

Daniel SOMMERHOFF, Kiel & Esther BRUNNER, Kreuzlingen

## **Mathematisches Argumentieren und Beweisen von Primarstufe bis Hochschule: Einblicke in drei Podiumsdiskussionen**

Der Aufbau mathematischer Argumentationskompetenzen gilt nicht nur als bedeutsamer Bildungsauftrag für sämtliche Bildungsstufen, sondern ist auch ein reich beforschtes Feld in der Mathematikdidaktik. Als Forschungsgebiet hat es in den letzten Jahren nochmal an Relevanz und Breite gewonnen, bspw. durch i) die Erweiterung auf frühe Kompetenzen im Elementar- und Primarbereich, ii) den Fokus auf experimentelle Aktivitäten, das Erstellen von Hypothesen sowie Aktivitäten wie das Verstehen und Validieren von Beweisen, oder durch iii) das Interesse am Übergang Schule – Hochschule. Innerhalb der deutschsprachigen Mathematikdidaktik gibt es jedoch nur wenige Möglichkeiten, entsprechende Forschung übergreifend zu betrachten, kontroverse Themen zu diskutieren oder Forschungsdesiderata für die kommenden Jahre festzulegen. Im Rahmen dreier Podiumsdiskussionen mit Expert\*innen im Forschungsbereich wurden deshalb aktuelle Erkenntnisse und offene Fragen entlang dreier Fragestellungen diskutiert:

- Welches sind zentrale Forschungsdesiderata im Kontext mathematischen Argumentierens der letzten 5 Jahre?
- Wie wird der Stellenwert des Experimentellen bzw. Exemplarischen beim math. Argumentieren in Praxis, Theorie oder Forschung eingeschätzt?
- Wie verhalten sich der Stellenwert von (inhaltlichem) mathematischem Wissen und von allgemeinen logischen Argumentationskompetenzen für das mathematische Argumentieren?

Die drei Podien wurden entlang von Bildungsstufen strukturiert und bezogen sich auf den Elementar-/Primarbereich (Brunner, Gasteiger, Philipp, Ruwisch), auf die Sekundarstufe (Heinze, Knipping, Kuntze, Meyer) und auf den Übergang Schule – Hochschule (Biehler, Kramer, Rach, Ufer).

Herausgreifen aus den drei anregenden und sehr reichhaltigen Podiumsdiskussionen möchten wir an dieser Stelle die Fragestellung nach der Rolle des Experimentellen und Exemplarischen beim mathematischen Argumentieren aus Sicht der Expert\*innen. Hier zeigte sich ein weitgehender Konsens in der großen Bedeutung, welche in allen drei Podien dem Experimentellen und Exemplarischen zugemessen wurde. Besonders interessant war dabei die Unterscheidung zwischen Experimentieren als Tätigkeit mit dem Experiment als Ausgangspunkt und Experimentieren als grundlegendes math. Denkprinzip im Podium zum Elementar-/Primarbereich. Dargelegt wurde dabei, dass die Grundidee des Experimentellen in der frühen Bildung gut verankert ist und Experimentieren als zentrales Lernprinzip im Sinne eines konstruktiven Umgangs mit einem kognitiven Konflikt und dem Bedürfnis nach Äquilibration gilt (Piaget, 1976).

Trotz des als hoch empfundenen Werts des Experimentellen und Exemplarischen auch im Podium zur Sekundarstufe, zeigte sich hier, dass an die Konzeptionen aus dem Elementar- bzw. Primarbereich im Sekundarunterricht nur mäßig angeknüpft wird. Das Podium stellte mathematisches Argumentieren als „changierenden Prozess“ dar und betonte, dass ein exploratives Vorgehen an Beweisproblemen zwar angestrebt wird, gleichzeitig im Exemplarischen nicht das Beispiel per se bedeutsam ist, sondern die (systematische) Erkundung daran und der dadurch angeregte Erkenntnisprozess. In dieser Kernbotschaft steckt die Bedeutung generischer Beispiele als lern- und erkenntnisförderliche Ausgangspunkte für weitere, allgemeinere Argumentationsprozesse bis hin zur Erstellung formal-deduktiver Beweise. Hervorgehoben wurde zudem, dass für gewinnbringendes Experimentieren der epistemologische Status experimenteller und exemplarischer Vorgehensweisen (von Lehrpersonen und Lernenden) erkannt werden muss. Im Hinblick auf propädeutisches Beweisen wurden insbesondere anschauliche, generische und narrative Beweise genannt (z. B. Biehler & Kempen, 2016; Wittmann, 2014), welche eine zentrale Rolle spielen, aber für die Lernenden oft nicht sofort durchschaubar sind.

Auch in der Podiumsdiskussion mit Fokus auf den Übergang Schule – Hochschule wurden Experimentelles und Exemplarisches als genuin mathematische Tätigkeiten verankert. In der Diskussion, die sich nun auch stärker auf Beweisen und Beweise konzentrierte, wurde Beweisen unter anderem als „Spiel mit Spielregeln“ beschrieben und gleichzeitig festgehalten, dass ebendieses durch den Fokus auf Beweisprodukte, deren „fertige“ Darstellung, sowie die eher begrenzte Anzahl an Anforderungssituationen im Studium möglicherweise versperrt wird.

So einig sich die drei Podien in der grundsätzlich wichtigen Rolle des Experimentellen und Exemplarischen beim mathematischen Argumentieren und Beweisen waren, so zeigte sich doch ebenso deutlich, dass bislang kaum Evidenz verfügbar ist, welche die Betonung des Exemplarischen und Experimentellen und des Prozesses gegenüber dem Produkt rechtfertigen würden (Grieser, 2017). Als vielversprechend wurden diesbezüglich auch Analysen und Evaluationen zur Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen dargestellt, für die bspw. im Zusammenhang mit Modellieren und Problemlösen Evidenz vorliegt. Aber gerade im Hinblick auf eine mögliche Transferierbarkeit von Erkenntnisgewinn am exemplarischen Beispiel bleiben derzeit viele Fragen offen.

## **Literatur**

Biehler, R. & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte—Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *JMD*, 37(1), 141–179.

Grieser, D. (2017). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik* (2., überarbeitete und erweiterte Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Piaget, J. (1976). *Die Äquilibration der kognitiven Strukturen* (1. Aufl.). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica*, (37), 213–233.