Laura MARTIGNON, Ludwigsburg & Eckhard RATHE, Herrenberg

Das Galton-Brett zur Förderung stochastischer Intuitionen

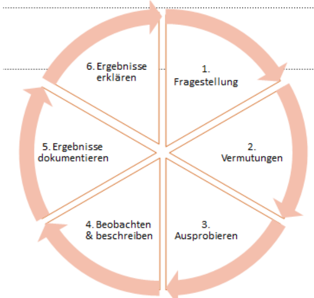
Einleitung und theoretischer Hintergrund

Das Galton-Brett, auch als „Quincunx“ bekannt, ist ein Gerät, das von Sir Francis Galton um das Jahr 1887 erfunden wurde, um den Zentralen Grenzwertsatz „en-aktiv“ zu illustrieren. Damit wollte er insbesondere konkret illustrieren, dass bei ausreichender Stichprobengröße die Binomialverteilung sich einer Normalverteilung annähert. Unter anderem wollte er zeigen, wie das Hantieren mit diesem Gerät Einblicke in das Phänomen der Regression zum Mittelwert bzw. "Regression zur Mittelmäßigkeit" verschafft. Es ist anekdotisch interessant zu wissen, dass Galton von der Ordnung der Glockenkurve fasziniert war, die sich aus dem scheinbaren Chaos der fallenden Perlen im Galton-Brett ergibt. Er beschrieb diese Faszination in seinem Buch "Natural Inheritance" (1889) und meinte, es sei eine aus dem Chaos resultierende kosmische Ordnung. Da es damals keine industriell hergestellten Kugeln gab, benutzte er Bohnen und nannte sein Brett „The Bean Machine“. Das Galton-Brett besteht aus einem vertikalen Brett mit mehreren ineinander verschachtelten Reihen von Stiften bzw. Nägeln und einer beliebig großen Menge von Kugeln oder Perlen. Bei einem wohlkonstruierten Galton-Brett ergibt sich die folgende Situation: Die Kugeln bzw. Perlen werden von oben fallen gelassen und hüpfen, wenn das Gerät waagerecht steht, entweder nach links oder rechts jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2, wenn sie auf die Stifte treffen (Büchter & Henn, 2006). Hierfür ist es natürlich wichtig, dass die Konstruktion des Brettes sorgfältig und perfekt ausgeführt wird. Die fallenden Kugeln werden in Behältern/Kästchen am Boden gesammelt. Das spannende Phänomen ist, die „Säulen“ der Kugeln in den Auffangkästchen zu betrachten und zu realisieren, dass die Verteilung der Höhen der Kugelsäulen in den Behältern relativ symmetrisch ist. Die Experten erkennen, dass sie sich an die Binomialverteilung annähert. Stellt man sich das „Pascalsche“ Dreieck als auf die Stifte überlagernd vor, zeigt die jeweilige kombinatorische Formel die Anzahl der verschiedenen Wege, die zu den einzelnen Behältern führen können.

Pilotierung einer zukünftigen Studie

In der von Rose Vogel in der PH Ludwigsburg gestalteten Materialiensammlung befinden sich bis heute einige sehr schöne Galton-Brette, aus Plastik aber auch aus Holz. Diese Geräte haben Student/Innen für ihre Praktika inspiriert. Relevant bei dem „Spielen“ mit dem Galton-Brett, sind die en-aktive Beschäftigung und die Repräsentation. Im Jahr 2018 hat ein Student namens M. Yilmaz sich vorgenommen, in verschiedenen Klassen, Schüler/Innen mit dem Galton-Brett experimentieren zu lassen.

In: Kerstin Hein, Cathleen Heil, Silke Ruwisch & Susanne Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021. Münster: WTM Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959871846.0
Online unter https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/30630



Die Schüler/Innen sollten Klarheit über eine Forschungsfrage gewinnen, nämlich „Wo werden die meisten Kügelchen fallen?“
Danach haben sie Vermutungen aufgestellt. Anschließend wurde ausprobiert. Das Beobachten und Beschreiben im Plenum war der nächste Schritt, gefolgt von der Dokumentation der Ergebnisse.

Abb. 1: Forschungsschema

Die erste Intervention mit dem Galton-Brett und diesem kleinen Forschungsprojekt war in der 4. Klasse. Danach wurde das gleiche Schema in der 5. Und 6. Klasse ausprobiert. Es wurden leider keine präzise Statistiken erstellt, aber es wurde festegestellt, dass Kinder der drei Klassen in der Tendenz (um die 80%) eher meinten, es sei „leichter“ für die Kügelchen in die Auffangkästchen extrem links oder extrem rechts zu fallen.

Die Verbindung zum Pascalschen Dreieck wurde erst anschließend von der Lehrperson hergestellt. Eine weitere Intervention im Rahmen eines Blockpraktikums basierte auf die Einführung von Münzen zur Bestimmung der Wege der Kügelchen, wie vom Mathematikum in Giessen vorgeschlagen:

Eine Simulation mit Plättchen: Aus den Haufen Münzen nimmt das Kind so viele Münzen, wie es Stufen im Galton-Brett gibt. Er wirft pro Stufe einmal, um zu entscheiden, ob nun das Plättchen rechts oder links fallen soll und bewegt es entsprechend. Jedes Kind platziert 40 Plättchen in einem Brett mit 4 Stufen.

Abb. 2: Die Wege der Plättchen
bestimmt anhand von Münzenwürfen

Bei dieser Studie in 2 sechsten Klassen (N = 46), konnte man feststellen, dass mehr als die Hälfte der Schüler/Innen bei Verallgemeinerungen zu 6 Stufen korrekte Antworten auf Fragen vom Typ „Wie viele verschiedenen Wege gibt es wenn 3 Münze „Kopf“ und 3 Münze „Zahl“ fallen.

Studie zum Thema Galton-Brett in der Zeit von Corona

Im Jahr 2020 schrieb der Student Henrik Söderberg der Universität Stuttgart eine Masterarbeit über eine Studie zur Bearbeitung stochastischer Konzepte basierend auf online Meetings mit 8 Schüler/innen. Es gab zwei Themen, die er behandelte. Eines von diesen war den kombinatorischen Formeln des „Pascalschen Dreiecks“, ihrer Bedeutung und deren Verbindung mit dem Galton-Brett gewidmet. Es ergab sich, dass die zwei Autoren dieses kleinen Beitrags eine kurze Reise nach Gießen, zum „Mathematikum“, mit 6 der Schüler/Innen von Henrik Söderberg planen und realisieren konnten. Die Absicht war vor allem, die 6 Schüler/Innen mit dem Galton-Brett aber auch seiner Geschichte zu konfrontieren. Der Zweitautor hatte Erfahrung als Lehrer am Schickhardt Gymnasium Herrenberg mit der Einführung der kombinatorischen Formel $C_{n,k}$, gesammelt. Diese Formel drückt die Anzahl der Kombinationen aus, die aus *n* Elementen gezogen werden können, wenn keine Wiederholung möglich ist und die Reihenfolge keine Rolle spielt. Seine Erfahrung ist, dass die Formel $C_{n,k}$ nicht als $n!/[(n-k)!k!]$ von Schüler/Innen verstanden wird, sondern eher als $n(n-1)..(n-k+1)/k!$. Die konzeptuelle „Wolke" aus Binomialkoeffizienten, Binomialverteilung, Galton-Brett kann, so meint er, en-aktiv durch Handlungen am Galton-Brett vermittelt werden. Mit 6 Kindern haben wir also sowohl online Veranstaltungen mit Herrn Söderberg geplant wie auch eine Kurzreise nach Gießen zum Mathematikum durchgeführt, wo wir alle mit dem großen Galton-Brett experimentieren konnten. Der Besuch des Mathematikums wurde im August 2020 durchgeführt. Am ersten und einzigen Morgen in Gießen waren kurze Vorträge über Sir Francis Galton aber auch Laplace geplant. Diese Vorträge hatten als Funktion, die Schüler/Innen mit dem Wirken von Galton und von Laplace als Statistikern vertraut zu machen.

Die Bedeutung der Binomialverteilung wurde dabei betont.
Danach ging es ins Mathematikum, wo die Schüler/innen viele Exponate besuchen und beschreiben durften.

Beim Galton-Brett im Mathematikum, das besonders groß und wohl-konstruiert ist, durften die Schüler/Innen lange experimentieren.

Abb. 3: Die Autoren mit 6 Schüler/Innen beim Galton-Brett
im Mathematikum Gießen

Nach einer Diskussion über die Verteilung der Kugeln in den Auffangkästchen wurden einige Fragen beantwortet, die von den Schüler/Innen gestellt wurden.

Nach der Rückkehr wurde von Herrn Söderberg die Verbindung zum Pascalschen Dreieck hergestellt und die folgende Illustration erläutert:

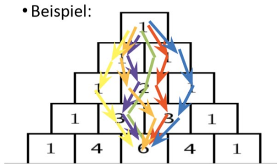


Abb.4: Die Wege im Pascalschen Dreieck

Die Schüler/innen wurden 4 Tage später auch von Herrn Söderberg online getestet. Die Aufgaben waren:

Aufgabe 1

Wie viele dreistellige Zahlen kann man aus den Ziffern 7, 8 und 9 bilden? Wiederholungen der Ziffern sind erlaubt.

Aufgabe 2

Wie viele dreistellige Zahlen kann man aus den Ziffern 7, 8 und 9 bilden, wenn jede Ziffer nur einmal auftreten darf?

Aufgabe 3

Wenn es in der Bundesliga 20 Mannschaften gäbe, wie viele Spiele gibt es dann pro Saison? Achtung: Es gibt pro Saison Hin- und Rückspiel.

Aufgabe 4

Bei der Fussball-WM 1998 nahmen 32 Nationen teil. Wie viele Möglichkeiten gab es für die Teilnehmer des Halbfinales?

Abb.5: Ein Test zur Anwendung der Binomialkoeffizienten

Eine Schülerin konnte beim Testen nicht anwesend sein. Die Leistung der weiteren Schüler/innen war:

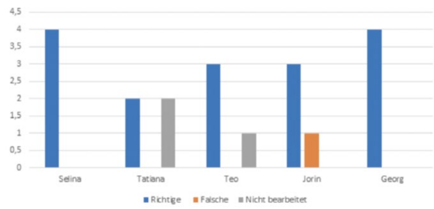


Abb.6: Die quantitative Auswertung der Schülerantworten

Diskussion

Die hier beschriebenen Erfahrungen haben keineswegs den Anspruch, eine empirische Studie darzustellen. Eine solche Studie ist aber geplant und zwar für die Zeit nach Covid-19. Es wurde aber aus dieser eher anekdotischen Erfahrung mit Schüler/innen klar, dass die Thematik um die Binomialkoeffizienten, dem Pascalschen Dreieck und dem Galton-Brett aufregend und inspirierend gestaltet werden kann.

Literatur

https://www.mathematikum.de/mathematikum-online/experimente-fuer-zuhause/galtonbrett

Andreas Büchter, Hans-Wolfgang Henn: Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls. Springer, 2006, ISBN 9783540273684, S. 252–254

Francis Galton: Natural inheritance. Macmillan, London 1889