrüchen kennen - erkunden die konzeptuelle Bedeutung von Zähler und Nenner (GV1) - lernen das Lesen von (symbolisch dargestellten) Stammbrüchen - erkennen, bestimmen und lesen einfache Bruchteile (Anteile) bzw. Stammbrüche aus gefalteten Darstellungen ab - erkennen die Vielfalt von Darstellungsformen (Gemeinsamkeiten und Unterschiede) - übersetzen zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Darstellungsformen - untersuchen erste Zusammenhänge T-A-G o Fokus auf Teile / Unterteilung o Ganzes als Bezugsgröße *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - „gerechtes" Aufteilen i.S. „gleich groß" bedeutet, dass alle Teile gleich groß sein müssen - gefaltete Teile eines Blattes mit Brüchen beschrieben werden können - ein Teil in Zusammenhang mit allen restlichen Teilen steht

		2	- ein Ganzes in verschiedene Teile zerlegt werden kann und alle Teile zusammen ein Ganzes ergeben - der Nenner (i.S. GV1) angibt, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt ist - der Zähler (i.S. GV1) die Anzahl der relevanten Teile angibt - die absolute Größe des Ganzen Auswirkungen auf die absolute Größe des Teils hat - der gleiche Anteil bei unterschiedlichen Papierformen (Ganzen) unterschiedlich aussehende Teile hat *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Aufstellen von Vermutungen; Begründen - Kommunizieren o Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen; Vermutungen aufstellen, systematisch ausprobieren und reflektieren; Erschließen von Zusammenhängen
		2	*Die Lernenden* - wenden ihr Verständnis für die Fachbegriffe an und festigen es, indem sie Fehler in Begriffszuordnungen finden und verbessern - erkennen und bestimmen Stammbrüche in ikonischen Darstellungen - markieren Stammbrüche in ikonischen Darstellungen und stellen sie dar - erkennen Muster und setzen Muster fort - untersuchen operative Veränderungen / Zusammenhänge T-A-G - übersetzen zwischen ikonischen und symbolischen Darstellungsformen - erkennen die Vielfalt von Darstellungsformen (Gemeinsamkeiten und Unterschiede) - flexibilisieren und übertragen bisherige Erkenntnisse in verschiedene Darstellungsformen - erkennen den Zusammenhang unterschiedlicher Darstellungen von Anteilen - sortieren und ordnen verschiedene Darstellungen *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - je mehr Kinder sich den Kuchen teilen, desto weniger Kuchen bekommt jedes Kind - je größer der Nenner wird, desto kleiner wird der Anteil und der Teil (gleiches Ganzes) - je größer der Nenner wird, desto kleiner wird der Anteil bei gleichbleibendem Teil (unterschiedliche Größe Ganzes) - die Veränderung des Ganzen Auswirkungen auf den Teil / Anteil hat - gleiche Teile unterschiedliche Anteile darstellen können (abh. von Ganzem / Einteilung) - gleiche Brüche / Anteile unterschiedliche Darstellungsformen haben können - Teile unterschiedlicher Größe / Form den gleichen Anteil darstellen können - der Teil größer wird, wenn sich die Größe des Ganzen verändert (Anteil bleibt gleich) - Anteil keine absolute, sondern relative Bezugsgrößen ist - ein Teil markiert sein muss, um Anteil darzustellen und nur die Einteilung des Ganzen nicht ausreichend ist („Hürde“/ häufige FV) *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Aufstellen von Vermutungen; Begründen - Kommunizieren o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Problemlösen

			o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Suchen des Gemeinsamen in Unterschiedlichen (Invarianzprinzip); Erschließen von Zusammenhängen - Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; angemessener Wechsel zwischen Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft
3		3	*Die Lernenden* - deuten Anteile als Beziehungen zwischen Teil und Ganzem - lernen Nicht-Stammbrüche als Vielfache von Stammbrüchen kennen - erkennen und bestimmen Stamm- und Nicht-Stammbrüche in ikonischen Darstellungen - stellen erste einfache Additionsaufgaben auf und bauen dadurch ihr Verständnis für das Ganze aus - übersetzen zwischen ikonischen und symbolischen Darstellungsformen - erkennen und beschreiben Gemeinsamkeiten und Unterschiede in ikonischen Darstellungen - markieren Stamm- und Nicht-Stammbrüche in ikonischen Darstellungen und stellen sie dar - untersuchen erste Zusammenhänge T-A-G o Fokus auf Teile / Unterteilung o Ganzes als Bezugsgröße - erweitern die konzeptuelle Bedeutung des Nenners *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - nicht nur die Anzahl, sondern auch die Größe der Teile relevant ist - mehrere markierte Teile in Zusammenhang mit allen restlichen Teilen stehen - ein Ganzes in verschiedene Teile zerlegt werden kann und alle Teile zusammen ein Ganzes ergeben - bei Nicht-Stammbrüchen der Teil und der Anteil größer werden, das Ganze und die Einteilung gleich bleiben - die Einteilung des Ganzen eher irrelevant ist, d.h. der Nenner kann etwas mit der (ikonischen) Einteilung zu tun haben, muss er aber nicht zwingend, wenn restliches Ganzes nur 1 Stück (bei unvollständig dargestellter Einteilung) ist *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Aufstellen von Vermutungen; Begründen - Kommunizieren o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; angemessener Wechsel zwischen Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft
		4	*Die Lernenden* - erkunden und lösen durch systematisches Probieren den kognitiven Konflikt und ergänzen den dargestellten (An-)Teil zum Ganzen - setzen den Bruchteil in Beziehung zu dem Ganzen bzw. orientieren sich am Ganzen als Bezugsgröße - erkennen und bestimmen Nicht-Stammbrüche in ikonischen Darstellungen - markieren Nicht-Stammbrüche in ikonischen Darstellungen und stellen sie dar - übersetzen zwischen ikonischen und symbolischen Darstellungsformen - untersuchen operative Veränderungen / Zusammenhänge T-A-G - flexibilisieren und übertragen bisherige Erkenntnisse in verschiedene Darstellungsformen - erkennen den Zusammenhang unterschiedlicher Darstellungen von Anteilen - sortieren und ordnen verschiedene Darstellungen *Die Lernenden machen die Erkenntnis, dass*

			- gleiche Teile (in Abhängigkeit zum Ganzen) unterschiedliche Anteile darstellen können - ein Teilungsprozess rückgängig gemacht werden kann, um wieder das Ganze zu erhalten (Invarianz des Ganzen) - je größer der Nenner wird, desto kleiner wird der Anteil und der Teil (gleiches Ganzes) - je größer der Nenner wird, desto kleiner wird der Anteil bei gleichbleibendem Teil (untersch. Größe Ganzes) - die Veränderung des Ganzen Auswirkungen auf den Teil / Anteil hat - gleiche Teile unterschiedliche Anteile darstellen können (abh. von Ganzem / Einteilung) - gleiche Brüche / Anteile unterschiedliche Darstellungsformen haben können und unterschiedlich große Teile beschreiben können - Teile unterschiedlicher Größe / Form den gleichen Anteil darstellen können - der Teil größer wird, wenn sich die Größe des Ganzen verändert (Anteil bleibt gleich) - $1=\frac{n}{n}$, $n=\frac{n}{1}$ („Hürde"/ häufige FV $n\neq \frac{n}{n}$) - der Anteil keine absolute, sondern eine relative Bezugsgrößen ist *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Aufstellen von Vermutungen; Begründen - Kommunizieren o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; angemessener Wechsel zwischen Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Suchen des Gemeinsamen im Unterschiedlichen (Invarianzprinzip); Erschließen von Zusammenhängen; Vermutungen aufstellen, systematisch ausprobieren und reflektieren
4	**3**	1	*Die Lernenden* - festigen GV1, in dem sie ein Ganzes gerecht aufteilen - finden über systematisches Ausprobieren verschiedene Lösungen, wie mehrere Ganze gerecht an alle Kinder verteilt werden können - lernen Bruchteile als Ergebnis von Verteilsituationen kennen (GV2: mehrere Ganze ohne Rest verteilen) - lernen Bruchteile als Teile mehrerer Ganzer kennen - interpretieren **„**unzusammenhängende Ganze" als ein Ganzes / Einheit - erkennen und bestimmen Anteile von mehreren Ganzen / Mengen o Anzahl der Teilstruktur bestimmen - erkennen und beschreiben Gemeinsamkeiten und Unterschiede in enaktiven Handlungen und ikonischen Darstellungen (zwischen GV1 und GV2) - erkunden die konzeptuelle Bedeutung von Zähler und Nenner (GV2) - übersetzen einen Sachkontext in enaktive Handlung und/oder ikonische Darstellung und symbolische Notation *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - der Nenner (i.S. GV2) gibt die Anzahl aller Bruchteile des neuen Ganzen an - der Zähler (i.S. GV2) angibt, wie viele Ganze als ein Ganzes zusammengefasst werden - der gleiche Bruch (Anteil) auf unterschiedliche Weise hergestellt / dargestellt werden kann (entsprechend GV1 und GV2) - sich der gleiche Bruch auf ein Ganzes oder mehrere Ganze beziehen kann - der Zähler und der Nenner je nach GV unterschiedliche Bedeutungen haben

			prozessbezogene Kompetenzen: - Argumentieren o Erkunden; Aufstellen von Vermutungen; Begründen - Kommunizieren o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; Anlegen von Darstellungen; eigene Darstellungen, um individuelle Überlegungen zu strukturieren und dokumentieren; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen, bildhaft - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen; Vermutungen aufstellen, systematisch ausprobieren und reflektieren; Suchen des Gemeinsamen in Unterschiedlichen (Invarianzprinzip)
		2	*Die Lernenden* - stellen Brüche (Anteile) i.S. GV1 und GV2 dar - wechseln zwischen einem bzw. mehreren strukturierten, kontinuierlichen Ganzen - ordnen konkreten Brüchen i.S. beider GV Repräsentanten zu - erkunden und erkennen die Ergebnisgleichheit von GV1 und GV2 - erkennen und beschreiben Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen GV1 und GV2 - erkennen den Zusammenhang unterschiedlicher Darstellungen von Anteilen - erkennen und bestimmen Brüche (Anteile) in unterschiedlichen ikonischen Darstellungen - (ggf.) erkunden und erkennen, dass Vervielfachen und Teilen vertauschbare Operationen sind *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - der gleiche Bruch (Anteil) auf unterschiedliche Weise hergestellt / dargestellt werden kann (entsprechend GV1 und GV2) - ein Bruch (Anteil) in Abhängigkeit seiner Bezugsgröße (ein/mehrere Ganze) gedeutet werden kann - Vervielfachen und Teilen vertauschbare Operationen sind *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Aufstellen von Vermutungen; Begründen - Kommunizieren o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; Anlegen von Darstellungen; eigene Darstellungen, um individuelle Überlegungen zu strukturieren und dokumentieren; Unterstützung für Argumentation; angemessener Wechsel zwischen Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft; Übertragen von Darstellungsformen auf neue Aufgaben - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen, Suchen des Gemeinsamen im Unterschiedlichen (Invarianzprinzip); Vermutungen aufstellen, systematisch ausprobieren und reflektieren
5	**4**	1	*Die Lernenden* - verteilen mehrere Ganze ohne Rest in gleiche Teile (auf dem Bruchstreifen) - stellen Anteile von Mengen i.S. des gerechten Verteilens her (auf dem Bruchstreifen) - deuten Anteile als Ergebnis einer Verteilhandlung

			- erkennen und bestimmen Anteile von Mengen nach einer Verteilsituation
			  o Anzahl der Teilstruktur bestimmen
			  o Mächtigkeit der Teilstruktur bestimmen
			- bilden Einheiten am Material (um)
			- interpretieren mehrere Ganze als ein neues Ganzes / Anzahl
			- erkunden die konzeptuelle Bedeutung von Zähler und Nenner
			- behalten das Ganze als Bezugsgröße im Blick (Bruchstreifen)
			- (ggf.) erkennen Anteile als Ergebnis einer Division / erkennen zugrundeliegende Rechnung (: Nenner, · Zähler)
			
			Die Lernenden machen die Erkenntnis, dass
			- mehrere unzusammenhängende Ganze als neues Ganzes / Einheit interpretiert werden
			- das Ganze gleichzeitig eins (bspw. $\frac{x}{x}$) und x (x einzelne Objekte) ist („Hürde"/ häufige FV)
			- sich der Anteil multiplikativ auf das Ganze bezieht / relativer Anteil
			
			prozessbezogene Kompetenzen:
			- Argumentieren
			  o Erkunden; Strukturieren von Informationen
			- Kommunizieren
			  o Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team
			- Mathematische Darstellungen
			  o Interpretieren von Darstellungen; angemessener Wechsel zwischen Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft
			- Problemlösen
			  o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen; Erschließen von Zusammenhängen

		2	*Die Lernenden*
			- üben und festigen das Verteilen mehrerer Ganze ohne Rest in gleiche Teile und das Herstellen von Anteilen von Mengen i.S. des gerechten Verteilens (auf dem Bruchstreifen)
			- deuten Anteile als Ergebnis einer Verteilhandlung
			- erkennen und bestimmen Anteile von Mengen nach einer Verteilsituation
			  o Anzahl der Teilstruktur bestimmen
			  o Mächtigkeit der Teilstruktur bestimmen
			- bilden Einheiten am Material (um)
			- interpretieren mehrere Ganze als ein neues Ganzes / Anzahl
			- erkunden operative Zusammenhänge zwischen Teil und Zähler
			- erkunden Auswirkungen von Veränderungen des Zählers bei gleichbleibendem Nenner / Ganzen auf die Teile
			- erkunden Zusammenhänge zwischen Aufgaben
			- erkunden einen ersten Größenvergleich zwischen Anteilen
			
			Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass
			- wenn sich der Zähler um 1 erhöht, die gesuchte Menge des Anteils um die Größe eines Teils größer wird
			- die Veränderung des Zählers Auswirkungen auf den Teil / Anteil hat
			- eine kleinere natürliche Zahl im Nenner einen größeren Teil beschreibt als eine größere natürliche Zahl im Nenner und desto größer der Anteil bei gleichbleibendem Zähler ist („Hürde"/ häufige FV bzw. Umbruch zu natürlichen Zahlen)
			
			prozessbezogene Kompetenzen:
			- Argumentieren
			  o Erkunden; Strukturieren von Informationen; Aufstellen von Vermutungen; Begründen

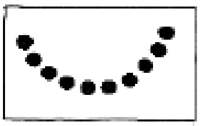
			- Kommunizieren o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft; Übertragen von Darstellungsformen auf neue Aufgaben - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen
6		3	*Die Lernenden* - erkunden, welche Einheiten bei ikonisch dargestellten Mengen gebildet werden können, ohne dass ein Rest bleibt - erkunden das Erkennen, Ablesen und Bestimmen von Anteilen ikonisch dargestellter Mengen durch systematisches Ausprobieren - übertragen und flexibilisieren ihr Wissen von der enaktiven Verteilhandlung auf ikonische Darstellungen - übersetzen zwischen enaktiven und ikonischen Darstellungsformen - erkennen und denken Handlungsstrukturen in ikonische Darstellungen hinein (zunächst strukturiert, dann unstrukturiert) - erkennen und bestimmen Anteile von ikonisch dargestellten Mengen - bilden Einheiten von ikonisch dargestellten Mengen (um) - (ggf.) erkunden Auswirkungen operativer Variationen des Ganzen auf den Anteil in strukturierten (und ggf. unstrukturierten) ikonischen Darstellungen - (ggf.) erkennen Anteile als Ergebnis einer Division / erkennen zugrundeliegende Rechnung (: Nenner, · Zähler) *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - die Handlungsstrukturen auf ikonisch dargestellte Mengen übertragen werden können - ikonisch dargestellte Mengen in Einheiten zusammengefasst werden können, um den Anteil zu bestimmen - die Teiler einer Menge mögliche Einheiten darstellen bzw. entsprechend der Teiler Anteile bestimmt werden können - der Zähler mit in die Bestimmung des Teils einbezogen werden muss (multiplikativer Bezug) *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Strukturieren von Informationen; Aufstellen von Vermutungen; Begründen - Kommunizieren o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft; Übertragen von Darstellungsformen auf neue Aufgaben - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen; Erschließen von Zusammenhängen
	5	1	*Die Lernenden* - erkunden verschiedene Faltmöglichkeiten, um den gleichen Teil durch äquivalente Anteile darzustellen - stellen äquivalente Bruchteile durch Falten her - erkunden Bruchpuzzle und erkennen, dass der gleiche Teil durch unterschiedlich strukturierte Einteilungen und Anteile ausgedrückt werden kann

			- erkunden strukturelle Zusammenhänge zwischen den Teilen des Bruchpuzzles
			- erkennen gleiche Anteile in unterschiedlichen Darstellungsformen (flächige Darstellung)
			- benennen gleiche Anteile mit unterschiedlichen äquivalenten Bruchzahlen
			- erkennen und beschreiben Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen äquivalenten Brüchen
			
			Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass
			- zwei /mehrere Brüche „gleichwertig“ sind, wenn ihr Teil und Anteil gleich groß sind
			- ein gleich großer Teil unterschiedlich strukturiert sein und durch unterschiedliche, aber gleichwertige Anteile beschrieben werden kann
			- der gleiche Anteil ikonisch und symbolisch unterschiedlich aussehen kann
			- ein und dieselbe Größe durch verschiedene Brüche darstellbar ist und sich ikonische Darstellungen in der Feingliederung und symbolische Darstellungen in Zähler und Nenner unterscheiden
			- natürliche Zahlen eindeutig und Bruchzahlen unendlich dargestellt werden können („Hürde“/ häufige FV bzw. Umbruch zu nat. Zahlen)
			prozessbezogene Kompetenzen:
			- Argumentieren
			    o Erkunden; Strukturieren von Informationen; Aufstellen von Vermutungen; Begründen
			- Kommunizieren
			    o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team
			- Mathematische Darstellungen
			    o Interpretieren von Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft; Übertragen von Darstellungsformen auf neue Aufgaben
			- Problemlösen
			    o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen; Erschließen von Zusammenhängen

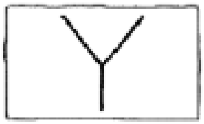
7		2	*Die Lernenden*
			- übertragen und flexibilisieren ihre Erkenntnisse aus flächigen Darstellungen auf lineare Darstellung (Streifen)
			- erkunden strukturelle Zusammenhänge zwischen den Bruchstreifen
			- erkennen gleiche Anteile in unterschiedlichen Streifen
			- benennen gleiche Anteile mit unterschiedlichen äquivalenten Bruchzahlen
			- erkennen und beschreiben Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen äquivalenten Brüchen
			- erkunden Größenvergleiche von Stammbrüchen als Vorbereitung des Verfeinerns und Vergröberns
			
			Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass
			- gleichwertige Anteile in Streifen über Längenvergleiche bestimmt werden können
			- je mehr Teile in dem Streifen sind, desto kleiner ist der Anteil bzw. je weniger Teile in dem Streifen, desto größer ist der Anteil
			- beim Vergleich von Stammbrüchen der Nenner größer, der Teil/Anteil aber kleiner wird („Hürde“/ häufige FV bzw. Umbruch zu nat. Zahlen)
			- bei gleichwertigen Brüchen die Nenner immer Vielfache voneinander sind
			
			prozessbezogene Kompetenzen:
			- Argumentieren
			    o Erkunden; Strukturieren von Informationen; Aufstellen von Vermutungen; Begründen
			- Kommunizieren
			    o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team

			- Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft; Übertragen von Darstellungsformen auf neue Aufgaben - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen; Erschließen von Zusammenhängen
		3	*Die Lernenden* - erkennen, markieren und bestimmen gleichwertige Anteile in verschiedenen Bruchstreifen - lernen die Begriffe Verfeinern und Vergröbern kennen und erkunden ihre Bedeutung - wenden das Verfeinern und Vergröbern zum Bestimmen gleichwertiger Brüche an - erkunden die Begrenztheit des Vergröberns *Die Lernenden gewinnen die Erkenntnis, dass* - Vergröbern bedeutet, dass einzelne Teile größer werden (absolute Größe), der Anteil aber gleich bleibt - Verfeinern bedeutet, dass einzelne Teile kleiner werden (absolute Größe), der Anteil aber gleich bleibt - Verfeinern und Vergröbern gegensätzliche Handlungen sind - der neue Anteil nach dem Verfeinern / Vergröbern genauso groß ist wie der Ursprüngliche - die Einteilung des gleichen Teils und Ganzen keinen Einfluss auf die Größe des Anteils hat - die Handlung des Vergröberns begrenzt ist und die des Verfeinerns theoretisch unendlich oft durchgeführt werden kann - bei gleichwertigen Brüchen die Nenner immer Vielfache voneinander sind *prozessbezogene Kompetenzen:* - Argumentieren o Erkunden; Strukturieren von Informationen; Aufstellen von Vermutungen; Begründen - Kommunizieren o Dokumentieren eigener Lernwege; Darstellen von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen; Äußerungen von anderen verstehen und überprüfen; Aufnehmen mathematischer Informationen; Verständigung mit eigenen Worten und Nutzen von Fachbegriffen; Strukturieren; Bearbeiten von Problemstellungen und Aufgaben im Team - Mathematische Darstellungen o Interpretieren von Darstellungen; Darstellen von positiven rationalen Zahlen in Wortform, Ziffern, Zahlensymbolen oder bildhaft; Übertragen von Darstellungsformen auf neue Aufgaben - Problemlösen o Bearbeiten von Problemstellungen mit verschiedenen Strategien: Probieren und Experimentieren, Übertragen von Lösungsbeispielen; Erschließen von Zusammenhängen

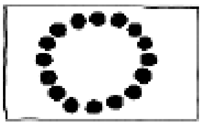
F Symbole zur Visualisierung der Arbeitsschritte



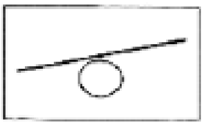
Halbkreis vor der Tafel



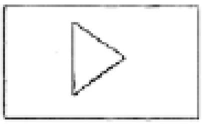
„Weggabelung“



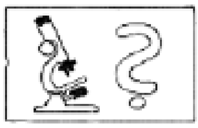
Sitzkreis



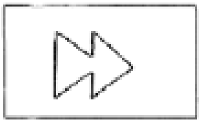
„Wippe“



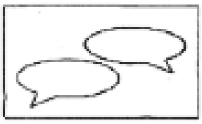
„Starter-Aufgabe



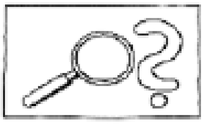
„Forscheraufgabe“ (PA)



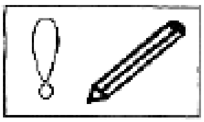
„weiterführende Aufgabe“



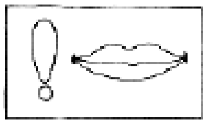
„Vergleicht eure Ergebnisse.“ / „Bearbeitet gemeinsam.... .“



„Was fällt dir/euch auf?“



„Beschreibt.“

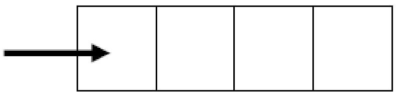
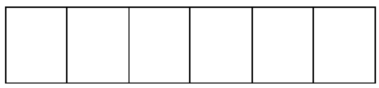
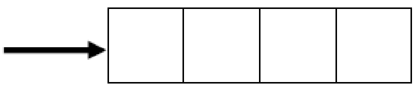
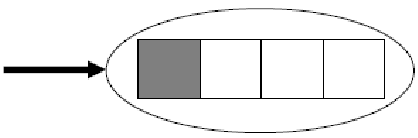


„Erklärt.“

Tipp-Karten

G Wortspeicher operative Veränderungen

Was verändert sich?

- der **Zähler** $\frac{1}{4}$
- der **Nenner** $\frac{1}{4}$
- der **Teil** 
- die **Anzahl der Teile** 
- das **Ganze** 
- der **Anteil** 

<u>Wie</u> verändert es sich?

- wird **größer**
- wird **kleiner**
- bleibt **gleich**
- wird **mehr** als
- wird **weniger** als
- **je** ...., **desto** ....

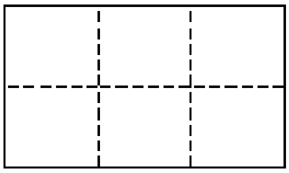
H 1 Arbeitsblätter Baustein 2, Einheit 1

Name: ______________________ Datum: ______________

1. Faltet jeweils ein Papier in **2, 4, 8** und **10 gleich große Teile.**
2. Malt immer **ein Teil** aus.
3. **Wie viele Teile** hat das Papier (das Ganze) **insgesamt?**
4. Wie heißt **ein Teil** vom ganzen Papier?
5. Wie heißt **der Bruch?**
6. Macht eine Skizze.
7. Findet ihr **verschiedene Möglichkeiten?**

---

3. Das Papier hat **insgesamt** 6 gleich große **Teile.**
4. **Ein Teil vom ganzen Papier** heißt: ein Sechstel
5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: $\frac{1}{6}$



---

3. Das Papier hat **insgesamt** ____________ gleich große **Teile.**
4. **Ein Teil** heißt: ______________________
5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ________________

---

3. Das Papier hat **insgesamt** ____________ gleich große **Teile.**
4. **Ein Teil** heißt: ______________________
5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ________________

---

3. Das Papier hat insgesamt ____________ gleich große **Teile.**
4. **Ein Teil** heißt: ______________________
5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ________________

---

3. Das Papier hat insgesamt ____________ gleich große **Teile.**
4. **Ein Teil** heißt: ______________________
5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ________________

Name: ______________________________ Datum: ________________

1. Wählt ein **anderes Papier** und faltet genauso.
2. Was fällt euch auf? **Beschreibt**.

2.

Uns fällt auf, dass...

____

____

____

Name: ______________________________ Datum: ________________

1. Könnt ihr auch **3, 5** oder **7 gleich große Teile** falten?
2. Malt immer **ein Teil** aus.
3. **Wie viele Teile** hat das Papier (das Ganze) **insgesamt**?
4. Wie heißt **ein Teil** vom ganzen Papier?
5. Wie heißt **der Bruch**?
6. Macht eine Skizze.
7. Findet ihr **verschiedene Möglichkeiten**?

3. Das Papier hat **insgesamt** __________ gleich große **Teile**.

4. **Ein Teil** heißt: ____________________

5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ______________

3. Das Papier hat **insgesamt** __________ gleich große **Teile**.

4. Ein Teil heißt: ____________________

5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ______________

3. Das Papier hat insgesamt __________ gleich große **Teile**.

4. **Ein Teil** heißt: ____________________

5. Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ______________

Name: ______________________ Datum: ______________

Welche Brüche könnt ihr noch falten? **Probiert aus.**

Das Papier hat **insgesamt** __________ gleich große **Teile.**

Ein Teil heißt: ______________

Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ______________

Das Papier hat **insgesamt** __________ gleich große **Teile.**

Ein Teil heißt: ______________

Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ______________

Das Papier hat **insgesamt** __________ gleich große **Teile.**

Ein Teil heißt: ______________

Der **Bruch** (Anteil) dazu heißt: ______________

Name: ______________________ Datum: ______________

Mit **welcher Form** könnt ihr am besten Brüche falten? **Begründet.**

Name: ______________________ Datum: ______________

Mit **welcher Form** könnt ihr am besten Brüche falten? **Begründet.**

Namen: ______________________________ Datum: ________________

1. Vergleicht euer gefaltetes Papier. **Wie** habt ihr **gefaltet**?
2. **Was** fällt euch auf? Beschreibt.

   Uns fällt auf, dass… ____

   ____

   ____

3. Sortiert **gleiche Brüche** (Anteile) zueinander.

4. Woran erkennt ihr, dass ihr die gleichen Brüche (Anteile) gefaltet habt? Beschreibt.

   Uns fällt auf, dass… ____

   ____

   ____

Namen: ______________________________ Datum: ________________

1. Vergleicht das gefaltete Papier zu den Brüchen (Anteilen) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$.
2. Was fällt euch auf? Beschreibt.

   Uns fällt auf, dass… ____

   ____

   ____

3. Vergleicht das gefaltete Papier zu den Brüchen (Anteilen) $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$.
4. Was fällt euch auf? Beschreibt.

   Uns fällt auf, dass… ____

   ____

   ____

Namen: ______________________________ Datum: ____________________

1. Vergleicht das gefaltete Papier zu den Brüchen (Anteilen) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$.

2. Was fällt euch auf? Beschreibt.

Uns fällt auf, dass…

____

____

____

Namen: ______________________________ Datum: ____________________

1. Vergleicht den **gleichen Bruch** mit den **unterschiedlichen Papiergrößen.**

2. Was fällt euch auf? Beschreibt.

Uns fällt auf, dass…

____

____

____

3. Vergleicht den **gleichen Bruch** mit den **unterschiedlichen Papierformen.**

4. Was fällt euch auf? Beschreibt.

Uns fällt auf, dass…

____

____

____

H 2 Arbeitsblätter Baustein 5, Einheit 1

Namen: ______________________________ Datum: ________________

Legt das **Ganze** mit **Teilen der gleichen Farbe** aus.

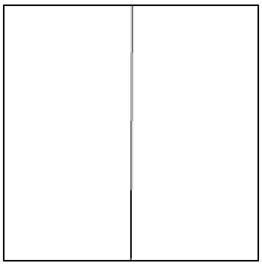
- **Wie viele Teile** passen von einer Farbe in das **Ganze**?
- Wie heißt **ein Teil**?
- Wie groß ist **der Anteil**?
- Macht eine Skizze.

hellgrüne Teile

Insgesamt passen ______________ hellgrüne Teile in das Ganze.

Ein hellgrünes Teil heißt ______________.

Der Anteil von einem hellgrünen Teil ist _____.



blaue Teile

Insgesamt passen ______________ hellblaue Teile in das Ganze.

Ein hellblaues Teil heißt ______________.

Der Anteil von einem hellblauen Teil ist _____.

orangene Teile

Insgesamt passen ______________ orangene Teile in das Ganze.

Ein orangenes Teil heißt ______________.

Der Anteil von einem orangenen Teil ist _____.

schwarze Teile

Insgesamt passen ______________ schwarze Teile in das Ganze.

Ein schwarze Teil heißt ______________.

Der Anteil von einem schwarzen Teil ist _____.

Namen: ______________________ Datum: ______________

grüne Teile

Insgesamt passen ______________ grüne Teile in das Ganze.

Ein grünes Teil heißt ______________.

Der Anteil von einem grünen Teil ist _____.

lila Teile

Insgesamt passen ______________ lilane Teile in das Ganze.

Ein lilane Teil heißt ______________.

Der Anteil von einem lilanen Teil ist _____.

rosa Teile

Insgesamt passen ______________ rosa Teile in das Ganze.

Ein rosa Teil heißt ______________.

Der Anteil von einem rosa Teil ist _____.

gelbe Teile

Insgesamt passen ______________ gelbe Teile in das Ganze.

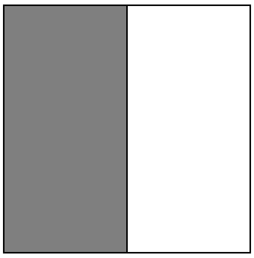
Ein gelbes Teil heißt ______________.

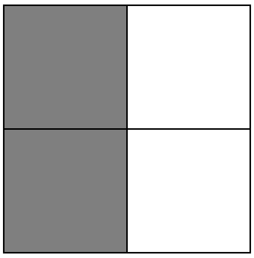
Der Anteil von einem gelben Teil ist _____.

Namen: ______________________ Datum: ______________

1. Erkundet die **Teile des Bruchpuzzles**. Findet ihr **Teile**, die **gleich groß** sind?

2. Notiert die **gleichwertigen Anteile**.





$\frac{1}{2}$ = $\frac{2}{4}$ = Anteil ___

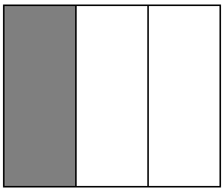
Anteil ___ = Anteil ___ = Anteil ___

Anteil ___ = Anteil ___ = Anteil ___

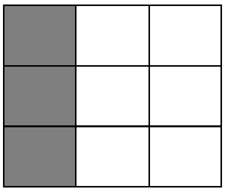
Anteil ___ = Anteil ___ = Anteil ___

Name: ______________________ Datum: ______________

1. Bestimme bei jedem Bild den **Anteil** (Bruch) für den **grauen Teil**.
2. Vergleiche die Bilder. Was fällt dir auf?

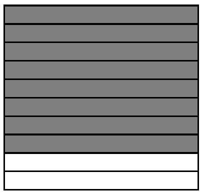


Anteil

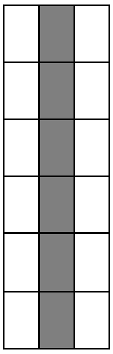


Anteil

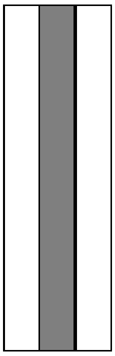
Anteil



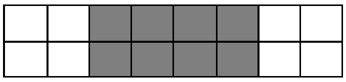
Anteil



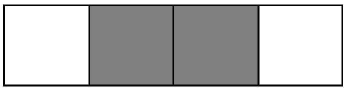
Anteil



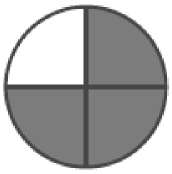
Anteil



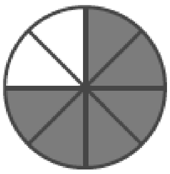
Anteil



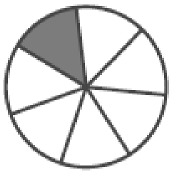
Anteil



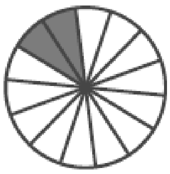
Anteil



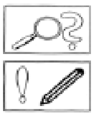
Anteil



Anteil



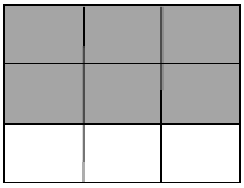
Anteil



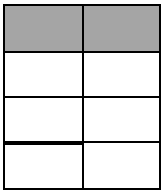
Mir fällt auf, dass…

Name: ______________________ Datum: ______________

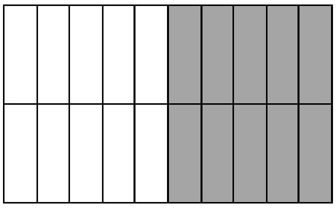
1. Bestimme den **Anteil** (Bruch) für den **grauen Teil**.
2. Finde **verschiedene Möglichkeiten**.



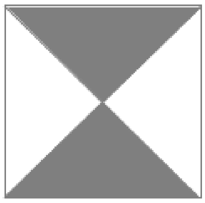
Anteil ___ = Anteil ___



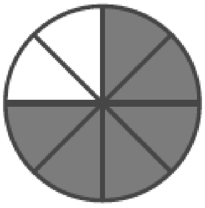
Anteil ___ = Anteil ___



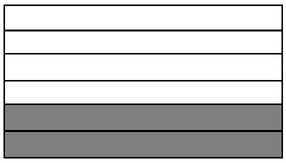
Anteil ___ = Anteil ___



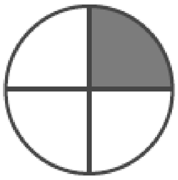
Anteil ___ = Anteil ___



Anteil ___ = Anteil ___



Anteil ___ = Anteil ___



Anteil ___ = Anteil ___

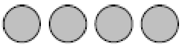
Anteil ___ = Anteil ___

H 3 Arbeitsblätter Baustein 1, Förderschleife 1

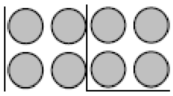
Name: ________________________________ Datum: ____________________

1. Finde eine passende **Mal – Aufgabe** zu dem Bild.

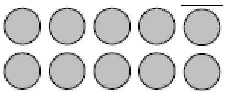
2. Kreise die **Hälfte** der Punkte ein.
3. Finde eine passende **Geteiltaufgabe.**



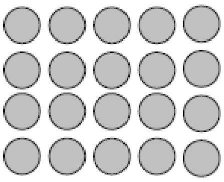
______ · ______ = ______ ______ : ______ = ______



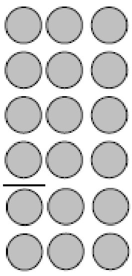
______ · ______ = ______ ______ : ______ = ______



______________________ ______________________



______________________ ______________________

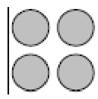


______________________ ______________________

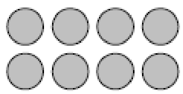
Name: ______________________ Datum: ______________

1. Finde eine passende **Mal – Aufgabe** zu dem Bild.

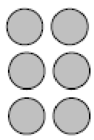
2. Zeichne die **gleiche Anzahl** der Punkte dazu.
3. Finde eine passende **Malaufgabe** zu dem neuen Bild.



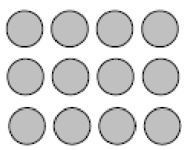
_______ · _______ = _______ _______ · _______ = _______



_______ · _______ = _______ _______ · _______ = _______



______________________ ______________________



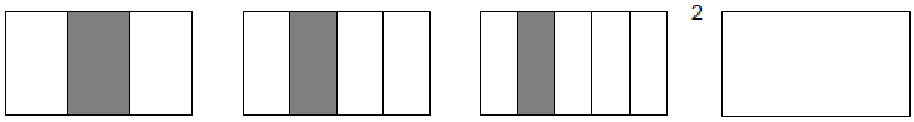
______________________ ______________________

H 4 Arbeitsblätter Baustein 2, Einheit 2

Name: ______________________ Datum: ______________

1. Bestimme bei jedem Bild den **Anteil** (Bruch) für den **grauen Teil**.
2. Vergleiche die Bilder. Wie könnte es weitergehen? Setze das Muster fort.
3. Was fällt dir auf? Beschreibe.

1 2

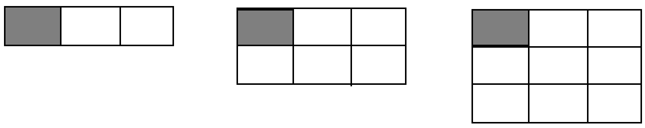


Anteil Anteil Anteil Anteil

3

Mir fällt auf, dass…

1 2

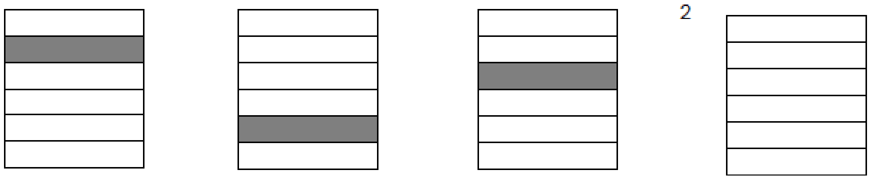


Anteil Anteil Anteil Anteil

3

Mir fällt auf, dass…

1 2



Anteil Anteil Anteil Anteil

3

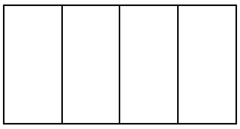
Mir fällt auf, dass…

Name: ______________________________ Datum: ____________________

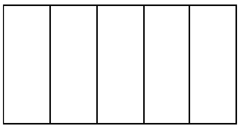
1. Markiere den **Anteil** (Bruch).

2. Vergleiche die Bilder. Was fällt dir auf? Beschreibe.

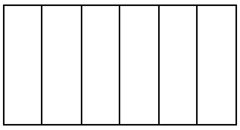
1



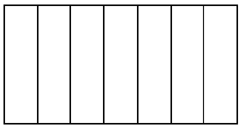
Anteil $\frac{1}{4}$



Anteil $\frac{1}{5}$



Anteil $\frac{1}{6}$



Anteil $\frac{1}{7}$

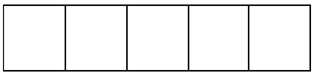
2

Mir fällt auf, dass...

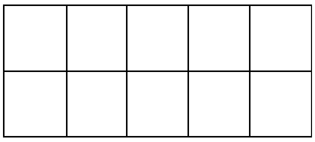
____

____

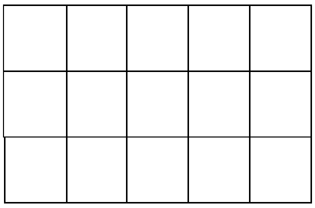
1



Anteil $\frac{1}{5}$



Anteil $\frac{1}{10}$



Anteil $\frac{1}{15}$

2

Mir fällt auf, dass...

____

____

Name: ______________________________ Datum: ____________________

1. Zeichne den **Anteil** (Bruch) ein.
2. Vergleiche die Bilder. Wie könnte es weitergehen? Setze das Muster fort.
3. Was fällt dir auf? Beschreibe.

1

Anteil $\frac{1}{2}$ | Anteil $\frac{1}{4}$ | Anteil $\frac{1}{6}$

2

Anteil ___ | Anteil ___

3

____

____

____

1. Finde verschiedene Möglichkeiten, den **Anteil** (Bruch) darzustellen.
2. Vergleiche die Bilder. Was fällt dir auf? Beschreibe.

1

Anteil $\frac{1}{4}$ | Anteil $\frac{1}{4}$ | Anteil $\frac{1}{4}$ | Anteil $\frac{1}{4}$ | Anteil $\frac{1}{4}$

2

____

____

____

1. Finde verschiedene Möglichkeiten, den **Anteil** (Bruch) darzustellen.
2. Vergleiche die Bilder. Was fällt dir auf? Beschreibe.

1

Anteil $\frac{1}{4}$ | Anteil $\frac{1}{4}$ | Anteil $\frac{1}{4}$ | Anteil $\frac{1}{4}$

2

____

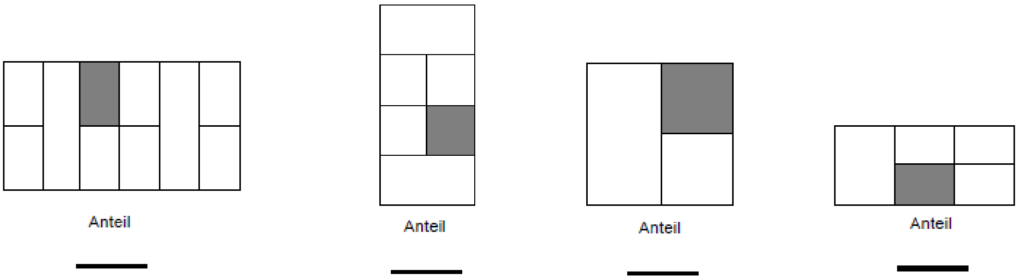
____

____

Name: ______________________ Datum: ______________

1. Bestimme bei jedem Bild den **Anteil** (Bruch) für den **grauen Teil**.
2. Vergleiche die Bilder. Was fällt dir auf? Beschreibe.

1



2

____

____

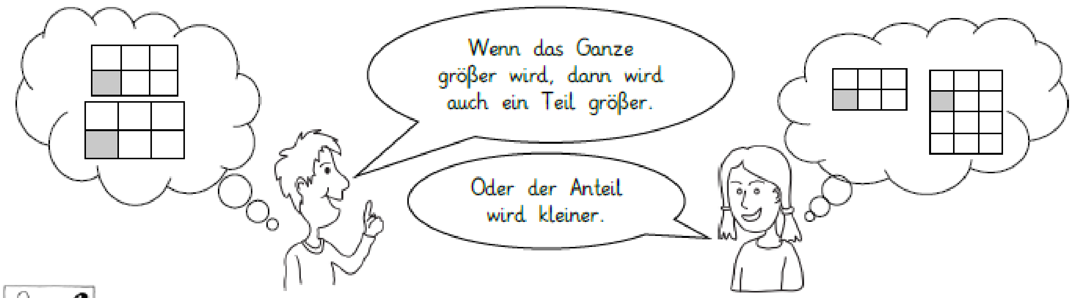
____

Namen: ______________________ Datum: ______________

1. Vergleicht eure **Ergebnisse.**

2. **Was** habt ihr **herausgefunden?** Beschreibt.

3. Erklärt, was Ben und Becky meinen. Benutzt dabei die **Begriffe aus dem Wortspeicher.**



____

____

____

I 1 Testheft „BruKo“ Form A

Zahlbereichserweiterung und Bruchzahlverständnis **Form A**

5. Klasse **Teil 1**

Vorname: ______________________ Ich bin ein: ☐ Mädchen ☐ Junge

Nachname: ______________________ Geburtsdatum: ____________________

Datum: ______________________

Auf den folgenden Seiten findest du **leichte und schwierige Aufgaben**. Manche Aufgaben kennst du vielleicht noch nicht. Versuche trotzdem, **so viele Aufgaben wie möglich** zu lösen.

Du kannst **selbst entscheiden**, in welcher **Reihenfolge** du die Aufgaben lösen möchtest.

Beginne am besten mit Aufgaben, die du einfach findest.

→ **Lies dir die Aufgaben genau durch**. Wenn du etwas nicht verstehst, dann frag nach.

→ Manchmal musst du eine **Antwort ankreuzen**, manchmal **etwas ausfüllen** oder auch **deine Lösungen erklären**. **Notiere unbedingt alles, was dir zu einer Aufgabe einfällt.**

→ Bitte bearbeite die Aufgaben **sorgfältig** und schreibe deine Lösungen **gut lesbar** auf!

1. Rechne aus.

2 · 17 = _____

2 · 107 = _____

2. Rechne aus.

18 : 2 = _____

180 : 2 = _____

108 : 2 = _____

3. Löse die Aufgaben wie in den Beispielen durch Verdoppeln.

100 = 50 + 50	100 = 2 · 50
66 = 33 + 33	66 = 2 · 33

6 = _____ + _____ 6 = 2 · _____

16 = _____ + _____ 16 = 2 · _____

48 = _____ + _____ 48 = 2 · _____

300 = _____ + _____ 300 = 2 · _____

4. Löse die Aufgaben wie in den Beispielen durch Halbieren.

100 – 50 = 50	100 : 2 = 50
66 – 33 = 33	66 : 2 = 33

8 - _____ = _____ 8 : 2 = _____

14 - _____ = _____ 14 : 2 = _____

72 - _____ = _____ 72 : 2 = _____

500 - _____ = _____ 500 : 2 = _____

5. Rechne aus.

7 · 6 = _____

8 · 9 = _____

30 · 40 = _____

10 · 256 = _____

150 · 20 = _____

6. Rechne aus.

24 : 6 = _____

12 : 4 = _____

160 : 4 = _____

160 : 40 = _____

1000 : 8 = _____

7. Finde die Umkehraufgabe.

3 · 9 = 27

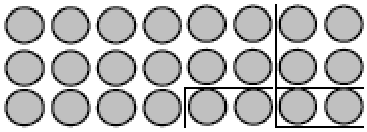
____

8. Finde die Umkehraufgabe.

48 : 6 = 8

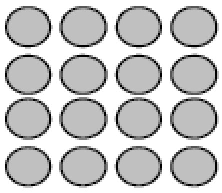
____

9. Finde Malaufgaben zu dem Bild.



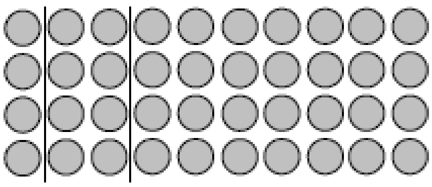
______________________ ______________________

10. Finde eine Geteiltaufgabe zu dem Bild.

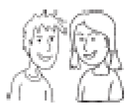


____

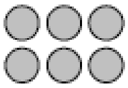
11. Kreise die Hälfte der Punkte ein. Finde eine passende Aufgabe.



____



12. Zeichne die gleiche Anzahl der Punkte hinzu. Finde eine passende Aufgabe zu dem neuen Bild.



13. Bei einem Sportfest sollen sich 18 Kinder in gleich große Gruppen mit immer 6 Kindern aufteilen. Wie viele Gruppen werden gebildet?

Zeichnung:

Rechnung:

Antwortsatz:

14. Bei einem Kartenspiel sollen 12 Spielkarten an 3 Kinder gleichmäßig verteilt werden. Wie viele Karten bekommt jedes Kind?

Zeichnung:

Rechnung:

Antwortsatz:

Zahlbereichserweiterung und Bruchzahlverständnis Form A

5. Klasse Teil 2

Vorname: ______________________ Ich bin ein: ☐ Mädchen ☐ Junge

Nachname: ______________________ Geburtsdatum: ________________

Datum: ______________________

Auf den folgenden Seiten findest du **leichte und schwierige Aufgaben**. Manche Aufgaben kennst du vielleicht noch nicht. Versuche trotzdem, so **viele Aufgaben wie möglich** zu lösen.

Du kannst **selbst entscheiden**, in welcher **Reihenfolge** du die Aufgaben lösen möchtest.

Beginne am besten mit Aufgaben, die du einfach findest.

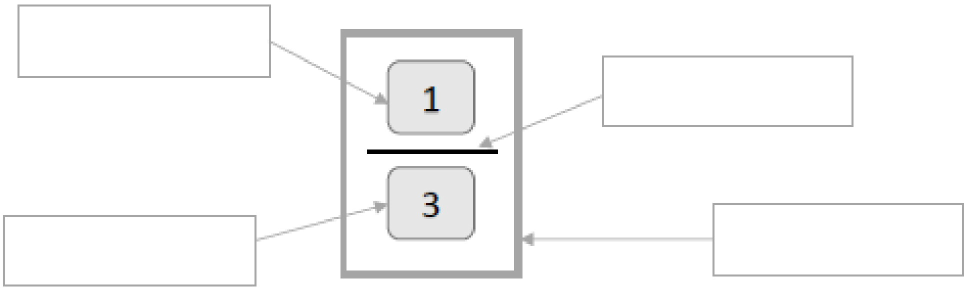
➔ **Lies dir die Aufgaben genau durch**. Wenn du etwas nicht verstehst, dann frag nach.

➔ Manchmal musst du eine **Antwort ankreuzen**, manchmal **etwas ausfüllen** oder auch **deine Lösungen erklären**. **<u>Notiere unbedingt alles, was dir zu einer Aufgabe einfällt.</u>**

➔ Bitte bearbeite die Aufgaben **sorgfältig** und schreibe deine Lösungen **gut lesbar** auf!

1. Trage die passenden Fachbegriffe ein.

Bruchstrich	Nenner	Zähler	Anteil



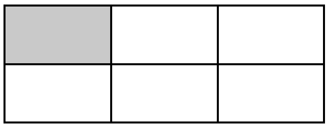
2. Erkläre Becky, was der Zähler bedeutet.

Der Zähler…

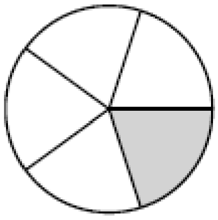
3. Erkläre Ben, was der Nenner bedeutet.

Der Nenner…

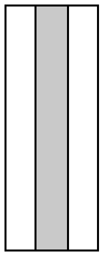
4. Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



Anteil:

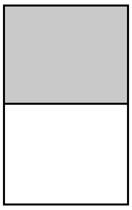


Anteil:

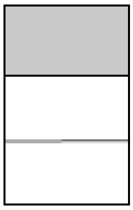


Anteil:

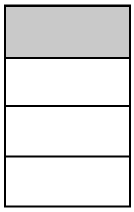
5. Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



Anteil:



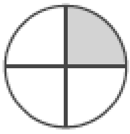
Anteil:



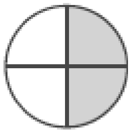
Anteil:

Was fällt dir auf? Beschreibe.

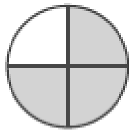
6. Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



Anteil:

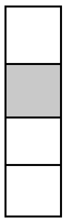


Anteil:

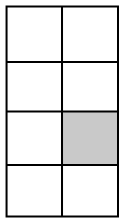


Anteil:

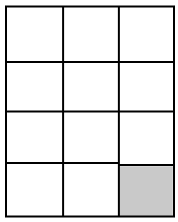
7. Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



Anteil:



Anteil:



Anteil:

Was fällt dir auf? Beschreibe.

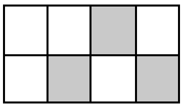
8. Zeichne den Anteil (Bruch) ein.

$\frac{1}{8}$

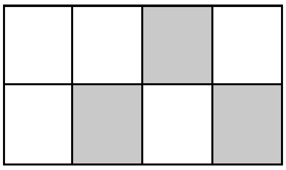
9. Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.

Anteil:

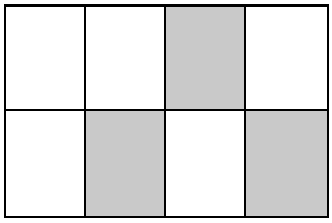
10. Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



Anteil:



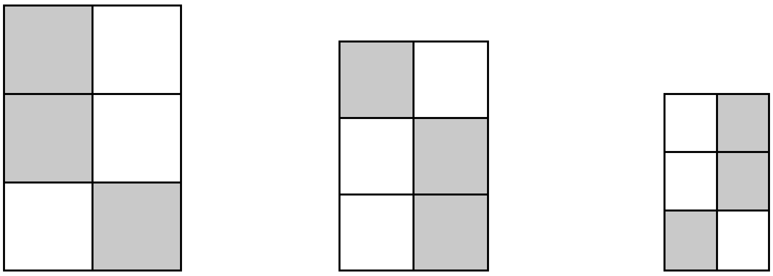
Anteil:



Anteil:

Was fällt dir auf? Beschreibe.

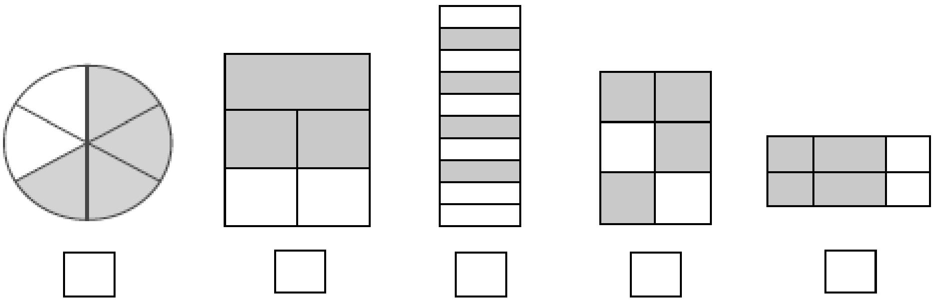
11. Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an.



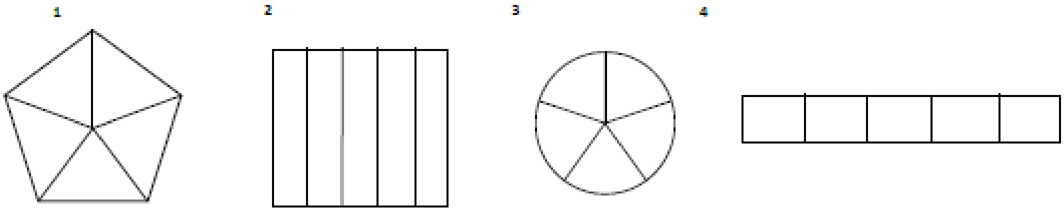
Anteil: Anteil: Anteil:

Was fällt dir auf? Beschreibe.

12. In welchem Bild ist der Anteil (Bruch) $\frac{4}{6}$ dargestellt? Kreuze an.
(Es sind mehre Möglichkeiten richtig.)



13. Zeichne für jedes Ganze den Anteil $\frac{4}{5}$ ein.



Was fällt dir auf? Beschreibe.

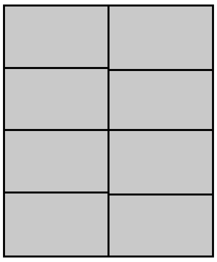
____

____

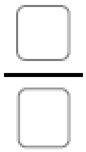
____

____

14. Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an



Anteil:



Wie viele Teile sind markiert? ________

Wie viele Ganze sind dargestellt? ________

15. Das ist der Anteil (Bruch) $\frac{1}{3}$. Wie könnte das Ganze aussehen? Ergänze.

Das ist der Anteil (Bruch) $\frac{1}{6}$. Wie könnte das Ganze aussehen? Ergänze.

Vergleiche die beiden Darstellungen. Was fällt dir auf? Beschreibe.

16. Erkläre Ben an einem Beispiel, wozu man Brüche verwenden kann.

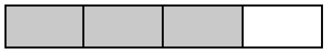
17. Wähle einen Bruch und stelle ihn als Bild und als Zahl dar.

Bild:

Zahl:

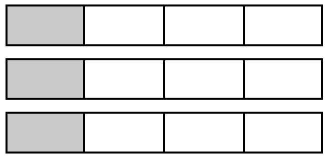
18. In welchem Bild ist der Anteil (Bruch) $\frac{3}{4}$ dargestellt? Kreuze an.

1



☐

2



☐

Begründe deine Antwort.

____

____

____

____

19. Becky und Ben sollen den Bruch drei Viertel $\frac{3}{4}$ erklären.

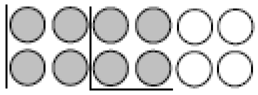
Becky: Ich teile ein Rechteck in vier Teile. Jedes Teil ist ein Viertel. Drei Viertel bedeutet, dass ich drei Teile von dem ganzen Rechteck nehme.

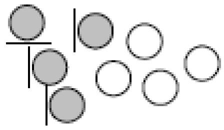
Ben: Ich nehme 3 Rechtecke und gebe vier Kindern davon gleich viel. Dann hat jedes Kind insgesamt drei Viertel.

Wer hat richtig erklärt?

- ☐ nur Ben
- ☐ nur Becky
- ☐ keiner
- ☐ beide
- ☐ ich weiß es nicht

20. Gib den Anteil (Bruch) für die grauen Punkte von allen Punkten an.

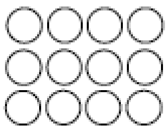




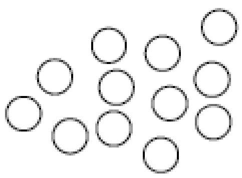
Anteil: $\frac{\square}{\square}$

Anteil: $\frac{\square}{\square}$

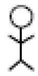
21. Wie viele Punkte gehören zu dem Anteil (Bruch)? Kreise den Teil ein.



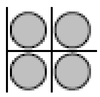
$\frac{3}{4}$ von ___12___ Punkten sind ________ Punkte.



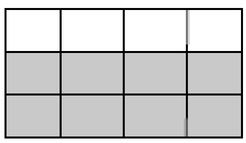
$\frac{2}{3}$ von ________ Punkten sind ________ Punkte.

22. Wie viele Kinder sind $\frac{3}{5}$ von 10 Kindern? 
Schreibe eine Rechnung oder zeichne ein Bild.

23. Das ist der Anteil $\frac{1}{3}$, wie viele Punkte hat ein Ganzes ($\frac{3}{3}$)?



24. Gib den grau gefärbten Anteil (Bruch) an.



Anteil:

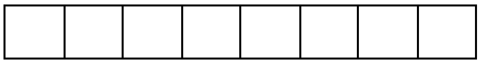
Kannst du den Anteil (Bruch) noch anders ausdrücken?

Anteil:

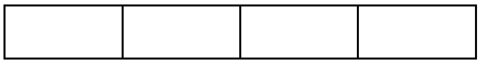
Was fällt dir auf? Beschreibe.

25. Zeichne in jeden Streifen einen Anteil ein, der genauso groß ist wie $\frac{6}{8}$.
Gib den passenden Anteil an.

Anteil:



Anteil:

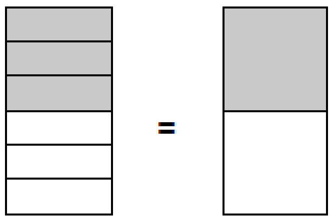


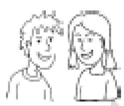
Hier sollst du die Einteilung selbst einzeichnen.

Anteil:

Beschreibe Ben und Becky, wie du den letzten Anteil gefunden hast.

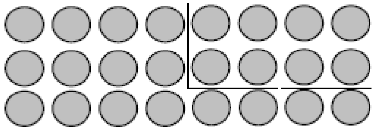
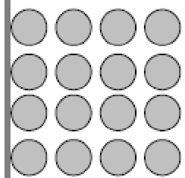
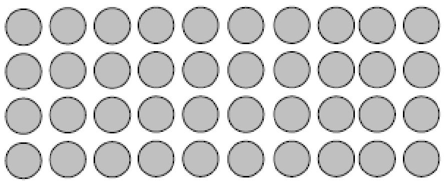
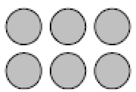
26. Erkläre Becky an dem Bild, warum $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{2}$ gleich sind.





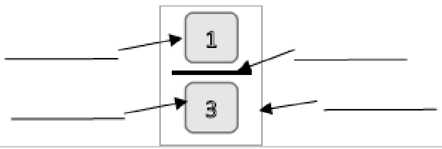
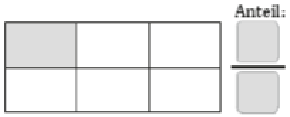
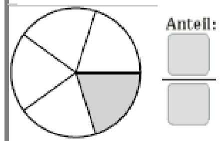
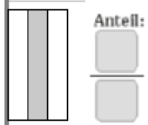
I 2 Kommentierte Aufgaben „BruKo

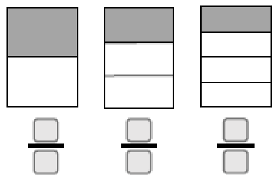
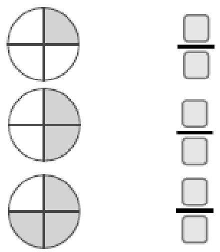
Nr.	Aufgabe	Kompetenzschwerpunkt	Anforderung		Kommentar
			arithmetischer Basisstoff		
A 1 B 7	*Vgl. Basis-Math 4-8, Nr. 4a-e* **Rechne aus!** 2 · 17 = 2 · 107 =	**Verdoppeln** (Kopfrechnen) *[g.A.]*	- 1 · 1 automatisieren - Verdoppeln mit zwei- und dreistelligen Zahlen		
A 2 B 8	*Vgl. Basis-Math 4-8, Nr. 4c-e* **Rechne aus!** 18 : 2 = 180 : 2 = 108 : 2 =	**Halbieren** (Kopfrechnen) *[g.A.]*	- 1 : 1 automatisieren - Halbieren mit zwei- und dreistelligen Zahlen		
A 3 B 5	**Löse die Aufgaben wie im Beispiel durch Verdoppeln!** 100 = 50 + 50 100 = 2 · 50 60 = ___ + ___ 60 = 2 · ___ 44 = ___ + ___ 44 = 2 · ___ 240 = ___ + ___ 240 = 2 · ___ 300 = ___ + ___ 300 = 2 · ___	**Verdoppeln** (additive und multiplikative Zahlzerlegung) *[g.A.]*	- additive und subtraktive Zahlzerlegung - Halbieren und Verdoppeln - Zusammenhang Hälfte / Doppeltes und mal bzw. geteilt durch 2		- Punkt nur für halbierte Zerlegung
A 4 B 6	**Löse die Aufgaben wie im Beispiel durch Halbieren!** 100 – 50 = 50 100 : 2 = 50 70 - ___ = ___ 70 : 2 = ____ 50 - ___ = ___ 50 : 2 = ____ 180 - ___ = ___ 180 : 2 = ____ 300 - ___ = ___ 300 : 2 = ____	**Halbieren** (subtraktive und multiplikative Zahlzerlegung) *[g.A.]*			- Punkt nur für halbierte Zerlegung
A 5 B 1	*Vgl. Basis-Math 4-8, Nr. 5a-e* **Rechne aus!** 7 · 6 = 8 · 9 = 30 · 40 = 10 · 256 = 150 · 20 =	**Multiplikation** (Kopfrechnen) *[g.A.]*	- 1 · 1 automatisieren		
A 6 B 2	*Vgl. Basis-Math 4-8, Nr. 6a-e* **Rechne aus!** 24 : 6 = 12 : 4 = 160 : 4 = 160 : 40 = 1000 : 8 =	**Division** (Kopfrechnen) *[g.A.]*	- 1 : 1 automatisieren		

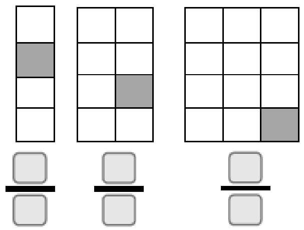
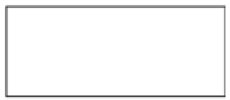
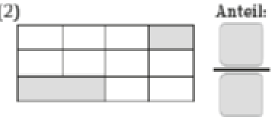
A 7 B 3	*Vgl. Basis-Math-G 5, Nr. 7 (A) / 3 (B)* **Finde die Umkehraufgabe!** $3 \cdot 9 = 27$	**Mal- und Geteiltaufgaben** (Umkehraufgaben) *[g.A.]*	- Grundvorstellungen zu Grundrechenarten Multiplikation / Division mit symbolischer Notation verknüpfen - Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division erkennen		
A 8 B 4	*Vgl. Basis-Math-G 5, Nr. 7 (A) / 3 (B)* **Finde die Umkehraufgabe!** $48 : 6 = 8$	**Mal- und Geteiltaufgaben** (Umkehraufgaben) *[g.A.]*			
A 9 B 10	*Vgl. Basis-Math-G 5, Nr. 6 / 9 (B)* **Finde Malaufgaben zu dem Bild auf!** 	**Malaufgaben am Punktefeld** *[g.A.]*	- Grundvorstellungen zu Grundrechenarten Multiplikation mit symbolischer Notation verknüpfen - multiplikative Struktur erkennen und passende Multiplikationsaufgabe mit Ergebnis zu einem Punktefeld finden - zwei intendierte Lösungen: $3 \cdot 8 = 24$ bzw. $8 \cdot 3 = 24$		- Vorbereitung für ikonische Anteilsbestimmung - bewusst nur Strich zur Notation der Aufgabe, um Verständnis / Transfer in symbolische Notation zu überprüfen
A 10 B 9	*Vgl. Basis-Math-G 5, A, Nr. 6* **Finde eine Geteiltaufgabe zu dem Bild auf!** 	**Geteiltaufgaben am Punktefeld** *[g.A.]*	- Grundvorstellungen zu Grundrechenarten Division mit symbolischer Notation verknüpfen - intendierte Lösungen: $16 : 4 = 4$ bzw. $16 : 16 = 1$		- Vorbereitung für ikonische Anteilsbestimmung - bewusst nur Strich zur Notation der Aufgabe, um Verständnis / Transfer in symbolische Notation zu überprüfen
A 11 B 11	*vgl. Gaidoschik 2015, S.90* **Kreise die Hälfte der Punkte ein. Finde eine passende Aufgabe!** 	**Aufgaben / Halbieren am Punktefeld** *[g.A.]*	- vorgegebene Punkte halbieren - Grundvorstellungen zu Grundrechenarten mit symbolischer Notation verknüpfen - Halbieren - intendierte Lösung: $40 : 2 = 20$ - mögliche Lösungen: Additions-, Subtraktions-, Multiplikationsaufgaben zu eingekreistem Punktefeld/Hälfte		- i.A.a. Fördereinheit - hoher sprachlicher Anspruch in Aufgabenstellung - bewusst nur Strich zur Notation der Aufgabe, um Verständnis / Transfer in symbolische Notation zu überprüfen - Operation offen gelassen
A 12 B 12	**Zeichne die gleiche Anzahl der Punkte hinzu. Finde eine passende Aufgabe zu dem neuen Bild!** 	**Aufgaben / Verdoppeln am Punktefeld** *[g.A.]*	- bereits vorgegebene Punkte um gleiche Anzahl ergänzen - Grundvorstellungen zu Grundrechenarten mit symbolischer Notation verknüpfen - Verdoppeln - intendierte Lösungen: $2 \cdot 6 = 12$, $6 \cdot 2 = 12$, $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 3 = 12$		- i.A.a. Fördereinheit - hoher sprachlicher Anspruch in Aufgabenstellung - bewusst nur Strich zur Notation der Aufgabe, um Verständnis / Transfer in symbolische Notation zu überprüfen

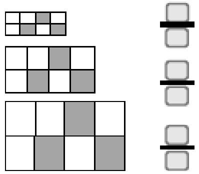
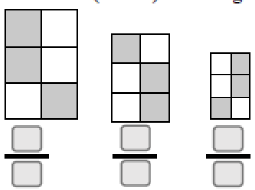
			- mögliche Lösungen: Additions-, Subtraktionsaufgaben zu verdoppeltem Punktefeld		- Operation offen gelassen
A 13 B 14	*Vgl. KIRA, Grundvorstellungen der Division – Aufteilen und Verteilen; http://kira.dzlm.de/148* **Bei einem Sportfest sollen sich 18 Kinder in gleich große Gruppen mit immer 6 Kindern aufteilen. Wie viele Gruppen werden gebildet?**	**GV Division: Aufteilen** (vorstrukturiert; Zeichnung, Rechnung, Antwortsatz) *[g.A.]*	- kleines 1 : 1 - Operationsverständnis Division - Transfer Sachsituation –> symbolische Darstellung/bildliche Darstellung - erfordert GV		- vgl. Aufgabe 6b) Ergebnisgleichheit Bruchzahlen
A 14 B 13	*Vgl. KIRA, Grundvorstellungen der Division – Aufteilen und Verteilen; http://kira.dzlm.de/148* **Bei einem Kartenspiel sollen 12 Spielkarten an 3 Kinder gleichmäßig verteilt werden. Wie viele Karten bekommt jedes Kind?**	**GV Division: Verteilen** (vorstrukturiert; Zeichnung, Rechnung, Antwortsatz) *[g.A.]*	- kleines 1 : 1 - Operationsverständnis Division - Transfer Sachsituation –> symbolische Darstellung/bildliche Darstellung - erfordert GV		

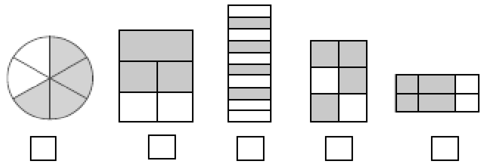
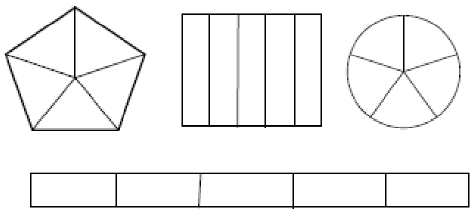
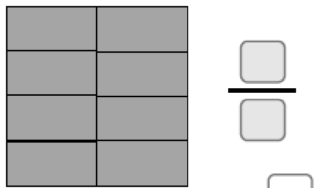
mögliche Gesamtpunktzahl: 48

Nr.	Aufgabe	Kompetenzschwerpunkt	Anforderung		Besonderheiten / Fehlvorstellungen (FV)
			Grundvorstellung 1: Teil eines Ganzen		
A 1 B 1	*Vgl. Neumann 1997, Nr. 21/22 (m.c.)* **Trage die passenden Fachbegriffe ein!** Bruchstrich Nenner Zähler Anteil 	**GV 1, Bruch beschriften** *[g.A.]*	- vorgegebenen Bruch beschriften - Nenner, Zähler zuordnen - Zuordnen vorgegebener Darstellungen - u.a. Sicherung der Fachwörter - Anwendung von Konventionen	**I**	- zu verwendende Begriffe vorgeben - Zuordnungsaufgabe bezieht Verständnis nur indirekt ein
A 2 B 3	*Vgl. Neumann 1997, Nr. 21/22 (m.c.)* **Erkläre Becky, was der Zähler bedeutet!**	**GV 1, konzeptuelle Bedeutung Fachbegriffe** *[o.A.]*	- Bedeutung Zähler erklären - verständnisorientiert; Begriffsverständnis - Vorstellung verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	
A 3 B2	*Vgl. Neumann 1997, Nr. 21/22 (m.c.)* **Erkläre Ben, was der Nenner bedeutet!**		- Bedeutung Nenner erklären - verständnisorientiert; Begriffsverständnis - Vorstellung verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	
A 4 B 4	Vgl. M.s.k., B1 A, Standortbestimmung 1a) **Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an!**   	**GV 1, Stammbrüche <u>bestimmen</u> / Anteil <u>angeben</u>** *(gleichmäßig strukturierte, kontinuierliche Darstellung; Teil markiert)* *[g.A.]*	- ein Teil vom Ganzen bestimmen - Anteil erkennen und in symbolische Notation übersetzen - Zuordnung eines Bruches zu einem Repräsentanten (Repräsentant -> Bruch) - Teil im Verhältnis zum Ganzen deuten - Bedeutung Zähler und Nenner - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene - verschiedene Repräsentanten, um flexible Vorstellung zu entwickeln	**I**	- FV: Anteil als Verhältnis gefärbter zu weißen Teilen angeben - FV: Verwechslung Zähler und Nenner - Kreis als Repräsentant - Kreis in Einheit eher untergeordnete Rolle, z.T. i.S. flexible GV; hier „leichte Transferaufgabe"
A 5	**Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an!**		- einen Teil vom Ganzen bestimmen - Anteil bestimmen	**I**	- FV: Anteil als Verhältnis gefärbter zu weißen Teilen angeben

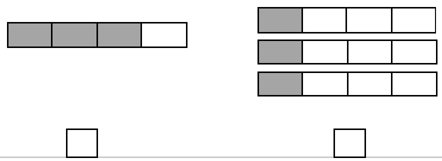
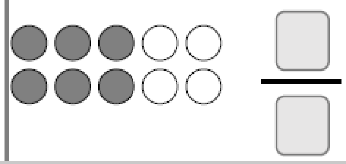
B 6		**GV 1, Stammbrüche, operative Veränderungen** <u>erkennen</u> und <u>beschreiben</u> *(kontinuierliche, gleichmäßig strukturierte Darstellungen; Teile markiert)* *[g.A.]* *[o.A.]*	- Zuordnung eines Bruches zu einem Repräsentanten (Repräsentant -> Bruch) - Erkennen Zusammenhänge T-A-G - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Ganzes ist invariant; Anteil und Teil werden verkleinert - Strukturen in Darstellung hineindenken - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene		- FV: Verwechslung Zähler und Nenner - FV: Je größer der Nenner, desto größer der Anteil
	Was fällt dir auf? Beschreibe!		- operative Serie von Bruchdarstellungen analysieren - operatives Variieren in Darstellungen beschreiben - Konstanz und Veränderung beschreiben und Wirkung erkennen - je größer Nenner, desto mehr Teile, aber desto kleiner jedes Teil und Anteil (gleiches Format Ganzes) - Erkenntnisse verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	
A 6	**Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an!** 	**GV 1, Stamm- und Nichtstammbrüche, operative Veränderungen** <u>erkennen</u> und <u>beschreiben</u> *(kontinuierliche, gleichmäßig strukturierte Darstellungen; Teile markiert)* *[g.A.]* *[o.A.]*	- Anteile bestimmen - Zuordnung eines Bruches zu einem Repräsentanten (Repräsentant -> Bruch) - Nicht-Stammbrüche - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Strukturen in Darstellung hineindenken - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene	**I**	- FV: Anteil als Verhältnis gefärbter zu weißen Teilen angeben - FV: Verwechslung Zähler und Nenner - Kreis als Repräsentant - Kreis in Einheit eher untergeordnete Rolle, z.T. i.S. flexible GV; hier als „leichte Transferaufgaben"
B 7	**Was fällt dir auf? Beschreibe!**		- operative Serie von Bruchdarstellungen analysieren - operatives Variieren in Darstellungen beschreiben - Konstanz und Veränderung beschreiben und Wirkung erkennen - Teil wird größer, Anteil wird größer, gleiches Ganzes bzw. gleicher Nenner - Erkenntnisse verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	

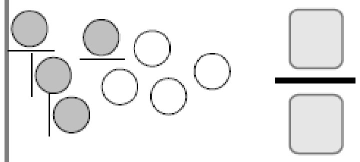
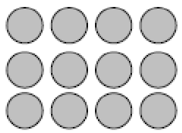
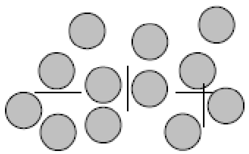
A 7 B 5	*Vgl. M.s.k., B1 A, 1.2* **Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an!** 	**GV 1, Stammbrüche, operative Veränderungen <u>erkennen</u> und <u>beschreiben</u>** *(kontinuierliche, <u>gleichmäßig</u> strukturierte Darstellungen; Teile markiert)* *[g.A.]* *[o.A.]*	- Einen Teil vom Ganzen bestimmen - Anteil bestimmen - Zuordnung eines Bruches zu einem Repräsentanten (Repräsentant -> Bruch) - Erkennen Zusammenhänge T-A-G - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Größe des Teil ist invariant, Ganzes wird variiert, um für versch. Anteile denselben Teil zu erhalten - Strukturen in Darstellung hineindenken - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene	**I**	- bewusst Markierung unterschiedlicher Teile, um flexibleres Verständnis zu fördern - FV: Je größer der Nenner, desto größer der Anteil
	Was fällt dir auf? Beschreibe!		- operative Serie von Bruchdarstellungen analysieren - operatives Variieren in Darstellungen beschreiben - Konstanz und Veränderung beschreiben und Wirkung erkennen • Teil kann gleich groß sein, Anteil aber unterschiedlich groß (unterschiedliches Format Ganzes) - Erkenntnisse verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	
A 8 B 8	*Vgl. M.s.k., B1 A, Standortbestimmung 1b+d)* **Zeichne den Anteil (Bruch) ein!** Anteil: $\frac{1}{8}$ 	**GV 1, Stammbrüche / Anteile <u>darstellen</u>** *(halboffene Aufgabenstellung)* *[g.A.]*	- Einteilung selbst vornehmen - gleichmäßige Einteilung / Strukturierung des Ganzen - Erkennen Zusammenhang T-A-G sowie Bedeutung Zähler und Nenner - Teil färben, um Anteil zu markieren - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene - Ganzes und Anteil gegeben, Teil gesucht	**II**	- mögliche Fehler: 8 Felder ohne Markierung; ungleichmäßige Einteilung - ungenaues Zeichnen möglicherweise Anzeichen für nicht tragfähige Bruchvorstellung - FV: 8 weiße Teile, 1 markiertes Teil (9 Teile insgesamt)
A 9 B 9	*Vgl. M.s.k., B1 A, Standortbestimmung 2a) (2)* **Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an!** (2)  **Anteil:**	**GV 1, Nicht-Stammbrüche <u>bestimmen</u> / Anteil <u>angeben</u>** *(gleichmäßig, nicht vollständig strukturierte, kontinuierliche Darstellung; Teile markiert)* *[g.A.]*	- Anteil bestimmen - Zuordnung eines Bruches zu einem Repräsentanten (Repräsentant -> Bruch) - Strukturen in Darstellung hineindenken - ggf. Einteilung weiterführen - Erkennen Zusammenhänge T-A-G - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Größe der Teile beachten - Anteil erkennen und in symbolische Notation übersetzen - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene	**II**	- Verständnis an untypischen Darstellungen überprüfen - typische Fehlerursachen: Anteil kann bei nicht vollständiger Strukturierung nicht abgelesen werden; Anteil wird als Verhältnis grauer zu weißer Stücke angegeben; Größe der Teile wird nicht berücksichtigt; Schwierigkeit, mit unterschiedlichen Größen der Teile umzugehen

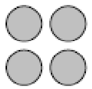
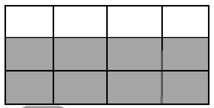
A 10	*Vgl. M.W., S. 108, 7* **Gib jeweils den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an!** 	**GV 1, Nicht-Stammbrüche, operative Veränderungen** <u>erkennen</u> und <u>beschreiben</u> *(kontinuierliche, gleichmäßig strukturierte Darstellungen; Teile markiert)* *[g.A.]* *[o.A.]*	- Anteile bestimmen - Zuordnung eines Bruches zu einem Repräsentanten (Repräsentant -> Bruch) - Erkennen Zusammenhänge T-A-G - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Anteil, Teils, Ganzes sind invariant, Teil und Ganzes werden in absoluter Größe verändert - Strukturen in Darstellung hineindenken - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene	**I**	
B 10	**Was fällt dir auf? Beschreibe!**		- operative Serien von Bruchdarstellungen analysieren - operatives Variieren in Darstellungen beschreiben • Teil wird größer, Ganzes wird größer, Anteil bleibt gleich (absolute Größe; gleiches Format + Einteilung Ganzes) • Anteil kann gleich groß sein, Teil aber unterschiedlich aussehen (unterschiedliche absolute Größe Ganzes) - Konstanz und Veränderung beschreiben und Wirkung erkennen - Erkenntnisse verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	
A 11	**Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an!** 	**GV 1, Nicht-Stammbrüche, operative Veränderungen** <u>erkennen</u> und <u>beschreiben</u> *(kontinuierliche, gleichmäßig strukturierte Darstellungen; Teile markiert)* *[g.A.]* *[o.A.]*	- Anteile bestimmen - Zuordnung eines Bruches zu einem Repräsentanten (Repräsentant -> Bruch) - Erkennen Zusammenhänge T-A-G - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Anteil, Teils, Ganzes sind invariant, Teil und Ganzes werden in absoluter Größe verändert - Strukturen in Darstellung hineindenken - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene	**I**	
B 11	**Was fällt dir auf? Beschreibe!**		- operative Serien von Bruchdarstellungen analysieren - operatives Variieren in Darstellungen beschreiben • Teil wird kleiner, Ganzes wird kleiner, Anteil bleibt gleich (absolute Größe; gleiches Format + Einteilung Ganzes) • Anteil kann gleich groß, Teil aber unterschiedlich aussehen (unterschiedliche absolute Größe Ganzes) • Anteil kann gleich groß sein, Teile aber unterschiedlich markiert sein - Konstanz und Veränderung beschreiben und Wirkung erkennen - Erkenntnisse verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	

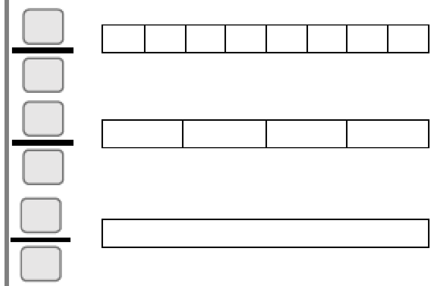
A 12 B 12	**In welchem Bild ist der Anteil (Bruch) $\frac{4}{6}$ dargestellt? Kreuze an! (Es sind mehrere Möglichkeiten richtig.)** 	**Zusammenhänge T-A-G; Nicht-Stammbrüche;** Passungen und Nicht-Passungen von Darstellungen <u>erkennen</u> *(kontinuierliche, (un)gleichmäßig strukturierte Darstellungen; Teile markiert)* *[g.A.]*	- Zuordnung eines Repräsentanten zu einem Bruch (Bruch-> Repräsentant) - flexibel mit unterschiedlichen Darstellungen umgehen - Erkennen von Passungen und Nicht-Passungen von Darstellungen - Einteilung der Ganzen beachten - Größe der Teile beachten - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene	**II**	- M.C. - Schwierigkeit: ungleichmäßige Einteilungen - Distraktoren - FV: Anteil als Verhältnis gefärbter zu weißen Teilen angeben - FV: Nichtbeachten der Größe der gefärbten Teile
A 13 B 13	*Vgl. M.s.k., B1 A, Aufg. 1.4c) + 2.4a+b)* **Zeichne für jedes Ganze den Anteil $\frac{4}{5}$ ein!** 	**Zusammenhänge T-A-G; Nicht-Stammbrüche;** <u>erkennen</u>, dass der gleiche Anteil unterschiedlich aussehen kann *(kontinuierliche, gleichmäßig strukturierte Darstellungen; Teile nicht markiert)* *[g.A.]* *[o.A.]*	- Anteile markieren - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene - flexibel mit unterschiedlichen Darstellungen umgehen - Strukturen in Darstellungen hineindenken - Erkennen Zusammenhang T-A-G - Ganzes und Anteil gegeben, Teil gesucht	**I**	- Schwierigkeit: Anteil in versch. Darstellungen markieren; gleichen Anteil unabhängig von der Form in verschiedenen Darstellungen erkennen
	Was fällt dir auf? Beschreibe!		- Erkenntnis, dass gleicher Anteil unterschiedlich aussehen kann - Sensibilisierung für Bedeutung des Ganzen als Bezugsgröße - Anteil kann unabhängig von der Form/Darstellung gleich sein - Erkenntnisse verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	
A 14 B 14	**Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an!**  **Wie viele Teile sind markiert?** **Wie viele Ganze sind dargestellt?**	**Fehlvorstellung** <u>erkennen</u> ($n \neq \frac{n}{n}$, $1 = \frac{n}{n}$, $n = \frac{n}{1}$) *[g.A.]*	- Anteile bestimmen - Zuordnung eines Bruches zu einem Repräsentanten (Repräsentant -> Bruch) - Erkennen Zusammenhang T-A-G - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Umbruch zu natürlichen Zahlen - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene - Anteil erkennen und in symbolische Notation übersetzen - Anzahl der Teile / Ganzen notieren (Abstraktion auf Verständnisebene)	**I, II**	- Schwierigkeit, Ganzes als *ein* Ganzes zu erkennen

A 15 B 15	*Vgl. M.W., S. 111, 16; Vgl. Padberg & Krüger 1997* **Das ist ein Drittel $\frac{1}{3}$. Wie könnte das Ganze aussehen? Ergänze!** 	**GV 1, Ganzes aus Anteilen** <u>bestimmen</u> / <u>darstellen</u> *(halboffene Aufgabenstellung)* *[o.A.]*	- Bestimmung der Einheit eines Bruches ausgehend von einem Bruchteil - Teil / Anteil zu Ganzem ergänzen (fehlende Teile einzeichnen) - Zusammenhänge T-A-G erkennen - Problemangemessene Umstrukturierung T-A-G Zusammenhänge - Teil und Anteil gegeben, Ganzes gesucht - Ganzes als Bezugsgröße erkennen - Teile als gleich groß erkennen - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene - freie Wahl der Ergänzung / Fortsetzung (bei rechteckigem Teil) (Positionierung)	**II**	- Schwierigkeit: Teile in gleicher Größe zu ergänzen bzw. exaktes Zeichnen - ungenaues Zeichnen möglicherweise Anzeichen für nicht tragfähige Bruchvorstellung - FV: Anteil als Verhältnis gefärbter zu weißen Teilen darstellen (Ergänzung um 3 weitere weiße Teile) - FV: vorgegebenes Teil unterteilen / dritteln
	Vgl. M.W., S. 111, 16; Vgl. Padberg & Krüger 1997 **Das ist ein Sechstel $\frac{1}{6}$. Wie könnte das Ganze aussehen? Ergänze!** 		- Bestimmung der Einheit eines Bruches ausgehend von einem Bruchteil - Teil / Anteil zu Ganzem ergänzen (fehlende Teile einzeichnen) - Zusammenhänge T-A-G erkennen - Problemangemessene Umstrukturierung T-A-G Zusammenhänge - Teil und Anteil gegeben, Ganzes gesucht - Teil ist invariant, Ganzes wird vergrößert, Anteil wird verkleinert - Ganzes als Bezugsgröße erkennen - Teile als gleich groß erkennen - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene - freie Wahl der Ergänzung / Fortsetzung (bei rechteckigem Teil) (Positionierung)	**II**	- s.o. - FV: vorgegebenes Teil unterteilen / sechsteln
	Vergleiche die beiden Darstellungen. Was fällt dir auf? Beschreibe!		- Erkenntnis, dass gleiches Teil in Abhängigkeit zu Ganzem unterschiedliche Anteile darstellen kann - Erkenntnisse verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	
A 16 B 17	*Vgl. Mathewerkstatt (S.250)* **Erkläre Ben an einem Beispiel, wozu man Brüche verwenden kann!**	**Brüche allg., Sinnhaftigkeit / Relevanz** *(offene Aufgabenstellung)* *[o.A.]*	- Verständnisorientierung - individuelles Verständnis für die Relevanz von Brüchen durch Erzeugen eines Beispiels realisieren - Vorstellung verständlich erläutern und verschriftlichen	**II**	- insbesondere i.B.a. Vorwissen interessant, aber auch Entwicklung im Lernverlauf
A 17 B 16	*Vgl. Mathewerkstatt (S.250)* **Wähle einen Bruch und stelle ihn als Bild und als Zahl dar!**	**Brüche allg., allg. Verständnis** *(offene Aufgabenstellung)* *[o.A.]*	- einen Bruch auf verschiedene Weisen darstellen (strukturiertes Bild und symbolisch) - Wechseln von einer Darstellung in eine andere (ikonisch-symbolisch)	**I**	- ungenaues Zeichnen möglicherweise Anzeichen für nicht tragfähige Bruchvorstellung - insbesondere i.B.a. Vorwissen interessant, aber auch Entwicklung im Lernverlauf - setzt grundlegendes Verständnis voraus, allerdings auch Gefahr des Abschreibens von vorherigen Aufgaben

Grundvorstellung 1 und 2 : Ergebnisgleichheit					
A 18 B 18	*Vgl. Mathewerkstatt, S.109, 11* **In welchem Bild ist der Anteil (Bruch) $\frac{3}{4}$ dargestellt? Kreuze an!** 	**GV 1 + GV 2, Ergebnisgleichheit** <u>erkennen</u> *[g.A.]*	- Ergebnisgleichheit in verschiedenen Darstellungen erkennen (ikonisch) - Grundvorstellungen 1 und 2 in Darstellungen hineindenken bzw. erkennen - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene	**II**	- Transferleistung auf ein Ganzes, damit $\frac{3}{4} = 3\cdot\frac{1}{4}$, ansonsten $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{12}$ - bewusst $\frac{3}{4}$ (wie in folgender Aufgabe), da beide Aufgaben sehr schwer
A 19 B 19	*Vgl. Padberg, Aufg. A 17 bzw. Mathewerkstatt, S. 103, 2; Vgl. Padberg & Krüger 1997* **Becky und Ben sollen den Bruch $\frac{3}{4}$ erklären.** Becky: Ich teile ein Rechteck in vier Teile. Jedes Teil ist ein Viertel. Drei Viertel bedeutet, dass ich drei Teile von dem ganzen Rechteck nehme. Ben: Ich nehme 3 Rechtecke und gebe vier Kindern davon gleich viel. Dann hat jedes Kind insgesamt drei Viertel. Wer von beiden hat richtig erklärt? ☐ nur Ben ☐ nur Becky ☐ keiner ☐ beide ☐ ich weiß es nicht	**GV 1 + GV 2, Ergebnisgleichheit** <u>erkennen</u> *[g.A.]*	- Ergebnisgleichheit in Sachkontexten erkennen (symbolisch) - Kenntnis der Symbolschreibweise von Brüchen im Sinne beider Grundvorstellungen - zwei zunächst „unterschiedliche" Aussagen vergleichen, Vorgänge vorstellen, Ergebnis in Beziehung setzen - Übersetzung Sachsituation in mathematische GV	**III**	- M.C. - hoher sprachlicher Anspruch - setzt grundlegendes Verständnis voraus
Grundvorstellung 2: Teil mehrerer Ganze					
A 20 B 20	**Gib den Anteil (Bruch) für die grauen Punkte von allen Punkten an!** 	**GV 2, Anteil** von verschiedenen Ganzen / **Mengen** <u>bestimmen</u> *(struktur-fokussiert; Fokus hier auf Mächtigkeit der Teilmengen, nicht auf Anzahl; diskrete, gleichmäßig strukturierte Punktedarstellung)* *[g.A.]*	- Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene	**II**	- differenziert: 1:1 Angabe oder Bilden von Einheiten

		**GV 2, Anteil** von verschiedenen **Ganzen** / **Mengen** bestimmen *(struktur-fokussiert; Fokus hier auf Mächtigkeit der Teilmengen, nicht auf Anzahl; diskrete, unstrukturierte Punktedarstellung)* *[g.A.]*	- Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene	**II**	- differenziert: 1:1 Angabe oder Bilden von Einheiten
A 21	*Vgl. M.s.k., B1 C, Aufg. 1.7a* **Wie viele Punkte gehören zu dem Anteil (Bruch)? Kreise diesen Teil ein!** $\frac{3}{4}$ von [12] Punkten sind [ ] Punkte. 	**GV 2, Anteil** von verschiedenen **Ganzen** / **Mengen** bestimmen *(struktur-fokussiert; Fokus hier auf Mächtigkeit der Teilmengen, nicht auf Anzahl; diskrete, gleichmäßig strukturierte Punktedarstellung)* *[g.A.]*	- verschiedene Ganze als ein Ganzes / Einheit erfassen - Anteil bzw. Strukturen / Einteilung in strukturierte Darstellung hineindenken - Einteilung selbst vornehmen, um Anzahl der Teile zu kennzeichnen - Mächtigkeit des Anteils erkennen und in symbolische Notation übertragen - Zusammenhänge T-A-G erkennen - Bedeutung des Zählers und Nenners kennen und übertragen - Ganzes und Anteil gegeben, Teil gesucht - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene	**II**	- Schwierigkeit: Strukturierung des Ganzen durch den Anteil - durch das Bilden von Gruppen oder durch Kalkül zu lösen - Struktur des Punktefelds gibt mögliche Einteilung indirekt vor
B 21	*Vgl. M.s.k., B1 C, Aufg. 1.7b* $\frac{2}{3}$ von [ ] Punkten sind [ ] Punkte. 	**GV 2, Anteil** von verschiedenen **Ganzen** / **Mengen** bestimmen *(struktur-fokussiert; Fokus hier auf Mächtigkeit der Teilmengen, nicht auf Anzahl; diskrete, unstrukturierte Punktedarstellung)* *[g.A.*	- verschiedene Ganze als ein Ganzes / Einheit erfassen - Anteil bzw. Strukturen / Einteilung in unstrukturierte Darstellung hineindenken - Einteilung selbst vornehmen, um Anzahl der Teile zu kennzeichnen - Mächtigkeit des Anteils erkennen und in symbolische Notation übertragen - Zusammenhänge T-A-G erkennen - Bedeutung des Zählers und Nenners kennen und übertragen - Ganzes und Anteil gegeben, Teil gesucht - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene	**III**	
A 22 B 22	*Vgl. M.s.k., Standortbestimmung B1 C, 1b bzw. B1 C, 1a / 2a* **Wie viele Kinder sind $\frac{3}{5}$ von 10 Kindern? Schreibe eine Rechnung oder zeichne ein Bild!**	**GV 2, Anteil** von **Mengen** bestimmen und ikonisch darstellen *(offene Aufgabenstellung; Sachkontext; Fokus hier auf Mächtigkeit der Teilmengen, nicht auf Anzahl)* *[o.A.]*	**Zeichnung:** - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene - eigene Darstellung finden (Gesamtmenge als Ganzes, Einteilung (i.S. Zähler)) - Mächtigkeit der relevanten Teile erkennen u notieren - Zusammenhänge T-A-G erkennen - Ganzes und Anteil gegeben, Teil gesucht - Zeichnung soll Aufgabe und Lösungsidee wiedergeben	**III**	- Transferaufgabe - nicht gefördert; fragt Vorwissen ab - mögliche Fehlerursachen: Nenner wird als Teil interpretiert; Zähler und Nenner werden multipliziert; Teil zum Stammbruch angeben, d.h. Schwierigkeit, Zähler in Bestimmung des Teils einzubeziehen; Anteil kann nicht multiplikativ auf Ganzes bezogen werden; Schwierigkeit, Anteil auf größere Menge

			Rechnung: - multiplikative „von-Deutung“ - Anteil multiplikativ auf Ganzes beziehen - erste einfache Rechnung (erst teilen, dann vervielfachen) - symbolische Anteilsbestimmung - Zusammenhänge T-A-G erkennen - Ganzes und Anteil gegeben, Teil gesucht - Abstraktion / Kalkül		als die Zahl im Zähler zu beziehen; ggf. können strukturelle Zusammenhänge nicht im Bild dargestellt werden; Schwierigkeiten / mögliche Fehlerursachen bei Rechnung: s. 7c)
A 23 B 23	*Vgl. Van de Walle, 2013, 302* **Das ist der Anteil $\frac{1}{3}$, wie viele Punkte hat ein Ganzes ($\frac{3}{3}$)?** 	**GV 2, Ganzes aus Anteil** <u>bestimmen</u> / <u>darstellen</u> *(halboffene Aufgabenstellung)* *[o.A.]*	- Teil / Anteil zu Ganzem ergänzen (fehlende Teile einzeichnen) - zusammenhänge T-A-G erkennen - problemangemessene Umstrukturierung T-A-G Zusammenhänge - Teil und Anteil gegeben, Ganzes gesucht - Ganzes als Bezugsgröße erkennen - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene - freie Wahl der Ergänzung / Fortsetzung (Positionierung)	**II**	- ≙ Ganzes aus Anteilen finden, GV 1 - Schwierigkeit: mehrere Ganze (4 Punkte) als einen Teil erkennen - Schwierigkeit: Teile in gleicher Größe zu ergänzen bzw. exaktes Zeichnen - FV: Anteil als Verhältnis gefärbter zu weißen Teilen darstellen (Ergänzung um 3 x 4 weitere weiße Teile) - FV: vorgegebenes Teil unterteilen / dritteln
			Gleichwertigkeit / Äquivalenz		
A 24 B 24	*Vgl. Padberg A 28* **Gib den grau gefärbten Anteil (Bruch) an!**  $\frac{\square}{\square}$ **Kannst du den Bruchteil noch anders ausdrücken?** $\frac{\square}{\square}$	**Äquivalenz, äquivalente Brüche** in Darstellungen <u>erkennen</u> und <u>bestimmen</u> *(gleichmäßig strukturierte, kontinuierliche, flächige* oder / und *lineare Darstellungen vorgegeben)* *[g.A.]* *[o.A.]*	- Anteil bestimmen und notieren - gleichwertigen Bruch erkennen und notieren - (unterschiedliche) Einteilungen / Strukturen in Darstellungen hineindenken - Zusammenhänge T-A-G erkennen - Ganzes und Teil gegeben, Anteil gesucht - Transfer von ikonischer Ebene auf symbolische Ebene	**I, III**	- Schwierigkeit, unterschiedliche Einteilungen zu erkennen - Schwierigkeit zu erkennen, dass der gleiche Anteil mit unterschiedlichen Bruchzahlen beschrieben werden kann
	Was fällt dir auf? Beschreibe!		- Erkenntnis, dass der gleiche gefärbte Teil (Anteil) unterschiedlich eingeteilt sein und mit unterschiedlichen Bruchzahlen beschrieben werden kann - Erkenntnisse verständlich erläutern und verschriftlichen	**III**	

A 25 B 25	*Vgl. M.s.k. Standortbestimmung B2 A, 1a)* **Zeichne in jeden Streifen einen Anteil ein, der genauso groß ist wie $\frac{6}{8}$. Gib den passenden Anteil an!** 	**Äquivalenz, äquivalente Brüche** <u>finden</u> und <u>einzeichnen</u> *(lineare Streifendarstellung)* *[g.A.]* *[o.A.]*	- Finden äquivalenter Anteile über Längenvergleich der Bruchstreifen - Anteil bestimmen und einzeichnen - andere, gleichwertige Einteilung bzw. Darstellung vornehmen (i.S. Verfeinern / Vergröbern) - Zusammenhänge T-A-G erkennen - Transfer von symbolischer Ebene auf ikonische Ebene	**I, II, III**	- mögliche Fehlerursachen: gleich große Anteile werden über Differenz von Zähler und Nenner bzw. dem fehlenden Teil zum Ganzen bestimmt (bspw. $\frac{6}{8} = \frac{8}{10}$, da 8-6 = 10-8=2) - Schwierigkeit, freien Balken in geeignete und exakt gleich große Teile zu strukturieren - ungenaues Zeichnen möglicherweise Anzeichen für nicht tragfähige Bruchvorstellung - Schwierigkeiten: Erkennen relationaler Bezüge; häufig Vergleich der Anzahl der Einheiten und nicht gleichzeitig auch ihre Größe, d.h. additive Zerlegung im Vordergrund - Schwierigkeit: gleichzeitige Betrachtung von Teil und Ganzem bei gleichzeitiger Strukturierung durch zwei Anteile, die es zu vergleichen bzw. herzustellen gilt
	Beschreibe Ben und Becky, wie du den letzten Anteil gefunden hast!		- Erkenntnisse verständlich erläutern / verschriftlichen	**II**	- „Wie" bezieht sich eher auf Vorgehen als auf Begründung
A 26 B 26	**Erkläre Becky an dem Bild, warum $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{2}$ gleich sind!**	**Äquivalenz, äquivalente Brüche** erklären und begründen *[o.A.]*	- Gleichwertigkeit von Bruchzahlen in Darstellungen erkennen - Erkenntnisse verständlich erläutern / verschriftlichen	**III**	- „Warum" erfordert Erklärung/Begründung

mögliche Punktzahl geschlossene Aufgaben: 54
mögliche Punktzahl offene Aufgaben: 54
mögliche Gesamtpunktzahl: 108

I 3 Auswertungsleitfaden „BruKo“

Form A Teil I: ausgewählte Aspekte des arithmetischen Basisstoffs

Testaufgabe	Kompetenzschwerpunkt	Punkte		Ankerbeispiele
1a, 1b	Beziehungsreiche Multiplikation	**0 P.**	falsches Ergebnis	
		1 P.	korrektes Ergebnis	
2a, 2b, 2c	Beziehungsreiche Division	**0 P.**	falsches Ergebnis	
		1 P.	korrektes Ergebnis	
3a1, 3b1, 3c1, 3d1	Zahlzerlegungen | Platzhalteraufgaben (Addition)	**0 P.**	korrekt zerlegte Aufgabe, aber nicht verdoppelt	
		1 P.	korrekter Term (halbierte Zerlegung)	
3a2, 3b2, 3c2, 3d2	Zahlzerlegungen | Platzhalteraufgaben (Multiplikation)	**0 P.**	falsches Ergebnis	
		1 P.	korrekter Term	
4a1, 4b1, 4c1, 4d1	Zahlzerlegungen| Platzhalteraufgaben (Subtraktion)	**0 P.**	korrekt zerlegte Aufgabe, aber nicht halbiert	
		1 P.	korrekter Term (halbierte Zerlegung)	
4a2, 4b2, 4c2, 4d2	Zahlzerlegungen| Platzhalteraufgaben (Division)	**0 P.**	falsches Ergebnis	
		1 P.	korrekter Term	
5a, 5b, 5c, 5d, 5e	Multiplikation	**0 P.**	falsches Ergebnis	
		1 P.	korrektes Ergebnis	
6a, 6b, 6c, 6d, 6e	Division	**0 P.**	falsches Ergebnis	
		1 P.	korrektes Ergebnis	
7	Beziehungen zwischen Multiplikation und Division Umkehraufgaben finden	**0 P.**	bei Notation der Umkehraufgabe werden Dividend, Divisor, Wert des Quotienten vertauscht	
			aus zwei Zahlen der gegebenen Aufgabe Rechnung gebildet, die nicht die Umkehraufgabe ist	
			richtige Umkehraufgabe und eine /mehrere falsche Aufgabe(n)	
		1 P.	passende Umkehraufgabe (vollständige Gleichung)	
			passende Umkehraufgabe ohne Ergebnis notiert	
			richtige Umkehraufgabe sowie weitere korrekte Aufgaben	
			alle möglichen korrekten Multiplikations- / Divisionsaufgaben	
			Lösung direkt im Anschluss an Aufgabe notiert (formal falsche Notation wird dennoch als inhaltlich richtig gewertet)	$3 \cdot 7 = 21 : 3 = 7$
8	Beziehungen zwischen Multiplikation und Division Umkehraufgaben finden	**0 P.**	bei Notation der Umkehraufgabe werden Dividend, Divisor, Wert des Quotienten vertauscht	
			aus zwei Zahlen der gegebenen Aufgabe Rechnung gebildet, die nicht die Umkehraufgabe ist	
			richtige Umkehraufgabe und eine/mehrere falsche Aufgabe(n)	
		1 P.	passende Umkehraufgabe (vollständige Gleichung)	
			passende Umkehraufgabe ohne Ergebnis notiert	
			richtige Umkehraufgabe sowie weitere korrekte Aufgaben	
			alle möglichen korrekten Multiplikations- / Divisionsaufgaben	
			Lösung direkt im Anschluss an Aufgabe notiert	$48 : 6 = 8 \cdot 6 = 48$

			(formal falsche Notation wird dennoch als inhaltlich richtig gewertet)	
9a; 9b	Darstellungswechsel Malaufgaben am Punktefeld	**0 P.**	richtige Multiplikationsaufgabe ohne Ergebnis notiert	
			Additions- statt Multiplikationsaufgabe	
			nur Divisionsaufgabe	
			die richtige und eine /mehrere falsche Multiplikationsaufgabe(n)	
			korrekte Aufgaben, die nicht zu Punktefeld passen	
		0,5 P.	Aufgaben, die nicht unmittelbar der räumlich-simultanen Darstellung der Felder entsprechen, aber korrektes Ergebnis (Anzahl dargestellter Punkte insgesamt und Hälfte bzw. als 2. Faktor)	
		1 P.	vollständige Gleichung (Add., Mult., Sub.)	
			zum Punktefeld passende Mal- *und* Geteiltaufgabe	
10	Darstellungswechsel Geteiltaufgabe am Punktefeld	**0 P.**	nur Multiplikationsaufgabe	
			korrekte Divisionsaufgabe, die nicht unmittelbar zu Punktefeld passt)	
		0,5 P.	vollständige Gleichung (Anzahl dargestellter Punkte als Wert d. Quotienten)	
		1 P.	vollständige Gleichung (Anzahl dargestellter Punkte als Dividend)	
			zum Punktefeld passende Mal- *und* Geteiltaufgabe	
11a	Darstellungswechsel Hälfte einkreisen	**1 P.**	korrekte Darstellung	
11b	Darstellungswechsel Aufgabe zu Halbierung	**0 P.**	richtige Aufgabe ohne Ergebnis notiert	
			die richtige und eine /mehrere falsche Aufgabe(n)	
			korrekte Aufgaben, die nicht zu Punktefeld passen	
		0,5 P.	Aufgaben, die nicht unmittelbar der räumlich-simultanen Darstellung der Felder entsprechen, aber korrektes Ergebnis	
		1 P.	vollständige Gleichung (Add., Mult., Sub., Div.)	
			zum Punktefeld passende Mal- *und* Geteiltaufgabe	
	Bezug (wird nicht gewertet)	**1**	Addition	
		2	Subtraktion	
		3	Multiplikation	
		4	Division	
12a	Darstellungswechsel Doppeltes ergänzen	**1 P.**	korrekte Darstellung (6 Punkte ergänzt, insgesamt 12 Punkte)	
12b	Darstellungswechsel Aufgabe zu Verdopplung	**0 P.**	richtige Aufgabe ohne Ergebnis	
			korrekte Aufgabe, die nicht zu verdoppeltem Punktefeld passt	
		1 P.	vollständige Gleichung (Addition, Multiplikation, Division)	
	Bezug (wird nicht gewertet)	**1**	Addition	
		2	Subtraktion	
		3	Multiplikation	
		4	Division	
13a		**0 P.**	unvollständige oder falsche Veranschaulichung	

	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Zeichnung)		symbolische Darstellung (bspw. Gruppe 1: 6 Kinder, Gruppe 2: 6 Kinder, Gruppe 3: 6 Kinder o.ä.)	
		0,5 P.	Darstellung Divisor 3 (18:3) *Alltagsbilder (bspw. Kinder und Spielsituation; kein Alltagsbild, wenn Strichmännchen als Ordnung für Gruppierung)* *fehlende Einteilung (nur grobe Gruppierung)*	
		1 P.	Darstellung Divisor 6 (18 : 6) sichtbare Einteilung	
		0 P.	Aufgabe, die nicht zu Situation passt	
			nicht korrekter Term (Zahlendreher)	
13b	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Rechnung, Aufgabenteil vor Gleichheitszeichen)	0,5 P.	korrekte Multiplikationsaufgabe (Umkehraufgabe)	
			Divisor 3	
			Malreihe	
			Additionsaufgabe	
		1 P.	korrekte Divisionsaufgabe (auch ohne notiertes Ergebnis)	
		0 P.	nicht korrektes Ergebnis	
13c	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Ergebnis, Aufgabenteil nach Gleichheitszeichen)		(korrektes) Produkt aus Multiplikationsaufgabe	
			korrekt notierte und ausgerechnete Rechnung, die nicht zur Situation passt	
		1 P.	korrektes Ergebnis	
			Umkehraufgabe notiert, aber richtiges Ergebnis	
		0 P.	kein Antwortsatz bzw. nicht passend zur Fragestellung	
13d	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Antwortsatz)		Antwortsatz mit falschem Ergebnis	
		0,5 P.	unvollständiger Satz	
			Vollständiger Satz mit Folgefehler aus falscher Rechnung	
		1 P.	Antwortsatz mit korrektem Ergebnis	
			Ergebnis korrekt ausgerechnet aber Zahlendreher in Antwortsatz (+passend zur Fragestellung)	
14a	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Zeichnung)	0 P.	unvollständige oder falsche Veranschaulichung	
		0,5 P.	Darstellung Divisor 4 (12 : 4) *Alltagsbilder (bspw. Kinder und Spielsituation; kein Alltagsbild, wenn Strichmännchen als Ordnung für Gruppierung)* *fehlende Einteilung (nur grobe Gruppierung)*	
		1 P.	Darstellung Divisor 3 (12 : 3) sichtbare Einteilung	
		0 P.	Aufgabe, die nicht zur Situation passt	
			nicht korrekter Term (Zahlendreher)	
14b	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Rechnung, Aufgabenteil vor Gleichheitszeichen)	0,5 P.	korrekte Multiplikationsaufgabe (Umkehraufgabe)	
			Divisor 4	
			Additionsaufgabe	
		1 P.	korrekte Divisionsaufgabe (auch ohne notiertes Ergebnis)	
		0 P.	nicht korrektes Ergebnis	
14c			(korrektes) Produkt aus Multiplikationsaufgabe	

	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Ergebnis, Aufgabenteil nach Gleichheitszeichen)		korrekt notierte und ausgerechnete Rechnung, die nicht zur Situation passt	
		1 P.	korrektes Ergebnis	
			Umkehraufgabe notiert, aber richtiges Ergebnis	
		0 P.	kein Antwortsatz bzw. nicht passend zur Fragestellung	
14d	Vertiefung der (Grund-) Vorstellung zu Division (Antwortsatz)		Antwortsatz mit falschem Ergebnis	
		0,5 P.	unvollständiger Satz	
			vollständiger Satz mit Folgefehler aus falscher Rechnung	
		1 P.	Antwortsatz mit korrektem Ergebnis	
			Ergebnis korrekt ausgerechnet aber Zahlendreher in Antwortsatz (+passend zur Fragestellung)	

Form A Teil II: grundlegendes Bruchzahlverständnis

Testaufgabe	Aufgabenbereich		Punkte		Ankerbeispiele
1a	Zuordnungen		**0|1 P.**	korrekte Zuordnung *(Zähler)*	
1b			**0|1 P.**	korrekte Zuordnung *(Nenner)*	
1c			**0|1 P.**	korrekte Zuordnung *(Bruchstrich)*	
1d			**0|1 P.**	korrekte Zuordnung *(Anteil)*	
2 **3**	Erkläre, was der Zähler / Nenner bedeutet.	**nicht tragfähig**	**0 P.**	falsche Lösung	
				Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
				Lösung, die zu allgemein ist	
				Beschreibung / Formulierung von FV	
		im Ansatz tragfähig	**1 P.**	Der Zähler ist die obere Zahl / die Zahl auf dem Bruchstrich.	- „Der Zähler zählt die Teile.“ - „Der Nenner nennt immer wie viele Kästchen es sind.“
				Der Nenner ist die untere Zahl / die Zahl unter dem Bruchstrich.	- „Der Nenner sagt, in wie viele Stücke du den Kuchen gemacht hast.“
				Der Nenner sagt, wie viele Kästchen es gibt / Teile es sind.	- „Der Zähler ist die Zahl die oben steht. Wie viel man von dem Nenner bekommt.“
		nahezu tragfähig	**2 P.**	Der Zähler gibt an, wie viele Teile markiert sind.	- „Der Nenner sind alle Teile zusammen gezählt.“ - „Der Zähler ist die Anzahl der ausgefüllten Kästchen.“
				Der Nenner gibt an, wie viele Teile es *insgesamt* sind.	- „Der Nenner sagt, ob es 4tel, 3tel 1Halb sind. Der Zähler zählt wie viele 4tel, 3tel, Halbe, Achtel es sind.“
				Der Nenner ist die Zahl, durch die das Ganze geteilt wird.	- „Der Zähler bedeutet wie viele Punkte du vom Anteil nimmst.“
		vollumfänglich tragfähig	**3 P.**	Der Zähler gibt die Anzahl der Stücke im relevanten Teil an, d.h. er „zählt“.	- „Der Nenner ist das Ganze, wie viele Kästchen es sind.“
				Der Nenner beschreibt die Anzahl aller Bruchteile eines Ganzen. / Der Nenner gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wurde.	- „Der Zähler ist die Zahl die sagt, wie viele Kästchen uns interessieren, also die, die angemalt sind.“
4a, 4b, 4c	Anteilbestimmung (GV1)		**0 P.**	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	
			1 P. (3P.ins.)	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
5a, 5b, 5c	Anteilbestimmung (GV1)		**0 P.**	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	
				weder Zähler, noch Nenner korrekt	
			1 P. (3P.ins.)	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
5d **„Beschreibe.“**			**0 P.**	falsche Lösung	- „Dass der Bruch in der Reihenfolge kommt.“ - „Dass es nach der Reihe ist.“
				Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
				Lösung, die zu allgemein ist	
				Beschreibung / Formulierung von FV	

	Konstanz	**1 P.**	Es ist (oben) immer ein Kästchen / Teil grau.	- „Es gibt graue und weiße Felder.“ - „Es ist immer nur einer von zwei, drei, vier.“ - „*Das immer ein Kästchen grau ist* und die weißen immer eins mehr werden.“ - „*Es ist immer nur ein Teil markiert.* Es werden mehr Teile und sie werden kleiner. *Das Ganze ist gleich groß.*“ - „*Der Zähler bleibt gleich* aber der Anteil ist anders.“
			x Kästchen sind grau, y Kästchen sind weiß.	
			Das Ganze bleibt gleich groß.	
			Die obere Zahl / der Zähler ist immer 1.	
			Die obere Zahl / der Zähler bleibt gleich / verändert sich nicht.	
	Veränderung	**1 P.**	Es werden mehr Kästchen / Teile.	- „Das ist immer einer mehr.“ - „Das immer ein Kästchen grau ist und *die weißen immer eins mehr werden.*“ - „Die grauen Teile bleiben immer oben und die weißen Teile werden immer kleiner.“ - „Es ist immer nur ein Teil markiert. *Es werden mehr Teile und sie werden kleiner.* Das Ganze ist gleich groß.“ - „Der Zähler bleibt gleich aber *der Anteil ist anders.*“
			Es kommt ein Kästchen / Teil dazu.	
			Die Kästchen / Teile werden kleiner.	
			Die untere Zahl / der Nenner verändert sich.	
			Die untere Zahl / der Nenner wird (um 1) größer.	

	Wirkung	**1 P.**	Der Bruch / Anteil wird kleiner.	- „Der Anteil ist anders aber die Fläche (das Ganze) bleibt gleich groß.“
				  ○ 1 P. Konstanz
				  ○ 1 P. Veränderung

			Je mehr Teile, desto kleiner jedes Teil (und desto kleiner der Anteil).	
			Der Nenner wird um 1 größer und es kommt ein weiteres Teil hinzu (und jedes Teil wird kleiner).	
			Je größer der Nenner, desto mehr Teile.	
			Je größer der Nenner, desto kleiner der Anteil.	
			Das gleiche Ganze kann unterschiedlich aufgeteilt sein und unterschiedliche Anteile darstellen.	
	Bezug (wird nicht gewertet)	**0**	keine Angabe	
		1	ikonisch	
		2	symbolisch	
		3	ikonisch + symbolisch	
		4	unspezifisch	
6a, 6b, 6c	Anteilbestimmung (GV1)	**0 P.**	nur Zähler oder nur Nenner korrekt Zähler und Nenner vertauscht	
		1 P. (3P.ins.)	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
7a, 7b, 7c	Anteilbestimmung (GV1)	**0 P.**	nur Zähler oder nur Nenner korrekt Zähler und Nenner vertauscht	
		1 P. (3P.ins.)	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
7d **„Beschreibe.“**		**0 P.**	falsche Lösung	- „Unten geht es von 2, 3, 4.“
			Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
			Lösung, die zu allgemein ist	
			Beschreibung / Formulierung von FV	

	Konstanz		**1 P.**	immer ein Kästchen / Teil grau.	- „*Die grauen Kästchen bleiben so* und die weißen werden mehr.“ - „Es werden immer vier Kästchen mehr und *es ist immer nur eins ausgemalt.*“ - „Das Ganze wird größer. *Es ist nur ein Teil markiert*. Es werden vier Teile mehr. *Die einzelnen Teile sind gleich groß.*“
				x Kästchen sind grau, y Kästchen sind weiß.	
				Das Ganze ist verschieden.	
				Die obere Zahl / der Zähler ist immer 1.	
				Im Nenner ist die 4er Reihe. / Im Nenner ist das 1x4.	
	Veränderung		**1 P.**	Es kommt immer eine Reihe (4 Kästchen) dazu.	- „Die Balken werden immer dicker.“ - „*Es werden immer vier Kästchen mehr* und es ist immer nur eins ausgemalt.“ - „Dass eine Reihe dazu kommt und das ausgefüllte Kästchen ein Feld nach unten rutscht.“ - „*Das Ganze wird größer*. Es ist nur ein Teil markiert. *Es werden vier Teile mehr*. Die einzelnen Teile sind gleich groß.“
				Es kommen immer vier Kästchen dazu.	
				Es werden mehr Kästchen / Teile. Es kommen mehr Teile dazu.	
				Das Ganze verändert sich.	
				Die untere Zahl / der Nenner verändert sich.	
				Die untere Zahl / der Nenner wird (um 4) größer.	
	Wirkung		**1 P.**	Je größer der Nenner, desto mehr Teile / Kästchen.	- „Der Zähler verändert sich nicht, weil immer nur ein Kästchen markiert ist“ o 1 P. Konstanz - „Das Ganze wird immer um vier größer, der Nenner auch, aber die Anzahl der markierten Teile ist gleich, deswegen wird der Anteil am Ganzen kleiner.“ o 1 P. Konstanz o 1 P. Veränderung
				Das Teil kann gleich groß sein, aber unterschiedlich (große) Anteile darstellen.	
	Bezug (wird nicht gewertet)		**0**	keine Angabe	
			1	ikonisch	
			2	symbolisch	
			3	ikonisch + symbolisch	
			4	unspezifisch	
8	vorgegebene Bruchzahl darstellen	**nicht angemessen**	**O P.**	Keine Angabe	
				falsche Lösung	
		im Ansatz angemessen	**1 P.**	ungleichmäßige Einteilung (korrekte Anzahl) *ohne* markiertes Teil (zusammenhängende + unzusammenhängende Ganze)	
		nahezu angemessen	**2 P.**	ungleichmäßige Einteilung (korrekte Anzahl) + markiertes Teil (zusammenhängende + unzusammenhängende Ganze)	
				gleichmäßige Einteilung (korrekte Anzahl) *ohne* markiertes Teil (zusammenhängende + unzusammenhängende Ganze)	

		vollumfänglich angemessen	3 P.	gleichmäßige Einteilung + Teil markiert	
9	Anteilbestimmung (GV1)		0 P.	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	
				Zähler und Nenner vertauscht	
			1 P.	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
10a, 10b, 10c	Anteilbestimmung (GV1)		0 P.	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	
				Zähler und Nenner vertauscht	
			1 P. (3P.ins.)	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
10d „Beschreibe."			0 P.	falsche Lösung	
				Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
				Lösung, die zu allgemein ist	
				Beschreibung / Formulierung von FV	
	Konstanz		1 P.	Immer 3 Kästchen / Teile sind grau / markiert.	- „Dass immer das gleiche Ergebnis rauskommt." - „*Es ist immer das Gleiche*, nur die Bilder werden größer." - „*Dass immer 3 Kästchen markiert sind*. Dass die Kästchen immer größer werden." - „Dass es immer größer wird und *die Zahl ist immer gleich.*" - „*Es verändert sich nicht*, es wird nur größer."
				x Kästchen sind grau, y Kästchen sind weiß.	
				Die grauen Kästchen / Teile sind gleich.	
				Das sind die Gleichen / alle gleich. Es ist / bleibt / war das Gleiche.	
				Die obere Zahl / der Zähler bleibt gleich / ist immer 3.	
				Die untere Zahl / der Nenner bleibt gleich / ist immer 8.	
				Der Zähler und der Nenner bleiben gleich / verändern sich nicht.	
				Es ist immer die gleiche Zahl.	
				Der Anteil /Bruch verändert sich nicht / bleiben gleich.	
				Der Anteil ist immer gleich groß.	
	Veränderung		1 P.	Alles / die Kästchen / das Bild (das Ganze) bleibt gleich, aber es wird größer.	- „Es ist immer das Gleiche, *nur die Bilder werden größer.*" - „Dass immer 3 Kästchen markiert sind. *Dass die Kästchen immer größer werden.*"
				Es verändert sich nur die Größe.	
				Die Kästchen / Teile / Bilder / das Ganze werden größer.	
				Es ist zuerst klein, dann mittel, dann groß.	
	Wirkung		1 P.	Es bleibt gleich, auch wenn sich die Größe ändert / es ändert sich nur die Größe.	- „Das sind die gleichen Zahlen und es verändert sich nicht, es wird nur größer." o 1 P. Konstanz o 1 P. Veränderung - „Egal wie groß das Ganze ist, der Bruch bleibt gleich." o 1 P. Konstanz - „Die Kästchen werden größer aber sonst passiert nichts." o 1 P. Veränderung
				Die Teile und das Ganze werden größer, aber es bleibt gleich / der gleiche Anteil / Bruch.	
				Der Anteil kann gleich groß, die Teile aber unterschiedlich groß aussehen.	
				Der gleiche Anteil kann unterschiedlich groß dargestellt werden.	
				Der Anteil bleibt gleich, auch wenn sich die Größe ändert.	
	Bezug		0	keine Angabe	

	(wird nicht gewertet)	**1**	ikonisch	
		2	symbolisch	
		3	ikonisch + symbolisch	
		4	unspezifisch	
11a, 11b, 11c	Anteilbestimmung (GV1)	**0 P.**	nur Zähler oder nur Nenner korrekt Zähler und Nenner vertauscht	
		1 P. (3P.ins.)	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
11d **„Beschreibe."**		**0 P.**	falsche Lösung	- „Alles gleich." - „Es verändert sich nichts."
			Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
			Lösung, die zu allgemein ist	
			Beschreibung / Formulierung von FV	
	Konstanz	**1 P.**	3 Kästchen sind grau, 3 Kästchen sind weiß.	- „Die Kästchen werden kleiner, *aber es bleibt immer die gleiche Zahl.*" - „Die Kästchen sind anders geordnet, aber *die Zahlen sind genau gleich.*" - „*3 sind dunkel und 3 sind hell.* Die Bilder werden kleiner." - „Es ist die ganze Zeit die gleiche Zahl." - „Es bleibt immer das gleiche Ergebnis."
			Immer 3 Kästchen / Teile sind grau / markiert.	
			Die obere Zahl / der Zähler bleibt gleich / ist immer 3.	
			Die untere Zahl / der Nenner bleibt gleich / ist immer 6.	
			Es bleibt / ist gleich.	
			Der Zähler und der Nenner bleiben gleich.	
			Es ist immer die gleiche Zahl.	
			Der Anteil ist immer gleich groß.	
			Der Anteil /Bruch verändert sich nicht / bleiben gleich.	
	Veränderung	**1 P.**	Die Kästchen / Teile / Bilder / das Ganze werden / wird kleiner.	- „*Die Kästchen werden kleiner*, aber es bleibt immer die gleiche Zahl." - „*Dass es immer kleiner wird* und es immer 3 Kästchen markiert sind." - „Es bleibt gleich, *das Graue wechselt immer die Richtung.*"
			Es ist zuerst groß, dann mittel, dann klein.	
			Die grauen Kästchen / Teile sind unterschiedlich / woanders.	
			Die Kästchen / Teile / Bilder / das Ganze werden / wird kleiner und die grauen Teile sehen unterschiedlich aus.	
			Es verändert sich nur die Größe und die (Markierung der) grauen Teile.	

	Wirkung	**1 P.**	Die Teile und das Ganze werden kleiner, aber es bleibt gleich / der gleiche Anteil / Bruch.	- „Die Kästchen sind anders geordnet aber die Zahlen sind genau gleich."
				    o 1 P. Konstanz
				    o 1 P. Veränderung
				- „Dass das alles der gleiche Bruch ist, obwohl sie anders aussehen."
				    o 1 P. Konstanz
				    o 1 P. Veränderung
				- „Es gibt verschiedene Möglichkeiten denselben Bruch darzustellen."

			Die grauen Teile sind woanders, aber der Anteil bleibt gleich.	
			Der Anteil kann gleich groß sein, die Teile aber unterschiedlich aussehen.	
			Der gleiche Anteil kann unterschiedlich groß dargestellt werden.	
			Der Anteil bleibt gleich, auch wenn die Teile unterschiedlich markiert sind.	
			Der Anteil bleibt gleich, auch wenn sich die Größe ändert und die Teile unterschiedlich markiert sind.	
	Bezug (wird nicht gewertet)	**0**	keine Angabe	
		1	ikonisch	
		2	symbolisch	
		3	ikonisch + symbolisch	
		4	unspezifisch	

12a	Brüche in Darstellungen erkennen (Multiple Choice)	**0|1 P.**	richtige Antwort *(angekreuzt)*	
12b		**0|1 P.**	richtige Antwort *(angekreuzt)*	
12c		**0|1 P.**	richtige Antwort *(nicht angekreuzt)*	
12d		**0|1 P.**	richtige Antwort *(angekreuzt)*	
12e		**0|1 P.**	richtige Antwort *(nicht angekreuzt)*	
13a	vorgegebene Bruchzahl markieren	**0|1 P.**	korrekte Markierung (jeweils 4 Teile bzw. nur 1 Teil gefärbt)	
13b		**0|1 P.**		
13c		**0|1 P.**		
13d		**0|1 P.**		
13e „Beschreibe.“		**O P.**	falsche Lösung	- „Alle sind gleich.“
			Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
			Lösung, die zu allgemein ist	
			Beschreibung / Formulierung von FV	
	Konstanz	**1 P.**	Es bleibt immer ein Teil weiß.	- *„Man muss immer dieselbe Anzahl von Kästchen ausmalen,* aber die Form verändert sich.“ - *„Dass es immer das Gleiche ergibt* aber die meisten sind verschieden.“ - „Der Zähler und der Nenner bleiben gleich.“
			Es sind immer 4 Teile grau.	
			Es sind immer 5 Kästchen / Teile.	
			Es ist immer das Gleiche, aber die Formen sind unterschiedlich.	
			Der Anteil bleibt gleich. / Es sind immer $\frac{4}{5}$.	
			Der Zähler ist / bleibt immer 4, der Nenner ist / bleibt immer 5.	
	Veränderung	**1 P.**	Es sind unterschiedliche Formen / andere Muster.	- „Es bleibt immer einer über und *es sind andere Formen.“* - „Man muss immer dieselbe Anzahl von Kästchen ausmalen, *aber die Form verändert sich.“* - „Es gibt mehrere Möglichkeiten.“
			Das Ganze sieht unterschiedlich aus.	
	Wirkung	**1 P.**	Der gleiche Anteil (Bruch) kann unterschiedlich aussehen.	- „Alles gleich außer die Form.“ o 1 P. Konstanz o 1 P. Veränderung - „Es ist egal, wie das Ganze aussieht, denn der Bruch bleibt immer gleich.“ o 1 P. Konstanz o 1 P. Veränderung - „Dass es immer 4/5 sind aber sich das Bild verändert.“ - „Es gibt verschiedene Möglichkeiten denselben Bruch darzustellen.“
			Der Anteil (Bruch) bleibt gleich, auch wenn die Form unterschiedlich ist.	
			Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen Bruch / Anteil darzustellen.	
	Bezug (wird nicht gewertet)	**0**	keine Angabe	
		1	ikonisch	
		2	symbolisch	
		3	ikonisch + symbolisch	
		4	unspezifisch	
14a	Anteilbestimmung (GV1)	**0 P.**	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	

				Zähler und Nenner vertauscht	
			1 P.	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
14b	Anteilbestimmung (GV1) (Benennung Anzahl Teile)		**0|1 P.**	korrekte Anzahl Teile (8)	
14c	Anteilbestimmung (GV1) (Benennung Anzahl Ganze)		**0|1 P.**	korrekte Anzahl Ganze (1)	
15a, 15b	Teil zu Ganzem ergänzen (GV1) (selbst einzeichnen)	**nicht angemessen**	**0 P.**	falsche Lösung	- FV (Zähler = Anzahl markierter Teile, Nenner = Anzahl nicht markierter Teile)
				Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
		im Ansatz angemessen	**1P.**	Unterteilung des vorgegebenen Teils	- Zwar nicht korrekt, aber zeigt erstes Verständnis, dass ein Ganzes aus verschiedenen Teilen besteht; Fehlinterpretation der Aufgabenstellung
				(un)gleichmäßige Ergänzung (nicht korrekte Anzahl an Teilen)	- außer FV, s.o.
				neue Darstellung gezeichnet	
		nahezu angemessen	**2 P.**	ungleichmäßige Einteilung (korrekte Anzahl an Teilen)	
		vollumfänglich angemessen	**3 P.**	gleichmäßige Einteilung (korrekte Anzahl an Teilen)	
15c **„Beschreibe.“**			**0 P.**	falsche Lösung Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat Lösung, die zu allgemein ist Beschreibung / Formulierung von FV	- „Das ist das Doppelte.“ - „Das man etwas dazu zeichnen soll.“ - „Das erste ist eine ungerade und das zweite eine gerade Zahl.“
	Konstanz		**1 P.**	Es ist jeweils ein Teil grau. Das graue Teil / die Teile ist / sind gleich groß. Die (markierten) Teile sind gleich groß. Oben / der Zähler ist immer 1 / bleibt gleich.	- „Das immer nur einer markiert worden ist.“ - „Das Ganze ist bei beiden unterschiedlich groß, *die Teile sind gleich groß*.“
	Veränderung		**1 P.**	Es werden mehr Teile. Die (Anzahl der) Teile verdoppelt sich. Es werden drei Teile mehr.	- „Es ist bei dem zweiten mehr als bei dem ersten.“ - „Bei der ersten Darstellung sind es drei Kästchen und unten sind es doppelt so viele.“

				Unten / der Nenner ist es erst 3 und dann 6.	- „Das Obere hat weniger Teile als das Untere“ - „Der Nenner wird verdoppelt, der Zähler bleibt gleich.“ - „*Das Ganze ist bei beiden unterschiedlich groß*, die Teile sind gleich groß.“
				Der Nenner wird um 3 größer.	
				Unten / der Nenner verdoppelt sich / ist doppelt so groß.	
	Wirkung		1 P.	Der markierte Teil kann gleich, das Ganze aber unterschiedlich aussehen.	- „Dass es ganz verschiedene Möglichkeiten gibt.“ - „Dass sich die Anzahl der Teile um drei verdoppelt hat, also verändert sich auch der Nenner um 3 (Teile) und der Zähler bleibt gleich.“ o 1 P. Konstanz o 1 P. Veränderung
				Der gleiche Teil kann in Abhängigkeit zum Ganzen unterschiedliche Anteile darstellen.	
				Der Nenner wird größer, es kommen mehr Teile hinzu, aber der Anteil wird kleiner bzw. vice versa.	
	Bezug (wird nicht gewertet)		0	keine Angabe	
			1	ikonisch	
			2	symbolisch	
			3	ikonisch + symbolisch	
			4	unspezifisch	
16	Erkläre an einem Beispiel, wozu man Brüche verwenden kann.	**nicht tragfähig**	**0 P.**	falsche Lösung	- „Brüche kann man zum Zählen benutzen. Und man rechnet Minus. Z.B. man hat 10 Kästchen und es sind zwei davon schwarz und dann sind es nur noch 8 und man schreibt dann $\frac{2}{10}$.“ - „Zum Rechnen.“ - „Zum Beispiel bei einer Pizza weiß man dann wie viele Pizzen man bekommt.“
				Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
				Lösung, die zu allgemein ist	
				Beschreibung / Formulierung von FV	
		im Ansatz tragfähig	**1 P.**	beschreibende Alltagsbeispiele (bspw. „Wenn man von einer Pizza 2 Viertel gegessen hat.“ [GV1]; „Wenn man 5 Kuchen hat und davon 2 gegessen hat, dann sind es $\frac{2}{5}$“. [GV2])	- „Z.B.: 8 Gummibären. Wie viele sind rot? 4 von 8.“ - „Pizza teilen, damit alle ein Stück bekommen.“ - „Zum Messen und zum Rechnen.“ - „Z.B. bei Geteiltaufgaben.“
		nahezu tragfähig	**2 P.**	explizitere Alltagsbeispiele (bspw. „Wenn man einen Kuchen gerecht auf vier Kinder aufteilen will, dann bekommt jedes Kind ein Viertel.“)	- „Zum Aufteilen.“ - „Für eine Kuchenteilung, damit jeder gleich viel hat.“ - „Um etwas zu teilen, z.B. bekommt Max 1/3 von den Kirschen.“
				Um etwas zu teilen.	
				Um etwas aufzuteilen.	
		vollumfänglich tragfähig	**3P.**	Um den Teil von einem Ganzen zu beschreiben.	- „Um gut und genau zu teilen.“ - „Wenn man etwas gleichmäßig teilen möchte.“ - „Um etwas gerecht aufzuteilen.“
				Um ein Ganzes / etwas *gerecht / gleichmäßig (ver-/ auf-) teilen zu können.*	
				Um Größen kleiner als 1 zu beschreiben.	
17	Bruch darstellen		**0 P.**	ikonische und symbolische Darstellungen nicht übereinstimmend	
			0,5P.	ungleichmäßige Einteilung (korrekte Anzahl)	

	(Zeichnung und Zahl identisch)		1 P.	gleichmäßige Einteilung (korrekte Anzahl)	
			1 P.	Markierung des Anteils	
			1 P.	symbolische Darstellung alle dazu gleichwertigen Brüche	
		Falls Darstellungen übereinstimmen: 3P. ins.			
18a	Bruchzahl in Darstellungen erkennen (Multiple choice)		0|1 P.	korrekte Antwort *(Nr. 1 angekreuzt)*	
18b			0|1 P.	korrekte Antwort *(Nr. 2 nicht angekreuzt)*	
19	Bruchzahl in Sachsituationen erkennen		0|1 P.	korrekte Antwort *(„beide“ angekreuzt)*	
20a, 20b	Anteilbestimmung (GV2) (ikonisch)		0 P.	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	
				Zähler und Nenner vertauscht	
			1 P. (2P.ins.)	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche	
21a	Anteilbestimmung (GV2) (ikonisch)		0|1 P.	korrekte Einteilung der Viertel	
21b			0|1 P.	korrekte Anzahl Punkte Anteil (9)	
21c			0|1 P.	korrekte Anzahl Punkte insgesamt (12)	
21d			0|1 P.	korrekte Einteilung der Drittel	
21e			0|1 P.	korrekte Anzahl Punkte Anteil (8)	
22	Anteilbestimmung (GV2) (ikonisch oder symbolisch)	nicht angemessen	0 P.	keine Angaben	
				falsche Zeichnung / Rechnung	
		im Ansatz angemessen	1 P.	ikonische Darstellung Gesamtzahl (10 Strichmännchen o.ä.)	
				symbolische Darstellung Gesamtzahl (10)	
		nahezu angemessen	2 P.	s. 1 P. + Einteilung des Nenners	
				s. 1 P. + Nenner (10:5)	
		vollumfänglich angemessen	3 P.	s. 2 P. + Markierung des Zählers (gesuchter Anteil; 6) bzw. nur Ergebnis (6)	
				s. 2 P. + gesuchter Anteil (10 : 5) · 3 = 6 bzw. nur Ergebnis (6)	
23	Teil zu Ganzem ergänzen (GV2) (selbst einzeichnen)	nicht angemesse	0 P.	keine Angaben	- Markierung eines der vorgegebenen Punkte
				falsche Zeichnung / Rechnung	
		im Ansatz angemessen	1 P.	Punkte ergänzt	- unabhängig von korrekter Anzahl; Erkenntnis, dass etwas hinzugefügt werden muss

		nahezu angemessen	2 P.	ungleichmäßige Einteilung		- Korrekte Anzahl an Punkten, allerdings alle Punkte markiert
				korrekte Anzahl der Punkte (8)		
		vollumfänglich angemessen	3 P.	nahezu gleichmäßige Einteilung		
				korrekte Anzahl der Punkte (8)	symbolisch	
					ikonisch	
24a, 24b	Anteilbestimmung (GV1)		**0 P.**	nur Zähler oder nur Nenner korrekt		
				Zähler und Nenner vertauscht		
			1 P. (2P.ins.)	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt) alle dazu gleichwertigen Brüche		
24c „Beschreibe.“			**0 P.**	falsche Lösung		- „Dass es das Gleiche ist.“
				Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat		
				Lösung, die zu allgemein ist		
				Beschreibung / Formulierung von FV		
	Konstanz		**1 P.**	Die markierte Fläche bleibt gleich.		- „Es sind mehr graue als weiße Felder markiert.“ - „Ein Drittel davon ist markiert.“ - „Der Anteil bleibt immer gleich.“
				Der Anteil bleibt gleich groß. / Die Anteile sind gleichwertig.		
				In den gleichen gefärbten Teil kann man verschiedene Einteilungen hineindenken.		
	Veränderung		**1 P.**	Die Fläche der markierten Teile kann unterschiedlich eingeteilt sein.		- „Wenn man Striche wegnimmt, dann kommt eine ganz andere Bruchzahl raus.“ - „Ich habe die 8 und die 12 verdoppelt und dann kam die 16 und die 24 raus.“
				In den gleichen gefärbten Teil *kann man verschiedene Einteilungen hineindenken.*		
				Man kann verschiedene Teile zusammenfassen. / Die gleichen gefärbten Teile kann man unterschiedlich zusammenfassen.		
				Die Zähler und Nenner sind unterschiedlich.		
				Die Bruchzahlen sind unterschiedlich		
	Wirkung		**1 P.**	Der gleiche gefärbte Teil /Kästchen kann mit unterschiedlichen Bruchzahlen ausgedrückt werden.		- „Es gibt viele / auch andere Möglichkeiten.“ - „Ich habe einfach nur anders geguckt, dass der Anteil insgesamt anders ist.“
				Die Bruchzahlen sind unterschiedlich, die Anteile aber gleichwertig.		
				Wenn man Striche wegnimmt oder hinzufügt, bleibt die Fläche des markierten Teils gleich, aber die Einteilung ist anders		
				Der gleiche Anteil kann mit unterschiedlichen / gleichwertigen Bruchzahlen beschrieben und dargestellt werden.		
				Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den gleichen Anteil zu beschreiben und darzustellen.		
				Man kann die erste Bruchzahl erweitern oder kürzen, der Anteil bleibt gleich.		
	Bezug (wird nicht gewertet)		**0**	keine Angabe		
			1	ikonisch		
			2	symbolisch		
			3	ikonisch + symbolisch		

			4	unspezifisch	
25a1	Anteilbestimmung (GV1)		0 P.	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	
				Zähler und Nenner vertauscht	
			1 P.	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt; $\frac{6}{8}$)	
25a2	Anteile markieren		0|1 P.	korrekte Markierung des Teils	
25b1	Anteilbestimmung (GV1) (Äquivalenz)		0 P.	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	- erneute Antwort $\frac{6}{8}$
				Zähler und Nenner vertauscht	
			1 P.	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt)	
25b2	äquivalente Anteile markieren		0|1 P.	korrekte Markierung des Teils	
25c1	Anteilbestimmung (GV1) (Äquivalenz)		0 P.	nur Zähler oder nur Nenner korrekt	- erneute Antwort $\frac{6}{8}$
				Zähler und Nenner vertauscht	
			1 P.	korrekter Anteil (Zähler und Nenner korrekt)	
25c2	äquivalente Anteile finden und einzeichnen		0,5P.	korrekte Einteilung (ungefähr gleichmäßig)	
			1 P.	korrekte Einteilung (gleichmäßig)	
25c3	äquivalente Anteile markieren		0|1 P.	korrekte Markierung des Teils	
25d	Inhaltlicher Bezug	nicht tragfähig	0 P.	falsche Lösung	- „Ich habe da einfach nur Striche hingemalt, also eigentlich nur 6."
				Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
				Lösung, die zu allgemein ist	
				Beschreibung / Formulierung von FV	
		im Ansatz tragfähig	1 P.	Selbst einzeichnen.	- „Ich habe das einfach noch einmal geteilt" - „6 + 6 = 12, 8 + 8 = 16" - „Ich habe immer einen Striche zwischen der 1. Aufgabe gemacht."
				Mit dem Lineal / Geodreieck (nachmessen und) selbst einzeichnen.	
		nahezu tragfähig	2 P.	Selbst einzeichnen, sodass die Anteile gleich groß sind.	
				Mit dem Lineal / Geodreieck selbst einzeichnen, sodass die Anteile gleich groß sind.	
		vollumfänglich tragfähig	3P.	Verfeinern / Teile kleiner zeichnen. (Der neue Anteil ist genauso groß wie der ursprüngliche, einzelne Teile vom Ganzen werden kleiner, der Anteil jedoch nicht)	- „Ich habe die Teile kleiner gemacht." - „Ich habe 8 · 2 und 6 · 2 gerechnet."
				Achtel halbieren, sodass Sechzehntel. Der markierte Teil ist gleich lang.	
				Erweitern, sodass richtige Anzahl der Teile.	
26	Erkläre an dem Bild, warum $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{2}$ gleich sind.	nicht tragfähig	0 P.	falsche Lösung	- „Weil das die gleiche Größe ist." / „Beide Kästchen sind gleich groß." - „Wie man bei dem Bild sieht gibt es $\frac{3}{3} = \frac{1}{1}$, weil es verkleinert wurde" - „Das erste hat drei Striche und Nummer zwei hat eine große Fläche." - „Weil 3/6 kleinere Kästchen hat." - „Weil beides ein Ganzes ist."
				Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat	
				Lösung, die zu allgemein ist	
				Beschreibung / Formulierung von FV	
		im Ansatz tragfähig	1 P.	Das Ganze ist gleich groß.	- „Weil sie alle von der Größe ineinander passen."
				Beide grauen Teile sind gleich groß.	

				Die markierte Fläche ist gleich groß.	- „Weil $\frac{3}{6}$ genauso groß markiert worden ist wie $\frac{1}{2}$."
				Die obere Zahl (Zähler) und die untere Zahl (Nenner) werden um 3 größer.	
		nahezu tragfähig	**2 P.**	Beide Darstellungen sind gleich groß / der graue Teil ist gleich groß, aber einmal sind es 6 Kästchen / Teile und einmal sind es 2 Kästchen / Teile.	- „Weil es genauso groß ist wie $\frac{3}{6}$, also ist das gleich, denn man könnte ja auch die drei Striche in dem Großen machen, dann ist das das Gleiche." - „Wenn man alle Streifen außer dem Strich in der Mitte weglässt, ist es das Gleiche." - „Weil bei dem einen nur Striche dazugekommen sind und das egal ist, trotzdem bleiben $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{2}$ gleich." - „Weil $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{2}$ beides ein Halb also die Hälfte ist und weil die Gesamtgröße gleich groß ist." - „Die sind gleich groß, weil das erste Kästchen hat und das andere nicht. Das ist so etwas wie eine optische Täuschung." - „Beides ist die Hälfte vom Ganzen."
				Beide Darstellungen / Ganze sind gleich groß, aber unterschiedlich unterteilt.	
				Beide Darstellungen/Ganze sind gleich groß, aber haben unterschiedlich viele Kästchen/Teile.	
		vollumfänglich tragfähig	**3 P.**	Die Bruchzahlen sind zwar unterschiedlich groß, aber sie beschreiben den gleichen Anteil (vom Ganzen).	- „Weil es der gleiche Anteil ist. Weil das markierte an denselben Stellen aufhört." - „Wenn man ein Ganzes in 6 Teile teilt und davon 3 Teile markiert ist es genauso viel wie eine Hälfte."
				Die Brüche sind äquivalent.	
				Nenner und Zähler wurden mit 3 erweitert.	
				Beide Darstellungen / Ganze sind gleich groß und die grauen Teile / die markierte Fläche ist gleich groß, auch wenn sie unterschiedlich eingeteilt sind.	
	Bezug (wird nicht gewertet)		**0**	keine Angabe	
			1	ikonisch	
			2	symbolisch	
			3	ikonisch + symbolisch	
			4	unspezifisch	

Erläuterungen:

offene Aufgaben	„Was fällt dir auf? Beschreibe."	Konstanz	Lösung, die eine oder mehrere korrekte Aspekte i.B.a. Konstanz (operatives Prinzip) enthält; sowohl ikonische als auch symbolische Bezugsebene
		Veränderung	Lösung, die eine oder mehrere korrekte Aspekte i.B.a. Veränderung (operatives Prinzip) enthält; sowohl ikonische als auch symbolische Bezugsebene
		Wirkung	Lösung, die korrekte Aspekte i.B.a. Zusammenhängen und Wirkfaktoren (operatives Prinzip) enthält; lässt darauf schließen, dass ein grundlegendes Verständnis vorhanden ist
	„Erkläre, … ."	nicht tragfähig	falsche Lösung; Lösung, die nichts mit Aufgabe zu tun hat; Lösung, die zu allgemein ist; Fehinterpretation der Aufgabe
		im Ansatz tragfähig	im Ansatz tragfähige Erklärung, die erste Einsichten umfasst; lässt darauf schließen, dass ein erstes vages Verständnis vorhanden ist
		nahezu tragfähig	tragfähige Erklärung ohne explizite Verwendung von Fachbegriffen; lässt jedoch darauf schließen, dass ein bedeutungsbezogenes Verständnis vorhanden ist
		vollumfänglich tragfähig	tragfähige Erklärung mit expliziter Verwendung von Fachbegriffen; lässt darauf schließen, dass grundlegendes und formalbezogenes Verständnis vorhanden ist
	„Zeichne / Ergänze"	nicht angemessen	falsche Lösung; Lösung, die typische Fehlvorstellungen enthalten
		im Ansatz angemessen	Lösung, die die korrekte Anzahl an Teilen, jedoch in sehr unterschiedlicher Größe enthält; Lösung, die nicht die korrekte Anzahl an Teilen (außer FV), jedoch in etwa gleich große Teile enthält; lässt darauf schließen, dass Verständnis darüber besteht, dass ein Ganzes aus verschiedenen Teilen besteht bzw. etwas hinzugefügt werden muss
		nahezu angemessen	Lösung, die in etwa gleich große Teile enthält; der Versuch, in etwa gleich große Teile zu erhalten sollte deutlich sein; lässt darauf schließen, dass ein erstes Verständnis von der gleichen Größe der Teile vorhanden ist
		vollumfänglich angemessen	Lösung, die exakt gleich große Teile enthält (mit Lineal gezeichnet); lässt darauf schließen, dass grundlegendes Verständnis von der gleichen Größe der Teile vorhanden ist

J 1 Reflexionsanregungen Lehrkräfte blanko

Reflexionsanregungen

- **Zufriedenheit mit der Durchführung insgesamt:**
  - Klassenunterricht
  - eng vernetzte Förderschleifen (+ „Experten-Poster“ für den Klassenunterricht)
  - Doppelbesetzung
  - Zeitaufwand für Einarbeitung / Arbeitsintensität
- **Anmerkung zu inhaltlichen Aspekten:**
  - Einheit 1: Einführung (echter Kuchen, Pappkuchen)
  - Einheit 2.1-2.2: ein Teil von einem Ganzen (Papier falten, ikonische Darstellungen, operative Veränderungen erkunden, Fokus auf Zusammenhänge T-A-G)
  - Einheit 2.3-2.4: mehrere Teile von einem Ganzen (ikonische Darstellungen, operative Veränderungen erkunden, Fokus auf Zusammenhänge T-A-G)
  - Einheit 3.1-3.2: Ergebnisgleichheit
  - Einheit 4.1-4.3: Teile von Mengen (Verteilhandlung am Bruchstreifen, Anteile von ikonischen Punktemengen)
  - Einheit 5.1: Äquivalenz (flächige Darstellung, gefaltetes Papier, Bruchpuzzle)
  - Einheit 5.2-5.3: Äquivalenz und Verfeinern / Vergröbern (lineare Darstellung, Streifentafel)
- **Einschätzung zu methodischen Aspekten:**
  - aktiv-entdeckendes-Lernen
  - Fokussierung auf Zusammenhänge Teil-Anteil-Ganzes + Versprachlichung (Strukturfokussierung)
  - Handlungsorientierung
  - Kooperative Zusammenarbeit in Forscher-Teams
- **Einschätzung zum Material:**
  - Gestaltung ABs (‚Starter-Auftrag‘, weiterführende Aufträge mit ansteigendem Schwierigkeitsniveau; Praktikabilität in Schulalltag)
  - Unterstützungsmaterial (Tipp-Karten, vergrößerte Abbildungen, Lernplakate)
  - Reihen- und Stundentransparenz
  - Papier falten, Memories, Verteilen am Bruchstreifen, Bruchpuzzle, Streifentafel
- **Ablauf / Struktur der Unterrichtsstunden:**
  - gemeinsame Einstiege (z.T. Wdh., Rätsel, gem. handlungsorientierte Erarbeitung; Sitzhalbkreis vor Tafel)
  - Arbeitsphase (Weggabelung (EA+PA), Wippe)
  - Reflexion (an Tafel, OHP)
  - Abschluss (z.T. Transfer, Rätsel)
- **Einschätzung Gesamtprojekt:**
  - Alltagstauglichkeit in Schulpraxis
  - Nutzen für inklusiven Mathematikunterricht
    - besonderer Fokus auf lernschwächste Kinder
  - Beobachtungen zu einzelnen Kindern, die während Projekt positiv/negativ aufgefallen sind
- **„Das hat mir gefehlt…“ bzw. „Das würde ich ergänzen…“**
- **„Besonders gelungen finde ich …“**
- **„Das möchte ich dir mit auf den Weg geben…“**

J 2 Reflexionsanregungen Lehrkräfte ausgefüllt

Reflexionsanregungen Mathelehrkraft Klasse 5.1

Zufriedenheit mit der Durchführung insgesamt:

- Klassenunterricht : lief entspannt und war gut
- eng vernetzte Förderschleifen (+ „Experten-Poster“ für den Klassenunterricht): generell gut, schön hätte ich es gefunden, wenn man die Experten hätten noch mehr einbinden können. Es tat den Kindern so gut.
- Doppelbesetzung: finde ich immer gut und sollte in meinen Augen Standard sein
- Zeitaufwand für Einarbeitung / Arbeitsintensität: Bei mir sehr gering, da ich mich voll und ganz auf deine Durchführung verlassen habe. Für mich war diese Einheit sehr entlassend

Anmerkung zu inhaltlichen Aspekten:

- Einheit 1: Einführung (echter Kuchen, Pappkuchen): Kuchen teilen verstehen die Kinder, deshalb finde ich es gut. Die Schwierigkeit liegt darin, dass es schwer ist, wirklich alle Teile gleich groß hinzubekommen. Die Idee, die Einteilung erstmal mit Fäden zu legen, fand ich gut
- Einheit 2.1-2.2: ein Teil von einem Ganzen (Papier falten, ikonische Darstellungen, operative Veränderungen erkunden, Fokus auf Zusammenhänge T-A-G): Das Falten fand ich richtig gut. Die handelnde Ebene haben die Kinder gut verstanden. Die Kinder haben auch immer gezählt, was ich dahin interpretiere, dass die Kinder das Falten (Tätigkeit) gebraucht haben.
- Einheit 2.3-2.4: mehrere Teile von einem Ganzen (ikonische Darstellungen, operative Veränderungen erkunden, Fokus auf Zusammenhänge T-A-G). gut und bei den meisten Kindern ist der Inhaltklar geworden.
- Einheit 3.1-3.2: Ergebnisgleichheit Meinst du die ¾- Stunde? Wenn ja, finde ich ist diese nicht gut gewesen und hat auch zur Verwirrung bei den Kindern geführt.
- Einheit 4.1-4.3: Teile von Mengen (Verteilhandlung am Bruchstreifen, Anteile von ikonischen Punktemengen): Die Verteilung am Bruchstreifen Fand ich richtig gut. Die Kinder waren am zählen, machen, vergleichen .... – tolle Idee
- Einheit 5.1: Äquivalenz (flächige Darstellung, gefaltetes Papier, Bruchpuzzle): war gut und sehr anschaulich: Das gefaltete Papier fand ich gut und auch für die Kinder gut nachvollziehbar. Das Bruchpuzzle war, glaube ich, nicht allen klar.
- Einheit 5.2-5.3: Äquivalenz und Verfeinern / Vergröbern (lineare Darstellung, Streifentafel) Die Idee mit dem Lineal war klasse. Das war für die Kinder gut nachvollziehbar

Einschätzung zu methodischen Aspekten:

- aktiv-entdeckendes-Lernen: Fand ich gut und ich finde, so sollte es auch sein. Allerdings bleibt es meistens wegen der großen Vorbereitung im Alltag ein bisschen auf der Strecke
- Fokussierung auf Zusammenhänge Teil-Anteil-Ganzes + Versprachlichung (Strukturfokussierung), auch ja, der Anteil, da hänge ich immer noch. Die Versprachlichung ist für die Kinder schwer. Vielleicht hätten wir auf deine Anfangssätze mehr hinweisen und immer wieder eingehen müssen. Da bei vielen die Sprache so verarmt ist, bin ich häufig froh, wenn sie die Inhalte irgendwie transportieren können. Einen stärkeren Einblick auf die Versprachlichung wäre bestimmt sinnvoll, auch um die Kinder zu einer „Klarheit“ zu bringen.
- Handlungsorientierung, war viel, gut und hilfreich
- Kooperative Zusammenarbeit in Forscher-Teams: teils – teils. Einige haben richtig toll zusammen gearbeitet und bei anderen war es richtig schwierig

Einschätzung zum Material:

- Gestaltung ABs (‚Starter-Auftrag‘, weiterführende Aufträge mit ansteigendem Schwierigkeitsniveau; Praktikabilität in Schulalltag) Manchmal ziemlich komplex, zumal manche nicht lesen wollen. Die Idee mit den StarterAufgaben fand ich gut. Manchmal war den Kindern und mir nicht klar, welches der auf dem Tisch liegenden AB’s denn das nächste sein sollte. Ansonsten eine gute Form der Differenzierung
- Unterstützungsmaterial (Tipp-Karten, vergrößerte Abbildungen, Lernplakate): Die Tipp-Karten haben viel zuwenig Aufmerksamkeit bekommen. Die Tippkarten waren gut, aber wir haben die Kinder haben sich lieber bei uns Hilfen geholt, weil leichter. Lernplakate waren gut.
- Reihen- und Stundentransparenz: Die Stundentransparenz wurde zwar zu Beginn der Stunde nachgelesen, wir hätten aber viel mehr im Verlauf der Stunde darauf verweisen können als die vielen Kinderfragen zu beantworten
- Papier falten, Memories, Verteilen am Bruchstreifen, Bruchpuzzle, Streifentafel. Insgesamt tolles Material, lediglich mit dem Memory bin ich nicht warm geworden.

Ablauf / Struktur der Unterrichtsstunden:

- gemeinsame Einstiege (z.T. Wdh., Rätsel, gem. handlungsorientierte Erarbeitung; Sitzhalbkreis vor Tafel) Die Einstige waren gut. Die Phasen im Sitzkreis fand ich richtig gut – manchmal hat sich ja auch was weiter gesponnen - . Vor allem die handlungsorientierten Phasen fand ich gut.
- Arbeitsphase (Weggabelung (EA+PA), Wippe) Die Weggabelung hat irgendwie gar nicht geklappt. Die Kinder haben einfach nicht in EA arbeiten wollen, sondern haben sich immer wieder versucht in PA zu „flüchten“. Die meisten sind scheinbar noch so verunsichert, dass sie sich immer wieder Bestätigung holen müssen.
- Reflexion (an Tafel, OHP): teils – teils. Transferreflexionen waren eher schwierig, das reine Ergebnisvergleichen ging mit den meisten Kindern gut (auditiv und visuell)
- Abschluss (z.T. Transfer, Rätsel): eher mühsam

Einschätzung Gesamtprojekt:

- Alltagstauglichkeit in Schulpraxis: Aufgrund des großen Materialbedarfs recht schwierig. Es sei denn das Material liegt griffbereit. Von den Unterrichtstunden finde ich es absolut alltagstauglich.
- Nutzen für inklusiven Mathematikunterricht
- besonderer Fokus auf lernschwächste Kinder. Die Kinder aus der Lernschleife haben unwahrscheinlich profitiert von dieser. Für den Alltag müsste man überlegen, ob man in der Arbeit nicht differenzierte Arbeiten für die „L-Kinder“ macht.

Beobachtungen zu einzelnen Kindern, die während Projekt positiv/negativ aufgefallen sind

- besonders positiv ist mir R. aufgefallen. Die hat so viel an Selbstbewusstsein in diesen Stunden bekommen, das war toll zu sehen. Überhaupt sind die Kinder in der Förderschleife sehr positiv aufgefallen.
- E. hat mich mit ihrer Geduld in Bezug auf H. beeindruckt, P. mit seinen kreativen Ideen.
- F. konnte sich phasenweise gut auf das Projekt einlassen, was für F. bemerkenswert ist.
- M. hat sich stark in den Erarbeitungsphasen mitgearbeitet.
- L. hat toll mitgemacht. Der hat bestimmt die vielen handlungsorientierten Phasen gut getan.
- M. und E. hatten zeitweise mehr mit sich als mit den Aufgaben zu tun. Wenn sie sich aber in die Arbeit eingefunden hatten, waren sie richtig gut.

- Dann kommt so eine Reihe von „Neutralschülern“, die im Vergleich zu anderen Stunden nicht besonders aufgefallen sind S., Ph., M. D., J., K., T.-C., N.
- M. war sicherlich teilweise überfordert.
- Wer mir unangenehm aufgefallen ist, ist Y. Mit seinem „Prinzenverhalten“ hat er sich völlig rausgenommen und hat auch keinerlei „Einlenkversuche“ gezeigt.

„Das hat mir gefehlt…“ bzw. „Das würde ich ergänzen…“ – Fällt mit nichts ein

„Besonders gelungen finde ich …“ die handlungsorientierten Phasen. Ich glaube, dass die meisten Kinder viel aus der Einheit mitgenommen haben, vor allem weil sie handeln konnten und sollten. Leider finden diese Phasen im Schulalltag in diesem großen Umfang nicht statt.

Mir hat auch die Klarheit sowohl der Einheit als auch der Stunden gefallen.

„Das möchte ich dir mit auf den Weg geben…“

Ich wünsche dir, dass du deine Begeisterung für den Unterricht und deine Offenheit für die Kinder bei behältst, auch wenn der Schulalltag manchmal ernüchternd sein kann.
Ich fand es toll, dass du dich auf Ideen und Anregungen einlassen konntest und Kritik gegenüber offen warst.
Es war spannend und interessant für mich
Es hat mir einfach Spaß gemacht mit dir zusammen zuarbeiten – danke!

Reflexionsanregungen Mathelehrkraft Klassen 5.2 und 5.3

Zufriedenheit mit der Durchführung insgesamt:

- Klassenunterricht: Einstiege waren motivierend, Arbeitsphasen z.t. für stärkere nicht motivierend genug
- eng vernetzte Förderschleifen (+ „Experten-Poster“ für den Klassenunterricht): Poster + Vorstellen war super
- Doppelbesetzung: sehr angenehmes, entlastendes Arbeiten
- Zeitaufwand für Einarbeitung / Arbeitsintensität: hoch

Anmerkung zu inhaltlichen Aspekten:

- Einheit 1: Einführung (echter Kuchen, Pappkuchen): sehr motivierend
- Einheit 2.1-2.2: ein Teil von einem Ganzen (Papier falten, ikonische Darstellungen, operative Veränderungen erkunden, Fokus auf Zusammenhänge T-A-G): ggf. ABs verkürzen/ zusammenfassen / Effektivität? Quantität?
- Einheit 2.3-2.4: mehrere Teile von einem Ganzen (ikonische Darstellungen, operative Veränderungen erkunden, Fokus auf Zusammenhänge T-A-G)
- Einheit 3.1-3.2: Ergebnisgleichheit: war für SuS sehr schwierig nachvollziehbar // hat uns alle an unsere Grenzen gebracht ;-)
- Einheit 4.1-4.3: Teile von Mengen (Verteilhandlung am Bruchstreifen, Anteile von ikonischen Punktemengen): super Material / Idee -> Handlungsebene
- Einheit 5.1: Äquivalenz (flächige Darstellung, gefaltetes Papier, Bruchpuzzle): hat mir gut gefallen
- Einheit 5.2-5.3: Äquivalenz und Verfeinern / Vergröbern (lineare Darstellung, Streifentafel): gute, hilfreiche Anbahnung des Erweiterns und Kürzens

Einschätzung zu methodischen Aspekten:

- aktiv-entdeckendes-Lernen: immer gegeben
- Fokussierung auf Zusammenhänge Teil-Anteil-Ganzes + Versprachlichung (Strukturfokussierung): z.T. für die SuS sehr schwierig, da sie ja schon bei alltäglichen Dingen an Ihre Grenzen kommen; evtl. Sätze anbieten/ Zuordnen lassen
- Handlungsorientierung: immer gegeben
- Kooperative Zusammenarbeit in Forscher-Teams: überwiegend gegeben; bei zu großer Heterogenität nicht

Einschätzung zum Material:

- Gestaltung ABs (‚Starter-Auftrag', weiterführende Aufträge mit ansteigendem Schwierigkeitsniveau; Praktikabilität in Schulalltag): für die Schwachen z.T. nicht übersichtlich genug
- Unterstützungsmaterial (Tipp-Karten, vergrößerte Abbildungen, Lernplakate): wurde wenig genutzt, da das Material so umfangreich war, dass die SuS meist nicht auf die Idee gekommen sind andere Hilfsmittel (außer den Lehrer) zu nutzen
- Reihen- und Stundentransparenz: super!
- Papier falten, Memories, Verteilen am Bruchstreifen, Bruchpuzzle, Streifentafel: sehr hilfreich und motivierend

Ablauf / Struktur der Unterrichtsstunden:

- gemeinsame Einstiege (z.T. Wdh., Rätsel, gem. handlungsorientierte Erarbeitung; Sitzhalbkreis vor Tafel)
- Arbeitsphase (Weggabelung (EA+PA), Wippe)
- Reflexion (an Tafel, OHP)
- Abschluss (z.T. Transfer, Rätsel): war oft nach der Arbeitsphase zu viel

Sinnvoller Aufbau; ich würde das Material in den Arbeitsphasen nochmal etwas straffen/ verändern / anders gestalten, damit es für die Schüler sich effektiver anfühlt und sie nicht das Gefühl haben „es ist ja immer das gleiche"

Einschätzung Gesamtprojekt:

- Alltagstauglichkeit in Schulpraxis
    - Für den Alltag und eine Person ist es sehr umfangreich
- Nutzen für inklusiven Mathematikunterricht
    - besonderer Fokus auf lernschwächste Kinder
    - der Klassenunterricht ist für die schwächeren SuS sehr hilfreich gewesen!
- Beobachtungen zu einzelnen Kindern, die während Projekt positiv/negativ aufgefallen sind
    - Die Starken SuS waren z.T. nicht mehr motiviert, da es ihnen gefühlt zu langsam war; dann haben sie angefangen ungenau zu arbeiten;

„Das hat mir gefehlt…“ bzw. „Das würde ich ergänzen…“

Wie gesagt, für meinen Geschmack ist es für den Alltag zu umfangreich, ich würde es, wenn ich es noch mal mache z.T. vom Material her verkürzen und dafür am Ende gerne noch stärker auf die Symbolische Eben kommen, um dann mit „Kürzen“ / „Erweitern“ und „+“ und „ - “ weiter machen zu können

„Besonders gelungen finde ich …“

Die Spiele/ Das jeweilige Einstiegsmaterial

„Das möchte ich dir mit auf den Weg geben…“

!!!ALLES GUTE!!!

Reflexionsanregungen Förderschullehrkraft Klassen 5.2 und 5.3

Zufriedenheit mit der Durchführung insgesamt:

- Klassenunterricht
- War gut, Stunden teilweise zu voll!!
- eng vernetzte Förderschleifen (+ „Experten-Poster“ für den Klassenunterricht)
- war gut, Motivation der Schüler teilweise schwierig
- Doppelbesetzung
- Super, hat Spaß gemacht
- Zeitaufwand für Einarbeitung / Arbeitsintensität
- Einlesen und Eindenken ziemlich zeitaufwendig (zumal für mich fachfremd)

Anmerkung zu inhaltlichen Aspekten:

- Einheit 1: Einführung (echter Kuchen, Pappkuchen)
  sehr motivierend und nachvollziehbar, alle SuS sind ins selbstständige Arbeiten gekommen
- Einheit 2.1-2.2: ein Teil von einem Ganzen (Papier falten, ikonische Darstellungen, operative Veränderungen erkunden, Fokus auf Zusammenhänge T-A-G)
  motivierend, alle SuS sind ins selbstständige Arbeiten gekommen, Zusammenhänge T-A-G für einige schwierig
- Einheit 2.3-2.4: mehrere Teile von einem Ganzen (ikonische Darstellungen, operative Veränderungen erkunden, Fokus auf Zusammenhänge T-A-G)
  motivierend, alle SuS sind ins selbstständige Arbeiten gekommen, Zusammenhänge T-A-G schwierig
- Einheit 3.1-3.2: Ergebnisgleichheit
  Für die meisten SuS nachvollziehbar, einige brauchten Unterstützung
- Einheit 4.1-4.3: Teile von Mengen (Verteilhandlung am Bruchstreifen, Anteile von ikonischen Punktemengen)
  Motivierend und für die meisten nachvollziehbar, selbstständiges Arbeiten bei einigen nur nach Hilfestellung
- Einheit 5.1: Äquivalenz (flächige Darstellung, gefaltetes Papier, Bruchpuzzle)
  Hier haben uns einige SuS nicht mehr folgen können
- Einheit 5.2-5.3: Äquivalenz und Verfeinern / Vergröbern (lineare Darstellung, Streifentafel)
  Für die meisten SuS an der Streifentafel nachvollziehbar, Transfer aber nicht sicher

Einschätzung zu methodischen Aspekten:

- aktiv-entdeckendes-Lernen
  super! Für einige SuS neue und wichtige Erfahrung
- Fokussierung auf Zusammenhänge Teil-Anteil-Ganzes + Versprachlichung (Strukturfokussierung)
  Haben wir leider etwas schleifen lassen…
- Handlungsorientierung
  Hat SuS motiviert und für Thema geöffnet
- Kooperative Zusammenarbeit in Forscher-Teams
  War Wichtig und wertvoll für das soziale Lernen, schwächere SuS haben so wertvolle Erfolgserlebnisse gehabt

Einschätzung zum Material:

- Gestaltung ABs (‚Starter-Auftrag', weiterführende Aufträge mit ansteigendem Schwierigkeitsniveau; Praktikabilität in Schulalltag)
  - gut
- Unterstützungsmaterial (Tipp-Karten, vergrößerte Abbildungen, Lernplakate)
  - Haben wir kaum genutzt, war für uns zu viel Material und eher verwirrend
- Reihen- und Stundentransparenz
  - gut
- Papier falten, Memories, Verteilen am Bruchstreifen, Bruchpuzzle, Streifentafel
  - Konkret und dadurch für die meisten nachvollziehbar, für manche SuS aber auch Überforderung durch Masse des Materials

Ablauf / Struktur der Unterrichtsstunden:

- gemeinsame Einstiege (z.T. Wdh., Rätsel, gem. handlungsorientierte Erarbeitung; Sitzhalbkreis vor Tafel)
  super
- Arbeitsphase (Weggabelung (EA+PA), Wippe)
  super
- Reflexion (an Tafel, OHP)
  Bei uns häufig etwas gestresst oder verkürzt durch fehlende Zeit
- Abschluss (z.T. Transfer, Rätsel)
  motivierend, alle SuS sind ins selbstständige Arbeiten gekommen, Zusammenhänge T-A-G schwierig

Einschätzung Gesamtprojekt:

Alltagstauglichkeit in Schulpraxis

Ich fand es bei uns schwierig, dass wir nur diese 7 Wochen hatten und ausgefallene Stunden sofort nachholen mussten, dadurch war es etwas stressig und am Ende (vor den Zeugnissen) hatten wir teilweise nicht ausreichend Zeit für alle Stunden (weil immer auch noch Klassengeschäfte, Konflikte zu klären waren…)

Nutzen für inklusiven Mathematikunterricht

besonderer Fokus auf lernschwächste Kinder

es war schön, dass alle am selben Inhalt mit den gleichen Materialien arbeiten und lernen konnten, sehr inklusiv!!! Zeitpunkt der Förderschleifen sehr ungünstig, da die SuS so spät am Tag oft nicht mehr konnten, vor allem wenn der Rest der Klasse auf dem Schulhof war…

Beobachtungen zu einzelnen Kindern, die während Projekt positiv/negativ aufgefallen sind

Kinder aus der Förderschleife (vor allem E. und T.) haben sehr profitiert und an Selbstbewusstsein gewonnen. L., G. und K. waren unglaublich motiviert (5.3), ebenso F. und N. (5.2). H.(5.3) war schnell genervt von immer ähnlichen Arbeitsaufträgen und Materialien

„Das hat mir gefehlt…“ bzw. „Das würde ich ergänzen…“

Ohne Einweisung und ständige Begleitung von dir wäre das Projekt für mich nicht durchzuführen gewesen (für mich – fachfremd – Material und Stundenverläufe zu komplex und kompliziert), es war für mich manchmal nicht ganz klar, worauf genau die Aufgaben und Fragestellung hinzielten

„Besonders gelungen finde ich …“

Stundeneinstiege und Erarbeitungsphasen

„Das möchte ich dir mit auf den Weg geben…“

Ich habe einen riesengroßen Respekt vor der intensiven Arbeit, die du in dieses Projekt gesteckt hast und immer noch steckst. Ich fand es im Schulalltag für mich sehr schwierig, mich ausreichend auf die Stunden und Förderschleifen vorzubereiten (man hat ja sonst auch immer ganz schön viel um die Ohren ;))und ich hoffe, dass wir dir trotzdem angemessene Ergebnisse beisteuern konnten!!