Susanne DIGEL, Landau & Jürgen ROTH, Landau

Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?!

Zugänge mit Experimenten zu funktionalen Zusammenhängen haben sich als lernförderlich erwiesen (Lichti 2019). Dabei führen die eingesetzten Artefakte (Realmaterialien bzw. Simulationen), im Einklang mit der Theorie der instrumental genesis (Artigue 2002), zu inhaltlich unterschiedlichen Lernfortschritten (Lichti 2019): während Realmaterialien Modellierungsschemata aktivieren, eröffnen Simulationen eine dynamische Sichtweise auf Funktionen. Die Frage, wie beide Artefakte ertragreich kombiniert werden können, ist dabei noch offen. Vorherrschende experimentelle Zugangsweisen setzen einen numerischen Fokus über Wertepaare (Goldenberg et al. 1992) und betonen den Zuordnungsaspekt. Thompson und Carlson (2017) legen jedoch nahe, dass mit einer stärker qualitativen Herangehensweise der schwierige Aspekt der Kovariation besser zugänglich würde. Vor diesem Hintergrund vergleicht die hier vorgestellte Pre-Post-Interventionsstudie einen numerischen und einen qualitativ-orientierten Zugang zu Funktionen mit Realmaterialien und Simulationen. Erste Ergebnisse (N=66) weisen bereits auf einen Vorteil des qualitativen Settings hin.

Funktionales Denken fördern

Die Aspekte funktionalen Denkens (FD) nach Vollrath (1989), Zuordnung, Kovariation, Funktion als Objekt, lassen sich grob mit den Levels des Funktionenkonzept nach Breidenbach et al. (1992) in Übereinstimmung bringen, die auf der Theorie des Action-Process-Object Scheme (APOS) beruhen. Die APOS Level stellen dabei auch Stufen der Konzeptentwicklung dar. Ein elaboriertes Funktionenkonzept zeigt sich nach Dubinsky und Wilson (2013), wenn Lernende je nach mathematischer Situation flexibel auf die Konzepte action, process und object zugreifen können.

Je nachdem, welche Artefakte bei Experimenten zu funktionalen Zusammenhängen eingesetzt werden, ergeben sich unterschiedliche, teils komplementäre Erträge für ein Funktionenkonzept (Lichti 2019). Die Theorie der instrumental genesis liefert hierfür einen Erklärungsansatz, der wichtige Anhaltspunkte für die Kombination beider Artefakte liefert. Sie beschreibt den Entwicklungsprozess, bei dem aus einem Artefakt mithilfe eines Nutzungsschemas ein (mathematisches) Instrument wird. Dabei ist die Genese umso produktiver und damit der Lernprozess leichter, je besser die mathematischen Operationen einer Aufgabe zu den Artefakten passen (Drijvers 2020). Bezogen auf die hier genutzten Artefakte stimuliert der Umgang mit Realmaterialien Modellierungsschemata und fokussiert durch die Aufnahme von Messwerten stärker auf Zustände der Messgrößen. Simulationen beinhalten bereits eine Modellierung der Situation. Die erleichterte Manipulation der zusammenhängenden Größen ermöglicht deren systematische Variation, wodurch

In: Kerstin Hein, Cathleen Heil, Silke Ruwisch & Susanne Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021. Münster: WTM Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959871846.0
Online unter https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/30630

Schemata entwickelt werden, die die Kovariation in den Blick nehmen. Das Multirepräsentationssystem fördert darüber hinaus Schemata zur Nutzung und Verknüpfung der Repräsentationen Situation und Graph.

Numerisches und qualitatives Setting

Für die hier vorgestellte Studie wurden zwei Settings (s. Tabelle 1) entwickelt, die in ihrem Ablauf einen naturwissenschaftlichen Experimentierprozess (Hypothesen bilden, Experimentieren, Analysieren) nachbilden. GeoGebra-Simulationen und Realmaterial werden gezielt kombiniert, um die Entwicklung der vorgenannten Nutzungsschemata anzustoßen. Eingesetzte Kontexte, Simulationen und Arbeitsaufträge finden sich unter http://www.mathe-labor.de/baumhaus-2020.

	Numerisches Setting	**Qualitatives Setting**
H	(R) Schätzen *Modellierungsschema* Hypothesen zu Wertepaaren *Zuordnungsaspekt*	(R) Zahlenfolgen *Modellierungsschema* (S) Exploration der Animation Hypothesen zu Zusammenhang *Kovariationsaspekt*
E	(R) Messungen *Zuordnungsaspekt* (S) Tabelle > Graph > Animation *Repräsentationsschemata* System. Variation: Überprüfung *Kovariationsaspekt*	(S) Animation > Graph *Repräsentationsschemata* System. Variation: Überprüfung, Charakterisierung Änderungsverhalten *Kovariationsaspekt*
A	(S) Analysen Graph *Kovariationsaspekt* (R) Vergleich Partner: Abstraktion *Kovariationsaspekt* Mit Partner: Transfer *Zuordnungsaspekt*	(R) Vergleich Partner: Abstraktion *Kovariationsaspekt* Messungen Partnerkontext *Zuordnungsaspekt* Änderungsverhalten Graph/Tabelle *Kovariationsaspekt*

Tabelle 1: Vergleich der Phasen **H**ypothesen bilden, **E**xperimentieren, **A**nalysieren bezüglich des Einsatzes von Realmaterial (R) und Simulation (S) sowie der intendierten *Schemata* und *Aspekte funktionalen Denkens* (s. auch Digel und Roth 2020)

Das numerische Setting folgt den APOS-Levels der Konzeptentwicklung und beginnt mit dem am leichtesten zugänglichen Aspekt der Zuordnung (action). Das primäre Nutzungsschema dieses Settings setzt stark auf den Zuordnungsaspekt und eine lokale, statische Betrachtung des Zusammenhangs (Wertepaare). Im zweiten Setting wird von Anfang an die Veränderung in den Blick genommen, um ein dynamisches, auf Kovariation gerichtetes Nutzungsschema zu entwickeln. Das Setting agiert dadurch unmittelbar auf dem process-level von APOS.

Studiendesign und Methode

Eine Interventionsstudie (Pre-Post-Design, Klassenstufe 7, drei Doppelstunden, Gymnasium/Gesamtschule, Vierergruppen) vergleicht die beiden Settings hinsichtlich ihrer Wirksamkeit für das funktionale Denken (FD) von Lernenden, um folgende Forschungsfragen zu beantworten:

1. Haben beide Settings (numerisch und qualitativ) einen signifikanten Effekt auf das FD von Lernenden der siebten Jahrgangsstufe?
2. Führt das qualitative Setting zu einem signifikant unterschiedlichen Effekt auf das FD als das numerische Setting?

In einer Pilotstudie wurde die Vergleichbarkeit der beiden Ansätze hinsichtlich Zeitbedarf und Schwierigkeit bestätigt (Digel und Roth 2020). Die Wirksamkeit beider Settings wird mit einem Test zum funktionalen Denken (TFD, 27 Items, dichotom, Rasch-skalierbar, Pilotierung siehe Digel und Roth 2020) evaluiert. In einer mixed ANOVA (between setting; within Zeitpunkt) und post-hoc paarweisen t-Tests werden Unterschiede zwischen beiden Settings untersucht.

Ergebnisse und Diskussion

In diesem Beitrag werden erste quantitative Analysen der bisher erhobenen Daten präsentiert. Der TFD (Rasch-skaliert, N = 132, virtuelle Personen) zeigt gute Reliabilitäten (WLE $Rel_{pre} = .73$ $Rel_{post} = .76$). Die mixed ANOVA (Abb. 1 links) ergibt einen signifikanten Haupteffekt des Zeitpunkts (η_P^2=.42 ***), aber keine signifikanten Interaktionseffekte. Die mixed ANOVA (Abb. 1 rechts) mit einem reduzierten Itemsatz TFD-r (20 Items Kovariation/Objekt, WLE-Rel = .67 / .73) ergibt neben einem signifikanten Haupteffekt des Zeitpunkts (η_P^2=.40 ***) auch einen signifikanten Interaktionseffekt von Zeitpunkt und Setting (η_p^2 =.053 *).

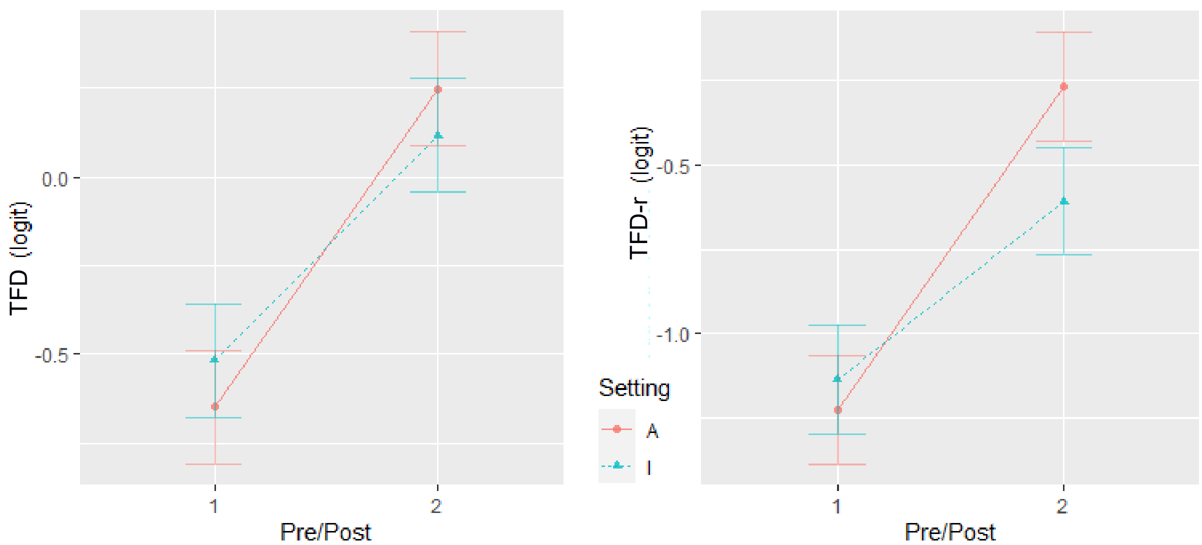

Abb. 1: Zuwachs des TFD (links) und des auf Kovariation/Objekt reduzierten TFD-r (rechts): Vergleich des numerischen (I) und qualitativen (A) Settings im Pre-/Posttest

In den Summenscores der ausgeschlossenen Zuordnungsitems (nicht Rasch-skalierbar) unterscheiden sich beide Settings nicht signifikant (Pre- und Posttest).

Die Ergebnisse zeigen einen signifikanten Zuwachs beim funktionalen Denken mit geringem Effekt für das numerische Setting (TFD d=.32 / TFD-r d=.23) und mittlerem Effekt für das qualitative Setting (TFD d= .49 / TFD-r d=.51). Mit Blick auf die erste Forschungsfrage lässt sich also festhalten, dass beide Settings das funktionale Denken signifikant fördern. Der kleine bis mittlere Interaktionseffekt von Zeitpunkt und Setting (d=0.47) für die Aspekte Kovariation/Objekt (TFD-r) weist darauf hin, dass sich das qualitative Setting für deren Förderung besser eignet (s. zweite Forschungsfrage) als der numerische Ansatz. Da noch keine Daten für eine Kontrollgruppe einbezogen sind und die Stichprobengröße noch deutlich unterhalb des Wertes der Power-Analyse (N=144) liegt, haben diese Schlussfolgerungen vorläufigen Charakter und müssen in weiteren Analysen überprüft werden. Trotzdem erscheint im Abgleich mit den theoretischen Analysen die Annahme gerechtfertigt, dass in beiden Settings Realmaterial und Simulationen wirksam kombiniert wurden. Die Ergebnisse können als erster Hinweis darauf interpretiert werden, dass der Kovariationsaspekt durch qualitative Experimente mit Simulationen und Realmaterial gefördert werden kann und dass dies nicht zu Lasten des Zuordnungsaspekts geschieht.

Literatur

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245–274.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 247–285.

Digel, S. & Roth, J. (2020). Ein qualitativ-experimenteller Zugang zum funktionalen Denken mit dem Fokus auf Kovariation. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 1141–1144). Münster: WTM-Verlag.

Drijvers, P. (2020). Embodied instrumentation: Combining different views on using digital technology in mathematics education. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands*. hal-02436279

Dubinsky, E. & Wilson, R.T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 83–101.

Goldenberg, P., Lewis, P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Hrsg.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (S. 235–260). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern: Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Hrsg.), *Compendium for research in mathematics education* (S. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vollrath, H.-J. (1989). *Funktionales Denken. Journal für Mathematikdidaktik*, *10*(1), 3–37.