

Solveig JENSEN, Osnabrück, Hedwig GASTEIGER, Osnabrück & Julia BRUNS, Paderborn

Stellenwertverständnis: Verständnis von Stellenwertprinzip und Bündelungsprinzip als separate Konstrukte

Stellenwertverständnis ist schon in der Grundschule u.a. wichtig für die Rechenkompetenz, z.B. beim Umgang mit Stellenübergängen und der Anwendung von Rechenstrategien (Benz, 2005). Verschiedene Studien zeigen Handlungsbedarf bzgl. der Unterstützung der Entwicklung von Stellenwertverständnis (z.B. Herzog et al., 2019). Unklar ist, wie eine solche Unterstützung aussehen kann. Das liegt auch darin begründet, dass Stellenwertverständnis in verschiedenen Studien zwar theoretisch ähnlich konzeptualisiert, aber empirisch unterschiedlich erfasst wird. Die theoretischen Konzeptionen lassen sich auf zwei Konzepte zurückführen, die als „Bündelungs-“ und Stellenwertprinzip“ (Padberg & Büchter, 2019) bezeichnet werden. Letzteres sagt aus, dass jede Ziffer zwei Informationen transportiert: Die Position gibt an, für welche Bündelungseinheit die Ziffer steht, der Wert der Ziffer die Anzahl der Bündelungseinheiten. Das Bündelungsprinzip beschreibt, dass fortwährend die gleiche Anzahl an Einheiten gebündelt wird (zehn Einheiten im Dezimalsystem). Der Beitrag untersucht, inwiefern sich die zwei theoretisch formulierten Prinzipien auch empirisch als zwei Konstrukte zeigen.

Empirische Erhebung von Stellenwertverständnis

Im Folgenden werden exemplarisch die Herangehensweisen einiger Studien vor dem Hintergrund der zwei Prinzipien analysiert. Einige Autoren wie Fuson et al. (1997) sowie Cobb und Wheatley (1988) beobachten Zählprozesse und das Lösungsverhalten von Kindern bei mehrstelligen Additionen und Subtraktionen. Dabei erachten sie als entscheidend, dass der Zusammenhang zwischen den Bündelungseinheiten genutzt werden kann (z.B. zehn Einer als einen Zehner zählen), sodass sie das Bündelungsprinzip betonen. Das Verständnis der Stellenwertschreibweise rückt dabei in den Hintergrund. Bei anderen Studien werden Übersetzungsprozesse zwischen Zahldarstellungen betrachtet (Ross, 1989; Fromme, 2017). Ross (1989) befragte Kinder zur Bedeutung der Ziffern in einer zweistelligen Dezimalzahldarstellung im Zusammenhang mit verschiedenen gebündelten Anzahlen und unterscheidet, ob die Kinder die entsprechenden dezimalen Bündelungseinheiten zuordnen. Sie untersucht somit in erster Linie das Verständnis des Stellenwertprinzips. Obwohl Fromme (2017) in einer ganzen Bandbreite von Aufgaben auch Übersetzungsprozesse untersucht, unterstreicht sie letztendlich die Bedeutung des Bündelungsprinzips: Beispielsweise unterscheidet sie bei der Zuordnung von Zahlwörtern/-zeichen zu Anzahlen am Rechenrahmen, ob Kinder Zehnerstrukturen zur Anzahlbestimmung nutzen oder die Objekte einzeln abzählen. Hier liegt der Schwerpunkt auf der Verwendung der Zehnerstruktur analog zur Konzeptualisierung in Fuson (1990), Fuson et al. (1997) und Cobb und Wheatley (1988). Herzog et al. (2019) erstellen u.a. auf der Basis vorhandener

Modelle ein eigenes Kompetenzmodell, das sie empirisch durch eine Rasch-Analyse validieren. Das Stellenwertprinzip nehmen sie nur durch Zuordnungsaufgaben zwischen Stellen und ihren Namen auf, die schon auf dem untersten Niveau 1 angesiedelt werden. Das Bündelungsprinzip scheint in diesem Modell v.a. für die höheren Niveaus 2 bis 4 relevant.

Insgesamt zeigt die Analyse der Konzeptualisierungen, dass die zwei Prinzipien in der Beschreibung von vollständig ausgeprägtem Stellenwertverständnis nicht separat erfasst werden. Es stellt sich die Frage, ob die zwei Prinzipien so eng verwoben sind, dass es ausreicht, nur das Verständnis *eines* der Prinzipien zu testen, um das Gesamtkonstrukt „Stellenwertverständnis“ zu erfassen, oder ob nicht beide Prinzipien separate Konstrukte sind. Diese müssten dann dementsprechend beide explizit erfasst und in Kompetenzmodellen auch auf allen Niveaus beachtet werden. Erkenntnisse darüber könnten bei der Diagnose spezifischer Schwierigkeiten sowie der gezielten Förderung unterstützen. Die vorliegende Studie untersucht deshalb folgende Forschungsfragen:

- Zeigen sich die beiden Prinzipien „Bündelungsprinzip“ und „Stellenwertprinzip“ empirisch als zwei separate Konstrukte?
- Wenn sich zeigt, dass es sich um zwei Konstrukte handelt: In welchem Ausmaß tragen die zwei Prinzipien jeweils zu Fehlern von Kindern bei?

Methoden

100 Kindern aus 7 dritten Klassen in 3 Grundschulen wurden 12 Aufgaben vorgelegt, in denen das Stellenwertprinzip (SP) und/oder das Bündelungsprinzip (BP) beachtet werden müssen:

- Zwei Aufgaben zur Übersetzung einer Darstellung mit Mehrsystemblöcken in Zahlzeichen; eine Darstellung nicht-kanonisch, aber die Bündelungseinheiten der Stellenwertdarstellung entsprechend sortiert (BP), eine nicht sortiert (SP).
- Sieben Aufgaben zur Übersetzung von Stufen- in Dezimalschreibweise, z.B. $7E\ 1H\ 4Z = \underline{\quad}$ (SP), $4H\ 15Z\ 6E = \underline{\quad}$ (BP), $7H\ 3E\ 19Z = \underline{\quad}$ (SP und BP).
- Eine Aufgabe zur Beschreibung der Materialhandlung mit Mehrsystemblöcken bei $92 - 8$ (BP).
- Zwei Aufgaben mit Aufforderung zum Wegnehmen von Zehnern: 1 Zehner von 305, 14 Zehner von 168) (beide SP und BP).

Für die Auswertung erfolgte zunächst eine dichotome richtig-/falsch-Kodierung. Die Lösungsraten der Aufgaben wurden bestimmt und auf dieser Basis zwei Aufgaben aus der weiteren Analyse ausgeschlossen: (1) Bei der Aufgabe zum Übersetzen der Darstellung mit Mehrsystemblöcken mit unsortiertem Material in Dezimalschreibweise ließen die wenigen (neun) falschen Bearbeitungen auf Zählfehler statt Verständnisprobleme schließen. (2) Die Aufgabe zur Beschreibung der Materialhandlung wurde vom Großteil der Kinder mit einer Hilfsaufgabe (ein

Zehner weg, zwei Einer dazu) statt der intendierten Beschreibung einer Entbündelung bearbeitet. Damit bietet die Aufgabe keinen Erkenntnisgewinn zum Verständnis des Bündelungsprinzips. Somit bleiben zehn Aufgaben, von denen jeweils drei nur das Beachten des Stellenwert- bzw. des Bündelungsprinzips erfordern. In den übrigen vier Aufgaben müssen beide Prinzipien angewendet werden. Um zu prüfen, inwieweit die Lösungshäufigkeiten die beiden Prinzipien als unabhängige Konstrukte bestätigen, wird eine konfirmatorische Faktorenanalyse über die sechs Aufgaben durchgeführt, von denen drei nur das Bündelungs- und drei das Stellenwertprinzip aufgreifen. Für das eindimensionale Modell ist die latente Variable Stellenwertverständnis, für das zweidimensionale Modell werden die zwei Prinzipien als zwei latente Variablen angenommen. Um in die Analyse auch die Aufgaben zu beiden Prinzipien einbeziehen zu können, wird eine Reliabilitätsanalyse über jeweils alle sieben Aufgaben durchgeführt, in denen jeweils das Bündelungs- und/oder das Stellenwertprinzip beachtet werden müssen.

Um bei den vier in beiden Skalen auftretenden Aufgaben einen Eindruck zu erhalten, inwiefern sich Schwierigkeiten auf eines der Prinzipien zurückführen lassen, wurden die Fehler der Kinder in den Aufgaben zu beiden Prinzipien qualitativ untersucht. Zugeordnet wurde jeweils, welches Prinzip verletzt wurde (Bündelungs- oder Stellenwertprinzip, Nennung beider Prinzipien möglich). Beispielsweise spricht bei 7H 3E 19Z = ____ die Lösung 7193 für eine Beachtung des Stellenwertprinzips, aber Missachtung des Bündelungsprinzips (Bündelungsfehler), die Lösung 749 zeigt einen Stellenwertfehler, bei 7319 werden beide Prinzipien verletzt. Bei den Aufgaben, die jeweils nur ein Prinzip aufgreifen, wurde eine falsche Lösung jeweils automatisch als Bündelungs-/Stellenwertfehler gezählt (Ausnahme: offensichtliche Zählfehler bei den Mehrsystemblöcken). Die Anzahlen der beiden Fehlertypen pro Kind wurden gegenübergestellt.

Ergebnisse

Der Mittelwert der Lösungsrate beträgt 60% (6 Aufgaben von 10, $SD = 2.78$). Die konfirmatorischen Faktorenanalysen zeigen, dass das eindimensionale Modell nicht gut zu den Daten passt ($\chi^2(9) = 53.067$, $p = .000$, $RMSEA = .221$ [0.166, 0.281], $CFI = .645$), während das zweidimensionale Modell keinen signifikanten Unterschied zu den Daten zeigt und die Daten relativ gut abbildet ($\chi^2(8) = 11.766$, $p = .162$, $RMSEA = .069$ [0.000, 0.146], $CFI = .970$). Auch die Indikatoren zum Vergleich der beiden Modelle weisen auf eine bessere Passung des zweidimensionalen Modells hin (eindimensionales Modell: $AIC: 706.388$, $adjBIC 696.433$, zum Vergleich zweidimensionales Modell: $AIC 667.087$, $adjBIC 656.579$). Die Reliabilitätsanalysen ergeben ein Cronbachs α von .749 für die Skala „Stellenwertprinzip“ und ein Cronbachs α von .783 für die Skala „Bündelungsprinzip“. Somit scheint eine Analyse der Fehler je nach verletztem Prinzip sinnvoll. Die Lösungsrate in jeweils den drei Aufgaben, in denen eines der beiden Prinzipien beachtet werden musste, ist mit 68,33% exakt gleich. In den vier Aufgaben, in denen beide Prinzipien beachtet werden mussten, ist die Lösungsrate 47,5%. Der

Vergleich der Anzahl der Fehlerarten pro Kind zeigt, dass 33 Kinder mehr Bündelungs- als Stellenwertfehler machen (im Mittel 2,67 Fehler mehr) und 44 Kinder mehr Stellenwert- als Bündelungsfehler (im Mittel 2,05 Fehler mehr).

Diskussion

Zunächst sollte die vorliegende Studie klären, inwiefern sich das Bündelungsprinzip und das Stellenwertprinzip empirisch als zwei Konstrukte zeigen. Die Ergebnisse der konfirmatorischen Faktorenanalyse sprechen für ein zweidimensionales Modell. Deshalb schließt sich die zweite Forschungsfrage an, zu welchem Ausmaß die zwei Prinzipien jeweils zu den Fehlern der Kinder beitragen. Die Lösungsraten der Aufgaben, die jeweils nur eines der Prinzipien testen, sind mit 68.33% genau gleich, sodass keines der Prinzipien fehleranfälliger erscheint. Die Aufgaben, die beide Prinzipien aufgreifen, werden nur zu 47.5% gelöst und scheinen somit fehleranfälliger zu sein. Die Fehleranalyse zeigt, dass einige Kinder deutlich mehr Schwierigkeiten bei einem der Prinzipien als beim anderen. Insofern scheint es wichtig zu sein, beide Prinzipien zu beachten, wenn individuelle Schwierigkeiten diagnostiziert und adressiert werden sollen. Dass bei einer fundierten Diagnose Handlungsbedarf besteht, unterstreicht auch die eher niedrige Lösungsrate von 60%, was bisherige Studienergebnisse bestätigt (z.B. Herzog et al., 2019; Fuson et al., 1997). Zudem können die Ergebnisse der Studie als empirische Fundierung für weitere Ausdifferenzierungen der vorhandenen Modelle von Stellenwertverständnis dienen, z.B. durch die Integration des Verständnisses beider Prinzipien auf den verschiedenen Verständnisstufen.

Literatur

- Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Hildesheim u.a.: Franzbecker.
- Büchter, A. & Padberg, F. (2019). *Einführung in die Arithmetik: Primarstufe und Sekundarstufe*. 3., überarb. u. erw. Auflage. Berlin u.a.: Springer.
- Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children's initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10(3), 1–28.
- Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen*. Wiesbaden: Springer.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. & Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130–162.
- Fuson, K.C. (1990). Conceptual Structures for Multiunit Numbers: Implications for Learning and Teaching Multidigit Addition, Subtraction, and Place Value. *Cognition and Instruction*, 7(4), 343–403.
- Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2019). Development of resilient place value concepts. In A. Fritz, V. Haase & P. Räsänen (Eds.). *The International Handbook of Mathematical Learning Difficulties* (pp. 561-580). New York: Springer.
- Ross, S. H. (1989). Wholes, and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 47–51.