

Anna-Katharina ZURNIEDEN, Köln

Erste Erfahrungen mit dem Stellenwertsystem: Der Zehnerübergang

Mathematikdidaktische Relevanz

Dass ein Verständnis des Dezimalen Stellenwertsystems (DSS) eine zentrale Rolle für mentale Zahlvorstellungen und mathematische Fähigkeiten spielt, steht außer Frage. Im Themenkreis Arithmetik steht das Rechnen und damit insbesondere der Umgang mit natürlichen Zahlen im Vordergrund. Dies erfordert automatisch ein Anwenden des DSS, sobald die Zahlen größer als 9 sind. Eine Vielzahl an Studien belegt allerdings, dass in höheren Jahrgangsstufen deutliche Defizite bei Aufgaben zum DSS zu finden sind (vgl. u.a. Moser Opitz 2013). Gervasconi & Sullivan (2007) konnten eine Zunahme der Vulnerabilität des Stellenwertverständnisses in der Schuleingangsphase zeigen, sodass anhand ihrer Ergebnisse deutlich wird, dass ein früher Beginn der Förderung im Hinblick auf arithmetische Fähigkeiten sinnvoll erscheint. Dies bestätigen u. a. Moeller et al. (2011) und Thompson & Bramald (2002), die in ihren Forschungen Auswirkungen eines fehlenden bzw. eingeschränkten Stellenwertverständnisses auf spätere arithmetische Fähigkeiten und mentale Rechenkompetenzen feststellen. Grundsätzlich gilt ein eingeschränktes Stellenwertverständnis als Symptom für Rechenstörungen (vgl. Schipper et al. 2011). Gerade im Hinblick auf schriftliche Rechenverfahren kann ein solch fehlendes bzw. nicht ausgebildetes Stellenwertverständnis zu mechanischen und oft fehlerhaften Anwendungen des schriftlichen Algorithmus führen (vgl. Scherer 2009). Eine zentrale Hürde im Ausbilden des Stellenwertverständnisses ist die Zahlwortbildung, da die Zahlwörter gerade im deutschsprachigen Raum nicht einheitlich regelmäßig gebildet werden. Gleichzeitig beeinflusst die Zahlwortbildung aber die kognitive Zahlrepräsentation und damit auch das Stellenwertverständnis (vgl. Miura et al. 1994; Klein et al. 2013). Eine weitere Hürde zur Ausbildung eines Stellenwertverständnisses kann eine fehlende Orientierung im Zahlenraum darstellen (vgl. Schipper et al. 2011). Es ist offensichtlich, dass die Förderung eines dezimalen Stellenwertverständnisses von großer Bedeutung und eine frühe Anbahnung dessen auch mit Blick auf Rechenkompetenzen in der Grundschule erstrebenswert ist. Der Zehnerübergang von 9 auf 10 ist das erste Moment, bei dem vom DSS aktiv Gebrauch gemacht wird, da an dieser Stelle der Ziffernvorrat nicht ausreicht und das komplexe System greifen muss.

Entwicklung und Evaluation eines Lehr-Lernarrangements

Im Rahmen des „MINT-Lernraums“ des Instituts für Mathematikdidaktik der Universität zu Köln wird bei einem Projekt in Kooperation mit einer Schule des Förderschwerpunkts Hören und Kommunikation ein Lehr-Lernarrangement entwickelt, welches den Zehnerübergang explizit zur Anbahnung eines dezimalen

Stellenwertverständnisses erarbeitet. Gleichzeitig geht es darum, die individuellen Lernverläufe der Lernenden zu analysieren. Forschungsmethodologisch liegt diesem Vorgehen die fachdidaktische Entwicklungsforschung, insbesondere das Dortmunder Modell – FUNKEN, zugrunde (vgl. Prediger et al. 2012). Dieses vertritt ein Verständnis von Entwicklungsforschung, das zum einen gegenstands-, zum anderen prozessorientiert ist. Mit Hilfe mehrerer videografiertes Design-Experiment-Zyklen, in denen Fördereinheiten mit jeweils 4 Lernenden (2x2 Paare) durchgeführt werden, sollen das Lehr-Lernarrangement weiterentwickelt werden, Bedarfe der Lernenden, auch vor dem Hintergrund ihrer Hörschädigung, erfasst sowie die Lernverläufe nachvollzogen, verstanden und analysiert werden.

Zentral bei der Entwicklung des Lehr-Lernarrangements ist die Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstands, dem Zehnerübergang, im Hinblick auf das DSS. Zugrunde liegt hierbei Dedekinds Verständnis natürlicher Zahlen: Mit Hilfe der Abbildung φ , die auf das Grundelement 1 angewendet wird, entsteht ein geordnetes System \mathbb{N} , dessen Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen heißen (vgl. Dedekind 1965/1887). Es wird deutlich, dass die Erzeugungsvorschrift nach diesem Verständnis zentral ist. Bezogen auf den Zehnerübergang gilt hiernach, dass die Zahl 10 schlicht der Nachfolger der Zahl 9 ist, genauso wie die Zahl 7 der Nachfolger der Zahl 6 ist. Allerdings greift bei diesem Übergang das DSS, sodass er vor diesem Hintergrund einen großen Lernschritt darstellt. Für das entwickelte Lehr-Lernarrangement wird explizit nicht die übliche Erarbeitung des DSS über Bündelungen gewählt, sondern es soll der ordinale Zahlaspekt im Sinne Dedekinds und damit die Nachfolger- bzw. Vorgängerbildung im Fokus stehen. Mit Hilfe eines selbsterstellten Zählers und der Lern- und Spielwelt Rechenwendeltreppe (RWT) (vgl. Schwank 2018), die aus einem Innen- und Außenkreis besteht, bei denen Stangen mit Kugeln kreisförmig stufenweise angeordnet sind (Stangen Innenkreis: 0-9 orange Kugeln; Stangen Außenkreis: 10-19, je zehn grüne und entsprechend viele orange Kugeln), wird die Veränderung der Zahldarstellung durch das Einsetzen des DSS beim Übergang zur Zahl 10 hervorgehoben. Als Lernpfad ist vorgesehen, dass zunächst die Zahlenraumorientierung 0-9 im Fokus steht, daraufhin der Zehnerübergang erarbeitet und damit eine Zahlenraumerweiterung bis 19 stattfindet. Für die Zahlenraumorientierung 0-19 werden unter anderem Parallelbeziehungen (z.B. 3 und 13) bzw. -bewegungen (z.B. 3+4 und 13+4) erarbeitet (vgl. Abb. 1). Bei jeglichen Aufgabenstellungen auf allen Repräsentationsebenen, deren Vernetzung als Design-Prinzip dieser Förderung zugrunde gelegt wird, sind das Verständnis der natürlichen Zahlen sowie die Konstruktion des DSS leitend. Schließlich geht es beim letzten anvisierten Lernschritt um Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 19, insbesondere um die Übersetzung in andere Repräsentationsformen. Auch hierbei stehen die Aspekte des DSS im Vordergrund, über die dann wiederum auch ein arithmetisches Verständnis bzw. Rechenkompetenzen und -strategien angebahnt bzw. ausgebildet werden sollen.

Folgend sind zwei beispielhafte bearbeitete Aufgaben aus dem Lehr-Lernarrangement dargestellt, anhand derer unter anderem die intensive und enge Vernetzung der verschiedenen Darstellungsebenen deutlich wird.

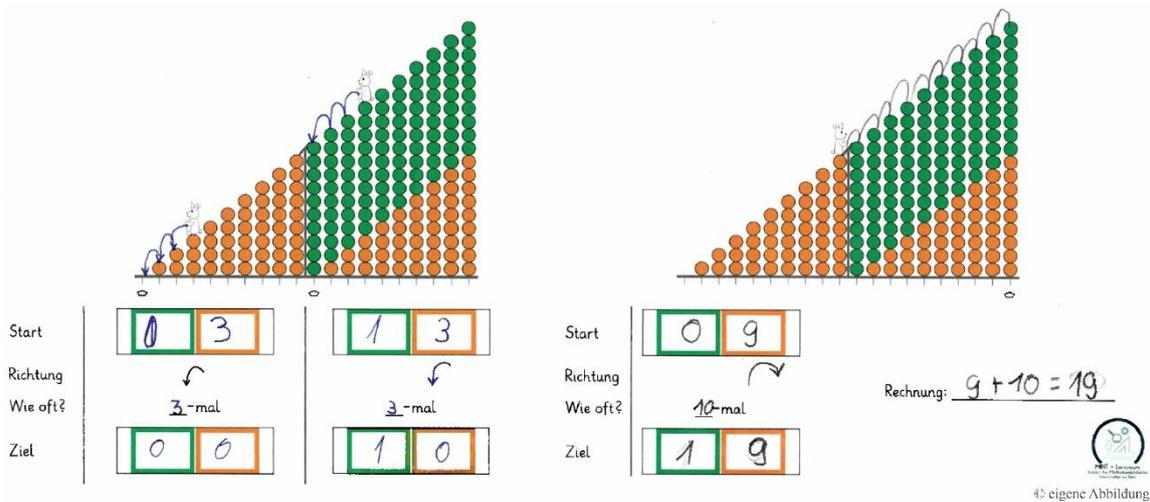


Abb. 1: Aufgabe zu Parallelbeziehungen bzw. Addition mit sprachlichem Gerüst, um die Lernenden auf dieser Ebene zu entlasten und eine Verknüpfung zur enaktiven Ebene herzustellen (ikonische Darstellung der RWT angelehnt an Schwank 2018)

Anhand dieser Aufgaben soll gezeigt werden, wie einerseits die dezimalen Strukturen berücksichtigt sowie erarbeitet und vertieft werden und wie sich andererseits darüber aber auch Möglichkeiten eröffnen, Rechenstrategien auf Grundlage des DSS zu vermitteln.

Der folgende Transkriptausschnitt ist eine Sequenz der 8. Fördereinheit, in der Schüler Hajo die von der Forscherin (AZ) formal-symbolisch dargestellte Aufgabe $9+4$ in die enaktive Handlung an der RWT und am Zähler übersetzt, indem er mit einem Hasen als Spielfigur auf der RWT hüpft und am Zähler die entsprechenden Rädchen dreht.

- AZ: Wo startest du?
- Hajo: Bei der [Hajo dreht am grünen und orangen Rädchen und setzt das Häschen auf die 9er-Kugelstange.] Bei der Neun.
- AZ: Genau. Und jetzt?
- Hajo: [Hajo hüpft mit dem Häschen auf die 10er-Kugelstange und dreht das grüne Rädchen nach oben. Hajo dreht das orange Rädchen nach unten (9 auf 8). Hajo dreht das orange Rädchen nach oben (8 auf 9 auf 0). Hajo hüpft mit dem Häschen auf die 11er-Kugelstange und dreht das orange Rädchen einmal nach oben (0 auf 1). ... Hajo hüpft mit dem Häschen auf die 13er-Kugelstange und dreht das orange Rädchen einmal nach oben (2 auf 3).]
- AZ: Super. ... Also an welchem Rädchen hast du jedes Mal gedreht?
- Hajo: [Hajo dreht leicht am orangen und am grünen Rädchen hin und her.] Mmh, ja. (...). Bei orange.
- AZ: Genau. Gut. Und das grüne, wann hast du das grüne genau gedreht?
- Hajo: Ehm, ja. Bei [Hajo führt seinen Finger an die 11er-Kugelstange.] (...) Bei Zehn? [Hajo zeigt mit dem Finger auf die 10er-Kugelstange.]

© eigene Abbildung

Abb. 2: Transkriptausschnitt 8. Fördereinheit

Als vorläufige Erkenntnis zeigt sich, dass Hajo ohne Schwierigkeiten die formal-symbolisch dargestellte Rechnung in die enaktive Ebene übersetzen kann: Für jeden Hüpf auf der RWT (einfache Nachfolgebildung) dreht er am Zähler entsprechend das orange Rädchen um eins weiter – beim Übergang auf 10 dreht er zusätzlich auch das grüne Rädchen, sodass er die dekadische Zahldarstellung umsetzen kann. Auf Nachfrage von AZ kann er erläutern, dass er das orange Rädchen jedes Mal gedreht hat und das grüne ausschließlich beim Wechsel auf die Zahl 10. In dieser Situation scheint ein Bewusstsein für das DSS bei Hajo erfolgreich angebahnt zu sein, auf das wiederum ein Ausbilden weiterer Rechenkompetenzen und -strategien aufbauen kann.

Als vorläufiges Fazit lässt sich festhalten, dass sich das entwickelte Lehr-Lernarrangement zur Förderung eines ersten Stellenwertverständnisses eignet, die Darstellungsebenen vernetzt sowie mit Hilfe von Aufgabenvariationen arithmetische Fähigkeiten ausgebildet und Strategien erarbeitet und verstanden werden können.

Literatur

- Dedekind, R. (1965). Was sind und was sollen die Zahlen? (7. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.
- Gervasconi, A.; Sullivan, P. (2007). Assessing and teaching children who have difficulty learning arithmetic. *Educational & Child Psychology*, 24, 40–53.
- Klein, E.; Bahnmueller, J.; Mann, A.; Pixner, S.; Kaufmann, L.; Nuerk, H.-C.; Moeller, K. (2013). Language influences on numerical development – Inversion effects on multi-digit number processing. *Frontiers in Psychology*, 4, 1–6.
- Miura, I.; Okamoto Y.; Kim C.C.; Chang C.M.; Steere M.; Fayol M. (1994). Comparisons of children's cognitive representation of number: China, France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *International Journal of Behavioral Development*, 17 (3), 401–411.
- Moeller, K.; Pixner, S.; Zuber, J.; Kaufmann, L.; Nuerk, H. C. (2011). Early Place-Value Understanding as a Precursor for Later Arithmetic Performance-Longitudinal Study on Numerical Development. *Research in Developmental Disabilities*, 32 (5), 1837–1851.
- Moser Opitz, E. (2013). Rechenschwäche/Dyskalkulie (2. Aufl.). Bern: Haupt.
- Prediger, S.; Link, M.; Hinz, R.; Hußmann, S.; Thiele, J.; Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell, *MNU* 65 (8), 452–457.
- Scherer, P. (2009). Diagnose ausgewählter Aspekte des Dezimalsystems bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern. In: M. Neubrandt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 835–838). Münster: WTM.
- Schipper, W.; Wartha, S.; von Schroeders, N. (2011). Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr – Handbuch zur Diagnostik und Förderung. Braunschweig: Schroedel.
- Schwank, I. (2018). Erlebniswelt Zahlen – Erstunterricht mit der Rechenwendeltreppe. Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler (4. erw. und überarb. Aufl.). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Thompson, I.; Bramald, R. (2002). An investigation of the relationship between young children's understanding of the concept of place value and their competence at mental addition. University of Newcastle: Department of Education.
<https://www.atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT184/Non-Member/ATM-MT184-14-15-Extra.pdf> (08.01.2021).