

Thomas BAUER, Marburg, Eva MÜLLER-HILL, Rostock & Roland WEBER, Marburg

## **Wie kann man die „zweite Diskontinuität“ produktiv wenden? – Vorschläge mit Blick auf Argumentieren und Beweisen**

### **1. Versuch eines tätigkeitstheoretischen Beschreibungsrahmens**

Wir schlagen eine Beschreibung der „zweiten Diskontinuität“ mit Fokus auf mathematisches Argumentieren und Beweisen mittels Begrifflichkeiten aus der Tätigkeitstheorie vor. Diese nutzen wir auch, um Befunde, Ideen und Ergebnisse zu einer „produktiven Wende“ dieses Phänomens zu formulieren.

Menschliche Tätigkeiten haben im Sinne der Tätigkeitstheorie stets einen „Doppelcharakter“: als Tätigkeiten im Rahmen einer gemeinschaftlichen Praxis, und als individuelles Handeln. Wir schauen zunächst vergleichend auf die *Tätigkeiten des Argumentierens und Beweisens im Rahmen schul- und hochschulmathematischer Praxis*. Dabei unterscheiden wir (z.B. nach Leontjew 1982, Giest 2018) übergeordnetes *Motiv*, *Gegenstände*, und *Handlungsweisen* bzw. *-mittel*. Das Motiv treibt auf einen Gegenstand der Tätigkeit gerichtete, vom Repertoire an Handlungsweisen und verfügbaren Mitteln abhängige Aktivitäten an, deren Ziele das Motiv verschiedentlich realisieren. Im Rahmen hochschulmathematischer Praxis lässt sich das übergeordnete Motiv der „argumentativen Rechtfertigung der deduktiven Ableitbarkeit einer Aussage im Rahmen einer mathematischen Theorie“ formulieren, Gegenstände sind Sätze und Vermutungen, auch Übungsaufgaben als Argumentations- und Beweisanlässe sowie Beweise und Argumente selbst, die in Lehrveranstaltungen, Vorträgen und mathematischen Texten vorkommen. Mögliche Handlungsweisen und -mittel im sogenannten *Context of Discovery* sind plausibles, heuristisches, und generisches Argumentieren, im *Context of Justification* deduktiv gültiges Schließen im Rahmen global geordneter mathematischer Theorien. Für die schulmathematische Praxis formulieren wir „argumentative Rechtfertigung der Wahrheit oder allgemein(er)en Gültigkeit einer Aussage über mathematische Objekte“ als Motiv. Gegenstände sind Vermutungen, Argumente, Begründungen, aber auch implizite, „verdeckte“ Begründungsanlässe sowie ausgewählte Sätze und Beweise. Wir finden hier jeweils situationsabhängig plausibles und beispielbezogenes, aber auch heuristisches und generisches Argumentieren, und (eher informelle) deduktive Ableitungen in lokal geordneten Satzsystemen.

Mit Blick auf *Argumentieren und Beweisen im Rahmen des individuellen Tätigseins* stehen übergeordnete Motive in der Regel un- oder unterbewusst hinter bewusst gesetzten Handlungszielen bei geeigneten Voraussetzungen, die das Motiv in unterschiedlicher Weise realisieren. Damit sind individuelle Sinnkonstruktionen verbunden, die das Verhältnis von übergeordnetem Motiv und den konkreten Handlungszielen ausdrücken.

Vor diesem Hintergrund fassen wir eine mögliche Problematik einer zweiten Diskontinuität als *de facto* wenig vermitteltes, ggf. verzerrtes Erleben von natürlicherweise bestehenden Unterschieden zwischen mathematischen Praxen durch die Studierenden auf. So sind die in hochschul- und schulmathematischer Praxis entwickelten *Sinnkonstruktionen* der Studierenden zum Argumentieren und Beweisen in erster Linie durch das tatsächliche Erleben geprägt: „Sinn wird erzogen.“ (Leontjew 1982). Beispielsweise erleben Studierende an der Hochschule verstärkt das Systematisieren als Sinn des Beweisens, in der Schulpraxis allenfalls die Verifikation. Mögliche *Argumentations- und Beweisgegenstände* sowie geeignete *Handlungsweisen* werden häufig wenig wahrgenommen. In der Schule etwa tauchen Beweisgegenstände nur singulär und Argumentationsgegenstände eher verdeckt auf, generische Argumentationen werden nicht als (vollwertige) Argumentationen (an)erkannt. Die jeweiligen Praxen werden zudem teils unter anderen, dominanteren übergeordneten *Motiven* erlebt, etwa als „Lernpraxen“ unter dem Motiv, gestellte Aufgaben normgerecht zu lösen. In der Schule kann ein als dominant erlebter Anwendungsbezug sinnstiftende Motive des Argumentierens und Beweisens ausblenden.

Eine wichtige Herausforderung für Dozierende und Studierende ist es im Lehramtsstudium demgemäß, die mit Argumentations- und Beweistätigkeiten verbundenen individuellen Ziele und Sinnkonstruktionen, die zu eigen gemachten Gegenstände und das individuell verfügbare Repertoire an Handlungsweisen und -mitteln der Studierenden zu erkennen, geeignet zu erweitern und verknüpfen, und zu kultivieren (vgl. Hoffmann 2008 im allgemeineren Kontext von Erziehung). Die Studierenden sollen die Universität als Angehörige einer hochschulmathematischen Praxis verlassen, die willens und zunehmend in der Lage sind, in ihrer gelebten und gestalteten schulmathematischen Praxis dem Argumentieren und Beweisen in einer Weise Raum und Form zu verleihen, die von der hochschulmathematischen Praxis inspiriert bleibt und die vielfältige Bedeutung dieser Tätigkeiten für die schulmathematische Praxis entfaltet.

## **2. Befunde aus der bisherigen Praxis und Leitideen zur produktiven Wende**

Ein exemplarischer Blick in die „bisherige Praxis“ des Lehramtsstudiums vor dem Hintergrund einer hochschulmathematisch informierten Perspektive auf prinzipielle schulmathematische Möglichkeiten zeigt mögliche Auswirkungen eines *problematischen* Diskontinuitätserlebens, die konkret in einer unterrichtlichen Inszenierung zum Argumentieren und Beweisen von zwei Studierenden am Ende ihres Studiums sichtbar werden und über die wir hier stark zusammenfassend berichten: Das grundlegende, geteilte Motiv von Argumentations- und Beweistätigkeit der hochschulmathematischen Praxis bleibt dabei erkennbar „äußerlich“ und wird nicht mit einem geeigneten Motiv der schulmathematischen Praxis verknüpft. Die konkreten Zielsetzungen und Handlungsweisen im Rahmen von Planung und Umsetzung – als potentielle Indizien für hinreichend vielfältige, reichhaltige und anschlussfähige

Sinnkonstruktion zu Argumentations- und Beweistätigkeit bei den Studierenden – zeigen ein fragmentiertes Bild: Wenige sinnstiftende Ziele mit Blick auf Argumentations- und Beweistätigkeiten werden explizit benannt, Handlungsweisen und -mittel nicht passend begründet, gewählt oder umgesetzt, passende Handlungsmöglichkeiten zum Teil auffallend wenig ausgeschöpft. Es scheint den Studierenden nur schwer zu gelingen, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen hochschul- und schulmathematischer Praxis produktiv für die Entwicklung eigener Sinnkonstruktionen und Handlungsweisen zu nutzen, die dann bei der Gestaltung schulmathematischer Praxis auch wirksam werden. Aus Professionalisierungsperspektive formuliert, zeigt sich bei den Studierenden zwar durchaus wirksames pädagogisches und teilweise auch fachdidaktisches Wissen, während aber gerade fachliches Wissen wenig wirksam zu werden scheint.

Entsprechend sollen Studierende mit Blick auf eine produktive Wende der zweiten Diskontinuität aus unserer Sicht authentische, in Bezug auf Sinn, Ziele, und Handlungsweisen hinreichend vielfältige Handlungserfahrungen zum Argumentieren und Beweisen an Gegenständen auf Schul- und Hochschulniveau machen. Sie sollen sich eigener Sinnkonstruktionen bewusstwerden und Ziele von Argumentations- und Beweistätigkeit in hochschul- und schulmathematischer Praxis reflektieren, auf dieser Basis ihre Sinnkonstruktionen, zu eigen gemachten Gegenstände und ihr Handlungsrepertoire weiterentwickeln und für die Gestaltung schulmathematischer Praxis nutzen lernen.

### **3. Ergebnisse – (wie) wirkt es?**

Die Umsetzung der hier formulierten Ideen zur produktiven Wende ist an der Philipps-Universität Marburg eingebunden in das universitätsweite Projekt *ProPraxis* im Rahmen der *Qualitätsoffensive Lehrerbildung* (ausführliche Beschreibungen des Projekts und der zugehörigen Module in Bauer, Müller-Hill & Weber 2016, 2017, 2020, Bauer, Meyer, Müller-Hill & Weber 2020). Um zu einer Einschätzung der Wirkungen des Umsetzungskonzepts zu gelangen, haben wir Arbeitsergebnisse von Studierenden analysiert und Reflexionstexte ausgewertet, die sie im Rahmen des zugehörigen Moduls „ProfiWerk“ verfasst haben.

Als Beispiel kann der Entwurf einer Studierenden (7. Semester) zu einer unterrichtlichen Inszenierung dienen, die den Gegenstand „Satz des Thales“ als Entdeckungs- und Beweisanlass bearbeitet. In ihrer Umsetzung erkennen wir Wirkungen von ProfiWerk: Die Schüler\*innen werden durchgängig am Erkenntnisprozess beteiligt, der als Dreischritt von Abduktion, Induktion und Deduktion angelegt ist. Über die Verifikation hinaus werden mehrere Beweisfunktionen explizit als Zielsetzungen formuliert und durch Schülerhandeln in mehreren Beweisphasen umgesetzt. Wir erkennen hierin Sinnkonstruktionen, die mit Theorieelementen aus ProfiWerk verknüpft werden können: Der Erkenntnisprozess ist insofern kohärent angelegt, als geometrische Überlegungen aus der Erkundungsphase von den Schüler\*innen in der Beweisphase

weitergeführt werden. Dieses auf Ziele wie u.a. Verstehen-warum gerichtete Handeln deutet an, dass die Studierende ihr Repertoire an Handlungsweisen deutlich erweitert hat. Die Art und Weise, in der die Schüler\*innen an argumentativ entscheidenden Stellen an der Beweisdurchführung beteiligt werden, zeigt, dass die Aktivierung hier keine rein pädagogische, sondern auch eine fachlich und fachdidaktisch motivierte Entscheidung ist.

Die Texte, in denen die Studierenden im Rahmen von ProfiWerk ihr Verständnis vom Begründen und Beweisen in ihrer Rolle als zukünftige Lehrkraft reflektieren, liefern weitere Indizien für zugehörige Sinnkonstruktionen. Sie beschreiben hierin eindrückliche Veränderungen durch die Veranstaltung: Während sie zuvor – ausgehend von eigenen Schulerfahrungen – Argumentieren und Beweisen vielfach als „nicht so wichtig“ für den Mathematik-Unterricht erachtet hatten, erscheint es ihnen nach der Veranstaltung nun „notwendig“ und „sinnvoll“. Sie verknüpfen Argumentieren an Schule und Hochschule und erkennen nun viel mehr Gegenstände und Beweisansätze, als ihnen zunächst bewusst war. Sowohl ihre Auffassung vom Sinn des Beweises hat sich verändert (durch die Befassung mit Beweisfunktionen) als auch ihr Repertoire an Handlungsweisen und -mitteln (z.B. durch die Arbeit mit generischen Beweisen).

Zusammenfassend lässt sich aus unserer Sicht erkennen, dass dieses Umsetzungskonzept – als ein Beispiel – es zu ermöglichen scheint, die mit Argumentations- und Beweistätigkeit verbundenen Ziele, Sinnkonstruktionen, zu eigen gemachten Gegenständen und das Handlungsrepertoire der Studierenden geeignet zu erweitern, zu verknüpfen, und zu kultivieren.

## **Literatur**

- Bauer, Th., Müller-Hill, E., Weber, R. (2016). Fostering subject-driven professional competence of pre-service mathematics teachers – a course conception and first results. Hanse-Kolloquium
- Bauer, Th., Müller-Hill, E., Weber, R. (2017). Analyse und Reflexion von Problemlöseprozessen – Ein Beitrag zur Professionalisierung von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik. Hanse-Kolloquium
- Bauer, Th., Müller-Hill, E., Weber, R. (2020). Diskontinuitäten zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik – eine Ursache für Verstehensschwierigkeiten. In: Nina Meister, Uwe Hericks, Rolf Kreyer, Ralf Laging (Hrsg.), Zur Sache. Die Rolle des Faches in der universitären Lehrerbildung (S. 127-145), Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Bauer, Th., Meyer, C. W., Müller-Hill, E., Weber, R. (2020). Vom Hörsaal bis ins Klassenzimmer – Längsschnittliche fachliche Vernetzungen in der Lehramtsausbildung. Mitteilungen der GDM, Vol. 108, S. 33-38.
- Giest, H. (2018): Handlungstheorie und Unterricht – Probleme und Perspektiven, GDSU-Journal, Heft 8, 9-30.
- Hoffmann, Th. (2008): Gegenstand und Motiv: Vom Nutzen der Tätigkeitsanalyse für eine entwicklungsorientierte Didaktik. In: Ziemer, Kerstin, Hrsg. (2008): Reflexive Didaktik – Annäherungen an eine Schule für alle. Oberhausen: Athena, 173-194.
- Leontjew, A. N. (1982): Tätigkeit, Bewußtsein, Persönlichkeit, In: Studien zur Kritischen Psychologie, Köln 1982, Campus.