

Tobias ROLFES, Kiel & Christian FAHSE, Landau

## Schülerpräferenzen bezüglich numerischer Formate bei der Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten

Im Stochastikunterricht der Sekundarstufe werden Wahrscheinlichkeiten im Allgemeinen als *gewöhnlicher Bruch*, *Prozentzahl* oder *Dezimalbruch* dargestellt (Krauss et al., 2020). Neben diesen drei Standardzahlformaten sind aber noch weitere numerische Darstellungsformen zur Beschreibung von stochastischen Situationen möglich. So können Wahrscheinlichkeiten mithilfe von *erwarteten natürlichen Häufigkeiten* (z. B. *durchschnittlich 2 von 6*) (Krauss et al., 2020) quantifiziert werden. Bei Lotterien wird häufig das *Chancenverhältnis* (z. B. *1 zu 5* oder *1:5*) angegeben, das selbst in statistischer Fachliteratur zu finden ist (Rost, 2004, 205 f.: „Auf der Schwelle selbst haben beide Antwortkategorien dieselbe Wahrscheinlichkeit, es steht also auf der Schwelle genau 50 zu 50, in welche Kategorie die Antwort fällt.“). In der vorliegenden Studie wird daher untersucht, welche numerischen Formate zur Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I bevorzugt werden.

### Forschungsfragen

Welche numerischen Formate wählen Schülerinnen und Schüler für die Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten?

Hängen die gewählten numerischen Formate von der Klassenstufe ab?

### Methode

Die Daten entstammen aus einer Papier-und-Bleistift-Erhebung mit 608 Schülerinnen und Schülern aus 23 Gymnasialklassen der Klassenstufen 8 bis 10. In einem Multi-Matrix-Design wurden 93 Items in 56 Testlets administriert. Die vorliegende Analyse beschränkt sich auf die Auswertung des Items

*M102a* (vgl. Abb. 1), das  $N = 261$  Schülerinnen und Schülern (Klasse 8: 103 SuS, Klasse 9: 90 SuS, Klasse 10: 67 SuS) vorgelegt wurde. In dem Item mussten die Testpersonen entscheiden, in welchem numerischen Format sie die Wahrscheinlichkeit angeben und in das Antwortfeld schreiben.

Die Daten wurden ausgewertet, indem die Antworten der Schülerinnen und Schüler anhand der Kategorien *Prozentzahl*, *Dezimalbruch*, *gewöhnlicher Bruch*, *Verhältnis* (z. B. *1 zu 19*, *1 zu 20*, *1:19*, *1:20*) und *Sonstiges* kodiert wurden. Die Kodierung wurde unabhängig von der Richtigkeit der Antwort vorgenommen, das heißt, auch eine Schülerantwort mit einer falschen Prozentzahl (z. B. 20 %) wurde

### 20er Würfel

Ein 20er-Würfel hat 20 gleich große Seiten.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass du mit diesem Würfel eine 6 würfelst?



Abb. 1: Item M102a

der Kategorie *Prozentzahl* zugeordnet. Wurden mehrere numerische Formate verwendet (z. B. „ $\frac{1}{20} = 5\%$ “), wurden mehrere Kategorien kodiert. Außerdem wurde für das numerische Format *Verhältnis* noch eine vertiefte Analyse vorgenommen, bei der Häufigkeitsanalysen zu den verwendeten Notationsformen erfolgten.

## Ergebnisse

Von den 261 Personen, welchen die Aufgabe *M102a* vorgelegt wurde, trugen 246 eine Antwort in einem numerischen Format ein. Die restlichen 15 Personen gaben entweder keine Antwort oder Antworten ohne numerische Formate (z. B. „Die Wahrscheinlichkeit ist klein“).

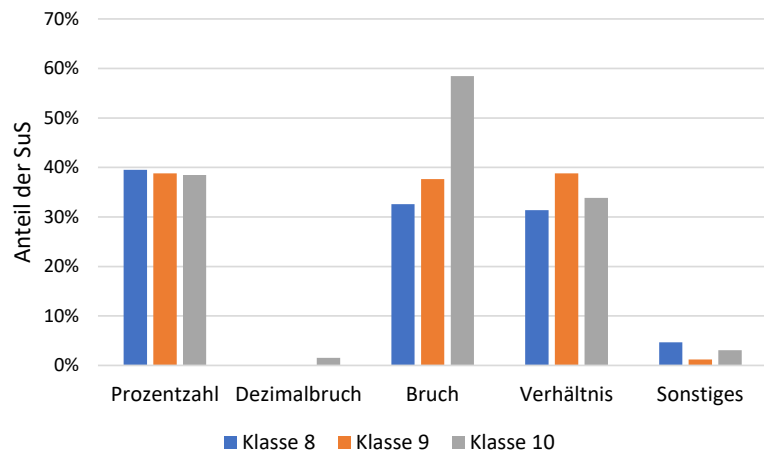


Abb. 2: Anteil der verwendeten numerischen Formate für die Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten (bezogen auf 246 SuS, mehrere Formate in einer Antwort möglich).

Von den insgesamt 246 Personen mit einer numerischen Antwort verwendeten 98 Personen einen gewöhnlichen Bruch (40 %), 92 Personen (37 %) eine Prozentzahl, 83 Personen ein Verhältnis (34 %) und eine Person (0,4 %) einen Dezimalbruch. Es bestanden signifikante Unterschiede zwischen den Klassenstufen (Homogenitätstest,  $\chi^2(6) = 12.622$ ,  $p = .049$ , vier Kategorien unter Ausschluss von Dezimalbrüchen wegen zu niedriger Zellbelegung), wobei sich aber nur bei der Verwendung des gewöhnlichen Bruches ein monotoner Anstieg mit der Jahrgangsstufe ergab (vgl. Abb. 2). Allerdings zeigten die Daten, dass die Schreibweise als Bruch nicht andere Schreibweisen verdrängte (deren Anteil blieb nahezu konstant), sondern dass mit zunehmender Klassenstufe zusätzlich die Antwort auch als Bruch angegeben wurde.

In der Kategorie *Verhältnis* traten am häufigsten die Antworten *1 zu 20* (43 SuS) und *1:20* (31 SuS) auf. Deutlich seltener wurden die Verhältnisse *1 zu 19* (3 SuS) und *1:19* (2 SuS) angegeben. Jeweils einmal wurden die Verhältnisse als *1 aus 20* und *1 in 20* ausgedrückt.

## Diskussion

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zeigen, dass die standardmäßig im Schulunterricht verwendeten numerischen Formate *Prozentzahl* und *gewöhnlicher Bruch* von Schülerinnen und Schülern zur Quantifizierung verwendet wurden. Während das Ausmaß der Verwendung von Prozentzahlen unabhängig von der Klassenstufe war, wurden mit zunehmendem Alter häufiger

auch gewöhnliche Brüche verwendet. Ein Dezimalbruch wurde dagegen nahezu nicht verwendet.

Etwa ein Drittel der Schülerinnen und Schüler gab unabhängig von der Klassenstufe Wahrscheinlichkeiten als Verhältnisse an. Allerdings wurde das korrekte Chancenverhältnis ( $1:19$  bzw.  $1$  zu  $19$ ) nur vereinzelt genannt. Stattdessen war die häufigste Lösung  $1:20$  bzw.  $1$  zu  $20$ . Unklar bleibt, ob diese Testpersonen fehlerhaft das Chancenverhältnis ermittelten oder ob sie ihrer Antwort ein *Teil-Gesamtheit-Verhältnis* zugrunde legten. Bei Letzterem wäre die Bezugsgröße nicht die Anzahl der „Nieten“, sondern die Anzahl aller Möglichkeiten (1 Gewinnergebnis im Verhältnis zu 20 Gesamtergebnissen). Wird der Doppelpunkt als Division aufgefasst, ist  $1:20 = 0,05$  eine korrekte Angabe der Wahrscheinlichkeit. Das Teil-Gesamtheit-Verhältnis entspricht der Sicht als erwartete natürliche Häufigkeit bei Krauss et al. (2020).

Unabhängig von der offenen Frage, in welcher Weise die Verhältnisangaben der Testpersonen zu verstehen sind, zeigen die Ergebnisse, dass ein bedeutender Teil der Schülerinnen und Schüler eine Neigung hat, Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Verhältnissen von natürlichen Zahlen zu quantifizieren. Diese Präferenz nimmt auch nicht mit zunehmendem Alter ab - eine überraschende Beobachtung, wenn man bedenkt, dass im Schulunterricht diese Form der Darstellung nahezu nicht vorkommt. Daher kann die Verwendung von Verhältnisschreibweisen kaum ein Resultat schulischer Lernprozesse sein, sondern scheint eher mit intuitiven mentalen Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit oder mit dem Alltagssprachgebrauch zu korrespondieren. Wie experimentelle Studien zum Bayesianischen Schließen gezeigt haben (Gigerenzer & Hoffrage, 1995), wirkt die Verwendung von Verhältnissen in Form von natürlichen Häufigkeiten als Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten sogar positiv auf die Performanz. Inwieweit dieser positive Performanzeffekt von Verhältnisdarstellungen auf andere Inhaltsbereiche als den Satz von Bayes verallgemeinerbar ist, ist allerdings eine noch offene Forschungsfrage.

Für die Unterrichtspraxis legen unsere Ergebnisse nahe zu überdenken, ob Verständnisschwierigkeiten bezüglich des Wahrscheinlichkeitsbegriffs möglicherweise auch durch die in der Schule verwendeten numerischen Formate verursacht sein könnten. Die vorgefundene starke Verwendung von Verhältnis-Schreibweisen  $1:20$  oder  $1$  zu  $20$  zeigt, dass die Schülerinnen und Schüler den klassischen Ansatz nach Laplace zwar prinzipiell verwenden, aber teilweise nicht mit der Schreibweise als Bruch in Verbindung bringen. Möglicherweise ist dieses dadurch verursacht, dass im Anfangsunterricht der Bruchrechnung häufig mit Hilfe der Grundvorstellung *Teil eines Ganzen* (Malle, 2004; Padberg & Wartha, 2017) operiert wird und auch die Bruchrechengesetze mit Hilfe dieser Grundvorstellung veranschaulicht werden. Dabei wird das Ganze als Einheit gesehen, das in gleich große Teile aufgeteilt wird. Bezüglich des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist diese Grundvorstellung weniger hilfreich, da dort weder der Prozess des Aufteilens noch das Ganze im Vordergrund stehen. Man versuche

beispielsweise diese Grundvorstellung auf „die Sterbewahrscheinlichkeit beträgt  $\frac{3}{100}$ “ anzuwenden.

Sowohl der klassische Ansatz nach Laplace als auch der frequentistische Ansatz basiert eher auf der Vorstellung eines Bruchs als *Verhältnis* (Malle, 2004). Allerdings wird bei der Grundvorstellung Verhältnis häufig an einen Vergleich zweier *verschiedener* Objekte/Gruppen gedacht (das Verhältnis von Jungen und Mädchen beträgt in dieser Klasse *6 zu 12*). Für den Laplace- und den frequentistischen Ansatz wird aber das Verhältnis einer Teilmenge zu einer Gesamtheit, welche die Teilmenge als *Obermenge* umfasst, benötigt.

Aus den Ergebnissen lässt sich folgern, dass im Stochastikunterricht das numerische Format zur Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten stärker in den Blick genommen werden sollte. Zum einen sollten sich die Lehrkräfte bewusst machen, dass in der Stochastik die Grundvorstellung von einem Bruch als *Teil eines Ganzen* kaum tragfähig ist. Zum anderen sollte die Verhältnis-Schreibweise explizit thematisiert werden, da Forschung zum Bayesianischen Schließen und die Ergebnisse unserer Studie zeigen, dass ein nicht unerheblicher Anteil von Testpersonen unterschiedlichen Alters einen einfacheren Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff über Verhältnisse von natürlichen Zahlen zu bekommen scheint. Als Möglichkeit kommt das Chancenverhältnis oder das Teil-Gesamtheit-Verhältnis in Frage. Das Chancenverhältnis ist für den weiteren Fortgang in der Stochastik nur eingeschränkt hilfreich. Da es aber im Alltag zur Beschreibung von stochastischen Situationen verwendet wird (z. B. Lotterien), sollte es trotzdem im Unterricht aufgegriffen werden und vom Teil-Gesamtheit-Verhältnis abgegrenzt werden, um nicht unverbundene Wissenswelten (Stochastik im Alltag, Stochastik im Mathematikunterricht) zu erzeugen. Im Unterricht sollte vornehmlich das Teil-Gesamtheit-Verhältnis verwendet und neben den Standardformaten (Prozentzahl, gewöhnlicher Bruch, Dezimalbruch) zumindest im Anfangsunterricht als legitime Beschreibung der Wahrscheinlichkeit angesehen werden. Als Abgrenzung zur Bezeichnung *1 zu 5* beim Chancenverhältnis kämen für das Teil-Gesamtheit-Verhältnis eventuell die sprachlich prägnanten Formulierungen „Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1 aus 6“ oder „Die Wahrscheinlichkeit beträgt 1 in 6“ in Frage.

## Literatur

- Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102(4), 684–704.
- Krauss, S., Weber, P., Binder, K. & Bruckmaier, G. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 485–521.
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren* (123), 4–8.
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Berlin: Springer.
- Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion* (2. Aufl.). Bern, Schweiz: Huber.