

Fehlerhafte Lösungsstrategien bei Bayesianischen Situationen – Zum Einfluss von Visualisierung

1. Bayesianische Situationen

Situationen, in denen eine bedingte Wahrscheinlichkeit im Rückschluss bestimmt werden muss, werden in der mathematikdidaktischen und kognitionspsychologischen Literatur häufig als „Bayesianische Situationen“ bezeichnet, da sie mit Hilfe der Formel von Bayes gelöst werden können. Beispiel:

10% der Bewohner einer Stadt haben sich mit einer neuartigen Krankheit infiziert. Ein medizinischer Test wurde entwickelt, der 80% aller Kranken richtig erkennt (positives Testergebnis) und bei 10% aller Gesunden fälschlicherweise ein positives Testergebnis liefert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person mit positivem Testergebnis tatsächlich krank?

$$P(\text{krank}|+) = \frac{P(+|\text{krank}) \cdot P(\text{krank})}{P(+|\text{krank}) \cdot P(\text{krank}) + P(+|\text{gesund}) \cdot P(\text{gesund})} = \frac{80\% \cdot 10\%}{80\% \cdot 10\% + 10\% \cdot 90\%} \approx 47\%$$

Abb. 1: Beispielaufgabe („+“ bezeichnet hier das Ereignis „positives Testergebnis“)

Für Bayesianische Situationen sind Verständnisschwierigkeiten vielfach belegt, bei Schülerinnen und Schülern (z.B. Binder, Krauss & Bruckmaier, 2015) ebenso wie bei Fachleuten z.B. in Medizin, Jura oder Wirtschaft (z.B. Hoffrage, Lindsey, Hertwig & Gigerenzer, 2000). Kognitive Täuschungen können aber gravierende Folgen haben, so berichten beispielsweise Wegwarth & Gigerenzer (2013) von Fehldiagnosen in der Medizin aufgrund des fehlerhaften Umgangs mit bedingten Wahrscheinlichkeiten.

2. Visualisierung Bayesianischer Situationen

Zwei Strategien sind bekannt, die das Verständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten verbessern und somit helfen können, Fehler zu vermeiden (McDowell & Jacobs, 2017):

- Übersetzung der Wahrscheinlichkeitsangaben in absolute Häufigkeiten in Bezug auf eine imaginäre Stichprobe
- Visualisierung der statistischen Information

Abb. 2 zeigt verschiedene Visualisierungen, in denen die statistische Information zu der Beispielaufgabe (Abb. 1) durch absolute Häufigkeiten dargestellt ist in Bezug auf eine imaginäre Stichprobe von 1000 Personen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich krank ist, wenn sie ein positives Testergebnis bekommt, ergibt sich dann durch eine einfache Anteilsberechnung (siehe Abb. 2, unten).

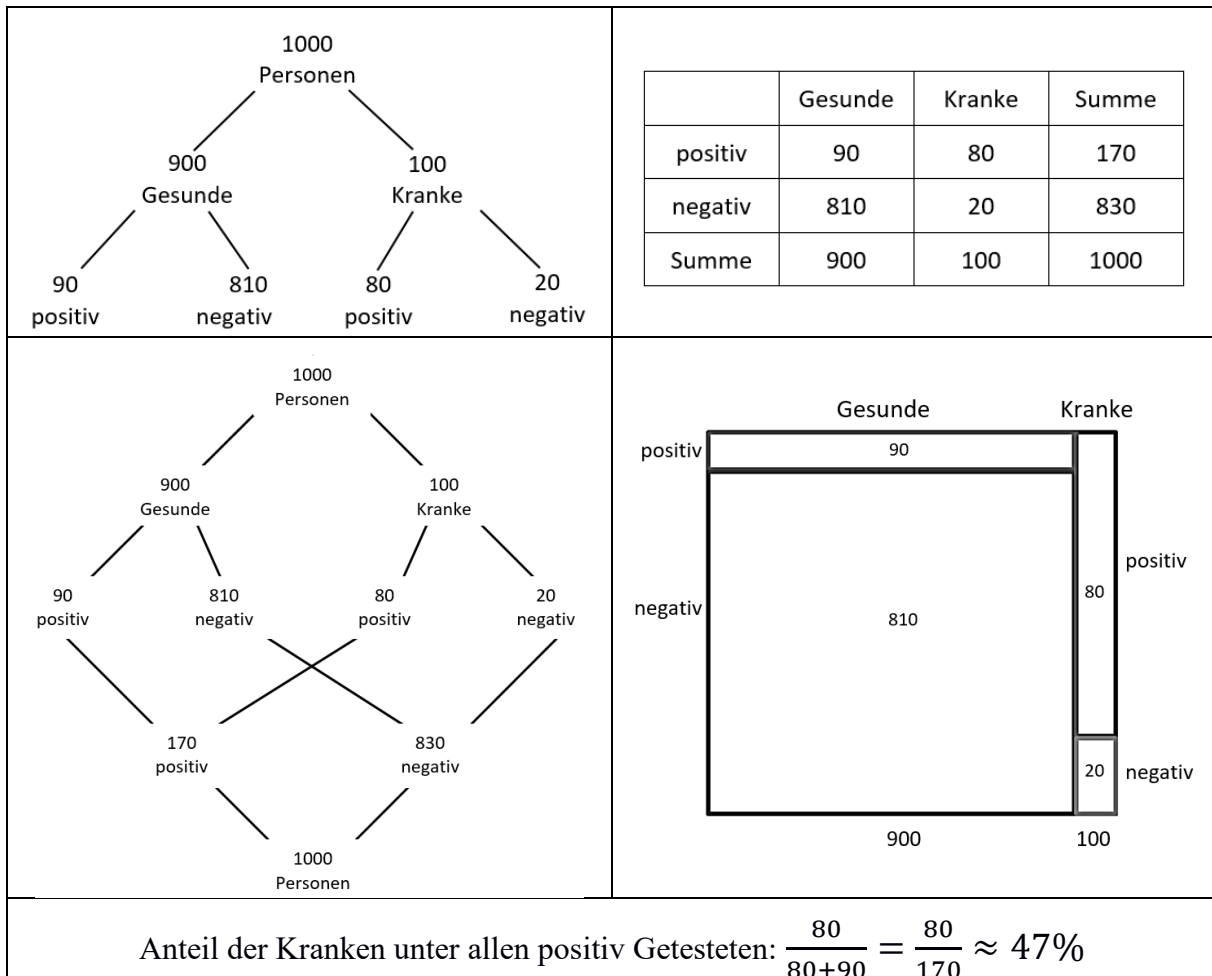


Abb. 2: Visualisierungen der statistischen Information aus der Beispielaufgabe

3. Fehlerhafte Lösungsstrategien bei Bayesianischen Situationen

Für die Lösung von Bayesianischen Situationen sind typische Fehler bekannt (Gigerenzer & Hoffrage, 1995; Zhu & Gigerenzer, 2006). Dabei werden statt der bedingten Wahrscheinlichkeit (in unserem Beispiel $P(krank|+) = \frac{P(krank \cap +)}{P(+)}$) irrtümlicherweise folgende Wahrscheinlichkeiten berechnet:

- $\frac{P(krank)}{P(+)}$ („Pre-Bayes“)
- $P(+)$ (“Evidence only”)
- $P(+|krank)$ (“Representative Thinking”)
- $P(krank \cap +)$ (“Joint occurrence”)
- $P(krank)$ (“Conservatism”)

Wenn die Information wie in Abb. 2 in Form von absoluten Häufigkeiten in einer Visualisierung gegeben ist, dann müssen für die Bestimmung einer Wahrscheinlichkeit die richtigen Zahlen aus der Visualisierung ausgelesen werden und miteinander in Beziehung gesetzt werden. Die Abb. 3 zeigt für die fünf bekannten Fehlerstrategien, welche Teil-Ganzes-Beziehungen dabei

irrtümlicherweise gebildet werden (Das jeweils stark verkleinerte Baumdiagramm ist das gleiche wie in Abb. 2):

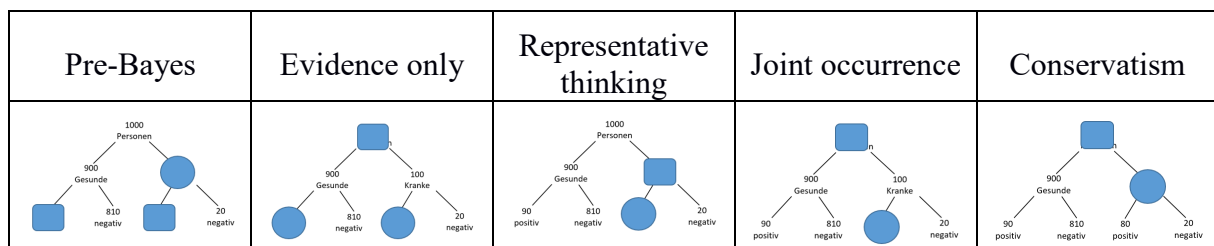


Abb. 3: Teil-Ganzes-Beziehungen der typischen Fehlerstrategien am Beispiel des Baumdiagrammes. Die Grundmengen sind durch Rechtecke, die Teilmengen durch Kreise gekennzeichnet.

4. Forschungsfrage

Die vier in Abb. 2 gezeigten Visualisierungen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer graphischen Eigenschaften und wirken sich auf die Lösungsraten bei Bayesianischen Situationen unterschiedlich günstig aus (Böcherer-Linder & Eichler, 2019). Da auch Teil-Ganzes-Beziehungen in den Visualisierungen unterschiedlich repräsentiert werden und den fehlerhaften Lösungsstrategien unterschiedliche Teil-Ganzes-Beziehungen entsprechen (Abb. 3), liegt die Vermutung nahe, dass die Visualisierungen aus Abb. 2 die typischen Fehler in unterschiedlichem Maße triggern.

5. Untersuchungsmethode

Es wurde ein Paper-Pencil-Test mit vier Bayesianischen Situationen entwickelt, wobei die statistische Information jeweils mit Hilfe von Visualisierungen aus Abb. 2 repräsentiert wurde. 540 Lehramtsstudierende mit Fach Mathematik wurden befragt, wobei 122 einen Test mit Baumdiagrammen, 120 einen mit Doppelbäumen, 146 einen mit Vierfeldertafeln und 152 einen mit Einheitsquadraten erhielten. Die Versuchspersonen wurden aufgefordert, ihr Ergebnis als Bruch aufzuschreiben, was es ermöglichte, über die Zahlen im Zähler und Nenner die entsprechende Teil-Ganzes-Beziehung und somit den vorliegenden Fehlertyp zu identifizieren. Ein Fehler wurde als systematisch eingestuft, wenn er häufiger als beim zufälligen Raten auftrat (für das zugrunde gelegte Modell siehe: Eichler, Böcherer-Linder & Vogel, 2020). Auf diese Weise konnten weitere systematische Fehler identifiziert werden.

6. Ergebnisse

Tatsächlich konnte beobachtet werden, dass die verschiedenen Fehlertypen bei den unterschiedlichen Visualisierungen unterschiedlich häufig auftraten (Abb. 4). Interessant ist, dass bei der Vierfeldertafel der Anteil an „representative thinking“ relativ hoch ist. Für einzelne Fehlertypen und Visualisierungen waren die Unterschiede signifikant. Beispielsweise war der Anteil am Fehler „Pre-Bayes“ beim Baumdiagramm signifikant höher als beim Einheitsquadrat (χ^2 -Test:

$df=1$, $\chi^2=64.09$, $p<.001$). Für eine genauere Analyse, siehe Eichler, Böcherer-Linder & Vogel (2020).

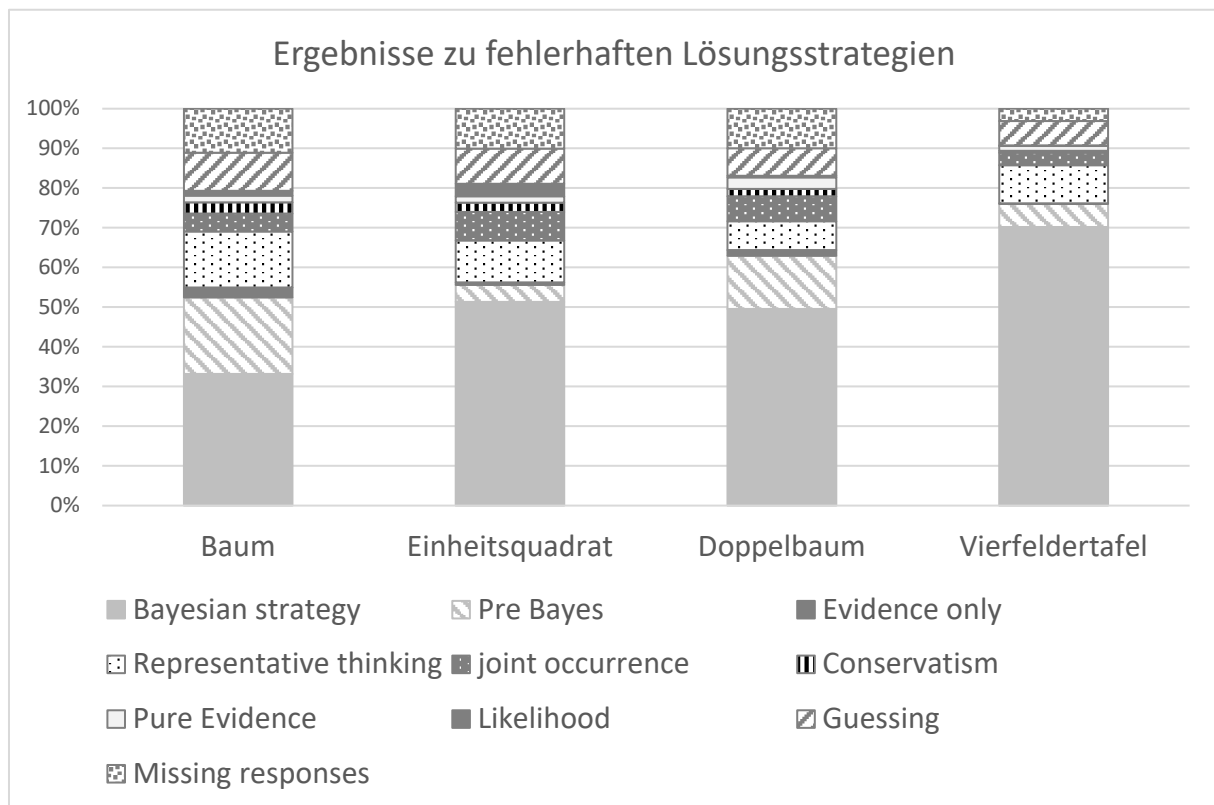


Abb. 4: Fehlerhafte Lösungsstrategien in Abhängigkeit von der Visualisierung

Literatur

- Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information—an empirical study on tree diagrams and 2×2 tables. *Front. Psychol.*6:1186. doi:10.3389/fpsyg.2015.01186
- Böcherer-Linder, K. & Eichler, A. (2019). How to Improve Performance in Bayesian Inference Tasks: A Comparison of Five Visualizations. *Front. Psychol.* 10:267. doi: 10.3389/fpsyg.2019.00267
- Eichler, A., Böcherer-Linder, K. & Vogel, M. (2020) Different visualizations cause different strategies when dealing with Bayesian Situations. *Front. Psychol.* 11:1897. doi: 10.3389/fpsyg.2020.01897
- Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychol. Rev.* 102, 684–704. doi: 10.1037/0033-295X.102.4.684
- Hoffrage, U., Lindsey, S., Hertwig, R., & Gigerenzer, G. (2000). Communicating statistical information. *Science* 290, 2261–2262. doi: 10.1126/science.290.5500.2261
- McDowell, M. & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychol. Bull.* 143, 1273–1312. doi: 10.1037/bul0000126
- Wegwarth, O., & Gigerenzer, G. (2013). Overdiagnosis and overtreatment: evaluation of what physicians tell their patients about screening harms. *JAMA Intern. Med.* 173, 2086–2088. doi: 10.1001/jamainternmed.2013.10363
- Zhu, L. & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve Bayesian problems: the role of representation in mental computation. *Cognition* 98, 287–308. doi: 10.1016/j.cognition.2004.12.003