

Jessica HOTH, Kiel, Aiso HEINZE, Kiel, Dana Farina WEIHER, Lüneburg, Silke RUWISCH, Lüneburg & Hsin-Mei E. HUANG, Taipei (Taiwan)

## **Das Schätzen von Längen in der Grundschule: Welche mathematischen Fähigkeiten sind prädiktiv?**

In vielen Situationen im Alltag müssen Längen geschätzt werden. Gerade in der aktuellen Corona-Pandemie ist das genaue Schätzen der Länge 1,50 m eine sehr bedeutende Fähigkeit für unsere Gesundheit, aber auch für unser gesellschaftliches und soziales Leben. Aufgrund der Bedeutung, die dieser Fähigkeit zukommt, ist es national wie international ein Ziel des Mathematikunterrichts die Fähigkeit des Schätzens zu fördern (z. B. KMK 2004, Ministry of Education, 2010). Bisher liegen allerdings wenig empirische Erkenntnisse dazu vor, wie sich diese Fähigkeit am besten fördern lässt oder auch welche weiteren mathematischen Fähigkeiten den Erwerb der Schätzfähigkeit begünstigen.

### **Das Schätzen von Längen**

Das Schätzen von Größen wird nach Bright (1976) als ein mentaler Prozess verstanden, durch den eine Größenangabe ohne die Verwendung von Messinstrumenten bestimmt wird. Innerhalb dieses mentalen Schätzprozesses werden nach D’Aniello, Castelnovo und Scarpina (2015) auch Wissen und (mathematische) Fähigkeiten relevant, die das Erreichen eines möglichst genauen Schätzergebnisses beeinflussen. Darüber, welches Wissen bzw. welche mathematischen Fähigkeiten in diesem Zusammenhang relevant werden, gibt es einige theoretische Annahmen. Insbesondere die Messfähigkeiten und das Wissen über den Messprozess werden als relevant für das Schätzen von Längen angenommen (Sowder, 1992; Joram, Subrahmanyam & Gelman, 1998). Wissen über die Standardeinheiten wird beispielsweise bedeutsam, wenn eine Länge in cm geschätzt werden soll. Sofern Kinder eine Länge schätzen, indem sie das zu schätzende Objekt mit einem Referenzobjekt gedanklich ausmessen, wird auch Wissen über den Messprozess selbst relevant.

Eine andere Fähigkeit, die als relevant angenommen wird, ist die Raumvorstellung (Weiher & Ruwisch, 2018). Für das Schätzen einer Länge muss ggf. mit einem Stützpunkt mental operiert, das Schätzobjekt in der Vorstellung unterteilt oder ggf. rotiert werden, um es mit einem Stützpunkt oder einem anderen Referenzobjekt vergleichen zu können. Auch die Arithmetikleistung wird als ein möglicher Einflussfaktor auf die Schätzgenauigkeit angenommen (ebd.), da gegebenenfalls Teilabschnitte einer Länge geschätzt werden und die Teillängen anschließend miteinander verrechnet werden müssen.

Neben diesen kognitiven Merkmalen der jeweils schätzenden Person können auch Merkmale der Schätzsituation selbst die ablaufenden Prozesse und das Schätzergebnis beeinflussen. Hier hat sich gezeigt, dass insbesondere die Größe

des Schätzobjekts und seine Berührbarkeit einen bedeutenden Einfluss auf die Schätzergebnisse haben (Hoth, Heinze, Weiher, Ruwisch & Huang, 2020). Strukturanalysen deuten darauf hin, dass drei Dimensionen der Fähigkeit, Längen möglichst genau zu schätzen, unterschieden werden sollten: (1) das Schätzen der Länge von kleinen Schätzobjekten, (2) das Schätzen der Länge von nicht kleinen und berührbaren Schätzobjekten und (3) das Schätzen der Länge von nicht kleinen und nicht berührbaren Schätzobjekten.

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, welche der in der Theorie als relevant angenommenen mathematischen Fähigkeiten tatsächlich Einfluss auf diese drei Dimensionen der Fähigkeit zum Schätzen von Längen hat.

### **Methodisches Herangehen**

Um die angenommenen Zusammenhänge zu prüfen, wurde einerseits die Schätzfähigkeit von Kindern in der dritten und vierten Klasse im Bereich Längen erfasst und andererseits ihre mathematischen Fähigkeiten in den Bereichen Messen, Raumvorstellung und Arithmetik. Außerdem wurde ein zusätzlicher Test mit Aufgaben am Zahlenstrahl eingefügt, da auch hier davon ausgegangen werden kann, dass das Zuordnen von Zahlen am Zahlenstrahl eine – mit der Schätzfähigkeit verwandte – Fähigkeit misst. Die Kinder müssen, wenn sie eine Länge in cm schätzen, einerseits über Wissen über die Einheit cm verfügen, aber auch einen Zahlenwert schätzen, so dass ähnliche Prozesse ablaufen könnten, wie bei der Einordnung von Zahlen am Zahlenstrahl.

Sowohl die Fähigkeit zum Schätzen von Längen als auch die vier genannten mathematischen Fähigkeiten wurden mithilfe von Paper & Pencil Tests erfasst. Der Test zum Schätzen von Längen bestand aus 34 Aufgaben mit verschiedenen Schätzsituationen, unter anderem variiert hinsichtlich der Größe der Schätzobjekte und ihrer Berührbarkeit. Für die Auswertung wurde die Abweichung der Schätzung von der tatsächlichen Länge bewertet (vgl. Hoth et al. 2020).

Der Test zum Messen enthielt insgesamt 19 Aufgaben aus den Bereichen Längen messen und umrechnen, Längen vergleichen, Längen zeichnen und passende Einheiten finden. Das räumliche Vorstellungsvermögen der Kinder wurde mit insgesamt 29 Aufgaben erfasst, die sich inhaltlich mit Drehungen von ebenen Figuren, dem Kippen eines Würfels und Zusammensetzen ebener Figuren beschäftigten. Im Bereich der Arithmetik lösten die Kinder jeweils acht Aufgaben zu jeder der vier Grundrechenarten im Zahlenraum bis 1000 und es wurden insgesamt zehn Aufgaben am Zahlenstrahl eingesetzt, bei denen die Kinder die passenden Zahlen an einer vorgegebenen Stelle zuordnen sollten. Auch hier lagen alle Aufgaben im Zahlenraum von 20 bis 1000.

Insgesamt haben 919 Kinder der dritten und vierten Klasse in Deutschland und in Taiwan die Tests bearbeitet, 449 Kinder in Taiwan (216 Kinder der dritten Klasse) und 470 Kinder in Deutschland (230 Kinder der dritten Klasse).

Die Daten aller Kinder wurden auf der Basis der Item-Response-Theory skaliert, wobei die Fähigkeit zum Schätzen von Längen dreidimensional modelliert wurde (Dimension 1: kleine Schätzobjekte; Dimension 2: nicht kleine und berührbare Schätzobjekte; Dimension 3: nicht kleine und nicht berührbare Schätzobjekte), alle anderen mathematischen Fähigkeiten eindimensional (EAP-PV Rel.  $.66 \leq x \leq .79$ ). Im Rahmen dieser Skalierung wurden die Itemparameter für alle Aufgaben geschätzt.

Anschließend wurden alle Variablen als Hintergrundmodell genutzt, um für jedes der 919 Kinder und für jede der erfassten Fähigkeiten auf der Basis der zuvor geschätzten Itemparameter fünf plausible values zu bestimmen. Um anschließend die Zusammenhänge zwischen den drei Dimensionen der Fähigkeit zum Schätzen von Längen und den vier gemessenen mathematischen Fähigkeiten zu prüfen, wurde eine multiple Regression mit den Kontrollvariablen Land, Klassenstufe und Geschlecht durchgeführt.

## **Ergebnisse**

In der multiplen Regression hatten zwei Prädiktoren signifikanten Einfluss auf alle drei Dimensionen der Schätzfähigkeit: Die Messfähigkeiten der Kinder und ihre Fähigkeit, die Aufgaben am Zahlenstrahl zu lösen. Das räumliche Vorstellungsvermögen war nur für die beiden Dimensionen der Schätzfähigkeit relevant, in denen nicht kleine Schätzobjekte auftraten. Die arithmetischen Fähigkeiten der Kinder konnten keine substantziellen Anteile in der Varianz der drei Dimensionen erklären.

Die Varianzaufklärung durch alle vier Prädiktoren lag zwischen 24,4% (Dimension nicht klein und berührbar) und 38,2 % (Dimension klein).

## **Diskussion**

Die Ergebnisse legen nahe, dass die Messfähigkeit der Kinder wesentlichen Einfluss auf ihre Fähigkeit hat, Längen möglichst genau zu schätzen, ebenso wie ihre Fähigkeit, Zahlen am Zahlenstrahl einzuordnen. Dieses Ergebnis deckt sich mit den theoretischen Vorüberlegungen. Die Kinder brauchen Wissen über die Standardeinheiten, wenn sie eine Länge in mm, cm oder m schätzen sollen. Auch das Wissen über den Messprozess an sich kann im Schätzprozess bedeutsam sein. Um auch einen Zahlenwert für die Schätzung anzugeben, werden Fähigkeiten relevant, die auch bei der Einordnung von Zahlen am Zahlenstrahl zum Tragen kommen. Entsprechend sind diese beiden Fähigkeiten für die Schätzungen der Längen von Objekten in allen drei Dimensionen relevant. Das räumliche Vorstellungsvermögen wird nur in den beiden Dimensionen mit nicht kleinen Schätzobjekten bedeutsam. Offensichtlich wählen die Kinder zum Schätzen dieser Längen ein Herangehen, das auch ihr räumliches Vorstellungsvermögen erfordert. Dies kann beispielsweise beinhalten, dass ein Schätzobjekt gedanklich in verschiedene Abschnitte unterteilt wird, eines davon in der Länge geschätzt wird und die anderen mit dem ersten Teilabschnitt verglichen werden. Dies

erfordert dann auch ein mentales Operieren mit den einzelnen Längenabschnitten. Kleine Schätzobjekte sind eher als Ganzes erfassbar, so dass hier kein mentales Drehen oder Kippen erforderlich wird.

Die arithmetischen Fähigkeiten der Kinder haben hingegen – abweichend von den theoretischen Annahmen – auf keine der drei Dimensionen der Schätzfähigkeit einen Einfluss. Dies kann auch darin begründet sein, dass starke Deckeneffekte bei dem in der Studie eingesetzten Arithmetiktest bei den taiwanesischen Schülerinnen und Schülern auftraten. Gegebenenfalls würden sich mit einem stärker nach oben differenzierenden Test andere Zusammenhänge zeigen.

Die nicht sehr große Varianzaufklärung ( $\leq 38,2\%$ ) durch die vier ausgewählten mathematischen Fähigkeiten deutet darauf hin, dass die Fähigkeit, Längen möglichst genau zu schätzen, als eigenständige Fähigkeit anzusehen ist und nicht beispielsweise durch einen Unterricht zum Messen „miterworben“ wird. Dies bedeutet aber auch, dass das Schätzen von Längen im Mathematikunterricht als ein eigener Lerngegenstand thematisiert werden sollte.

## Literatur

- Bright, G. W. (1976). Estimating as part of learning to measure. In D. Nelson & R. E. Reys (Eds.), *Measurement in school mathematics: 1976 yearbook* (pp. 87–104). Reston, VA: NCTM.
- D’Aniello, G. E., Castelnuovo, G., & Scarpina, F. (2015). Could cognitive estimation ability be a measure of cognitive reserve? *Frontiers in Psychology*, 6, 1–4.
- Hoth, J., Heinze, A., Weiher, D. F., Ruwisch, S. & Huang, H.-M.-E. (2020). Ob lang oder kurz, berührbar oder nicht: Ist die Längenschätzkompetenz eindimensional?. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020: 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Siller, H-S., Weigel, W. Wörler, J. F. (Hrsg.). Münster: WTM, Band 3. S.1269-1272.
- Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research*, 68, 413–449.
- KMK - Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Primarstufe: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004*. Neuwied: Luchterhand.
- Ministry of Education. (2010). *Grade 1-9 curriculum for junior high school and elementary school: Mathematics (3rd ed.)*. Taipei, Taiwan. (In Chinese).
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–389). New York: Macmillan.
- Weiher, D. F. & Ruwisch, S. (2018). Kognitives Schätzen aus Sicht der Mathematikdidaktik: Schätzen von visuell erfassbaren Größen und dazu erforderliche Fähigkeiten. *mathematica didactica*, 41(1), 77 - 103.