

Silke RUWISCH, Lüneburg

Stützpunkte als Kern des Größenverständnisses und Grundlage des Schätzens

Kompetenzorientiertes Größenverständnis ist gekennzeichnet durch seine Handlungswirksamkeit in Anforderungssituationen, vor allem in alltäglichen Problemzusammenhängen. Wissen und Vorstellungen zu Größenausprägungen von Repräsentanten können zu Stützpunkten werden, wenn die Vernetzung von konkreten und mentalen Vergleichen in qualitativer wie quantitativer Art gelingt.

Größen- oder Stützpunktvorstellungen?

Obwohl der Begriff „Größenvorstellungen“ in der Mathematikdidaktik verwendet (z.B. Franke & Ruwisch, 2010) und in Bildungsstandards und deren Konkretisierungen in Lehrplänen bundesweit üblich ist, muss festgehalten werden, dass weder Größen(bereiche) – Länge, Zeit, Masse/Gewicht etc. – noch konkrete Größenangaben – 1 m, 3 min, 100 g – vorstellbar sind (Griesel 1996). Die „gemeinten“ Vorstellungen beziehen sich durchgängig auf die entsprechenden Repräsentanten – der große Schritt, die Zeit bis zur Bushaltestelle, die Tafel Schokolade (Ruwisch 2021, i.E.). Deshalb verwende ich im Weiteren dafür zunächst den Begriff „Stützpunktvorstellungen“ (Weiher & Ruwisch, 2018). Umfassender könnte ggf. der Begriff „Grundvorstellungen zu Größen“ dem Konstrukt angemessener sein (s. Ausblick).

Stützpunkte: Stützpunktwissen und Stützpunktvorstellung

Nur vereinzelt wird in der Literatur genauer differenziert, wenn vom „Umgang mit Stützpunkten“ – englisch benchmarks – die Rede ist (z.B. Joram 2003). Da sich empirisch gezeigt hat (z.B. Reuter 2011), dass Kinder Größenausprägungen einzelner Repräsentanten kennen, ohne auf mentale Vorstellungen dazu zurückgreifen zu können, unterscheiden wir grundlegend zwischen *Stützpunktwissen* und *Stützpunktvorstellungen* (z.B. Weiher & Ruwisch 2018). Erst wenn wir über ein „inneres Bild“ der Größenausprägung von Repräsentanten verfügen – das je nach Größenart visuell, haptisch, zeitlich, ... ausfällt –, sprechen wir somit von Stützpunktvorstellung. Doch auch einzelne Paarungen von Wissen und Vorstellung der Größenausprägungen von Repräsentanten bilden noch keine handlungsleitenden Kompetenzen. Zu *Stützpunkten* in diesem kompetenzorientierten Sinn werden sie erst in der Vernetzung mit anderen Stützpunkten: In der Beziehungshaltigkeit verschiedener Repräsentanten und deren Größen können aus dem Stützpunktwissen und einzelnen inneren Bildern zu den Größenausprägungen dieser Repräsentanten Stützpunktvorstellungen werden, die zum Vergleichen, Schätzen und Überschlagen, vor allem in alltäglichen Problemzusammenhängen genutzt werden können.

Modell zum Aufbau von Stützpunkten

Der grundlegende Prozess für den Einsatz von Stützpunkten in Handlungssituationen ist das Vergleichen, durch welches sich verschiedene Beziehungen fokussieren und thematisieren lassen. Vergleiche können einerseits danach unterschieden werden, ob sie qualitativer oder quantitativer Art sind (Griesel 1996). Andererseits lassen sich konkrete und mentale Vorgehensweisen unterscheiden, so dass grob die vier Bereiche aus Abb. 1 entstehen (vgl. auch Ruwisch 2014).

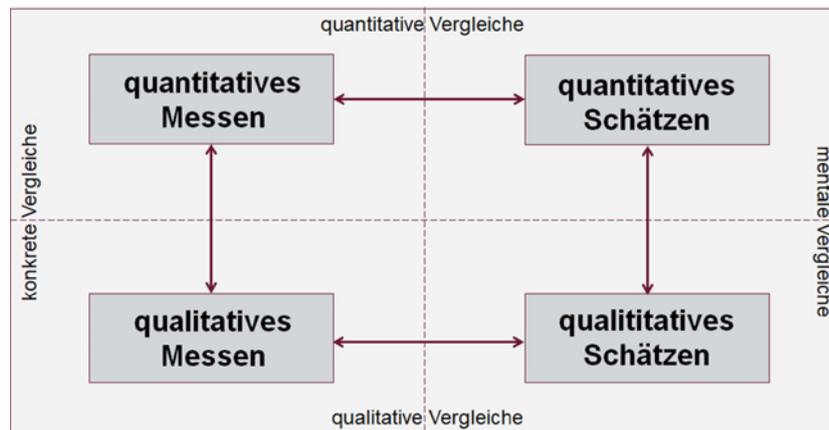


Abb.1: Modell zum Aufbau von Stützpunkten (in Anlehnung an Ruwisch 2014, S. 41, weiterentwickelt durch einen Vorschlag von Marcus Nührenbörger im Minisymposium)

Qualitatives Messen: Repräsentanten bzgl. ihrer Größenausprägungen miteinander zu vergleichen, ist konkret und handlungsgebunden und kann unabhängig von Zahlen und somit rein qualitativ erfolgen. Ohne ausreichende Erfahrungen mit konkreten, qualitativen Vergleichen bleiben die anderen Bereiche des Größenverständnisses oft inhaltsleer. Trotzdem handelt es sich nicht ausschließlich um „einfache Vorerfahrungen“. Grenzen, z.B. bzgl. des Vergleichs per Augenschein, schwierige Situationen und deren Lösungsmöglichkeiten, z.B. das Vergleichen von Repräsentanten mit einer sehr großen oder sehr kleinen Größenausprägung, sollten genauso bewusst thematisiert werden wie z.B. die Frage nach der Invarianz der jeweiligen Größe bei verschiedenen Transformationen.

Quantitatives Messen: Werden die konkreten Vergleiche mit Zahlen verbunden, sprechen wir vom Messen. Die Quantifizierung der Erfahrungen im Messen bedeutet eine Ausweitung in mehrfacher Hinsicht: eine wechselseitige Durchdringung von Zahl- und Größenverständnis (vgl. Nührenbörger 2021 i.E., Ruwisch 2015 a), die sachadäquate Auswahl und Handhabung von Messgeräten sowie der Aufbau des Messverständnisses selbst, insbesondere die drei Kernideen des Messens (Peter-Koop & Nührenbörger 2008, Ruwisch 2015 c) treten zu den konkreten Vergleichserfahrungen hinzu.

Qualitatives und quantitatives Schätzen: Werden Vergleiche nicht konkret sondern nur gedanklich vorgenommen, so handelt es sich um das Schätzen. Teilweise wird in der Didaktik erst dann vom Schätzen gesprochen, wenn es sich um das Zuordnen von Maßzahlen und Maßeinheiten zu einem Repräsentanten handelt. Doch auch qualitative Vergleiche können mental erfolgen, so dass

hier zwischen qualitativem und quantitativem Schätzen unterschieden werden soll. Für wesentlich erachte ich darüber hinaus bei näherer Betrachtung beider Begriffe den zugrundeliegenden kognitiven Prozess: Werden zwei Repräsentanten gedanklich dahingehend verglichen, welcher länger, leichter, voluminöser, etc. ist, schlage ich vor, von *qualitativem Schätzen* zu sprechen. Um *quantitatives Schätzen* handelt es sich dagegen, wenn ein Repräsentant gedanklich mit einem anderen Repräsentanten ausgemessen wird (z.B. Ruwisch 2014).

Beide Arten des Schätzens wurden, z.B. bzgl. der zugrundeliegenden Schätzanforderungen (z.B. Weiher et al. u.r.) oder möglicher Schätzstrategien (Weiher & Ruwisch 2018 für einen Überblick und weitere Literatur), erst ansatzweise systematisch untersucht und für den Mathematikunterricht aufbereitet. Inwieweit überhaupt von einer Schätzkompetenz oder verschiedenen Teildimensionen dieser Kompetenz oder korrelierender Einzelfähigkeiten gesprochen werden kann, ist ebenfalls noch weitgehend ungeklärt (z.B. Hoth et al. 2019).

Fazit: Stützpunkte als Kern des Größenverständnisses müssen kontinuierlich aufgebaut und in ihrem Gebrauch entwickelt werden:

- Konkretes Vergleichen ist mehr als eine Vorstufe. Es muss immer wieder herausgefordert werden.
- Messen ist mehr als das Ablesen eines Wertes auf einer Skale. Insbesondere sein multiplikativer Charakter muss deutlicher herausgehoben werden.
- Schätzen ist mehr als das Raten vor dem Messen und sollte als wichtiges und mächtiges Hilfsmittel bewusst thematisiert werden.

⇒ Das Größenverständnis im Sinne eines measure sense umfasst alle drei Prozesse und deren Vernetzung.

Ausblick: Grundvorstellungen

Unter Grundvorstellungen werden in der Mathematikdidaktik traditionell „adäquate Vorstellungen mathematischer Begriffe“ (vom Hofe 1996, S. 5) verstanden. Sie bezeichnen das „didaktische Ziel: elementare Inhalte anschaulich zu deuten und so beim Schüler (sic!) ein adäquates Begriffsverständnis zu fördern.“ (ebd.) Griesel (1996) befasst sich in dieser Weise mit den Grundvorstellungen zum Umgang mit Größen. Er unterscheidet zwischen der Vorstellung von Repräsentanten und der Vorstellung möglicher Operationen mit diesen Repräsentanten. In diesem Sinne stellen Stützpunkte im obigen Sinne derartige Grundvorstellungen dar. Die im Modell aufgeführten Handlungen und Verfahren, das Vergleichen, Messen und Schätzen, stellen in diesem Sinne Grundvorstellungen möglicher Operationen dar. Doch Griesel fasst die Grundvorstellungen deutlich umfassender: So gehört das Messverständnis mit seinen einzelnen Aspekten (vgl. Roos & Ruwisch 2015, Ruwisch 2015 b) ebenso dazu wie die entsprechenden Vorstellungen zu den Rechenoperationen im jeweiligen Größenbereich. In diesem umfassenden Verständnis ist der Begriff „Größenvorstellungen“ bei Frenzel und Grund (1991) zu sehen. Sie fassen nämlich nicht allein

die Stützpunktvorstellung als Kenntnis von Repräsentanten unterschiedlicher (spezieller) Größen darunter, sondern das Beherrschen der Umrechnung von Größenangaben sowie Fähigkeiten im Messen, Schätzen und Überschlagen ebenso wie ganz grundlegend das Erkennen und Unterscheiden verschiedener Größenarten und führen begleitend die Bedeutung von Zahlvorstellungen auf (vgl. Ruwisch 2021 i.E.).

Literatur

- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. 2. Auflage. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Frenzel, L. & Grund, K.-H. (1991). Wie „groß“ sind Größen? *mathematik lehren* 45, 15–24 u. 31–34.
- Griesel, H. (1996). Grundvorstellungen zu Größen. *mathematik lehren* 78, 15–19.
- Hoth, J., Heinze, A., Weiher, D. F., Ruwisch, S., & Huang, H.-M. E. (2019). Primary school students' length estimation competence: A cross-country comparison between Taiwan and Germany. In J. Novotná, & H. Moraová (Hrsg.), *Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics* (S. 201–211). Charles University, Faculty of Education.
- Joram, E. (2003). Benchmarks as Tools for Developing Measurement Sense. In D. H. Clements & G. Bright (Hrsg.), *Learning and Teaching Measurement* (S. 57–67). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nührenbörger, M. (2021 i.E.). „Mein Daumen ist ungefähr 1 cm breit.“ Stützpunktvorstellungen entwickeln – Zahlvorstellungen ausbauen, *Grundschule Mathematik* 68, 4 Seiten.
- Peter-Koop, A. & Nührenbörger, M. (2008). Größen und Messen. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 89–117). Berlin: Cornelsen.
- Reuter, D. (2011).
- Roos, S. & Ruwisch, S. (2015). „Mit einem Lineal kann man messen“. *Grundschule Mathematik* 47, 4–5.
- Ruwisch, S. (2014). Reichhaltiges Schätzen. Schätzaufgaben und Schätzstrategien systematisiert. *Grundschule Mathematik* 42, 40–43.
- Ruwisch, S. (2015 a). Keine Zahl steht für sich allein. Von direkten zu relationalen Zahlvorstellungen. *Grundschule Mathematik* 44, 40–43
- Ruwisch, S. (2015 b). „Das macht die Waage doch von ganz allein!“ Integration verschiedener Wissens Ebenen für ein integriertes Messverständnis. *Grundschule Mathematik* 47, 2–3.
- Ruwisch, S. (2015 c). Messen verstehen. Einsichten in die Kernideen des Messens ermöglichen. *Grundschule Mathematik* 47, 32–35.
- Ruwisch, S. (2021 i.E.). Warum nicht Größenvorstellungen? Stützpunkte als Teil der Grundvorstellungen zu „Größen und Messen“. *Grundschule Mathematik* 68, 4 Seiten.
- vom Hofe, R. (1996). Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. *mathematik lehren* 78, 4–8.
- Weiher, D. F. & Ruwisch, S. (2018). Kognitives Schätzen aus Sicht der Mathematikdidaktik – Schätzen von visuell erfassbaren Größen und dazu erforderliche Fähigkeiten. *mathematica didactica* 41(1), 77–103.
- Weiher, D. F., Ruwisch, S., Huang, H.-M. E., Heinze, A. & Hoth, J. (u.r.). Modelling the Complexity of Measurement Estimation Situations: Estimation of Lengths: A Theoretical Framework for the Estimation of Lengths. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (40 Seiten).