Constanze SCHADL, Jena

Prädiktoren für das Rechnen mit Größen im Bruchrechenkontext

Schwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung sind empirisch ebenso belegt (Hecht & Vagi, 2010) wie die Relevanz des Erwerbs von Fähigkeiten im Bereich der Bruchrechnung für ein erfolgreiches Mathematiklernen (Siegler et al., 2012). Der Erwerb von Fähigkeiten in der Bruchrechnung baut auf Lernvoraussetzungen auf, die teilweise bereits in der Primarstufe thematisch vorbereitet werden. Frühere Studien belegen, dass einige mathematikspezifische Fähigkeiten wie das Schätzen von natürlichen Zahlen am Zahlenstrahl Leistungsunterschiede im konzeptuellen und prozeduralen Wissen zur Bruchrechnung vorhersagen (z.B. Hansen et al., 2015). In Bezug auf die Erfassung der Fähigkeiten im Bereich der Bruchrechnung scheint bislang kaum systematisch untersucht worden zu sein, welche mathematikspezifischen Lernvoraussetzungen die Fähigkeiten zum Lösen von einfachen Sachsituationen im Bruchrechenkontext und hier insbesondere das Rechnen mit Größen prädizieren. Aus fachdidaktischer Sicht erscheint hier zum einen relevant, welche Fähigkeiten sich als Prädiktoren erweisen, zum anderen ist jedoch auch von Interesse, wie sich die Zusammenhänge über ein „mehr ist besser“ hinaus differenziert mit Vorher-Später Aussagen beschreiben lassen. Solche differenzierten Beschreibungen sind für den Lehr-Lern-Kontext beispielsweise insofern von großer Bedeutung, als dass Lehrkräfte auf deren Basis konkrete Fördermöglichkeiten ableiten können. In dem Beitrag werden basierend auf den längsschnittlichen Befunden aus dem Forschungsprojekt EWIWE (Schadl & Ufer, 2018) verschiedene Prädiktoren für die Fähigkeiten zum Lösen von einfachen Sachsituationen im Bruchrechenkontext betrachtet. Das Lösen der Sachsituationen erfordert hier im Besonderen das Rechnen mit Größen wie Geld, Längen und Gewichten. Es werden zunächst empirische Befunde aus linearen Regressionsmodellen vorgestellt, bevor die Prädiktivität basierend auf raschskalierten Stufenmodellen fokussiert wird. Exemplarisch wird hier der Zusammenhang zwischen einem informellen Vorwissen zu einfachen Brüchen und den Fähigkeiten zum Lösen von Sachsituationen im Bruchrechenkontext über ein „mehr ist besser“ hinaus differenziert beschrieben. In Anlehnung an die empirischen Befunde von Padberg (2002) beschreibt das informelle Vorwissen zu einfachen Brüchen den Umgang mit den Brüchen ein halb, ein Viertel, drei Viertel sowie den unvertrauten Brüchen ein Drittel und zwei Drittel in (de)kontextualisierten Situationen. National wie international scheinen bislang Studien zu fehlen, die die Bedeutung eines solchen informellen Vorwissens zu einfachen Brüchen für spätere Bruchrechenfähigkeiten analysieren. Eine systematische Untersuchung erscheint aufgrund der konzeptuellen Nähe zur Bruchrechnung plausibel. Im Rahmen der differenzierten Beschreibungen werden exemplarische Vorher-Später Aussagen formuliert, welche Anforderungen Lernende in Bezug auf ein informelles Vorwissen zu einfachen Brüchen vor der systematischen Einführung der Bruchrechnung bewältigen können sollten, um

In: Kerstin Hein, Cathleen Heil, Silke Ruwisch & Susanne Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021. Münster: WTM Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959871846.0
Online unter https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/30630

nach der Behandlung der Bruchrechnung im Unterricht bestimmte Anforderungen zum Rechnen mit Größen im Bruchrechenkontext bewältigen zu können.

Methodik

Die Prädiktivität wurde in einem längsschnittlichen Design mit 18 Klassen der sechsten Jahrgangsstufe untersucht. Unmittelbar zu Schuljahresbeginn bearbeiteten die Lernenden zum ersten Messzeitpunkt (MZP) die Instrumente zu sechs mathematikspezifischen Lernvoraussetzungen (s. Schadl & Ufer, 2018) und zum zweiten MZP unmittelbar nach der Behandlung der Bruchrechnung das Instrument zum Lösen von einfachen Sachsituationen. N = 356 (45,5% weiblich) Lernende haben an beiden MZPen teilgenommen. Die Stichprobe umfasste je zur Hälfte Lernende der Realschule und des Gymnasiums. Die Entwicklung der Stufenmodelle erfolgte auf einer größeren Datengrundlage, welche hier nicht näher beschrieben wird. Das informelle Vorwissen zu einfachen Brüchen wurde mit (de)kontextualisierten Items zur Anteilsbildung und inhaltlichen Nutzung der Anteilsbildung in unterschiedlich stark vorstrukturierten Situationen gemessen. Die Itemkonstruktion erfolgte in starker Orientierung an die Vorkenntnistests von Padberg (o.J.-a). Die Fähigkeiten zum Lösen von Sachsituationen im Bruchrechenkontext wurden mit Items gemessen, die auf einen Größenvergleich von Brüchen führten oder mithilfe einer der vier Bruchrechenoperationen gelöst werden konnten. Die Items sind vor allem an die Bruchrechentests von Padberg (o.J.-b) angelehnt. Zur Untersuchung der Prädiktivität wurden zunächst direkte und indirekte Wirkmechanismen in einem Pfadmodell spezifiziert. Darauf aufbauend wurden bivariate Zusammenhänge auf Grundlage von raschskalierten Stufenmodellen mit Vorher-Später Aussagen beschrieben. Die Identifikation und inhaltliche Charakterisierung der Niveaustufen erfolgte in Anlehnung an die Bookmark-Methode (Mitzel, Lewis, Patz, & Green, 2001), die differenzierte Beschreibung der Zusammenhänge beruht auf nichtparametrischen bivariaten Regressionsanalysen unter Verwendung des Gauß-Kerns (Duller, 2018).

Ergebnisse

Die linearen Regressionsanalysen liefern Hinweise, dass sich verschiedene Lernvoraussetzungen zu mathematischen Konzepten (z.B. informelles Vorwissen zu einfachen Brüchen, Fähigkeiten zum proportionalen Schließen) unter Kontrolle der anderen mathematikspezifischen Lernvoraussetzungen als Prädiktoren für die Fähigkeiten zum Lösen von Sachsituationen im Bruchrechenkontext erweisen. Die basaleren Maße wie die Fähigkeiten zum Schätzen von natürlichen Zahlen am Zahlenstrahl erweisen sich in diesen Modellen dagegen nicht als Prädiktoren. Vielmehr werden für diese Maße indirekte Zusammenhänge sichtbar, welche über die Lernvoraussetzungen zu mathematischen Konzepten mediiert werden. Bevor die Zusammenhänge zwischen einem informellen Vorwissen zu einfachen Brüchen und den Fähigkeiten zum Lösen von einfachen Sachsituationen im Bruchrechenkontext differenziert beschrieben werden, werden die entsprechenden raschskalierten

Stufenmodelle vorgestellt. Das Stufenmodell zum informellen Vorwissen zu einfachen Brüchen beschreibt auf der untersten Niveaustufe eine Anteilsbildung mit einfachen Brüchen. Eine typische Anforderung stellt hier zum Beispiel das Umrechnen von Längen in andere Einheiten dar. Auf den Stufen zwei und drei beschreibt das Modell eine inhaltliche Nutzung der Anteilsbildung. Während sich diese auf der zweiten Stufe auf vorstrukturierte Situationen beschränkt, kann sie auf der dritten Stufe in weniger stark vorstrukturierten Situationen und auch bezogen auf weniger vertraute Brüche inhaltlich genutzt werden. Das Stufenmodell zu den Fähigkeiten zum Lösen von einfachen Sachsituationen im Bruchrechenkontext beschreibt auf Niveaustufe eins das Bestimmen von Bruchteilen. Die zweite und dritte Niveaustufe erfordern den Vergleich von Anteilen sowie das Rechnen mit Brüchen. Auf Niveaustufe zwei erfordern die Situationen den Umgang mit einem einfacheren Zahlenmaterial (z.B. Stammbrüche) und in Bezug auf das Rechnen ein Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Brüchen. Niveaustufe drei umfasst dagegen zum Großteil Situationen, die auf eine Division von Brüchen führen. Auf Niveaustufe vier beschreibt das Modell ein proportionales Schließen mit Brüchen und auf Niveaustufe fünf die Anteilsbildung vom Anteil. Abb. 1 zeigt, welches Niveau beim Rechnen mit Größen im Bruchrechenkontext in Abhängigkeit von der erreichten Niveaustufe in Bezug auf das informelle Vorwissen zu einfachen Brüchen zu erwarten ist. Die Parallelen zur x- bzw. y-Achse stellen die Stufenabgrenzungen dar. Man kann davon ausgehen, dass Lernende, die vor der systematischen Einführung der Bruchrechnung die Anforderungen zur Anteilsbildung mit einfachen Brüchen bewältigen, später die Anforderungen zum Bestimmen von Bruchteilen sowie die einfacheren Anforderungen zu einem Anteilsvergleich und Rechnen mit Brüchen bewältigen. Hier scheint vor allem ein tieferes Verständnis für ein informelles Vorwissen zu einfachen Brüchen später mit dem Erreichen der Niveaustufe zwei verbunden zu sein. Lernende, die vorher die Anteilsbildung in vorstrukturierten Situationen inhaltlich nutzen, werden später voraussichtlich ein tieferes Verständnis für die Niveaustufe zwei erwerben und dabei im Bruchrechenkontext sicherer mit Größen rechnen. Für Lernende, die im Bereich des informellen Vorwissens bereits Niveaustufe drei erreichen, kann erwartet werden, dass sie später auch die schwierigeren Anforderungen zum Vergleich von Anteilen und Rechnen mit Brüchen bewältigen.

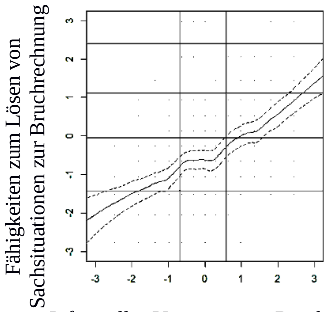

Abb. 1: Modell zur differenzierten Beschreibung des Zusammenhangs zwischen einem informellen Vorwissen und den Fähigkeiten zum Lösen von Sachsituationen

Diskussion

Die Studienergebnisse liefern Hinweise, dass der Aufbau eines inhaltlichen Vorwissens in einer frühen Ausbildungsphase im Sinne des Spiralprinzips notwendig ist, damit Lernende zu Beginn der Sekundarstufe I einfache Sachsituationen im Bruchrechenkontext lösen können. Über ein „mehr ist besser“ hinaus können auf Grundlage der Befunde Aussagen formuliert werden, welche Anforderungen die Lernenden zum Beispiel in Bezug auf ein informelles Vorwissen zu einfachen Brüchen vor der systematischen Einführung der Bruchrechnung bewältigen können sollten, um später auf einer bestimmten Niveaustufe im Bruchrechenkontext mit verschiedenen Größen rechnen zu können. Auf Grundlage dieser Beschreibungen können Lehrkräfte beispielsweise Implikationen für eine präventive oder nachträglich ausgleichende Förderung in die Wege leiten. Limitierend ist zu erwähnen, dass sich die differenzierten Beschreibungen auf bivariate Zusammenhänge beschränken. Weiterhin sollten zukünftig auch vermittelnde Lernprozesse analysiert werden, um die Entwicklung von Größenvorstellungen ausgehend von einer frühen hin zu einer späteren Ausbildungsphase in der frühen Sekundarstufe I adäquat beschreiben zu können. Möglicherweise wäre das mitunter ein Ansatz, das in dem Minisymposium diskutierte Modell zum Größenverständnis von Ruwisch (2014) für den frühen Sekundarstufenbereich weiterzuführen.

Literatur

Duller, C. (2018). Einführung in die nichtparametrische Statistik mit SAS, R und SPSS. Ein anwendungsorientiertes Lehr- und Arbeitsbuch. Berlin: Springer.

Hansen, N., Jordan, N., Fernandez, E., Siegler, R., Fuchs, L., Gersten, R., & Micklos, D. (2015). General and math-specific predictors of sixth-graders’ knowledge of fractions. Cognitive Development, 35, 34-49.

Hecht, S., & Vagi, K. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. Journal of Educational Psychology, 102(4), 843-859.

Mitzel, H. C., Lewis, D. M., Patz, R. J., & Green, D. R. (2001). The bookmark procedure: Psychological perspectives. In G. J. Cizek (Ed.), Setting performance standards: Concepts, methods, and perspectives (pp. 249-281). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Padberg, F. (2002). Anschauliche Vorerfahrungen zum Bruchzahlbegriff zu Beginn der Klasse 6. Praxis der Mathematik in der Schule (PM), 44(3), 112-117.

Padberg, F. (o.J.-a). Anschauliche Vorkenntnisse in der Bruchrechnung. Zugriff am 23.11.2016 unter http://www.bruchrechenunterricht.de/pdf/1-1.pdf

Padberg, F. (o.J.-b). Bruchrechentest. Zugriff am 23.11.2016 unter http://www.bruchrechenunterricht.de/pdf/1-3.pdf

Ruwisch, S. (2014). Reichhaltiges Schätzen. Schätzaufgaben und Schätzstrategien systematisieren. Grundschule Mathematik, 11(42), 40-43.

Schadl, C. & Ufer, S. (2018). Vorwissen für den Erwerb des Bruchkonzepts - Erhebungsinstrumente aus dem Projekt EWIWE. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 1551-1554). Münster: WTM.

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., . . . Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. Psychological Science, 23(7), 691-697.