Elisa LANKEIT, Paderborn & Rolf BIEHLER, Paderborn

Stoffdidaktische Analysen zur Ableitung im Ein- und Mehrdimensionalen

Differenzierbarkeit und Ableitungen sind wichtige Themen in der Schule und Hochschule. Die $\mathbb{R}^1$-Ableitung wurde bereits von anderen Autoren, vor allem zur Aufbereitung für den Schulunterricht, stoffdidaktisch analysiert. Im $\mathbb{R}^n$ gibt es verschiedene, nicht äquivalente Differenzierbarkeitskonzepte: das totale Differential, die partielle Ableitung, die Richtungsableitung und den Gradienten. Diese können jeweils einzeln für sich sowie im Zusammenspiel miteinander betrachtet werden. Ausgehend von Modellen zur Ableitung im Eindimensionalen, die vor allem aus dem Schulkontext stammen, entwickeln wir ein Modell zur Einordnung der Ableitung im Hochschulkontext für den Fall eines ein- oder mehrdimensionalen Definitionsbereichs. Beispielhaft wird in diesem Artikel ein Einblick in die stoffdidaktische Analyse des totalen Differentials gegeben.

Hußmann und Prediger (2016) unterscheiden vier Ebenen der stoffdidaktischen Analyse: die formale Ebene, bei der es um die Behandlung mathematischer Objekte und Phänomene in ihrer formalen Präsentation und logischen Struktur geht, die semantische Ebene, bei der Sinn und Bedeutung des mathematischen Themas sowie epistemologische Aspekte betrachtet werden, was auch Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) einschließt, die konkrete Ebene, bei der es um die Behandlung eines Lehr-Lern-Szenarios geht, und die empirische Ebene zur Behandlung kognitiver und sozialer Aspekte des Denkens von Lernenden. Unsere hier dargestellten Überlegungen lassen sich auf der formalen und semantischen Ebene verorten.

Vorstellung des Modells

Im hochschulmathematischen Kontext nimmt insbesondere die Definition eines Konzepts eine besondere Rolle ein (Alcock & Simpson 2016). Daher wird diese in unserem Modell für die Hochschuldidaktik in besonderem Maße berücksichtigt. Angelehnt an das Konzept der Aspekte und Grundvorstellungen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Weigand & Ulm, 2016) und die Unterscheidung von Concept Definition und Concept Image (Tall & Vinner, 1981) formulieren wir für jedes Differenzierbarkeitskonzept auf der formalen Ebene *Aspekte*. Dabei handelt es sich um äquivalente, aber konzeptuell verschiedene Definitionen dieses Konzepts.

Die Betrachtung verschiedener Modelle zur Verortung der $\mathbb{R}^1$-Ableitung (Greefrath et al., 2016; Kendal & Stacey, 2003, Zandieh, 2000) führt uns für die Analyse auf semantischer Ebene auf die Unterscheidung verschiedener Deutungskontexte, die für die Betrachtung der Bedeutung von Differenzierbarkeitskonzepten eine Rolle spielen: den analytisch-algebraischen Kontext, den approximativen Kontext, den geometrischen Kontext und die

In: Kerstin Hein, Cathleen Heil, Silke Ruwisch & Susanne Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021. Münster: WTM Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959871846.0
Online unter https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/30630

Deutung im realweltlichen Modell. Der geometrische Deutungskontext wird weiterhin unterteilt in den abstrakt-geometrischen, bei dem es um Deutungen am Funktionsgraphen geht, und den real-geometrischen, bei dem die abstrakt-geometrischen Deutungen auf die Vorstellungen von hügeligen Landschaften in der realen Welt übertragen werden. Im analytisch-algebraische Deutungskontext werden dabei innermathematische Eigenschaften der Definition und des Konzepts behandelt, die nicht zu anderen Deutungskontexten gehören.
„Approximativ“ bedeutet, dass die Ableitung für eine Näherung genutzt wird oder Abschätzungen verwendet werden. Hierbei kann zum einen die Ableitung lokal als lineare Näherung für die Differenz der Funktionswerte verstanden werden und zum anderen die Ableitung für eine lokale affin-lineare Approximation der Funktion genutzt werden. Zum geometrischen Deutungskontext zählen wir sämtliche Deutungen im kartesischen Koordinatensystem, in Bezug auf Funktionsgraphen sowie die Verwendung von Wörtern wie „Tangente“ oder auch – im Mehrdimensionalen daran angelehnt – Tangential(hyper)ebene dazu, sowie alle „klassisch“ geometrischen Begriffe wie Geraden und Ebenen. Die Deutung im „realweltlichen Modell“ beinhaltet die modellhafte Anwendung des Konzepts auf Realsituationen, beispielsweise die Deutung der Momentangeschwindigkeit als zeitliche $\mathbb{R}^1$-Ableitung der Ortsfunktion.

Jeder der Aspekte kann dann auf die zugehörigen Deutungen in den entsprechenden Deutungskontexten hin untersucht werden.

Beispielhafte Analyse des totalen Differentials für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Die Definitionen des totalen Differential können in Hinblick auf zwei Facetten unterschieden werden: Zum einen die Darstellung des totalen Differentials als lineare Abbildung, $1 \times n$-Matrix, Zeilenvektor oder n-Tupel, und zum anderen die definierende Eigenschaft von totaler Differenzierbarkeit. Hier werden beispielhaft zwei Aspekte, bezeichnet als (T1) und (T4), betrachtet:

> (T1) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt total differenzierbar an der Stelle $\xi \in \mathbb{R}^n$, wenn eine lineare Abbildung $A_\xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert, sodass in einer Umgebung von ξ gilt: $f(\xi + h) = f(\xi) + A_\xi(h) + \varphi_\xi(h)$, wobei φ_ξ eine in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ definierte Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$ ist mit $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{||h||} = 0$. Im Fall ihrer Existenz ist die lineare Abbildung A_ξ eindeutig und wird als totales Differential von f an der Stelle ξ bezeichnet.
>
> (T4) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt total differenzierbar an der Stelle $\xi \in \mathbb{R}^n$, wenn f in ξ partiell differenzierbar ist und $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)-J_f(\xi)\cdot h}{||h||} = 0$ gilt, wobei $J_f(\xi) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi)\right)$. In diesem Fall ist das totale Differential von f an der Stelle ξ gegeben durch $J_f(\xi)$.

Auf *analytisch-algebraischer* Ebene ist zunächst festzustellen, dass im Aspekt (T1) die Definition des totalen Differentials in einer relational-deskriptiven Formulierung (Richenhagen, 1985) erfolgt. Das totale Differential wird als lineare Abbildung bezeichnet, was die mit Linearität verbundenen Vorstellungen induziert. Mit diesem Aspekt ist eine koordinatenfreie Darstellung möglich. Im Aspekt (T4) erfolgt die Definition konstruktiv als Matrix der partiellen

Ableitungen, sofern diese Matrix $J_f(\xi)$ die Bedingung $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)-J_f(\xi)\cdot h}{||h||}=0$ erfüllt. Als wesentlicher Unterschied zur partiellen Ableitung und zur Richtungsableitung kommt beim totalen Differential bei allen Aspekten deutlich zum Tragen, dass hier beliebige (kleine) Änderungen der Funktion betrachtet werden können und nicht nur solche in eine feste Richtung, dass also die verschiedenen Richtungen in geeigneter Weise „zusammenpassen".

Die *approximative* Deutung des totalen Differentials ergibt sich bei den Aspekten (T1) und (T4) unterschiedlich deutlich. Nach (T1) wird das totale Differential als lineare Abbildung eingeführt, mit deren Hilfe der Verlauf der Funktion f in der Nähe von ξ approximiert werden kann. Diese Vorstellung wird durch die Gleichung in der Definition gefördert, sodass sich die Näherung $f(\xi+h)\approx f(\xi)+A_\xi(h)$ ergibt. Das Ungefährzeichen kann dabei durch die „Fehlerfunktion" φ_ξ präzisiert werden. Auch für den Aspekt (T4) ist die approximative Deutung bereits in der Definition enthalten, jedoch versteckter als im ersten Fall, da hier die Definition keine Gleichung der Form $f(\xi+h)=\cdots$ enthält. Durch den Grenzwertausdruck wird jedoch auch hier angegeben, dass der relative Fehler, den man macht, wenn man $f(\xi+h)\approx f(\xi)+J_f(\xi)\cdot h$ schreibt, klein ist.

Die *abstrakt-geometrische* Deutung ergibt sich bei allen Aspekten nicht direkt aus der Definition. Das totale Differential kann aber zur Beschreibung der Tangential(hyper)ebene als n-dimensionaler affiner Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ genutzt werden. Diese kann als der Graph des totalen Differentials (so verschoben, dass der Punkt $(\xi,f(\xi))$ dem Ursprung entspricht) verstanden werden, wenn das totale Differential als Abbildung verstanden wird (wie bei (T1)). Nach Aspekt (T4) kann die Tangential(hyper)ebene als die Menge $\left\{\left(h,f(\xi)+J_f(\xi)\cdot(h-\xi)\right)\middle|h\in\mathbb{R}^n\right\}$ verstanden werden, wobei nun die Einträge der Matrix den Steigungen der Tangentialebene in Richtung der jeweiligen Koordinatenachsen entsprechen. Die *real-geometrische* Deutung ist eine Übertragung dieses Phänomens auf den dreidimensionalen Anschauungsraum: Beschreibt $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ die Höhe in Abhängigkeit von einem durch zwei Koordinaten gegebenen Punkt, ergibt deren Graph also die Relieflandkarte eines hügeligen Gebiets, so bedeutet deren Differenzierbarkeit, dass der entsprechende Hügel jeweils lokal wie eine Ebene erscheint.

In verschiedenen *realweltlichen* Anwendungen werden vor allem partielle Ableitungen betrachtet, sodass hierfür der Aspekt (T4) relevanter erscheint als (T1). Wichtig ist, dass mit dem totalen Differential auch hier mehrere Komponenten gleichzeitig verändert werden können. Mit dem totalen Differential kann zum Beispiel das Änderungsverhalten einer Funktion, die die Temperatur in Abhängigkeit von Zeit und Ort im dreidimensionalen Raum angibt, beschrieben werden.

Das Zusammenspiel der verschiedenen Konzepte kann ebenfalls nicht nur auf der formalen (vgl. Lankeit & Biehler, 2019), sondern auch auf der semantischen Ebene betrachtet werden. So kann die Betrachtung der Zusammenhänge von Konzepten zum Erkennen der Bedeutung dieser beitragen (beispielsweise, dass totale Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert, partielle Differenzierbarkeit jedoch nicht) und neue Interpretationen ermöglichen: Der Zusammenhang des totalen Differentials und der Richtungsableitung führt zur Deutung des totalen Differentials an einer Stelle ξ als die lineare Abbildung, die jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ die lokale Änderungsrate der Funktion an der Stelle ξ in Richtung v zuordnet.

Ausblick

Im weiteren Verlauf erfolgt zunächst eine Lehrbuchanalyse auf Grundlage dieses Modells, bei der die Darstellung der verschiedenen Differenzierbarkeitskonzepte unter den Gesichtspunkten der Aspekte und Deutungskontexte sowie der Anbindung an die eindimensionale Ableitung und mögliche Verallgemeinerungen wie die Fréchet-Ableitung im unendlich-dimensionalen Fall betrachtet und verglichen werden. Darüber hinaus kann das Modell als Grundlage für verschiedene weitere wissenschaftliche Untersuchungen zu Ableitungen im Mehrdimensionalen dienen. Es leistet außerdem einen lehrpraktischen Beitrag, indem es als Inspiration für die Planung und Reflexion von Lehrveranstaltungen zur mehrdimensionalen Analysis genutzt werden kann.

Literatur

Alcock, L., & Simpson, A. (2016). Interactions between defining, explaining and classifying: the case of increasing and decreasing sequences. *Educational Studies in Mathematics, 94*(1), 5-19. doi:10.1007/s10649-016-9709-4

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Weigand, H., & Ulm, V. (2016). *Didaktik der Analysis*: Springer.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 33-67. doi:10.1007/s13138-016-0102-8

Kendal, M., & Stacey, K. (2003). Tracing learning of three representations with the differentiation competency framework. *Mathematics Education Research Journal, 15*(1), 22-41.

Lankeit, E., & Biehler, R. (2019). Vorstellung einer Aufgabe zu den Zusammenhängen verschiedener Differenzierbarkeitsbegriffe im Mehrdimensionalen. In Marcel Klinger, Alexander Schüler-Meyer, & Lena Wessel (Hrsg.), *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik 2018* (S. 117-131). Münster: WTM-Verlag.

Richenhagen, G. (1985). *Carl Runge (1856 – 1927): Von der reinen Mathematik zur Numerik.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik, 13*(4), 345-364.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103-127.