Lisa HILKEN, Tübingen & Carla CEDERBAUM, Tübingen

Zugänge zur Krümmung von Kurven und Flächen

Im Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ entwickeln Lehramtsstudierende mathematische Begriffe wie die der Krümmung von ebenen Kurven, Raumkurven oder Flächen. Im Folgenden werden einige dieser von den Studierenden entwickelten Zugänge vorgestellt und mit den in Lehrbüchern üblichen Zugängen verglichen. Es zeigt sich, dass die studentischen Zugänge auf einer Vielfalt von Grundvorstellungen aufbauen, die auch in traditionellen Lehrveranstaltungen genutzt werden könnten.

Das Seminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“

Das Mathematikseminar „Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen“ richtet sich an Lehramtsstudierende ab dem siebten Fachsemester. Themen des Seminars sind unter anderem die Krümmung von ebenen Kurven, Raumkurven und Flächen. Die Studierenden entwickeln auf Basis von Alltagsvorstellungen und Hands-on-Materialien und -Aktivitäten selbst Definitionen dieser Begriffe. Sie arbeiten dabei in Gruppen zusammen.

Jede Themeneinheit besteht aus drei Phasen. In der Einstiegsphase wird von den DozentInnen eine Frage aufgeworfen, beispielsweise: „Was ist Krümmung von ebenen Kurven? Wie kann man sie quantitativ beschreiben?“ Die Studierenden erhalten zur Unterstützung ihres räumlichen Vorstellungsvermögens und zur Ideenfindung Hands-on-Materialien. Beispielsweise können sie mit einem Fahrrad Kurven fahren, um sich des Zusammenhangs zwischen Kurvenradius und Lenkerstellung bewusst zu werden.

In der Arbeitsphase entwickeln die Studierenden aus ihren Ideen präzise mathematische Herleitungen der Zielbegriffe. Dabei werden sie von den DozentInnen unterstützt. Abschließend werden die Ergebnisse gesichert, indem aus jeder Gruppe eine Person die Ergebnisse präsentiert. Zudem schreibt jede Gruppe einen Beitrag für ein Gesamtskript.

Krümmung ebener Kurven

In Lehrbüchern wird die Krümmung von Kurven häufig direkt für Raumkurven eingeführt. Ebene Kurven bilden dann nur einen Spezialfall. Zudem wird die Krümmung häufig anhand von nach Bogenlänge parametrisierten Kurven definiert. Für allgemein parametrisierte Kurven wird anschließend eine Parametertransformation durchgeführt. Veranschaulichungen der Krümmung bleiben oft eher vage und dienen eher der Plausibilisierung der abstrakten Definition als einer Präzisierung eines Alltagsverständnisses von Krümmung (z.B. Bär 2010, S. 41).

Demgegenüber nahmen die Studierenden im Seminar ihr Alltagsverständnis von Krümmung, unterstützt durch Hands-on-Materialien, als Ausgangspunkt, um eine

In: Kerstin Hein, Cathleen Heil, Silke Ruwisch & Susanne Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021. Münster: WTM Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959871846.0
Online unter https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/30630

mathematische Definition zu entwickeln. Die verschiedenen Gruppen wählten dabei zum Teil sehr unterschiedliche Zugänge. Manche Gruppen nutzten Schmiegekreise. Bei diesen Zugängen wird zunächst die Krümmung von Kreisen als Kehrwert ihres Radius‘ festgelegt. Anschließend wird für den untersuchten Punkt der Kurve geometrisch oder analytisch derjenige Kreis bestimmt, der sich dort am besten „anschmiegt“. Andere Gruppen betrachteten den Winkel zwischen benachbarten Tangenten und setzten diesen ins Verhältnis zur Länge des entsprechenden Kurvenabschnitts. Im Limes ergibt sich hierbei die Krümmung. Ein weiterer Zugang nutzte aus, dass gekrümmte Parallelkurven nicht gleich lang sind. Diese und weitere Zugänge sind genauer beschrieben in Hilken (2020).

Die verschiedenen Zugänge basieren auf unterschiedlichen Grundvorstellungen (Bauer, Gromes & Partheil, 2016, Cederbaum & Hilken, im Druck), beispielsweise Krümmung als Kehrwert des Radius‘ des Schmiegekreises oder Krümmung als relative Winkeländerung.

Krümmung von Raumkurven

In Fachbüchern wird die Krümmung von Raumkurven häufig ähnlich eingeführt wie die Krümmung von ebenen Kurven: Auch bei Raumkurven wird die Anschauung eher als Plausibilisierung denn als Grundlage genutzt (z.B. Do Carmo, 1993, S. 14).

Im Seminar gingen die Studierenden wiederum von ihrer Anschauung aus. Ein Zugang der Studierenden war, die Krümmung wie bei ebenen Kurven als relative Winkeländerung zu bestimmen. Dazu wählt man zusätzlich zum untersuchten Punkt einen weiteren Punkt auf der Kurve. An beiden Punkten bestimmt man den Tangentialvektor und den Winkel zwischen ihnen. Der Winkel wird ins Verhältnis zur Länge des entsprechenden Kurvenabschnitts gesetzt. Im Limes ergibt sich die Krümmung der Raumkurve.

Bei einem anderen Zugang wurde die Idee des Schmiegekreises aufgegriffen. Um der bei Raumkurven höheren Kodimension Rechnung zu tragen, wurden anstelle von Kreisen Helices angeschmiegt. Diese Idee entstand im Seminar und wurde im Rahmen einer Zulassungsarbeit von Anna-Maria Schneider ausgearbeitet. Das Bestimmen der Schmiegehelix ist sehr rechenintensiv und die Schmiegehelix ist nicht eindeutig. Sie wird dies erst, wenn auch die dritten Ableitungen der Kurve und der Helix übereinstimmen sollen. Dies ergibt Sinn, da die optimale Schmiegehelix auch die Torsion der Raumkurve erfasst, die auch von der dritten Ableitung abhängt.

Ein dritter Zugang der Studierenden war es, die Krümmung von Raumkurven auf die Krümmung von ebenen Kurven zurückzuführen. Dazu wird die Raumkurve in eine Ebene projiziert, die sich möglichst gut an die Kurve anschmiegt (Schmiegeebene). Diese Ebene kann auf (mindestens) zwei Weisen bestimmt werden: Zum einen kann sie geometrisch mittels eines Grenzwertprozesses festgelegt werden. Dazu werden zusätzlich zum untersuchten Punkt zwei weitere auf der Kurve gewählt und die Vektoren zwischen diesen und dem untersuchten Punkt berechnet. Das Kreuzprodukt der beiden Vektoren wird im Limes zum Normalenvektor der gesuchten Ebene. Eine andere Gruppe wählte jene Ebene für die Projektion, die von der ersten und der zweiten Ableitung der Kurve aufgespannt wird. Diese Ebene zu wählen erscheint sinnvoll, da die Krümmung ebener Kurven von der ersten und zweiten Ableitung abhängt.

Die verschiedenen Zugänge hängen in unterschiedlicher Weise mit den Zugängen zur Krümmung ebener Kurven zusammen. Beim Zugang über die relative Winkeländerung wird die Vorgehensweise von den ebenen Kurven direkt auf Raumkurven übertragen. Die entsprechende Grundvorstellung ist demnach sowohl für ebene Kurven als auch für Raumkurven tragfähig und wird auch von Do Carmo, (1993, S. 14) angesprochen. Beim Zugang über die Schmiegehelix wurde das Vorgehen via Schmiegekreisen von ebenen Kurven verallgemeinert. Die entsprechende Grundvorstellung zur Krümmung ebener Kurven könnte demnach eine Basis für eine Grundvorstellung zur Krümmung von Raumkurven darstellen. Beim dritten Zugang wird die noch unbekannte Krümmung von Raumkurven auf die bekannte Krümmung von ebenen Kurven zurückgeführt. Hierbei wird keine bestimmte Grundvorstellung zur Krümmung ebener Kurven angesprochen.

Inwieweit die anderen Grundvorstellungen zur Krümmung ebener Kurven auch im Fall von Raumkurven tragen, ist noch offen. Grundvorstellungen zur Torsion konnten im Seminar nicht untersucht werden, da dieses Thema von den Studierenden nicht bearbeitet wurde. Empirisch könnte untersucht werden, welche Grund- und Fehlvorstellungen zur Krümmung von ebenen und Raumkurven bei Studierenden vorkommen und wie sie mit der Unterrichtsmethode zusammenhängen. Reicht es beispielsweise aus, eine Grundvorstellung im Rahmen einer „Plausibilisierung“ einer Definition kurz anzusprechen, wie es in vielen Lehrbüchern geschieht, oder sollte zur Bildung tragfähiger Grundvorstellungen mehr Zeit verwendet werden?

Krümmung von Flächen

Für Flächen(stücke) werden in der Literatur zwei Krümmungsbegriffe unterschieden, nämlich die intrinsische Gaußsche Krümmung sowie die extrinsische mittlere Krümmung. Die Gaußsche Krümmung wird wahlweise über die verwandten Konzepte der Gaußschen Normalenabbildung oder die Determinante der Weingartenabbildung eingeführt. Die mittlere Krümmung wird in der Regel als Spur der Weingartenabbildung definiert. Dabei werden die zu untersuchenden Flächen meist parametrisch dargestellt, eine graphische Darstellung findet sich seltener. Beim Thema Flächenkrümmung wird in Lehrbüchern über Anschauung, wenn überhaupt, oft nur in Form von Beispielen gesprochen; eine Plausibilisierung wird oft nicht oder nur für Kurven in der Fläche vorgenommen (z.B. Do Carmo, 1993, S. 136ff).

Im Seminar wurden den Studierenden drei gestaffelte Fragen gestellt: „Was könnte man bei Flächen als Krümmung bezeichnen?“, „Was macht es für die Krümmung für einen Unterschied, ob man die Fläche von außen betrachtet oder ob man sich vorstellt, ein Wesen zu sein, dass in dieser Fläche lebt und nicht fliegen kann?“, „Wie könnte die Krümmung von Kurven, die in der Fläche liegen, mit der Krümmung der Fläche selbst zusammenhängen?“

Insgesamt beschäftigten sich auf die hier vorgestellte Weise vier Gruppen von Studierenden mit der Flächenkrümmung, weitere Gruppen erhielten detailliertere Aufgabenstellungen (Cederbaum & Hilken, im Druck). Drei der vier Gruppen entwickelten den Begriff der mittleren Krümmung, eine entwickelte die Gaußsche Krümmung, alle betrachteten graphisch dargestellte Flächen. Die Zugänge zur mittleren Krümmung erfolgten über die Betrachtung von Raumkurven in der Fläche; eine zentrale Schwierigkeit bestand darin, aus einer Einparameterschar solcher Kurvenkrümmungen eine skalare Krümmung zu extrahieren. Der Zugang zur Graußkrümmung erfolgte über einen Flächeninhaltsvergleich zwischen einem Dreieck auf der Fläche und dem von den Spitzen der Normalenvektoren aufgespannten Dreieck (siehe Cederbaum & Hilken, im Druck).

Die entwickelten Zugänge liegen geometrisch sehr nahe an denen aus der Literatur, weichen aber in ihrer Umsetzung zum Teil deutlich von dieser ab. Die Zugänge zur mittleren Krümmung bauen auf dem zuvor entwickelten Krümmungsbegriff für Raumkurven auf, benötigen aber eine neue Idee, für die erst Grundvorstellungen entwickelt werden mussten (Cederbaum & Hilken, im Druck). Der Zugang zur Gaußkrümmung ist in gewisser Weise eine Übertragung der Idee des Längenvergleichs von Parallelkurven; ob diese aber tatsächlich übertragen wurde oder eine neue Vorstellung entwickelt wurde, bleibt unklar. Ein weiterer Zugang, der im Seminar entdeckt, aber erst in der Zulassungsarbeit von Madeleine Schnell weiterverfolgt wurde, bestand darin, die Idee eines Schmiegekreises mittels Quadriken auf Flächenstücke zu übertragen. Inwieweit die anderen Grundvorstellungen zur Kurvenkrümmung auch im Fall von Flächen tragen, ist noch offen.

Literatur

Bär, Christian (2010). Elementare Differentialgeometrie. Berlin: De Gruyter.

Bauer, Thomas, Wolfgang Gromes und Ulrich Partheil (2016). Mathematik verstehen von verschiedenen Standpunkten aus – Zugänge zum Krümmungsbegriff. In: Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Springer Spektrum, 483–499.

Cederbaum Carla und Hilken, Lisa (im Druck). Elementare Differentialgeometrie zum Anfassen: ein Hands-on-Seminar für Lehramtsstudierende. In: Professionsorientierte Fachwissenschaft – Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium. Hrsg. Viktor Isaev, Andreas Eichler und Frank Loose.

Do Carmo, Manfredo (1993). Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. Brauschweig: Vieweg+Teubner Verlag.

Hilken, Lisa (2020). Praktische und mathematische Zugänge zum Krümmungsbegriff. In: Der Mathematikunterricht 66(6), 28–35.