

Adaptive unstetige Finite Elemente
Methoden für elastoplastische
Kontaktprobleme

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Der Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Korosh Taebi

im September 2020

Dissertation

Adaptive un stetige Finite Elemente Methoden für elastoplastische
Kontaktprobleme

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter: Prof. Dr. Andreas Rademacher
Zweitgutachter: Prof. Dr. Heribert Blum

Tag der mündlichen Prüfung: 11.12.2020

Danksagung

In besonders hohem Maße bin ich Prof. Dr. Heribert Blum sowie Prof. Dr. Andreas Rademacher zu Dank verpflichtet. Sie haben mich über mein gesamtes Studium mit sehr viel Geduld und Vertrauen unterstützt, begleitet und immer wieder aufs Neue motiviert. Weiterhin gilt mein Dank der gesamten fünften Etage des Mathematikgebäudes der TU Dortmund, dem gesamten Lehrstuhl X und insbesondere Dr. Dustin Kumor, Dr. Alexander Freese und Dr. Jörg Frohne von denen ich sehr vieles gelernt habe. Darüber hinaus bedanke ich mich für die Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft durch das Schwerpunktprogramm 1480, in dessen Rahmen diese Dissertation entstanden ist.

Schließlich danke ich meinen Eltern, Nahid und Dariusch Taebi, für ihr Verständnis für lange Arbeitsnächte bei ihnen und entgangene gemeinsame Wochenenden. Sie haben einen nicht unerheblichen Anteil am Gelingen dieser Arbeit getragen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	vi
1 Grundlagen und Notation	1
1.1 Sobolev-Räume	1
1.2 Gebrochene Sobolev-Räume	6
2 Problemstellungen	9
2.1 Elastizität	9
2.2 Plastizität	11
2.3 Das Signorini Problem - statischer Kontakt	15
2.4 Das quasistatische elastoplastische Kontaktproblem	18
3 Diskretisierung und Lösungsmethoden	20
3.1 Diskretisierung des Signorini-Problems	21
3.2 Diskretisierung und Linearisierung des elastoplastischen Kontaktproblems	23
3.3 Eigenschaften der un stetigen Galerkin-Methoden	25
3.4 Diskrete gemischte Methode und biorthogonale Basen	27
4 A posteriori Fehleranalyse und Effizienzsteigerung	33
4.1 Fehlerschätzer für das elastische Kontaktproblem	34
4.2 Fehlerschätzer für das elastoplastische Kontaktproblem	39
4.3 Die hybride Finite Elemente Methode	41
5 Numerische Ergebnisse	43
5.1 Ein elastisches Kontaktbeispiel	44
5.2 Elastoplastischer Kontakt auf dem L-Gebiet	47
5.3 Elastoplastischer Kontakt in drei Dimensionen	50

5.4	Beispiel zur hybriden FEM	52
5.5	Netzauftrennung mit unstetigen Elementen	54
6	Fazit und Ausblick	56
	Literaturverzeichnis	59

Einleitung

Im Rahmen dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der mathematischen Modellierung und der numerischen Simulation von Kontaktproblemen aus der Strukturmechanik mit unstetigen Galerkin-Methoden. Konkret betrachten wir den Kontakt eines Körpers, der im Allgemeinen elastoplastische Materialeigenschaften besitzt, mit einem starren Hindernis. Im Spezialfall eines linear elastischen Materialgesetzes spricht man hier auch von einem Signorini-Problem. Fragen dieser Natur werden in der Regel mit Hilfe des physikalischen Hintergrunds als nichtlineare partielle Differentialgleichungen formuliert, deren Lösung aufgrund von mehreren Restriktionen zusätzlich weitere Nebenbedingungen erfüllen muss. Bei den in dieser Arbeit betrachteten Problemen handelt es sich zunächst um Ungleichheitsnebenbedingungen, die vom elastoplastischen Materialgesetz herrühren. Diese ermöglichen eine realitätsnahe Abbildung der Beziehung zwischen der Deformation und der Spannung innerhalb des Körpers. Eine weitere Ungleichheitsnebenbedingung hat ihren Ursprung in der Modellierung des Kontakts des Körpers mit dem Hindernis, wodurch speziell eine Durchdringung ausgeschlossen wird. Eine adäquate Behandlung dieser Gleichungen und Ungleichungen ist sowohl in den Ingenieurwissenschaften als auch in der Industrie von entscheidender Bedeutung, da die entsprechenden Lösungen naturgetreue Vorhersagen und optimale Herstellungsprozesse ermöglichen. Zu den Monografien, die dieses Themengebiet umfassend behandeln, zählen zum Beispiel die Arbeiten [28, 29, 35, 54, 61, 94].

Tatsache ist aber auch, dass bereits einfachste partielle Differentialgleichungen auf rein analytischem Wege nicht lösbar sind, geschweige denn

eine klassische Lösung besitzen. Demnach ist man immer mehr auf numerische Lösungsverfahren angewiesen, bei denen sich in den letzten Jahrzehnten insbesondere die Methode der Finiten Elemente (FEM) maßgebend bewährt hat. Die Idee beim Finite Elemente Ansatz ist es, das im unendlichdimensionalen Raum gestellte kontinuierliche Problem mittels einer Zerlegung des Rechengebiets auf ein entsprechendes Problem im endlichdimensionalen, stückweise polynomialen Funktionenraum zu überführen. Die Entwicklung von effizienten Lösungsverfahren für diese Probleme in diversen Konstellation ist dabei nach wie vor Gegenstand der Forschung. Dabei sind die Arbeiten [32, 55, 70, 75, 88] für zeitabhängige, reibungsbehaftete- sowie Zweikörperkontakt-Probleme zu erwähnen. Bei der in dieser Arbeit verwendeten Lösungsmethode handelt es sich um ein inexaktes, monolithisches Newton-Verfahren gekoppelt mit einer aktive-Mengen-Strategie, das in den Arbeiten [48–50] präsentiert wurde. Insbesondere wurde sie auch in den Arbeiten [8, 36, 38] beim Hindernis- bzw. Signorini-Problem in Zusammenhang mit unstetigen Finite Elemente Methoden verwendet.

Unstetige Finite Elemente Methoden sind in diesem Zusammenhang in die Menge der nichtkonformen Methoden einzuordnen, da sie unstetige Approximationen im diskreten Problem zulassen, die jedoch im kontinuierlichen Fall ausgeschlossen sind. Genauer wird die übliche Galerkin-Methode auf den einzelnen Elementen der Zerlegung des Rechengebiets separat angewendet und der Informationsaustausch zu den Nachbarelementen anschließend durch die Verwendung von numerischen Flüssen hergestellt. Diese Flexibilität macht die unstetige Finite Elemente Methode leicht anwendbar bei beispielsweise komplexen Zerlegungen des Gebiets im Hinblick auf lokale Verfeinerungen und damit verbundenen hängenden Knoten. Dem steht ein erhöhter Mehraufwand bei der Lösung der entsprechenden diskreten Probleme sowie bei der Analyse des a priori Fehlers zur exakten Lösung gegenüber, da nun sowohl Konsistenzfehler als auch Approximationsfehler zu berücksichtigen sind. Die ersten Arbeiten zu unstetigen Galerkin Methode sind in den 1970er-Jahren erschienen. Seitdem werden sie stets bei diversen Problemen der Inge-

neurwissenschaften erfolgreich angewendet und genießen, nicht zuletzt aufgrund des rasanten Anstiegs der Rechenleistung, Parallelisierbarkeit und Speicherkapazität der Computer, immer mehr Aufmerksamkeit in der Forschung, siehe [21, 24, 43, 71]. Einen Überblick über eine Vielzahl numerischer Flüsse ist in der Arbeit [6] zu finden, in der diese verglichen und die aus ihnen resultierenden numerischen Eigenschaften der Methoden untersucht werden. Die Anwendung auf elliptische bzw. linear elastische Probleme sind häufig in der Literatur studiert. Wir verweisen hierfür auf die Arbeiten [6, 25, 40]. Die Arbeiten [4, 26, 65, 67] beschäftigen sich mit der Analyse von unstetigen Galerkin-Methoden bei Verwendung in elastoplastischen Problemen ohne Kontakt. Auf den a priori Fehler bei Variationsungleichungen erster und zweiter Art wird in den Arbeiten [84, 85] eingegangen.

Unabhängig von der genauen Wahl der numerischen Flüsse teilen die unstetigen Verfahren jedoch auch die Eigenschaft, dass im Vergleich zum stetigen Ansatz, bei der gleichen Anzahl von Finiten Elementen, ein wesentlich größeres und dichter besetztes System zu lösen ist. Um diese Komplikationen bewältigen zu können ist ein Ziel dieser Arbeit die Herleitung von a posteriori Fehlerschätzern für sowohl das Signorini-Problem als auch für das elastoplastische Kontaktproblem in Verbindung mit unstetigen Galerkin-Methoden. Sie erlauben es die Genauigkeit der Finite Elemente Simulation zu erhöhen, indem sie Teilmengen des Gebiets mit hohen Fehleranteilen lokalisieren, die nachfolgend für weitere Rechenschritte adaptiv verfeinert werden. Somit wird der betriebene Berechnungsaufwand nur in Relation zur Genauigkeit der Approximation gesteigert und damit die theoretisch optimalen Konvergenzraten hin zur exakten Lösung erhalten. In der Literatur existieren eine Reihe von Arbeiten zum Thema a posteriori Fehlerschätzer. Eine ausführliche Behandlung dieses Themas findet man in den Monografien [2, 7, 22, 82] und speziell bei unstetigen Galerkin-Methoden in den Arbeiten [17, 53, 73]. Beim Hindernisproblem verweisen wir auf die Arbeiten [3, 9, 10, 12, 20, 47, 52, 57, 81]. Entsprechende Resultate mit unstetigen Galerkin-Methoden sind lediglich in [36, 37, 86] zu finden. A posteriori Fehlerschätzer für das Signorini-Problem werden

beispielsweise in den Arbeiten [19, 27, 44, 45, 58, 62, 76, 87, 95] betrachtet. Hinsichtlich der unstetigen Galerkin-Methode wird in der Arbeit [83] ein residualer Fehlerschätzer für das vereinfachte Signorini Problem mit Reibung hergeleitet. In der Tat wird weiterhin in der Arbeit [38] ein residualer a posteriori Fehlerschätzer für das Signorini Problem mit unstetigen Elementen präsentiert. Dieses Resultat werden wir mit einem neuen Beweis, basierend auf einer Idee aus [75] bzw. [10] rekonstruieren können. Ein weiterer neuartiger Beitrag dieser Dissertation ist die Herleitung eines residualen Fehlerschätzers für das elastoplastische Kontaktproblem im Rahmen der unstetigen Galerkin-Methode aufbauend auf der Vorgehensweise in [56] und [17]. Weitere Literaturstellen bezüglich a posteriori Fehlerschätzern innerhalb der Plastizität sind durch [5, 16, 18, 60, 75, 77, 88] gegeben.

Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten numerischen Flüsse haben einen Term gemeinsam mit dem allzu große Sprünge in der Lösung durch einen geeignet gewählten Parameter entsprechend bestraft werden. Durch gezielten Verzicht auf diesen Term ist es jedoch möglich ein unstetiges Verschiebungsfeld und eine Auftrennung des Finite Elemente Netzes zu realisieren, was wir als Grundlage für einen neuen Ansatz für eine Spannbildungssimulation verwenden werden.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: Kapitel 1 enthält einen Überblick über grundlegende Funktionenräume, Sätze und die Notation, die darauf folgend verwendet wird. In Kapitel 2 beschäftigen wir uns mit den zu lösenden Gleichungen im kontinuierlichen Kontext. Dabei beginnen wir mit den Bedingungen des Kräftegleichgewichts in der linearen Elastizitätstheorie und fahren, darauf aufbauend, mit dem nicht-linearen Materialverhalten in der Plastizität fort. Beide Zusammenhänge werden in den Abschnitten 2.3 und 2.4 jeweils durch Bedingungen für einen möglichen Kontakt mit einem Hindernis erweitert. Eine Erläuterung der verwendeten Lösungsmethoden für die jeweiligen diskreten Probleme erfolgt in Kapitel 3. Insbesondere werden wir im Abschnitt 3.3 auf wichtige Eigenschaften der unstetigen Galerkin-Verfahren eingehen

und in 3.4 die Umsetzung der Mortar Methode im Rahmen der unstetigen Finite Elemente Methoden erläutern. Die zentralen Resultate dieser Arbeit werden in Kapitel 4 hergeleitet. Neben der Darstellung einer hybriden Finite Elemente Methode bestehend aus simultaner Verwendung von stetigen und unstetigen Ansatzfunktionen werden wir jeweils einen residualen Fehlerschätzer für das rein elastische bzw. für das elastoplastische Kontaktproblem herleiten. Die Anwendung dieser Fehlerschätzer auf Beispielprobleme mit vorgegebener exakter Lösung bzw. einer Lösung mit geringer Regularität erfolgt in Kapitel 5 in Zusammenhang mit einem adaptiven Algorithmus. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Untersuchung der jeweiligen Konvergenzraten des Fehlers bei adaptiver bzw. uniformer Verfeinerung des Finite Elemente Netzes. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels befassen wir uns mit der Netzauftrennung innerhalb einer quasistatischen Rechnung und schließen diese Arbeit im Kapitel 6 mit einem Fazit und Ausblick ab.

Kapitel 1

Grundlagen und Notation

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über den mathematischen Rahmen in dem sich diese Arbeit befindet. Im Abschnitt 1.1 wird die Einführung von Sobolev-Räumen im Fokus liegen, welche für die Beschreibung der kontinuierlichen Problemstellungen benötigt werden. Die dort präsentierten Resultate sind hauptsächlich aus den Büchern [1, 11, 30, 78, 91] entnommen. Die Erweiterung dieser Funktionenräume auf sog. gebrochene Sobolev-Räume geschieht im Abschnitt 1.2. Diese bilden das Fundament für die Verwendung und Analyse von un stetigen Finite Elemente Methoden und werden demnach in den folgenden Kapiteln häufig verwendet. Einzelheiten hierzu sind in den Büchern bzw. im Manuskript [24, 42, 43, 72] zu finden.

1.1 Sobolev-Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \{2, 3\}$ ein beschränktes Polygonebiet. Für eine reellwertige messbare Funktion f auf Ω sei durch

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx \tag{1.1}$$

das Lebesgue-Integral sowie die Normen

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1.2}$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| \mid x \in \Omega\} \quad (1.3)$$

und die entsprechenden Lebesgue-Räume

$$L^p(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar, } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\} \quad (1.4)$$

als Äquivalenzklassen von fast überall übereinstimmenden Funktionen gegeben. Speziell im Fall $p = 2$ ist dieser Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv \, dx, \quad u, v \in L^2(\Omega) \quad (1.5)$$

ein Hilbert-Raum. Für $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ gilt in Lebesgue-Räumen stets die Hölder-Ungleichung

$$\|u v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \quad (1.6)$$

bzw. die Cauchy-Schwarz-Ungleichung im Spezialfall $p = q = 2$. Des Weiteren verwenden wir für vektorwertige bzw. matrixwertige Funktionen, die in jeder Komponente zu $L^p(\Omega)$ gehören, die Notation $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ respektive $L^p(\Omega, \mathbb{R}^{d \times d})$ und übertragen diese Schreibweise analog auf andere Funktionenräume.

Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir den Sobolev-Raum

$$W^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

wobei α ein Multiindex und $D^\alpha v$ die entsprechende Ableitung von v im schwachen Sinne ist. Mit den Normen

$$\|v\|_{m,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (1.7)$$

$$\|v\|_{m,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (1.8)$$

sind diese weiterhin auch Banach-Räume und insbesondere für $1 < p < \infty$ auch reflexiv. Für spätere Anwendungen definieren wir auch die Seminormen

$$|v|_{m,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.9)$$

$$|v|_{m,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.10)$$

Erneut erhalten wir im Spezialfall $p = 2$ den Raum $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, der zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

zum Hilbert-Raum wird. Abkürzend schreiben wir $\|\cdot\|_{m,\Omega} := \|\cdot\|_{m,2,\Omega}$ bzw. $\|\cdot\|_{0,\Omega} := \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ und verzichten auch bei den Seminormen auf den Index Ω wenn keine Unklarheit besteht.

In den folgenden Kapiteln wird es nötig sein, Funktionen aus $H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ gegebene Werte auf Teilen des Randes $\Gamma := \partial\Omega$ vorschreiben zu können. Um dies zu ermöglichen, wird der Spuroperator $\gamma: H^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma, \mathbb{R}^d) := \gamma(H^1(\Omega, \mathbb{R}^d))$ verwendet. Dieser ist stetig, linear und es gilt $\gamma(v) = v|_{\partial\Omega}$ für $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, siehe [1, Theorem 7.53]. Die Einschränkung von Funktionen eines Sobolev-Raums auf einen Teil des Randes von Ω sind in dieser Arbeit somit stets im Spursinne zu verstehen. Bei gegebenem äußeren Normalenfeld n des Randes $\partial\Omega$ sind darüber hinaus der Normalen- bzw. Tangentialteil der Funktion wohldefiniert. Für eine Funktion $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ existiert demnach die Zerlegung, siehe [54, Theorem 5.5],

$$\gamma(v) = v_n n + v_t, \quad (1.11)$$

mit $v_n \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $v_t = \gamma(v) - v_n n$. Die Normal- bzw. Tangentialkomponenten eines Vektors $u \in \mathbb{R}^d$ bzw. eines Tensors $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ bezüglich des

nach außen gerichteten Normalenvektors n an $\partial\Omega$ definieren wir durch

$$v_n := v \cdot n, \quad v_t := v - v_n n, \quad (1.12)$$

$$\sigma_{nn} := (\sigma n) \cdot n, \quad \sigma_t := \sigma n - \sigma_n n. \quad (1.13)$$

Sei nun $\Gamma_D \subseteq \Gamma$ eine abgeschlossene Teilmenge mit positivem Maß sowie $\Gamma_C \subseteq \Gamma$ mit $\overline{\Gamma_C} \subsetneq \Gamma \setminus \Gamma_D$. Für eine Funktion $v \in H_D^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ sei die Einschränkung des Spuoperators auf die entsprechenden Ränder definiert durch

$$\gamma_D(v) := \gamma|_{\Gamma_D}(v), \quad \gamma_C(v) := \gamma|_{\Gamma_C}(v). \quad (1.14)$$

Damit definieren wir nun

$$H_D^1(\Omega, \mathbb{R}^d) := \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid \gamma_D(v) = 0\}, \quad (1.15)$$

sowie den Hilbertraum

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R}^d) := \gamma|_{\Gamma_C}(H_D^1(\Omega, \mathbb{R}^d)), \quad (1.16)$$

mit der Slobodětskij-Norm

$$\|\nu\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_C}^2 := \|\nu\|_{0, \Gamma_C}^2 + \int_{\Gamma_C} \int_{\Gamma_C} \frac{|\nu(x) - \nu(y)|^2}{|x - y|^d} dx dy. \quad (1.17)$$

Der topologische Dualraum zu $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R}^d)$ wird mit $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R}^d)$ bezeichnet und mit der üblichen dualen Norm

$$\|\mu\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C} := \sup_{0 \neq \nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)} \frac{\langle \mu, \nu \rangle_{\Gamma_C}}{\|\nu\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_C}}, \quad (1.18)$$

versehen.

Bei der Behandlung von Anfangswertproblemen spielen Bochner-Räume eine besondere Rolle. Sei dazu X ein Banach-Raum und $t_E > 0$ gegeben. Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir unter der Voraussetzung der Messbarkeit

die Bochner-Räume durch

$$L^p([0, t_E], X) := \{v : [0, t_E] \rightarrow X \mid \|v\|_{L^p([0, t_E], X)} < \infty\}, \quad (1.19)$$

$$(1.20)$$

wobei die Normen durch

$$\|v\|_{L^p([0, t_E], X)} := \left(\int_0^{t_E} \|v(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (1.21)$$

$$\|v\|_{L^\infty([0, t_E], X)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq t_E} \|v(t)\|_X \quad (1.22)$$

gegeben sind. Wir halten fest, dass Bochner-Räume auch Banach-Räume sind und verweisen für Details auf [78, Kapitel 10.1].¹ Die zeitliche Ableitung solcher Funktionen wird mit einer entsprechenden Formel für die partielle Integration analog zur schwachen Ableitung im Ort definiert. Hierfür verwenden wir abkürzend die Bezeichnungen $v^{(i)} := \frac{d^i v}{dt^i}$ bzw. $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$. Auf diese Weise gelangen wir zu den Räumen $W^{m,p}([0, t_E], X)$ mit $m \geq 0$ und $p \geq 1$, welche Funktionen $v \in L^p([0, t_E], X)$ enthalten, deren i -te zeitliche Ableitungen für $i \leq m$ ebenfalls in $L^p([0, t_E], X)$ liegen. Weiterhin sind mit der Norm

$$\|v\|_{W^{m,p}([0, t_E], X)} := \left(\sum_{i=0}^m \|v^{(i)}\|_{L^p([0, t_E], X)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.23)$$

die Räume $W^{m,p}([0, t_E], X)$ auch Banach-Räume. Für den Fall, dass X ein Hilbertraum ist erhalten wir für $p = 2$ erneut als Spezialfall den Hilbert-Raum $H^m([0, t_E], X) := W^{m,2}([0, t_E], X)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m([0, t_E], X)} := \int_0^{t_E} \sum_{i=0}^m (u^{(i)}(t), v^{(i)}(t))_X dt. \quad (1.24)$$

¹Streng genommen sind die Elemente dieser Räume wie die Funktionen der L^p -Räume auch als Äquivalenzklassen von Funktionen zu verstehen, die f. ü. auf $(0, t_E)$ übereinstimmen

1.2 Gebrochene Sobolev-Räume

Im Zusammenhang mit der Formulierung von Problemstellungen durch unstetige Galerkin-Methoden (bzw. dG-Methoden aus dem Englischen für discontinuous Galerkin methods) benötigen wir das Konzept von gebrochenen Sobolev-Räumen. Dabei sind sämtliche Begriffe stark von einer Zerlegung des Gebiets Ω abhängig. Im Folgenden sei \mathcal{T}_h eine zulässige und quasiuniforme Zerlegung von Ω im Sinne von [11, Definition 5.1], in endlich viele, konvexe Viereckselemente bzw. Quader $T \subset \Omega$. Wichtig ist es zu fordern, dass \mathcal{T}_h die Randeinteilung von Ω berücksichtigt, d.h. eine Kante $e \subset \partial\Omega$, deren Schnitt mit einer der Mengen Γ_D , Γ_N oder Γ_C ein positives Maß hat, muss notwendigerweise vollständig im Abschluss der entsprechenden Menge liegen. Weiterhin sei \mathcal{E}_h die Menge aller Randkanten aller Elemente von \mathcal{T}_h und $\mathcal{E}_h^i := \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega$ die Menge aller inneren Kanten. Zu gegebenem $m \in \mathbb{N}$ definieren wir den gebrochenen Sobolev-Raum durch

$$H^m(\mathcal{T}_h) := \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi|_T \in H^m(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (1.25)$$

mit der Norm bzw. der Seminorm

$$\|v\|_m := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{m,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |v|_m := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |v|_{m,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.26)$$

Bei Funktionen aus diesen Räumen sind sämtliche Differential- bzw. Integraloperatoren (wie der Gradient, der symmetrisierte Gradient und die Divergenz und der Gleichen) stets elementweise zu verstehen. Beispielsweise bedeutet das für $u \in H^1(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} u \, dx. \quad (1.27)$$

Funktionen aus gebrochenen Sobolev-Räumen können weiterhin durchaus Unstetigkeiten entlang der Kanten der Triangulierung besitzen. Betrachten wir eine innere Kante $e \in \mathcal{E}_h^i$ sowie die zwei benachbarten Ele-

mente $T^+, T^- \in \mathcal{T}_h$ mit $e = \overline{T^+} \cap \overline{T^-}$. Für die entsprechenden nach außen gerichteten Normalenvektoren n_e^+ und n_e^- gilt in diesem Fall $n_e^- = -n_e^+$. Seien durch $\varphi \in H^m(\mathcal{T}_h)$, $v \in H^m(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^d)$ und $\tau \in H^m(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^{d \times d})$ jeweils skalare, vektorwertige und matrixwertige Funktionen gegeben. Mit φ^+, v^+, τ^+ bzw. φ^-, v^-, τ^- bezeichnen wir die vom jeweiligen Element aus betrachtete Spur der Funktion auf der Kante e . Damit werden nun der Sprung $[[\cdot]]$ sowie der Mittelwert $\{\cdot\}$ entlang einer inneren Kante wie folgt definiert

$$[[\varphi]] := \varphi^+ n^+ + \varphi^- n^-, \quad \{\varphi\} := \frac{1}{2} (\varphi^+ + \varphi^-), \quad (1.28a)$$

$$[[v]] := v^+ \otimes n^+ + v^- \otimes n^-, \quad \{v\} := \frac{1}{2} (v^+ + v^-), \quad (1.28b)$$

$$[[\tau]] := \tau^+ n^+ + \tau^- n^-, \quad \{\tau\} := \frac{1}{2} (\tau^+ + \tau^-). \quad (1.28c)$$

Dabei bezeichnet \otimes das dyadische Produkt. Auf Randkanten $e \in \partial\Omega$ setzen wir

$$[[\varphi]] := \varphi n, \quad \{\varphi\} := \varphi, \quad (1.29a)$$

$$[[v]] := v \otimes n, \quad \{v\} := v, \quad (1.29b)$$

$$[[\tau]] := \tau n, \quad \{\tau\} := \tau. \quad (1.29c)$$

Nach diesen Definitionen ist es hilfreich Ergebnisse über die Relation dieser Räume in einem Lemma festzuhalten.

Lemma 1.1. *Für $m \geq 0$ gilt stets*

$$H^m(\Omega) \subset H^m(\mathcal{T}_h), \quad H^{m+1}(\mathcal{T}_h) \subset H^m(\mathcal{T}_h). \quad (1.30)$$

Außerdem gilt für alle $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$

$$v \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow [[v]] = 0 \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^i. \quad (1.31)$$

Beweis: Siehe [24, Lemma 1.22, Lemma 1.23].

Mit leichten Modifikationen lassen sich weiterhin die Poincaré-Ungleichung und die Kornsche Ungleichung für Funktionen aus gebrochenen Sobolev-Räumen verallgemeinern.

Satz 1.2 (Poincaré Ungleichung für gebrochene Sobolev-Räume). *Für $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$ und $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ mit $|\Gamma_D| > 0$ gilt:*

$$\|v\|_0 \leq C \left(\|\nabla v\|_0^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i \cup \Gamma_D} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{d-1}}} \|[[v]]\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.32)$$

Beweis. Siehe [72, Kapitel 3.1.4], [14] □

Das Analogon zur Korn'schen Ungleichung erhalten wir wie folgt.

Theorem 1.3 (Korn'sche Ungleichung für gebrochene Sobolevräume). *Sei $\Gamma_D \subset \Gamma$ ein Teil des Randes mit $|\Gamma_D| > 0$. Dann gibt es ein $C > 0$ so, dass für alle $v \in H^1(\mathcal{T}_h)^d$ mit $\varepsilon(v) := \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^\top)$ gilt:*

$$\|\nabla v\|_0 \leq C \left(\|\varepsilon(v)\|_0^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i \cup \Gamma_D} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{d-1}}} \|[[v]]\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.33)$$

Beweis. Siehe [72, Kapitel 5.1.2], [13] □

Kapitel 2

Problemstellungen

In diesem Kapitel stellen wir die grundlegende Problematik, mit denen wir uns im Rahmen dieser Arbeit beschäftigen, vor. Das Fundament der mathematischen Theorie, mit dem wir diese bearbeiten, sind Sätze aus der konvexen Analysis. Diese erlauben einen eleganten Weg zur Beschreibung der physikalischen Phänomene innerhalb der Plastizität und des Kontakts zweier Körper. Wir werden zu Beginn auf die Gleichungen der Elastizität und Plastizität in den Abschnitten 2.1 und 2.2 eingehen. Der Inhalt dieser Abschnitte ist hauptsächlich den Büchern [11] bzw. [39] entnommen. Darauf aufbauend geben wir im Abschnitt 2.3 die mathematische Modellierung des Kontakts eines verformbaren Körpers mit einem starren Hindernis an. Der hier betrachtete Körper kann wahlweise rein elastische oder elastoplastische Materialeigenschaften besitzen. Im rein elastischen Fall spricht man dabei auch von einem Signorini-Problem. Hier stützen wir uns im Wesentlichen auf [54]. Der Abschnitt 2.4 beinhaltet die gemischte Formulierung dieser Probleme, welche wir für die numerische Behandlung heranziehen werden.

2.1 Elastizität

Sei durch Ω ein kontinuierliches und homogenes Medium und mit $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $f_N \in L^2(\Gamma_N, \mathbb{R}^d)$ jeweils eine Volumenkraft, die auf Ω bzw. eine Neumannkraft, die auf dem Neumannrand Γ_N wirken soll, gegeben. Die durch den Einfluss dieser Kräfte bedingten Verschiebungen

im Körper werde durch eine Funktion u beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit nehmen wir an, dass hierdurch Verzerrungen innerhalb des Materials entstehen, die hinreichend klein sind und mit dem (linearisierten) Verzerrungstensor $\varepsilon := \varepsilon(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\top)$, siehe [11, Kapitel VI, Bemerkung 1.1] berechnet werden können. Auf dem Dirichlet-Rand Γ_D sei der Körper fest eingespannt. Diese Bedingung wird durch die Forderung $u = 0$ auf Γ_D im Modell realisiert. Im Kräftegleichgewicht stehen diese Kräfte den Spannungen im Material gegenüber, welche über das Hooksche Gesetz definiert werden. Darüber erhalten wir die Beziehung $\sigma := \sigma(u) := \mathbb{C}\varepsilon$ mit dem Elastizitätstensor vierter Stufe \mathbb{C} . Bei homogenen und isotropen Materialien ist dieser mit Hilfe des Schubmoduls $\mu > 0$ und des Kompressionsmoduls $\kappa > 0$ durch

$$\mathbb{C}\varepsilon = 2\mu \operatorname{dev}(\varepsilon) + \kappa \operatorname{tr}(\varepsilon)I, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_{\operatorname{sym}}^{d \times d} \quad (2.1)$$

gegeben ¹, wobei $\operatorname{dev}(\varepsilon) := \varepsilon - \frac{1}{d} \operatorname{tr}(\varepsilon)I$ der deviatorische Anteil des Tensors ε und I der Einheitstensor in \mathbb{R}^d sowie $\mathbb{R}_{\operatorname{sym}}^{d \times d} := \{\alpha \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq d\}$ der Raum der symmetrischen Matrizen ist. Des Weiteren treffen wir hier die üblichen Annahmen über Symmetrie, Beschränktheit der Komponenten sowie positive Definitheit von \mathbb{C} , d.h.

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{klij} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, d\}, \quad (2.2a)$$

$$\mathbb{C}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega) \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, d\}, \quad (2.2b)$$

$$\exists C_0 > 0 \text{ mit } \varepsilon: \mathbb{C}: \varepsilon \geq C_0 \|\varepsilon\|_0^2 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{\operatorname{sym}}^{d \times d}. \quad (2.2c)$$

Die Eigenschaften (2.2) des Elastizitätstensors implizieren weiterhin die Existenz der Inversen von \mathbb{C} , welche ebenfalls die in (2.2) genannten Eigenschaften besitzt. Damit lauten das Materialgesetz und die Gleichgewichtsbedingung der linearen Elastizität zusammen mit der Randbe-

¹Oft wird dieser Zusammenhang auch mit Hilfe des Elastizitätsmoduls $E > 0$ bzw. der Poisson-Zahl $\nu > 0$ beschrieben, die sich jedoch leicht in die obigen Konstanten umrechnen lassen.

dingungen (siehe [11, Kapitel VI]):

$$\sigma = \mathbb{C} \varepsilon(u) \quad \text{in } \Omega, \quad (2.3a)$$

$$-\operatorname{div}(\sigma) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.3b)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad (2.3c)$$

$$\sigma n = f_N \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (2.3d)$$

Mit dem Raum $V := H_D^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ist die schwache Formulierung des Problems in (2.3) gegeben durch:

Finde ein $u \in V$ mit

$$a(u, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V, \quad (2.4)$$

wobei die Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und die Linearform $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \mathbb{C} \varepsilon(u) : \varepsilon(\varphi) \, dx, \quad (2.5)$$

$$\langle l, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N \cdot \varphi \, do \quad (2.6)$$

definiert sind. Die Existenz einer Lösung $u \in V$ für das Problem (2.4) folgt im Wesentlichen direkt aus dem Lax-Milgram Lemma und der Korn'schen Ungleichung, siehe [11, Kapitel VI, §3].

2.2 Plastizität

Im vorherigen Abschnitt 2.1 sind die Spannungen durch die Verzerrungen mit einem linearen Zusammenhang eindeutig festgelegt gewesen. Die Tatsache, dass dabei mit größer werdenden Deformationen beliebig hohe Spannungen erreichbar sind, entspricht jedoch nicht den Beobachtungen aus der Natur. Im Modell gehen wir davon aus, dass dieser Zusammenhang für Verzerrungen bis zu einer Grenze weiterhin linear bleibt, sich darüber hinaus jedoch nichtlinear verändert. Die Änderung dieser

Materialeigenschaft wird als Verfestigung bezeichnet. Des Weiteren sind Verformungen in der Elastizität vollständig reversibel, was speziell bei Metallen im Allgemeinen nicht der Fall ist. Durch eine Erweiterung des Modells hin zur Plastizität, vergleiche [68, Kap. 3], [78, Kap. 27], werden diese Phänomene im Materialmodell mit einbezogen. Im Folgenden betrachten wir den ratenunabhängigen, quasistatischen Fall mit linearer isotroper Verfestigung. Hier nehmen wir an, dass sich die Verzerrungen aus einem elastischen Anteil ε^e und einem plastischen Anteil ε^p additiv zusammensetzen

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad (2.7)$$

und, dass der Spannungstensor über das lineare Elastizitätsgesetz nur von dem elastischen Anteil der Verzerrungen abhängt, d.h. es gilt $\sigma = \mathbb{C}\varepsilon^e = \mathbb{C}(\varepsilon - \varepsilon^p)$. Um die beim Plastifizieren auftretende Verhärtung des Metalls im Modell berücksichtigen zu können, benutzen wir innere Variablen ξ bzw. innere Kräfte χ und gehen zu verallgemeinerten Verzerrungen $(\varepsilon(t, x), \xi(t, x)) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \times \mathbb{R}$ bzw. verallgemeinerten Spannungen $(\sigma(t, x), \chi(t, x)) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \times \mathbb{R}$ über, die nun sogar zusätzlich zum Ort $x \in \Omega$ auch von der Zeit $0 \leq t \leq t_E$ abhängen. Die inneren Kräfte sind bei linearer isotroper Verfestigung mit der Materialkonstanten $\gamma_{\text{iso}} > 0$ an die innere Variable ξ via $\chi = -\gamma_{\text{iso}}^{-1}\xi$ gekoppelt, siehe [39, Kapitel 3.2]. Das elastoplastische Materialverhalten formalisieren wir durch ein Fließgesetz, indem wir nur verallgemeinerte Spannungen zulassen, die sich in einer abgeschlossenen, konvexen und zusammenhängenden Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \times \mathbb{R}$ mit $(0, 0) \in \mathcal{K}$ befinden. In dieser Arbeit verwenden wir dafür die Darstellung $\mathcal{K} = \{(\sigma, \chi) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \times \mathbb{R} \mid F(\sigma, \chi) \leq 0\}$ mit der von Mises Fließfunktion

$$F: \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

$$F(\sigma, \chi) := \|\text{dev}(\sigma)\|_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0(1 - \chi), \quad (2.9)$$

und dem Materialparameter $\sigma_0 \geq 0$. Aus thermodynamischen Gründen fordern wir in unserem Modell abschließend die Gültigkeit des Prinzips

der maximalen plastischen Arbeit

$$\sigma: \dot{\varepsilon}^p + \chi: \dot{\xi} \geq \tau: \dot{\varepsilon}^p + \zeta: \dot{\xi}, \quad \forall (\tau, \zeta) \in \mathcal{K}, \quad (2.10)$$

was die zeitliche Änderung der plastischen Verzerrungen und inneren Variablen (ε^p, ξ) mit den zugehörigen Spannungen und inneren Kräfte (σ, χ) zu jedem Zeitpunkt in Verbindung bringt. Insbesondere lässt sich aus dieser Bedingung folgern, siehe [39, Kapitel 3.2], dass plastisches Materialverhalten nur bei Zuständen auf dem Rand von \mathcal{K} eintreten kann, bzw.

$$(\sigma, \chi) \in \text{int}(\mathcal{K}) \Rightarrow (\dot{\varepsilon}^p, \dot{\xi}) = (0, 0). \quad (2.11)$$

Aus dem Grund wird das Innere von \mathcal{K} auch als elastischer Bereich und $\partial\mathcal{K}$ als Fließfläche bezeichnet. Insgesamt setzen sich die Gleichungen für die Beschreibung der Plastizität mit linearer, isotroper Verfestigung aus dem konstitutiven Gesetz, dem inneren Kräftegleichgewicht, der Komplementaritätsbedingung (2.10) sowie den Randbedingungen wie folgt zusammen:

$$\sigma = \mathbb{C}(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad \text{in } \Omega \times [0, t_E], \quad (2.12a)$$

$$\chi = -\gamma_{\text{iso}}^{-1} \dot{\xi} \quad \text{in } \Omega \times [0, t_E], \quad (2.12b)$$

$$-\text{div } \sigma = f \quad \text{in } \Omega \times [0, t_E], \quad (2.12c)$$

$$\sigma: \dot{\varepsilon}^p + \chi: \dot{\xi} \geq \tau: \dot{\varepsilon}^p + \zeta: \dot{\xi} \quad \forall (\tau, \zeta) \in \mathcal{K} \quad \text{in } \Omega \times [0, t_E], \quad (2.12d)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D \times [0, t_E], \quad (2.12e)$$

$$\sigma n = f_N \quad \text{auf } \Gamma_N \times [0, t_E]. \quad (2.12f)$$

Im Folgenden setzen wir voraus, dass die Funktionen auf der rechten Seite durch $f = t f_0$ bzw. $f_N = t f_{N_0}$ (mit zeitunabhängigen Funktionen f_0 und f_{N_0}) gegeben sind und in Folge dessen eine monoton wachsende Gesamtlast parametrisieren. Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung für dieses Problem sind in [51] bzw. in [39, Kapitel 7 und 8] zu finden. Für die numerische Behandlung ziehen wir es jedoch

vor, eine Formulierung dieser Gleichungen zu verwenden, die auf eine Projektion der Spannungen auf die Fließfläche basiert. Dabei wird zunächst das Zeitintervall $[0, t_E]$ durch $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_E$ in hinreichend ² kleine äquidistante Zeitschrittweiten $k := k^{[i]} := t_i - t_{i-1}$ mit $i = 1, \dots, N$ unterteilt. Mit $\sigma^{[i]}$, $\chi^{[i]}$ und $v^{[i]} := \dot{u}^{[i]}$ werden die Spannung, die inneren Kräfte sowie die Geschwindigkeit eines Materialpunkts zum Zeitpunkt t_i bezeichnet. Man kann zeigen, dass die Gleichung (2.12d) bei Verwendung des impliziten Euler Verfahrens für die dortigen Zeitableitungen in jedem Punkt in Ω eine Projektion $\mathcal{F}: \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ definiert, aus der die Spannungen zusammen mit der inneren Variablen für die Verfestigung im nächsten Zeitschritt direkt aus den Verschiebungen hervorgehen. Zur expliziten Berechnung der Projektion wird auf [79, Kapitel 3.3, Box 3.2] bzw. [89] und [33] verwiesen. Mit diesem Vorgehen wird das Problem 2.12 in eine Folge von nichtlinearen Variationsgleichungen umgewandelt bei dem in jedem Zeitschritt t_i zu entsprechenden rechten Seiten $f^{[i]}$ bzw. $f_N^{[i]}$ ein $v^{[i]} \in V = H_D^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ zu finden ist so, dass gilt

$$a^{\text{pl}}(v^{[i]}; \varphi) = \langle l^{[i]}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V, \quad i = 1 \dots N, \quad (2.13)$$

wobei die rechte Seite durch

$$\langle l^{[i]}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f^{[i]} \varphi \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N^{[i]} \varphi \, do \quad (2.14)$$

gegeben ist und mit dem Semikolon auf die Nichtlinearität im ersten Argument der Semilinearform

$$a^{\text{pl}}(v^{[i]}; \varphi) = \int_{\Omega} \sigma^{[i]} : \varepsilon(\varphi) \, dx, \quad \text{mit} \quad (2.15a)$$

$$\sigma^{[i]} = \mathcal{F}(\sigma^{[i-1]} + k\mathbb{C}\varepsilon(v^{[i]})), \quad (2.15b)$$

hingewiesen wird. Die Verschiebungen des Körpers erhalten wir schließlich aus den Geschwindigkeiten anhand der Gleichung $u^{[i]} = u^{[i-1]} + kv^{[i]}$.

²Das bedeutet klein genug, damit der Zeitdiskretisierungsfehler verglichen zum Diskretisierungsfehler im Ort vernachlässigt werden kann.

Bei diesem Problem, das in der Literatur auch als Hencky Modell bekannt ist, ist demnach der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen durch die nichtlineare Abbildung \mathcal{F} gegeben. Sie besitzt weiterhin nützliche Eigenschaften, die wir im folgenden Satz festhalten.

Theorem 2.1. *Die Abbildung $\mathcal{F}: \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}$ ist fast überall*

(1) *nicht expansiv, d.h.*

$$\|\mathcal{F}(\varepsilon_1) - \mathcal{F}(\varepsilon_2)\| \leq \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \quad (2.16)$$

(2) *stark monoton, d.h. es gibt ein $M > 0$ mit*

$$(\mathcal{F}(\varepsilon_1) - \mathcal{F}(\varepsilon_2)) : (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq M \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \quad (2.17)$$

(3) *differenzierbar im Clarkeschen Sinne.*

Beweis. Siehe [80]. □

2.3 Das Signorini Problem - statischer Kontakt

Um ein Kontaktproblem zwischen einem deformierbaren Körper und einem starren Hindernis zu formulieren, wird das elastische bzw. elastoplastische Materialgesetz durch weitere Nebenbedingungen auf einem Teil des Randes $\Gamma_C \subset \partial\Omega$ ergänzt. Es wird vorausgesetzt, dass ein möglicher Kontakt zwischen Ω und dem Hindernis nur auf diesem Teilstück stattfinden kann, welcher als disjunkt von den anderen Teilen des Randes Γ_D und Γ_N angenommen wird. Des Weiteren sichern wir mit der Bedingung $\overline{\Gamma_C} \subsetneq \Gamma \setminus \Gamma_D$, dass Γ_C durch ein Teilstück des Randes mit positivem Maß von Γ_D getrennt wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeichnen wir die x_d -Richtung als Richtung des möglichen Kontakts aus. Unter der Voraussetzung, dass Γ_C und die Oberfläche des Hindernisses durch

die Graphen von hinreichend glatten Funktionen $\phi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben werden, kann nach [54, Kapitel 2] bei hinreichend kleinen Deformationen die Kontaktbedingung

$$u_n(x) := \gamma(u)(x)_n \leq g(x) := \frac{\psi(x) - \phi(x)}{\sqrt{1 + \nabla\phi(x)^\top \nabla\phi(x)}}, \quad x \in \Gamma_C \quad (2.18)$$

verwendet werden. Die dadurch definierte Abstandsfunktion $g : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet einem Punkt des Kontaktrandes einen Abstand zum Hindernis in Normalenrichtung zu. Tatsächlich bedarf es an technischer Sorgfalt bei der Bedingung (2.18) für H^1 -Funktionen, da die dortige Ordnungsrelation bzw. punktweise Auswertung erst sinnvoll definiert werden muss. Dies ist beispielsweise in [54, Kapitel 5.2] beschrieben. Bezüglich der Spannungen auf Γ_C bemerken wir zuerst, dass im Falle von reibungslosem Kontakt stets $\sigma_t = 0$ auf ganz Γ_C gilt. Um zu verhindern, dass sich die Körper durchdringen, fordern wir außerdem auf Γ_C die Bedingung $u_n - g \leq 0$ wie in (2.18). Weiterhin schreiben wir auf Γ_C nur kompressible Normalspannungen in Normalenrichtung vor, d.h. $\sigma_n \leq 0$. Dies bedeutet, dass das Hindernis keine anziehenden Kräfte auf den Körper ausübt. Sollte kein Kontakt vorliegen, gilt für die Normalspannungen $\sigma_n = 0$. Andererseits kann im Kontaktfall sowohl $\sigma_n = 0$ (Berührung) als auch $\sigma_n < 0$ vorliegen. Diese Komplementaritätsbedingungen lassen sich durch $\sigma_n (u_n - g) = 0$ auf Γ_C zusammenfassen. Bei gegebenen Daten $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ und $f_N \in L^2(\Gamma_N, \mathbb{R}^d)$ besteht die klassische Formulierung des Signorini Problems im rein elastischen Fall darin ein Verschiebungsfeld $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ zu finden, das die Gleichungen

$$\sigma = \mathbb{C} \varepsilon(u) \quad \text{in } \Omega, \quad (2.19a)$$

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.19b)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad (2.19c)$$

$$\sigma n = f_N \quad \text{auf } \Gamma_N, \quad (2.19d)$$

$$u_n \leq g, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_n (u_n - g) = 0, \quad \sigma_t = 0 \quad \text{auf } \Gamma_C, \quad (2.19e)$$

löst. Für die schwache Formulierung definieren wir zunächst die Räume

$$V = H_D^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad K = \{\varphi \in V \mid \gamma_C(\varphi)_n - g \leq 0 \text{ f. ü. auf } \Gamma_C\}. \quad (2.20)$$

Wir bemerken, dass es sich bei K um eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von $H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ handelt, siehe [54, Theorem 5.7]. Für eine beliebige Funktion $\varphi \in K$ ergibt das Testen der Gleichung (2.19b) mit $\varphi - u$ und anschließender partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\varphi - u) \, dx &= \int_{\Omega} f \cdot (\varphi - u) \, dx + \\ &\int_{\Gamma_N} f_N \cdot (\varphi - u) \, do + \int_{\Gamma_C} \sigma n \cdot (\varphi - u) \, do. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Durch Benutzung der Nebenbedingungen auf dem Kontaktrand sieht man ein, dass dort $\sigma n \cdot (\varphi - u) \geq 0$ gilt. Hiermit ergibt sich die schwache Formulierung des Signorini Problems in der Elastizität:

Finde $u \in K$ mit

$$a(u, \varphi - u) \geq \langle l, \varphi - u \rangle \quad \forall \varphi \in K, \quad (2.22)$$

wobei die Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und die Linearform $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \mathbb{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(\varphi) \, dx, \quad (2.23)$$

$$\langle l, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N \cdot \varphi \, do, \quad (2.24)$$

gegeben sind. Im allgemeinen Kontext sind Probleme vom Typ (2.22) als Variationsungleichungen erster Art bekannt und besitzen unter den obigen Bedingungen eine eindeutige Lösung.

2.4 Das quasistatische elastoplastische Kontaktproblem

Zur Beschreibung des quasistatischen Kontaktproblems für einen Körper mit elastoplastischen Materialeigenschaften ist zusätzlich zum Materialgesetz die Tatsache zu berücksichtigen, dass sich die Position des Hindernisses mit der Zeit verändert. Für die zeitliche Änderung der Abstandsfunktion nehmen wir einen in der Zeit linearen Vorschub des Hindernisses zum Anfangszeitpunkt mit einer konstanten Vorschubgeschwindigkeit an. Eine Durchdringung beider Körper zum Anfangszeitpunkt sei ausgeschlossen. Um dies für alle weiteren Zeiten garantieren zu können, ist die Forderung (2.19e) nun für alle Zeiten zu stellen und wird dementsprechend in die Definition der Menge

$$K_t := \{\varphi \in V \mid \gamma_C(\varphi)_n - g(t) \leq 0 \text{ f. ü. auf } \Gamma_C\} \quad (2.25)$$

übernommen. Analog zu den Ausführungen im letzten Kapitel ist hier nach der Diskretisierung der Zeit eine nichtlineare Variationsungleichung erster Art in jedem Zeitschritt zu lösen. Genauer erhalten wir zusammen mit den einschränkenden Bedingungen für die Spannungen aus Abschnitt 2.2 eine Folge von Problemen der Form:

Zu gegebener Zeitdiskretisierung des Intervalls $[0, t_E]$ in Zeitschritte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_E$, der rechten Seiten $f^{[i]}$ und $f_N^{[i]}$ sowie den Anfangsbedingungen $(\sigma^{[0]}, \chi^{[0]}) = (0, 0)$ finde ein $v^{[i]}$ mit $u^{[i-1]} + k^{[i]}v^{[i]} \in K_t$ mit

$$a^{\text{pl}}(v^{[i]}; \varphi - v^{[i]}) \geq \langle l^{[i]}, \varphi - v^{[i]} \rangle \quad \forall \varphi \in K_{t_i}, i = 1..N, \quad (2.26)$$

wobei die Semilinearform durch (2.15) gegeben ist. Zusammenfassend wird hier also die Variationsungleichung aus (2.22) durch einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannung im Material erweitert.

Im Hinblick auf die numerische Behandlung geben wir im Folgenden die gemischte Formulierung eines Zeitschritts des quasistatischen Kontakt-

problems (2.26) an. Die grundsätzliche Idee dazu besteht in der Minimierung eines Energiefunktional unter den Nebenbedingungen des Kontakts, die mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren einbezogen werden. Der Sattelpunkt des sich daraus ergebenden Lagrange-Funktional ist dann die Lösung des elastoplastischen Kontaktproblems zusammen mit den entsprechenden Lagrange-Multiplikatoren, die sich bei hinreichender Regularität der Lösung als Kontaktkräfte interpretieren lassen. Die gemischte Methode erhält man aus der notwendigen Bedingung für die Existenz des Sattelpunkts. Mit den Räumen

$$V := H_D^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad (2.27)$$

$$H_+^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R}) := \{w \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R}) \mid w \geq 0 \text{ f.ü. auf } \Gamma_C\}, \quad (2.28)$$

$$\Lambda := H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R}) := \{\mu \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R}) \mid \langle \mu, w \rangle_{\Gamma_C} \geq 0 \quad \forall w \in H_+^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R})\}, \quad (2.29)$$

besteht die Aufgabe nun darin ein $v^{[i]}$ mit $u^{[i-1]} + kv^{[i]} \in K_t$ und $\lambda^{[i]} \in \Lambda$ zu finden so, dass gilt

$$a^{\text{pl}}(v^{[i]}; \varphi) + \langle \lambda^{[i]}, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C} = \langle l^{[i]}, \varphi \rangle \quad \varphi \in V, \quad (2.30a)$$

$$\langle \mu - \lambda^{[i]}, \gamma_C(v^{[i]})_n - g(t_i) \rangle_{\Gamma_C} \leq 0 \quad \mu \in \Lambda. \quad (2.30b)$$

In diesem Problem ist nun das rein elastische Kontaktproblem als Spezialfall $\mathcal{F} = \text{id}$ enthalten.

Kapitel 3

Diskretisierung und Lösungsmethoden

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Diskretisierung des elastischen bzw. elastoplastischen Kontaktproblems mit unstetigen Finiten Elementen. Generell sind hier verschiedene Zugänge möglich. Wie üblich beginnen wir mit einer Zerlegung des Gebiets Ω in eine endliche Anzahl von Viereckselementen im Zweidimensionalen bzw. Quader im Dreidimensionalen. Dabei verzichten wir jedoch auf explizite Stetigkeitsanforderungen der auf dieser Unterteilung definierten Finite Elemente Funktionen, womit diese zunächst auf jedem Teilgebiet separat zu betrachten sind. Um dennoch einen Informationsaustausch zwischen den Elementen zu erhalten, werden numerische Flüsse definiert, die bei der Untersuchung der Diskretisierung eine wichtige Rolle spielen werden. In Abschnitt 3.1 werden wir zunächst die Diskretisierung der primalen Verschiebungsvariablen beschreiben. Anschließend erfolgt dies in Abschnitt 3.2 für die Linearisierung des Kontaktproblems im elastoplastischen Fall. Auf Eigenschaften wie Elliptizität, Koerzivität und Monotonie der Methoden werden wir in dem Abschnitt 3.3 eingehen.

Bei der approximativen Lösung der nichtlinearen Optimierungsprobleme mit Ungleichheitsnebenbedingungen werden wir auf semiglatte Newtonverfahren bzw. eine aktive Mengen Strategie aus [46,48,92] zurückgreifen. Ursprünglich wurden diese zunächst für stetige Ansätze entwickelt daraufhin aber auch auf unstetige Ansätze erweitert [8,36,38]. In Abschnitt

3.4 gehen wir auf die Basisfunktionen für die Mortarmethode ein, wie sie in [48,50] bereits für stetige Ansatzfunktionen vorgestellt wurden. Im Zusammenhang mit unstetigen Elementen wurden diese in den Arbeiten [8] für das Hindernisproblem und [38] für das Signorini Problem verwendet.

3.1 Diskretisierung des Signorini-Problems

Im Folgenden sei \mathcal{T}_h eine Zerlegung des polygonalen Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wie im Abschnitt 1.2. Wir definieren weiterhin $\mathcal{E}_h^0 := \mathcal{E}_h \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_C)$ und fordern, dass \mathcal{T}_h die Randeinteilung von Ω berücksichtigt, d.h. eine Kante $e \subset \partial\Omega$, deren Schnitt mit einer der Mengen Γ_D , Γ_N oder Γ_C ein positives Maß hat, muss notwendigerweise vollständig im Abschluss der entsprechenden Menge liegen. Weiterhin sei für $T \in \mathcal{T}_h$ und $e \in \mathcal{E}_h$

$$h_T = \text{diam}(T), \quad h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T, \quad h_e = \text{diam}(e). \quad (3.1)$$

Für die Approximation des Raumes $H_D^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ verwenden wir die Teilmengen des gebrochenen Sobolev-Raums bestehend aus elementweise bilinearen bzw. trilinearen Ansatzfunktionen

$$V_h := \{v_h \in H^1(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^d) \mid v_h|_T = \hat{v} \circ \Psi_T^{-1}, \hat{v} \in Q_1(\hat{T}, \mathbb{R}^d) \\ \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}, \quad (3.2)$$

in dem wir die unstetige Galerkin-Lösung $u_h \in V_h$ suchen. Mit $\Psi_T: \hat{T} \rightarrow T \in \mathcal{T}_h$ bezeichnen wir hierbei die bi- bzw. trilineare Transformation, welche die Ecken des Referenzelementes $\hat{T} = [-1, 1]^d$ auf die Ecken des Elementes T abbildet, siehe [11, Kapitel III]. Bei der Herleitung der schwachen Formulierung für die Probleme aus Kapitel 2 in gebrochenen Sobolev-Räumen entstehen infolge der partiellen Integration Randintegrale entlang der Kanten aller Elemente. Demnach stehen beim Integral einer Funktion $\varphi \in H^1(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^d)$ entlang innerer Kanten bzw. Seitenflächen der Zerlegung die Spuren zweier voneinander unabhängigen Funktionen φ^+ und φ^- zur Verfügung. Diese Spuren sowie der entsprechende Normalenvektor n an der Kante bilden die Grundlage für die Definition

des sog. numerischen Flusses $\mathcal{H}(\varphi^+, \varphi^-, n)$ an der Kante, der letztendlich für die Auswertung der Kantenintegrale verwendet wird. Es ergeben sich somit ganze Familien von unstetigen Galerkinverfahren mit entsprechenden Eigenschaften, je nachdem welche Wahl genau für \mathcal{H} getroffen wird. Eine Übersicht über gängige Flüsse für elliptische Gleichungen bzw. elastische Einkörperkontaktprobleme im Raum $H^1(\mathcal{T}, \mathbb{R}^d)$ ist u.a. in den Artikeln [6] bzw. in [85] zu finden. Im Folgenden werden wir, den Arbeiten [40] und [85] folgend, beim Problem (2.3) den zur sogenannten "Symmetric Interior Penalty Galerkin", kurz SIPG-Methode, gehörigen Fluss wählen. Bei der diskreten schwachen Formulierung von (2.3) suchen wir somit ein $u_h \in V_h$ mit

$$a_h(u_h, \varphi_h) = \langle l, \varphi_h \rangle \quad \forall \varphi_h \in V_h, \quad (3.3)$$

wobei die Bilinearform durch

$$\begin{aligned} a_h: V_h \times V_h &\rightarrow \mathbb{R}, \\ a_h(u_h, \varphi_h) &:= \int_{\Omega} \sigma(u_h) : \varepsilon(\varphi_h) \, dx - \int_{\mathcal{E}_h^0} \llbracket u_h \rrbracket : \{\sigma(\varphi_h)\} \, do \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}_h^0} \llbracket \varphi_h \rrbracket : \{\sigma(u_h)\} \, do + \int_{\mathcal{E}_h^0} \frac{\pi}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket : \llbracket \varphi_h \rrbracket \, do, \end{aligned} \quad (3.4)$$

und die Linearform l durch

$$\langle l, \varphi_h \rangle := \int_{\Omega} f \cdot \varphi_h \, dx + \int_{\Gamma_N} f_N \cdot \varphi_h \, do, \quad (3.5)$$

gegeben ist. Aufgrund der Symmetrien des Elastizitätstensors ist diese Bilinearform symmetrisch in den Test- bzw. Ansatzfunktionen. Weiterhin ist $\pi > 0$ ein Strafparameter, auf den wir im Abschnitt 3.3 eingehen werden. Wie in den Ausführungen im Absatz 2.3 gelangen wir auch hier durch den Kegel

$$K_h := \{\varphi_h \in V_h \mid \gamma_C(\varphi_h)_n - g \leq 0 \text{ auf } \Gamma_C\} \quad (3.6)$$

zum diskreten Analogon der Variationsungleichung (2.22). Im unstetigen Raum ist also ein $u_h \in K_h$ zu finden so, dass gilt

$$a_h(u_h, \varphi_h - u_h) \geq \langle l, \varphi_h - u_h \rangle \quad \forall \varphi_h \in K_h. \quad (3.7)$$

3.2 Diskretisierung und Linearisierung des elastoplastischen Kontaktproblems

Aufgrund der geringen Regularität des Operators \mathcal{F} handelt es sich bei (2.13) um ein im klassischem Sinne nicht differenzierbares Problem. Es lässt sich allerdings zeigen, dass \mathcal{F} eine verallgemeinerte Ableitung im Clarkeschen Sinne besitzt, was die Anwendung eines semiglatten Newton-Verfahrens im Funktionenraum möglich macht, siehe [74]. Dieses Vorgehen ist historisch gesehen auf die Arbeiten [59] und [90] zurückzuführen und ist in der Literatur auch als radial return Algorithmus bekannt. Bei der Diskretisierung dieses Problems im gebrochenen Sobolev-Raum $H^1(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^d)$ benutzen wir hier die sogenannte 'incomplete interior penalty Galerkin' Methode (IIPG), die in der Arbeit [67] verwendet wurde. Verglichen mit der Bilinearform (3.4) aus dem letzten Abschnitt wird beim numerischen Fluss hier gänzlich auf den Term

$$\int_{\mathcal{E}_h^0} \llbracket u_h \rrbracket : \{\mathcal{F}(\mathbb{C}\varepsilon(\varphi_h))\} \, do \quad (3.8)$$

verzichtet. Im Gegensatz zum rein elastischen Fall sind Terme dieser Form in der Plastizität besonders zu behandeln, da die Spannungen nun auch von der Gesamthistorie der Belastung abhängig sind und $\mathcal{F}(\mathbb{C}\varepsilon(\varphi_h))$ somit prinzipiell nicht zur Verfügung steht. Auf diese Problematik wird weiter in [64] und [67] hingewiesen. Diesen Arbeiten folgend suchen wir bei der Formulierung des Problems (2.13) im unstetigen Raum demnach in jedem Zeitschritt t_i ein $v_h^{[i]} \in V_h$ mit

$$a_h^{\text{pl}}(v_h^{[i]}; \varphi_h) = \langle l^{[i]}, \varphi_h \rangle \quad \forall \varphi_h \in V_h \quad (3.9)$$

wobei die Semilinearform $a_h^{\text{pl}}: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ nun durch

$$\begin{aligned} a_h^{\text{pl}}(v_h^{[i]}; \varphi_h) &= \int_{\Omega} \sigma^{[i]}: \varepsilon(\varphi_h) \, dx - \int_{\mathcal{E}_h^0} \llbracket \varphi_h \rrbracket: \{\sigma^{[i]}\} \, do \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^0} \frac{\pi}{h_e} \llbracket v_h^{[i]} \rrbracket: \llbracket \varphi_h \rrbracket \, do, \end{aligned} \quad (3.10)$$

zusammen mit $\sigma^{[i]} = \mathcal{F}(\sigma^{[i-1]} + k\mathbb{C}\varepsilon(v^{[i]}))$ gegeben ist. Für die Ableitung von \mathcal{F} an der Stelle $v_h^{[i]}$ schreiben wir im Folgenden $\mathcal{F}'(v_h^{[i]})$ und verweisen für deren explizite Berechnung auf [34] und [79, Gleichung 2.2.22]. Die hier vorausgesetzten Eigenschaften des Materials implizieren weiterhin, dass sie die Bedingungen 2.2 in jedem Punkt erfüllt und es gilt für die Linearisierung

$$\begin{aligned} a_h^{\text{pl}'}(v_h^{[i]})(w_h, \varphi_h) &= \left. \frac{d}{d\delta} \right|_{\delta=0} a_h^{\text{pl}}(v_h^{[i]} + \delta w_h; \varphi_h) \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{F}'(\varepsilon(v_h^{[i]}))\varepsilon(w_h): \varepsilon(\varphi_h) \, dx - \int_{\mathcal{E}_h^0} \llbracket \varphi_h \rrbracket: \{\mathcal{F}'(\varepsilon(v_h^{[i]}))\varepsilon(w_h)\} \, do \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^0} \frac{\pi}{h_e} \llbracket w_h \rrbracket: \llbracket \varphi_h \rrbracket \, do. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Betrachten wir weiterhin das diskrete elastoplastische Kontaktproblem

$$a_h^{\text{pl}}(v_h^{[i]}, \varphi_h - v_h^{[i]}) \geq \langle l, \varphi_h - v_h^{[i]} \rangle \quad \forall \varphi_h \in K_{h_{t_i}}, \quad (3.12)$$

so verlangt die Anwendung eines semiglatten Newton-Verfahrens im j -ten Newton-Schritt die Lösung einer Variationsungleichung der Form

$$\begin{aligned} a_h^{\text{pl}'}(v_h^{[i],(j-1)})(v_h^{[i],(j)}, \varphi_h - v_h^{[i],(j)}) &\geq a_h^{\text{pl}'}(v_h^{[i],(j-1)})(v_h^{[i],(j-1)}, \varphi_h - v_h^{[i],(j)}) \\ &\quad - a_h^{\text{pl}}(v_h^{[i],(j-1)}; \varphi_h - v_h^{[i],(j)}) + \langle l^{[i],(j)}, \varphi_h - v_h^{[i],(j)} \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

für alle $\varphi_h \in K_h$ sowie $j \geq 1$. Um im ersten Newtonschritt einen guten Startwert für $v_h^{[i],(0)}$ zu erhalten bietet es sich an, dort das nichtlineare Materialverhalten zu ignorieren und lediglich rein elastisch zu rechnen. Dies entspricht in dem Fall der Lösung eines linearen Gleichungssystems.

3.3 Eigenschaften der unstetigen Galerkin-Methoden

In diesem Abschnitt fassen wir einige bedeutende Eigenschaften der SIPG bzw. IIPG Methode zusammen. Dazu zählen die Stetigkeit, Elliptizität und die starke Monotonie der Bi- bzw. Semilinearform im elastischen bzw. der Linearisierung der Semilinearform im plastischen Fall. Die Definitionen dieser Begriffe übertragen sich dabei kanonisch aus dem Kontext von Variationsgleichungen. Funktionen des Raumes V_h , in dem wir die Finite Elemente Lösung suchen, können durchaus unstetig sein. Die unstetigen Galerkin Verfahren sind demnach in den Kontext von Nichtkonformen Finiten Elementen mit $V_h \not\subseteq V$ einzuordnen.

Um die Existenz einer Lösung im Raum V_h für die Probleme (3.7) und (3.12) garantieren zu können genügt es die Stetigkeit, Elliptizität und Montonie der dort verwendeten Bi- bzw. Semilinearform im Raum V_h nachzuweisen. Zunächst definieren wir die für unstetige Methoden übliche netzabhängige Norm

$$\|v_h\|^2 := |v_h|_1^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-1} \|[v_h]\|_{0,e}^2 \quad (3.14)$$

für alle $v_h \in H^1(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^d)$. Hiermit gilt nun das folgende Lemma über die Stetigkeit und die Koerzivität der Bilinearform der SIPG Methode.

Lemma 3.1. *Seien $u_h, \varphi_h \in V_h$. Für die Bilinearform a_h der SIPG Methode aus (3.4) gilt*

$$a_h(u_h, \varphi_h) \leq \tilde{C} \|u_h\| \|\varphi_h\|, \quad (3.15)$$

mit einer von h unabhängigen Konstante $\tilde{C} > 0$.

Des Weiteren gibt es für hinreichend große Strafparameter $\pi > 0$ eine weitere von h unabhängige Konstante $\tilde{\nu} > 0$ mit

$$a_h(u_h, u_h) \geq \tilde{\nu} \|u_h\|^2. \quad (3.16)$$

Beweis: Siehe Lemma 3.3 und Lemma 3.4 in [85]. ■

Die oben aus der Arbeit [85] zitierten Beweise sind zunächst lediglich für Dreiecke und lineare Ansatzfunktionen aufgeführt. Diese Voraussetzung wird für die Abschätzung der Normen von lifting Operatoren benötigt, welche allerdings auch analog für Viereckselemente bzw. Quader existieren, siehe [17]. Des Weiteren weisen wir darauf hin, dass die Koerzitivität der Bilinearform a_h lediglich auf dem diskreten Raum V_h gilt. Tatsächlich wird in [96, Proposition 4.4] eine Funktion aus $H^2(\mathcal{T}_h)$ konstruiert, welche die Bedingung (3.16) verletzt.

Auch bei der Semilinearform aus (3.10) kann nachgewiesen werden, dass sich entsprechende Eigenschaften des kontinuierlichen Operators in der Norm (3.14) auf den diskreten Raum übertragen lassen.

Lemma 3.2. *Auf V_h ist die Semilinearform a_h^{pl} aus (3.10) in der Norm (3.14) stetig und für hinreichend große Strafparameter auch stark monoton, d.h es gibt von h unabhängige Konstante $C, \nu > 0$ mit*

$$a_h^{\text{pl}}(v_h; \varphi_h) - a_h^{\text{pl}}(w_h; \varphi_h) \leq C \|v_h - w_h\| \|\varphi_h\|, \quad (3.17)$$

$$a_h^{\text{pl}}(v_h; v_h - w_h) - a_h^{\text{pl}}(w_h; v_h - w_h) \geq \nu \|v_h - w_h\|^2 \quad (3.18)$$

für alle $v_h, w_h, \varphi_h \in V_h$.

Beweis: Siehe Lemma 3.2 und Lemma 3.3 in [31]. ■

Für die Bilinearform aus der Linearisierung der zur IIPG Methode gehörenden Semilinearform (3.11) gilt abschließend das folgende Lemma.

Lemma 3.3. *Die Bilinearform $a_h^{\text{pl}'}$ aus (3.11) ist an jeder Stelle v_h stetig und für hinreichend große Strafparameter auch koerziv, d.h es gibt eine von h unabhängige Konstanten $c, \kappa > 0$ mit*

$$a_h^{\text{pl}'}(v_h)(w_h, \varphi_h) \leq C \|w_h\| \|\varphi_h\| \quad (3.19)$$

$$a_h^{\text{pl}'}(v_h)(\varphi_h, \varphi_h) \geq C \|\varphi_h\|^2 \quad (3.20)$$

für alle $w_h, \varphi_h \in V_h$.

Beweis: Siehe [67, Theorem 3]. ■

Aus den obigen Lemmata über die Koerzivität und Stetigkeit der Bilinearformen a_h und a_h^{pl} erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für die Probleme (3.3) und (3.13).

Satz 3.4. *Die diskreten Probleme (3.3) und (3.13) sind eindeutig lösbar.*

3.4 Diskrete gemischte Methode und biorthogonale Basen

Bei der Anwendung der gemischten Methode wählen wir in dieser Arbeit für die Approximation von Funktionen des Raumes $\Lambda := H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ den Mortaransatz gemäß [48, 50, 93]. Speziell orientieren wir uns an der Vorgehensweise in Kapitel 2.2 aus [48], indem wir die dortigen Resultate auf den Fall unstetiger Ansatzfunktionen erweitern. Dieser Ansatz wurde bereits in den Arbeiten [8, 36, 38] in Zusammenhang mit Hindernis- und Signorini-Problemen angewendet. Beginnen wir zunächst mit der Konstruktion von Basisfunktionen für den Raum V_h , deren Träger im Rahmen der DG Methoden stets auf ein Element beschränkt sind. Sei \mathcal{P}_T die Menge aller Knoten in einem Element $T \in \mathcal{T}_h$ sowie $e_j \in \mathbb{R}^d$, $j \in \{1 \dots d\}$, der j -te Einheitsvektor. Die Basisfunktionen des Raumes V_h sind gegeben durch alle Funktionen der Bauart $\varphi_{p,j} := \varphi_p e_j$ wobei $\varphi_p \in Q_1(T)$ die skalare nodale Basisfunktion zum Knoten $p \in \mathcal{P}_T$ ist, d.h.

$$\varphi_p(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = p, \\ 0 & \text{für } q \in \mathcal{P}_T \setminus \{p\}. \end{cases} \quad (3.21)$$

Somit gilt

$$V_h = \text{span}\{\varphi_{p,j} \mid \exists T \in \mathcal{T}_h \text{ mit } p \in \mathcal{P}_T, j = 1, \dots, d\} \cap H_D^1(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^d). \quad (3.22)$$

Für die Diskretisierung der Lagrange-Multiplikatoren verfahren wir nach [48, Kapitel 2.2]. Dort werden die zu den stetigen primalen Ansatzfunktionen entsprechenden dualen Basisfunktionen konstruiert. Durch die Restriktion der Träger dieser Funktionen auf einzelne Elemente ergeben sich hier die dualen Basisfunktionen im unstetigen Ansatz. Für ein Element $e \in \mathcal{E}_h$ mit $e \subset \Gamma_C$ sei \mathcal{P}_e die Menge der Knoten auf e und die entsprechende biorthogonale Basisfunktion zu dem Knoten $p \in \mathcal{P}_e$ werde mit ψ_p bezeichnet.

Die Basisfunktion für den Spurraum $W_h := \gamma_C(V_h)$ erhalten wir, indem wir für $p \in \mathcal{P}_e$ die Funktion ϕ_p als die Einschränkung von φ_p auf den Kontaktrand Γ_C definieren. Bei einer lokalen Nummerierung der Knoten auf e gemäß der Abbildung 3.1 wird weiterhin die zu ϕ_p biorthogonale Basisfunktion definiert durch

$$\psi_p := 2\phi_p - \phi_{p_0}, \quad \text{falls } d = 2, \quad (3.23)$$

$$\psi_p := 4\phi_p - 2\phi_{p_1} - 2\phi_{p_2} + \phi_{p_0}, \quad \text{falls } d = 3. \quad (3.24)$$

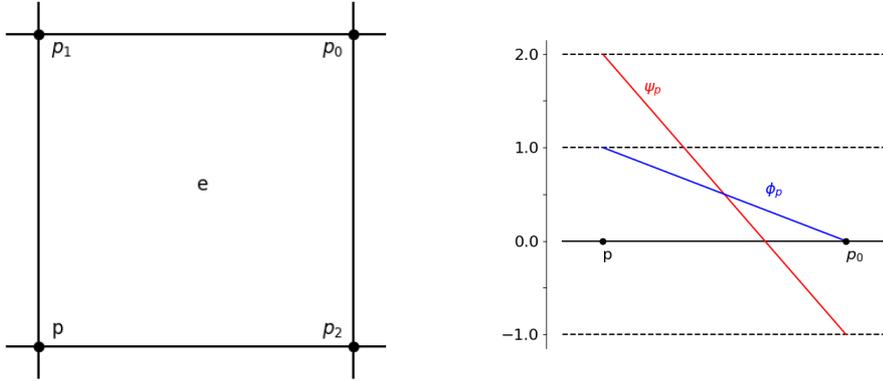
Mit $\psi_{p,j} := \psi_p e_j$ ist der gesamte Raum für die diskreten Lagrange-Multiplikatoren folglich die Menge

$$M_h := \text{span}\{\psi_{p,j} \mid \exists e \in \mathcal{E}_h, e \subset \Gamma_C, p \in \mathcal{P}_e, j = 1, \dots, d\}. \quad (3.25)$$

Bei gegebener Zerlegung des Gebiets ist, über die zugehörige Kante bzw. Seitenfläche des Elements, der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor n_p in einem Punkt p eindeutig definiert. Außerdem sei \mathcal{P}_{Γ_C} die Menge aller Trägerpunkte aller Elemente auf dem Kontaktrand, d.h.

$$\mathcal{P}_{\Gamma_C} := \bigcup_{\substack{e \in \mathcal{E}_h, \\ e \subset \Gamma_C}} \mathcal{P}_e. \quad (3.26)$$

Für die Normal- bzw. Tangentialkomponente einer Funktionen $v_h \in W_h$ bzw. $\mu_h \in M_h$ mit nodalen Werten $v_p \in \mathbb{R}^d$ bzw. $\mu_p \in \mathbb{R}^d$ machen wir



(a) Lokale Nummerierung der Knoten eines Elements auf Γ_C in 3 Dimensionen

(b) Graphen der zum Punkt p gehörenden Basisfunktionen in 2 Dimensionen

Abbildung 3.1: Illustration zu den Basisfunktionen auf dem Kontaktrand

hiermit den Ansatz

$$v_{h,n} := \sum_{p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}} v_{pn} \phi_p, \quad v_{h,t} := \sum_{p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}} v_{pt} \phi_p, \quad (3.27)$$

$$\mu_{h,n} := \sum_{p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}} \mu_{pn} \psi_p, \quad \mu_{h,t} := \sum_{p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}} \mu_{pt} \psi_p, \quad (3.28)$$

wobei wir wie im kontinuierlichen Fall (1.12) $v_{pn} = v_p n_p$, sowie $v_{pt} = v_p - v_{pn} n_p$ und analog für μ_{pn} und μ_{pt} setzen. Mit den Räumen

$$W_h^- := \{v_h \in W_h \mid v_{h,n} \leq 0\}, \quad (3.29)$$

$$\Lambda_h := \{\mu_h \in M_h \mid \langle \mu_h, v_h \rangle_{\Gamma_C} \geq 0 \quad \forall v_h \in W_h^-\}, \quad (3.30)$$

lautet die gemischte Formulierung des i -ten Newtonschritts mit der Linearisierung aus (3.11) somit

$$a_h^{\text{pl}'} \left(v_h^{(i-1)} \right) \left(v_h^{(i)}, \varphi_h \right) + \langle \lambda_h, \gamma_C(\varphi_h) \rangle_{\Gamma_C} = \quad (3.31a)$$

$$a_h^{\text{pl}'} \left(v_h^{(i-1)} \right) \left(v_h^{(i-1)}, \varphi_h \right) - a_h^{\text{pl}} \left(v_h^{(i-1)}; \varphi_h \right) + \langle l, \varphi_h \rangle \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

$$\langle \mu_{h,n} - \lambda_{h,n}, \gamma_C(v_h) - g \rangle_{\Gamma_C} \leq 0 \quad \forall \mu_h \in \Lambda_h. \quad (3.31b)$$

Im Rahmen der Mortarmethode spielt die Biorthogonalitätsrelation

$$\int_{\Gamma_C} \psi_{p,l} \phi_{q,l} \, do = \delta_{p,q} \int_{\Gamma_C} \phi_{q,l} \, do \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}, j = 1, \dots, d \quad (3.32)$$

eine entscheidende Rolle und kann leicht durch eine Rechnung verifiziert werden. Insbesondere ermöglicht sie eine Beschreibung von Funktionen aus W_h^- und Λ_h durch Bedingungen an die Koeffizienten ihrer Normalenkomponenten.

Lemma 3.5. *Für die in (3.29) und (3.30) definierten Mengen W_h^- und Λ_h gilt*

$$W_h^- := \left\{ v_h = \sum_{p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}} v_p \phi_p \in W_h \mid v_{p,n} \leq 0 \, \forall p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C} \right\}, \quad (3.33)$$

$$\Lambda_h = \left\{ \mu_h = \sum_{p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}} \mu_p \psi_p \in M_h \mid \mu_{pn} \leq 0, \mu_{pt} = 0 \, \forall p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C} \right\}. \quad (3.34)$$

Beweis: Diese Aussage wurde in [50, Lemma 2.3] für stetige Galerkinmethoden bewiesen. Der Beweis dort fußt hauptsächlich auf der Biorthogonalitätsrelation (3.32) und nicht auf die Stetigkeit der Funktionen. Daher behält er insbesondere auch bei unstetige Galerkinmethoden seine Gültigkeit. ■

Mit dem folgenden Lemma ist es weiterhin möglich die diskrete schwache Kontaktbedingung (3.31b) äquivalent in eine knotenweise Bedingung an die Koeffizienten der jeweiligen Funktionen zu überführen. Vom strukturellen Aufbau spiegeln diese Bedingungen die Kontaktbedingungen (2.19e) der kontinuierlichen Gleichungen wieder.

Lemma 3.6. *Die schwache Kontaktbedingung (3.31b) ist äquivalent zu den Bedingungen*

$$u_{p,n} \leq g_p, \quad \lambda_{p,n} \geq 0, \quad \lambda_{p,n}(u_{p,n} - g_p) = 0, \quad \lambda_{p,t} = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}, \quad (3.35)$$

wobei

$$\gamma_C(u_h) = \sum_{p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}} u_{p,n} \phi_p, \quad (3.36)$$

$$\lambda_h = \sum_{p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}} \lambda_{p,n} \psi_p, \quad (3.37)$$

$$g_p = \frac{\langle \psi_p, g \rangle_{\Gamma_C}}{\int_{\Gamma_C} \phi_p \, d\sigma}. \quad (3.38)$$

Beweis: Diese Aussage wurde in [50, Lemma 2.6] für stetige Galerkinmethoden bewiesen. Auch hier überträgt sich die dortige Argumentation direkt auf den unstetigen Fall. ■

Eine weitere äquivalente Umformulierung der diskreten Kontaktbedingung (3.35) ist mittels der Nullstellen sogenannter NCP-Funktionen (vom englischen "nonlinear complementarity function") möglich. Es gilt hierzu das folgende Lemma.

Lemma 3.7. *Mit der Konstanten $c > 0$ sei die Funktion*

$$C: V_h \times \Lambda_h \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.39)$$

$$C(u_{n,p}, \lambda_{n,p}) = \lambda_{n,p} - \max\{0, \lambda_{n,p} + c(u_{n,p} - g_p)\}, \quad (3.40)$$

gegeben. Dann sind die Bedingungen (3.35) äquivalent zu

$$C(u_{p,n}, \lambda_{p,n}) = 0, \quad \lambda_{p,t} = 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_{\Gamma_C}. \quad (3.41)$$

Beweis: Siehe [50, Theorem 4.1] ■

Hiermit kann nun zusammen mit Lemma 3.6 im Sattelpunktproblem (3.31) die schwache Kontaktbedingung (3.31b) durch die Bedingung (3.41) ersetzt werden. Die Funktion C ist hierbei zwar stetig, jedoch nicht klassisch differenzierbar. Für die Bestimmung der Nullstellen der NCP-Funktion bietet sich erneut das semiglatte Newtonverfahren an, so

dass die Nichtlinearitäten im Materialgesetz und im Kontakt bei (3.31) simultan iteriert und somit kürzere Rechenzeiten erzielt werden. In der Praxis greifen wir außerdem auf ein Resultat der Arbeit [46] zurück, nach dem bei einer geeigneten Wahl der verallgemeinerten Ableitung der NCP-Funktion das semiglatte Newton-Verfahren zur Auffindung der Nullstellen einer aktiven Mengen Strategie entspricht. Für Details sei auf die Arbeiten [46, 48, 50] verwiesen.

Kapitel 4

A posteriori Fehleranalyse und Effizienzsteigerung

Ziel dieses Kapitels ist die Herleitung von residualen Fehlerschätzern für das elastische bzw. elastoplastische Kontaktproblem. Die Basis des Fehlerschätzer für das Signorini-Problem bildet die Arbeit [10]. Die zentrale Idee dort ist es, bei Hindernisproblemen bereits bekannte Fehlerschätzer für Variationsgleichungen über ein geeignetes Hilfsproblem zum Einsatz zu bringen. Dieses Vorgehen wurde weiterhin in [75] auf das Signorini-Problem erweitert und in [83] auf ein vereinfachtes Signorini Problem mit einem Reibungsterm bei unstetigen Galerkin Methoden angewendet. In Abschnitt 4.1 verfolgen wir diese Idee für ein analoges Vorgehen im Kontext von unstetigen Galerkin Verfahren.

Um einen Fehlerschätzer für das elastoplastische Problem zu erhalten, teilen wir den Fehler mit Hilfe eines Interpolationsoperators in einen stetigen und einen unstetigen Anteil auf. Während wir beim unstetigen Anteil auf die Interpolationsabschätzung zurückgreifen, gehen wir beim stetigen Teil ähnlich wie bei [56, Kapitel 4] vor.

Abschließend befassen wir uns in Abschnitt 4.3 mit einem Ansatz, bei dem stetige sowie unstetige Ansatzfunktionen simultan benutzt werden.

4.1 Fehlerschätzer für das elastische Kontaktproblem

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.4 und der Bilinearform aus (2.5) lautet die gemischte Formulierung des rein elastischen, statischen Kontaktproblems

$$a(u, \varphi) + \langle \lambda, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C} = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V = H^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad (4.1a)$$

$$\langle \mu - \lambda, \gamma_C(u)_n - g \rangle_{\Gamma_C} \leq 0 \quad \forall \mu \in \Lambda = H_+^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R}), \quad (4.1b)$$

wobei der Abstand zum Hindernis durch die Funktion $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C, \mathbb{R})$ beschrieben wird. Beim entsprechenden diskreten Problem in gebrochenen Sobolev-Räumen muss hingegen die Bilinearform aus (3.4) verwendet bzw. die Ansatzräume durch die im Abschnitt 3.4 definierten Räume ersetzt werden. Es ist demnach das Paar $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h$ zu finden mit

$$a_h(u_h, \varphi_h) + \langle \lambda_h, \gamma_C(\varphi_h)_n \rangle_{\Gamma_C} = \langle l, \varphi_h \rangle \quad \forall \varphi_h \in V_h, \quad (4.2a)$$

$$\langle \mu_{h,n} - \lambda_{h,n}, \gamma_C(u_h)_n - g \rangle_{\Gamma_C} \leq 0 \quad \forall \mu_h \in \Lambda_h. \quad (4.2b)$$

Um nun bei der Herleitung des a posteriori Fehlerschätzers für das Kontaktproblem die bereits bekannten Fehlerschätzer für Variationsgleichungen verwenden zu können verfolgen wir hier die Idee, die in [10] für Hindernisprobleme eingeführt und in [75] auf Signorini-Probleme erweitert wurde. Hierbei handelt es sich um das Hilfsproblem, in dem der Lagrange-Multiplikator aus (4.2) als bekannt vorausgesetzt und zu der rechten Seite addiert wird. Es ist also ein $u^* \in V$ gesucht mit

$$a_h(u^*, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle - \langle \lambda_h, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C} \quad \forall \varphi \in V. \quad (4.3)$$

In der Tat erhält man beim SIPG Ansatz für das Hilfsproblems (4.3) die Lösung u_h von (4.2) zurück, da sie in dem Fall genau der Zeile (4.2a) entspricht. Wir halten weiterhin fest, dass aufgrund von Lemma 1.1 die

Sprünge von Funktionen aus V verschwinden. Dadurch reduziert sich die Bilinearform a_h mit $u_h \in H^1(\mathcal{T}_h, \mathbb{R}^d)$ zu

$$a_h(u_h, \varphi) = a(u_h, \varphi) - \int_{\mathcal{E}_h^0} \llbracket u_h \rrbracket : \{\sigma(\varphi)\} \, do, \quad \forall \varphi \in V. \quad (4.4)$$

Mit Hilfe der definierenden Gleichung (4.3) zusammen mit (4.1a) ergibt sich

$$a(u - u^*, \varphi) = \langle \lambda_h - \lambda, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C}, \quad \forall \varphi \in V. \quad (4.5)$$

Damit ist es möglich den Fehler im Lagrangemultiplikator abzuschätzen.

Lemma 4.1. *Seien (u, λ) bzw u^* die Lösungen aus (4.1) respektive (4.3). Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass gilt:*

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C} \leq c |u - u^*|_1. \quad (4.6)$$

Beweis: Siehe [75, Lemma IV.1] ■

Entscheidend für die Herleitung eines Fehlerschätzers ist ein geeigneter Interpolationsoperator, mit dessen Hilfe es möglich ist, eine Verbindung zwischen den unstetigen Ansatzfunktionen und den stetigen Funktionen herzustellen. Im Rahmen dieser Arbeit werden wir den in [69] vorgestellten Operator verwenden.

Lemma 4.2. *Sei \mathcal{T}_h eine Zerlegung des Gebiets $\overline{\Omega}$, die den Anforderungen aus Abschnitt 3.1 genügt. Dann ist es möglich jeder Funktion $u_h \in V_h$ eine Interpolierende $\hat{u}_h \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^d) \cap V_h$ zuzuordnen, welche die Abschätzung*

$$|u_h - \hat{u}_h|_k^2 \leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{1-2k} \|\llbracket u_h \rrbracket\|_{0,e}^2 \quad (4.7)$$

mit $k \in \{0, 1\}$ und einer von h unabhängigen Konstant $C > 0$ erfüllt.

Beweis: Siehe [69, Lemma 3.1] ■

Mit diesen Hilfsmitteln sind wir in der Lage den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4.3. *Es seien (u, λ) und (u_h, λ_h) die Lösungen der Probleme (4.1) respektive (4.2) bzw. u^* die Lösung des Hilfsproblems (4.3). Dann gibt eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:*

$$\| \|u - u_h\| \|^2 + \|\lambda - \lambda_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C}^2 \leq C \| \|u^* - u_h\| \|^2 + \langle \lambda - \lambda_h, \gamma_C(\hat{u}_h)_n - g \rangle_{\Gamma_C}. \quad (4.8)$$

Beweis: Für die Abschätzung in der Norm (3.14) reicht es, sich auf die gebrochene H^1 -Seminorm des Fehlers zu beschränken, da

$$\| \|u - u_h\| \|^2 = |u - u_h|_1^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-1} \| [u_h] \|_{0,e}^2. \quad (4.9)$$

Dafür gilt zunächst mit $\varphi \in V$:

$$\begin{aligned} & a(u - u_h, \varphi) - \int_{\mathcal{E}_h^0} [u - u_h] : \{\sigma(\varphi)\} \, do \\ &= a_h(u - u_h, \varphi) \\ &= a_h(u - u^*, \varphi) + a_h(u^* - u_h, \varphi) \\ &= \langle \lambda_h - \lambda, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C} + a_h(u^* - u_h, \varphi) \\ &= a(u^* - u_h, \varphi) - \int_{\mathcal{E}_h^0} [u^* - u_h] : \{\sigma(\varphi)\} \, do + \langle \lambda_h - \lambda, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C}. \end{aligned}$$

Indem wir das erste und letzte Glied dieser Gleichungskette umstellen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & a(u - u_h, \varphi) \\ &= a(u^* - u_h, \varphi) - \int_{\mathcal{E}_h^0} [u^* - u_h] : \{\sigma(\varphi)\} \, do \\ & \quad + \int_{\mathcal{E}_h^0} [u - u_h] : \{\sigma(\varphi)\} \, do + \langle \lambda_h - \lambda, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C} \\ &= a(u^* - u_h, \varphi) + \int_{\mathcal{E}_h^0} [u - u^*] : \{\sigma(\varphi)\} \, do + \langle \lambda_h - \lambda, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C} \end{aligned}$$

$$= a(u^* - u_h, \varphi) + \langle \lambda_h - \lambda, \gamma_C(\varphi)_n \rangle_{\Gamma_C}.$$

Durch Einführung der Interpolierenden \hat{u}_h von u_h aus Lemma 4.2 können wir in dieser Identität $\varphi = u - \hat{u}_h = u - u_h + u_h - \hat{u}_h$ setzen und erhalten mit Anwendung der gebrochenen Kornischen Ungleichung nach Umsortierung der Terme und generischen Konstanten $c_i > 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & c_1 |u - u_h|_1^2 \\ \leq & a(u - u_h, u - u_h) + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} h_e^{-1} \|[[u_h]]\|_{0,e}^2 \\ = & a(u^* - u_h, u - u_h) + a(u^* - u_h, u_h - \hat{u}_h) + a(u - u_h, \hat{u}_h - u_h) \\ & + \langle \lambda_h - \lambda, \gamma_C(u - \hat{u}_h)_n \rangle_{\Gamma_C} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} h_e^{-1} \|[[u_h]]\|_{0,e}^2 \\ \leq & c_2 |u - u_h|_1 (|u^* - u_h|_1 + |\hat{u}_h - u_h|_1) + c_3 |u^* - u_h|_1 |u_h - \hat{u}_h|_1 \\ & + \langle \lambda - \lambda_h, \gamma_C(\hat{u}_h)_n - g \rangle_{\Gamma_C} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} h_e^{-1} \|[[u_h]]\|_{0,e}^2 \\ \leq & \frac{\epsilon}{2} |u - u_h|_1^2 + \frac{c_2^2}{2\epsilon} (|u^* - u_h|_1 + |\hat{u}_h - u_h|_1)^2 + \frac{c_3}{2} |u^* - u_h|_1^2 + \frac{1}{2} |u_h - \hat{u}_h|_1^2 \\ & + \langle \lambda - \lambda_h, \gamma_C(\hat{u}_h)_n - g \rangle_{\Gamma_C} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} h_e^{-1} \|[[u_h]]\|_{0,e}^2. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit $0 < \epsilon < 2c_1$ und der Interpolationsabschätzung (4.7):

$$\begin{aligned} |u - u_h|_1^2 & \leq c_4 |u^* - u_h|_1^2 + c_5 |\hat{u}_h - u_h|_1^2 \\ & \quad + \langle \lambda - \lambda_h, \gamma_C(\hat{u}_h)_n - g \rangle_{\Gamma_C} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} h_e^{-1} \|[[u_h]]\|_{0,e}^2 \\ & \leq c_4 |u^* - u_h|_1^2 + c_6 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} h_e^{-1} \|[[u_h]]\|_{0,e}^2 \\ & \quad + \langle \lambda - \lambda_h, \gamma_C(\hat{u}_h)_n - g \rangle_{\Gamma_C} \\ & \leq c_7 \|u^* - u_h\|^2 + \langle \lambda - \lambda_h, \gamma_C(\hat{u}_h)_n - g \rangle_{\Gamma_C} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann durch Lemma 4.1. ■

Für das Hilfsproblem (4.3) verwenden wir den in der Arbeit [41] angegebenen Fehlerschätzer

$$|u - u_h|_1^2 \leq C \eta^2 \quad (4.10)$$

mit

$$\eta^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \eta_T^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-1} \eta_{\mathcal{E}_h^0}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e \eta_{\mathcal{E}_h}^2 \quad (4.11)$$

wobei $C > 0$ eine von h unabhängige Konstante ist und die Element- bzw. Kantenresiduen durch

$$\begin{aligned} \eta_T^2 &:= \|f + \operatorname{div} \sigma(u_h)\|_{0,T}^2 \\ \eta_{\mathcal{E}_h^0}^2 &:= \|[[u_h]]\|_{0,e}^2 \\ \eta_{\mathcal{E}_h}^2 &:= \begin{cases} \|\lambda_h + \sigma_n(u_h)\|_{0,e}^2, & \text{für } e \subseteq \Gamma_C \\ \|f_N - \sigma(u_h)n\|_{0,e}^2, & \text{für } e \subseteq \Gamma_N \\ \|[[\sigma(u_h)]]\|_{0,e}^2, & \text{für } e \in \mathcal{E}_h^i \end{cases} \end{aligned}$$

definiert sind. Für die praktische Anwendung des Satzes 4.3 muss außerdem noch der Ausdruck $\langle \lambda - \lambda_h, \gamma_C(\hat{u}_h)_n - g \rangle_{\Gamma_C}$ durch berechenbare Größen abgeschätzt werden. Dafür verfahren wir entsprechend der Ausführungen aus [75, Kapitel IV] und erhalten schließlich den folgenden Satz.

Satz 4.4. *Sei $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ die Lösungen des Problems (4.1) und $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h$ die Lösung von (4.2). Der Fehlerschätzer sei wie in (4.10) definiert. Dann gibt eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 + \|\lambda - \lambda_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C}^2 &\leq C(\eta^2 + \|(g - \gamma_C(\hat{u}_h)_n)_+\|_{\frac{1}{2}, \Gamma_C}^2 \\ &\quad + |(\lambda_h, (g - \gamma_C(\hat{u}_h)_n)_+)_{0, \Gamma_C}|) \quad (4.12) \\ &:= C\eta_{\text{el}}. \end{aligned}$$

4.2 Fehlerschätzer für das elastoplastische Kontaktproblem

In diesem Abschnitt wenden wir uns der Herleitung eines Fehlerschätzers für das statische elastoplastische Kontaktproblem zu. Genauer betrachten wir den ersten Zeitschritt des in (2.26) beschriebenen Problems. Gesucht ist ein $u \in K = \{\varphi \in V \mid \gamma_C(\varphi)_n - g \leq 0 \text{ f. ü. auf } \Gamma_C\}$ mit

$$a^{\text{pl}}(u; \varphi - u) \geq \langle l, \varphi - u \rangle \quad \forall \varphi \in K, \quad (4.13)$$

wobei wir hier auf die explizite Angabe der Zeitschritte verzichtet haben. Weiterhin nehmen wir an, dass uns für die Abschätzung des Fehlers eine bereits berechnete approximative Lösung $u_h \in K_h$ dieses Problems zur Verfügung steht, siehe (3.12), so dass gilt

$$a_h^{\text{pl}}(u_h, \varphi_h - u_h) \geq \langle l, \varphi_h - u_h \rangle \quad \forall \varphi_h \in K_h. \quad (4.14)$$

Da sich der Fehler, wie bei unstetigen Methoden üblich, im erweiterten Raum $V + V_h$ befindet wird die Einführung der Interpolierenden aus Lemma 4.2 erneut grundlegend sein. Mit deren Anwendung werden wir zunächst den Fehler in einen stetigen und einen unstetigen Anteil aufteilen. Während wir für den unstetigen Beitrag die Interpolationsabschätzung aus (4.7) verwenden, gehen wir beim stetigen analog zu den Ausführungen in [56, Abschnitt 4.1.3] vor.

Satz 4.5. *Seien u bzw. u_h die jeweiligen Lösungen der Probleme (4.13) bzw. (4.14). Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass mit*

$$\begin{aligned} \eta_{\text{pl}_T}^2 &:= \|f + \text{div } \mathcal{F}(\varepsilon(u_h))\|_{0,T}^2 \\ \eta_{\text{pl}_{\mathcal{E}_h^0}}^2 &:= \|[[u_h]]\|_{0,e}^2 \\ \eta_{\text{pl}_{\mathcal{E}_h}^2} &:= \begin{cases} \|f_N - \mathcal{F}(\varepsilon(u_h))n\|_{0,e}^2, & \text{für } e \subseteq \Gamma_N \\ \|[[\mathcal{F}(\varepsilon(u_h))]]\|_{0,e}^2, & \text{für } e \in \mathcal{E}_h^i \end{cases} \end{aligned}$$

gilt

$$|u - u_h|_1^2 \leq C \eta_{\text{pl}}^2 := C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \eta_{\text{pl}_T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-1} \eta_{\text{pl}_{\mathcal{E}_h^0}}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} h_e \eta_{\text{pl}_{\mathcal{E}_h}}^2 \right) \quad (4.15)$$

Beweis: Mit Hilfe des Interpolationsoperators trennen wir zunächst den Fehler in einen stetigen und einen unstetigen Anteil. Mit der Interpolationsabschätzung (4.7) und von h unabhängigen Konstanten $C > 0$ gilt demnach zunächst:

$$\|u - u_h\|^2 = |u - u_h|_1^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-1} \|[u_h]\|_{0,e}^2 \quad (4.16)$$

$$\leq |u - \hat{u}_h|_1^2 + C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-1} \|[u_h]\|_{0,e}^2. \quad (4.17)$$

Sei $e = u - \hat{u}_h$ bzw. e_I die Clément-Interpolierende von e im stetigen Finite Elemente Raum bestehend aus stückweise bi- bzw. trilinearen Ansatzfunktionen. Für die Abschätzung des ersten Summanden in (4.17) folgen wir der Argumentation in [56, Abschnitt 4.1.3] und erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e_I))_0 \\ &= \langle l, e_I \rangle - (\mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e_I))_0 + (\mathcal{F}(\varepsilon(u)), \varepsilon(e_I - e))_0 - \langle l, e_I - e \rangle \\ & \quad + (\mathcal{F}(\varepsilon(u)), \varepsilon(e))_0 - \langle l, e \rangle \\ & \leq (\mathcal{F}(\varepsilon(u)), \varepsilon(e_I - e))_0 - \langle l, e_I - e \rangle \end{aligned}$$

Hieraus resultiert zusammen mit der starken Monotonie und Stetigkeit von \mathcal{F} die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} & \gamma |u - \hat{u}_h|_1^2 \\ & \leq (\mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e))_0 \\ & = (\mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e) - \varepsilon(e_I))_0 + (\mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e_I))_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\mathcal{F}(\varepsilon(u)), \varepsilon(e - e_I))_0 - (\mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e - e_I))_0 + (\mathcal{F}(\varepsilon(u)), \varepsilon(e_I - e))_0 \\
&\quad - \langle l, e_I - e \rangle \\
&= \langle l, e - e_I \rangle - (\mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e - e_I))_0
\end{aligned}$$

Durch Einschleiben der unstetigen Finite Elemente Lösung u_h und Ausnutzung der Stetigkeit von \mathcal{F} sowie partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\langle l, e - e_I \rangle - (\mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e - e_I))_0 \\
&= \langle l, e - e_I \rangle + (\mathcal{F}(\varepsilon(u_h)) - \mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h)), \varepsilon(e - e_I))_0 - (\mathcal{F}(\varepsilon(u_h)), \varepsilon(e - e_I))_0 \\
&\leq \langle l, e - e_I \rangle + \|\mathcal{F}(\varepsilon(u_h)) - \mathcal{F}(\varepsilon(\hat{u}_h))\|_0 \|\varepsilon(e - e_I)\|_0 - (\mathcal{F}(\varepsilon(u_h)), \varepsilon(e - e_I))_0 \\
&\leq \langle l, e - e_I \rangle + C \|\varepsilon(u_h) - \varepsilon(\hat{u}_h)\|_0 \|\varepsilon(e - e_I)\|_0 - (\mathcal{F}(\varepsilon(u_h)), \varepsilon(e - e_I))_0 \\
&= \langle l, e - e_I \rangle + C \|\varepsilon(u_h) - \varepsilon(\hat{u}_h)\|_0 \|\varepsilon(e - e_I)\|_0 + \\
&\quad \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[(\operatorname{div} \mathcal{F}(\varepsilon(u_h)), e - e_I)_{0,T} + \sum_{e \in \partial T} (\mathcal{F}(\varepsilon(u_h)) n, e - e_I)_{0,e} \right]
\end{aligned}$$

Man erhält nun die Behauptung durch die Fehlerabschätzungen für die Clément-Interpolation sowie zweimaliges Anwenden der Hölderschen Ungleichung für Summen. \blacksquare

4.3 Die hybride Finite Elemente Methode

Ziel dieses Abschnitts ist es eine Möglichkeit aufzuzeigen mit der sich die Anzahl der Freiheitsgrade bei der Verwendung von unstetigen Methoden deutlich reduzieren lässt. Die Idee der simultanen Verwendung von stetigen und unstetigen Ansatzfunktionen wird beispielsweise in den Arbeiten [15, 23, 66] für die Advektion-Diffusions Gleichung bzw. Problemen der Poroelastizität umgesetzt um Instabilitäten in der Lösung eines rein stetigen oder unstetigen Verfahrens vorzubeugen. In dieser Arbeit verfolgen wir speziell im Abschnitt 5.5 das Ziel eine Auftrennung des Finite Elemente Netzes mit Hilfe von unstetigen Ansatzfunktionen zu

realisieren. Daher liegt es für diesen Zweck nahe, die unstetigen Elemente lediglich nur an den Stellen zu verwenden, wo mit einer potentiellen Netzauftrennung zu rechnen ist. Dies wird in unserem Fall eine hinreichend große Umgebung um den Kontaktrand sein. An den übrigen Stellen werden wir nach wie vor auf stetige Ansatzfunktionen zurückgreifen. Im Detail partitionieren wir die Zerlegung des Gebiets \mathcal{T}_h in disjunkte Teilmengen \mathcal{T}_h^{cG} und \mathcal{T}_h^{dG} . Für ein Element $T \in \mathcal{T}_h$ möge also stets entweder $T \in \mathcal{T}_h^{cG}$ oder $T \in \mathcal{T}_h^{dG}$ gelten. Der Ansatzraum für die Diskretisierung wird mit Verweis auf (3.2) definiert durch

$$V_h^{cdG} := \left\{ v_h \in V_h \mid v_h|_{\mathcal{T}_h^{cG}} \in H^1(\mathcal{T}_h^{cG}, \mathbb{R}^d) \right\}. \quad (4.18)$$

Da bei der Verwendung von stetigen Ansatzfunktionen keine Sprünge entstehen entfallen jene Terme in der Bi- bzw. Semilinearform und diese reduzieren sich auf die entsprechende Form beim stetigen Ansatz. Dies gilt auch für die in dieser Arbeit hergeleiteten Fehlerschätzer aus denen Fehlerschätzer für stetige Ansatzfunktionen hervorgehen wie sie beispielsweise in der Arbeit [75] vorzufinden sind.

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse

Dieses Kapitel enthält Ergebnisse von numerischen Simulationen, die die Anwendung der theoretischen Resultate der vorherigen Kapitel illustrieren. Zunächst werden wir in den Abschnitten 5.1 und 5.2 die in Kapitel 4 hergeleiteten Fehlerschätzer innerhalb eines h-adaptiven Algorithmus in numerischen Experimenten mit sowohl bekannter als auch unbekannter exakter Lösung einsetzen. Dabei stehen die jeweiligen Konvergenzgeschwindigkeiten und der Vergleich zu einer globalen Verfeinerungsstrategie im Fokus. In Abschnitt 5.3 werden weiterhin diese Aspekte bei einer dreidimensionalen Simulation beleuchtet. Die Netzverfeinerung basiert hier auf einer festen Anteilsstrategie mit dem Parameter von 0.7 wobei auf eine Vergrößerung von Zellen verzichtet wurde. Beiläufig ist hier erwähnenswert, dass beim Einsatz von unstetigen Finiten Elementen die Stetigkeit der Lösung an hängenden Knoten nicht erzwungen sondern auf natürliche Weise übernommen wird. Im Abschnitt 5.4 betrachten wir ein Beispiel für eine Variationsgleichung mit singulärer Lösung und vergleichen den unstetigen Ansatz mit einem hybriden. Abschließend gehen wir in Abschnitt 5.5 auf eine Vorgehensweise ein mit der sich im Rahmen von unstetigen Methoden eine Netzauftrennung realisieren lässt.

5.1 Ein elastisches Kontaktbeispiel

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Beispiel für den Kontakt eines rein elastischen Körpers mit einem starren Hindernis in zwei Dimensionen mit vorgegebener exakter Lösung. Der elastische Körper sei durch $\Omega = (-3, 0) \times (-1, 1)$ sowie den Materialparametern $E = 10$ für das Elastizitätsmodul bzw. $\nu = 0.3$ für die Poissonzahl beschrieben. Weiterhin nehmen wir an, dass ein ebener Verzerrungszustand vorliegt. Auf den Teilmengen $\Gamma_D = \{-3\} \times [-1, 1]$ bzw. $\Gamma_N = (-3, 0) \times \{-1, 1\}$ schreiben wir homogene Dirichlet bzw. Neumann- Randbedingungen vor und definieren den Bereich für einen möglichen Kontakt durch $\Gamma_C = \{0\} \times [-1, 1]$. Die exakte Lösung des Problems sei durch die Abbildung

$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$u_1(x, y) = \begin{cases} -(x+3)^2 \left(y - \frac{x^2}{18} - \frac{1}{2}\right)^4 \left(y + \frac{x^2}{18} + \frac{1}{2}\right)^4, & \text{für } |y| \leq \frac{x^2}{18} + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$u_2(x, y) = \begin{cases} \frac{27}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi(x+3)}{3}\right) \left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 \left(y + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^4 \left(y + \frac{1}{2}\right)^3\right), & \text{für } |y| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $u(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))^T$ vorgegeben, aus der sich die rechte Seite $f = -\operatorname{div}(\sigma(u))$ und die Hindernisfunktion g mit $g(y) = u_1(0, y)$ ergeben. Für die approximative Lösung dieses Problems wurde die SIPG-Methode aus Abschnitt 3.1 in Zusammenhang mit der aktiven Mengen Strategie verwendet und in der zugehörigen Bilinearform (3.4) der Wert $\pi = 1000$ für den Strafparameter gesetzt. In Abbildung 5.1 sind die Frobenius-Norm der Spannungen über das Gebiet sowie die Kontaktkräfte dargestellt. Der Graph in Abbildung 5.3 verdeutlichen, dass der Fehlerschätzer aus Satz 4.4 sehr präzise die Ordnung des Fehlers in der Energienorm wiedergibt. Sowohl beim Schätzer als auch beim tatsächlichen Fehler besteht ein linearer Zusammenhang mit der Maschenweite des Finite Elemente Netzes.

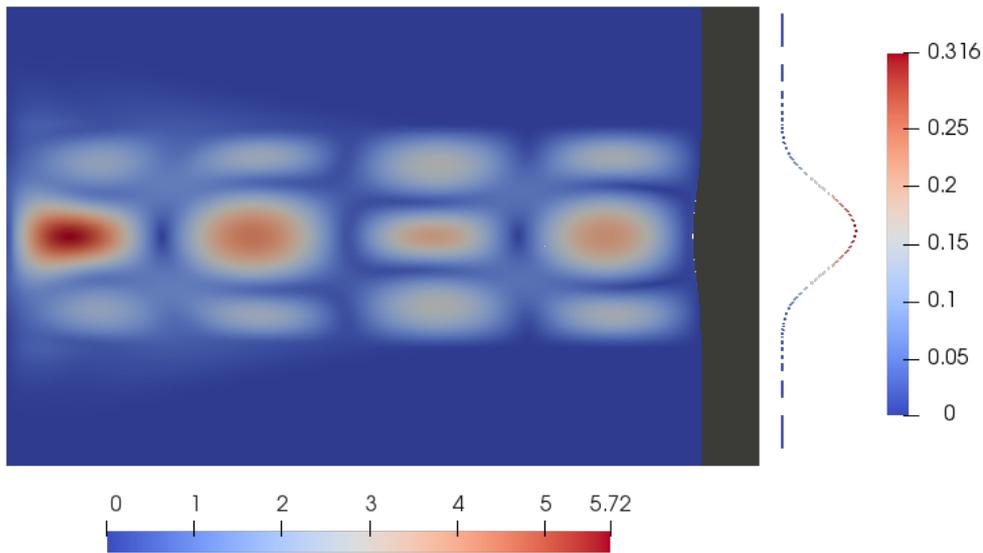


Abbildung 5.1: Von Mises Spannung der berechneten Lösung u_h mit Kontaktkräften nach 8 adaptiven Verfeinerungsschritten

Auch bei den entsprechenden Anteilen des Fehlerschätzers handelt es sich um Terme höherer Ordnung, wie der Abbildung 5.4 zu entnehmen ist.

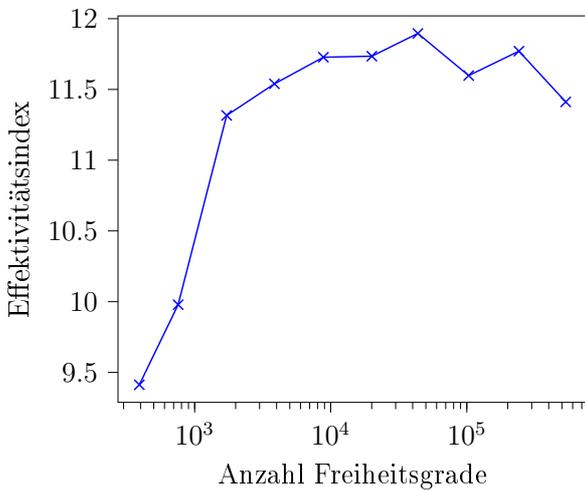


Abbildung 5.2 verdeutlicht, dass der tatsächliche Fehler vom residuellen Fehlerschätzer stets überschätzt wird. Nach anfänglichen Verfeinerungen bleibt das Verhältnis dieser Größen annähernd konstant.

Abbildung 5.2: Effizienzindex des Fehlerschätzers η_{el}

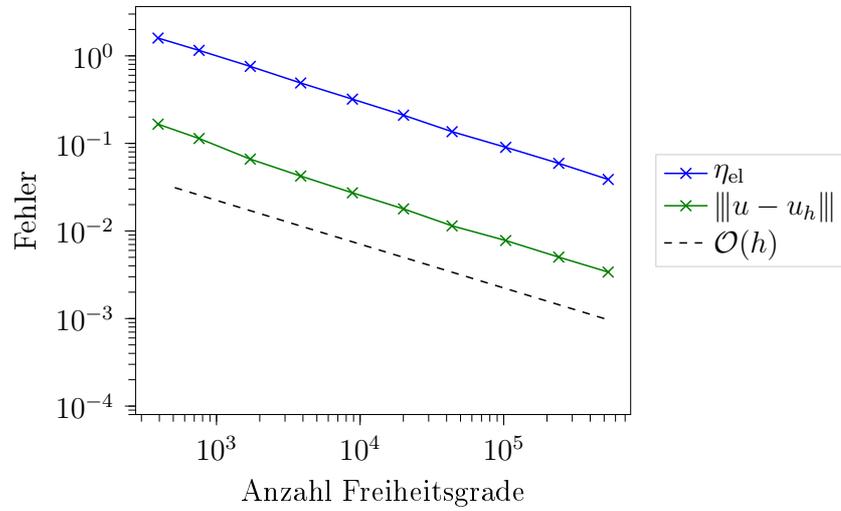


Abbildung 5.3: Entwicklung des Fehlers bzw. Fehlerschätzers

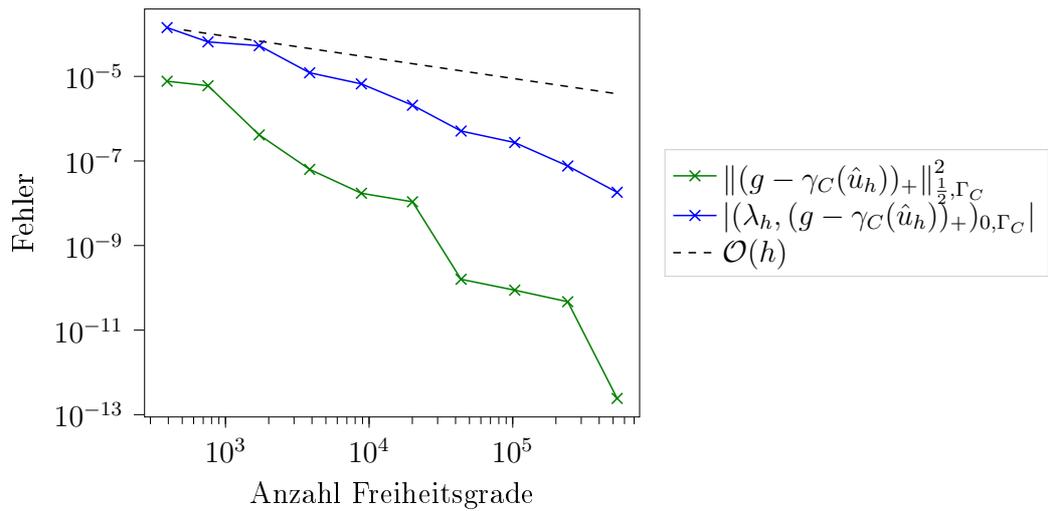
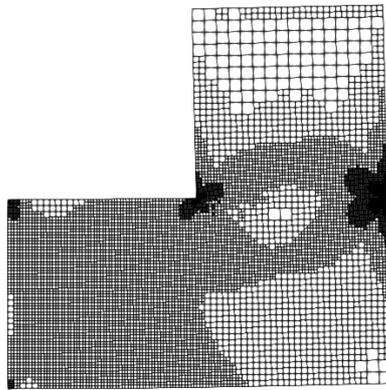


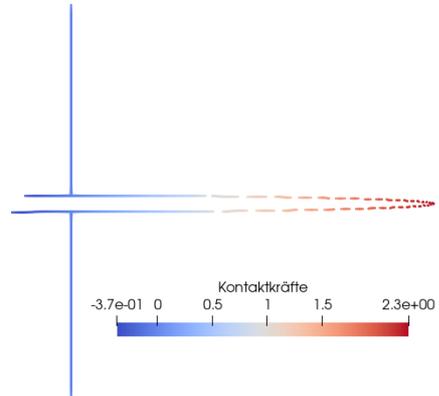
Abbildung 5.4: Anteile des Fehlerschätzers auf dem Kontaktrand

5.2 Elastoplastischer Kontakt auf dem L-Gebiet

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten des Fehlerschätzers aus Satz 4.5 bei einem Kontaktproblem auf dem L-Gebiet $\Omega := (-1, 1)^2 \setminus (-1, 0) \times (0, 1)$. Auf dem Dirichlet-Rand $\Gamma_D := \{-1\} \times [-1, 0]$ sei der Körper fest eingespannt und das Teilstück des Randes, das für einen möglichen Kontakt in Frage kommt, sei $\Gamma_C := \{1\} \times [-1, 1]$. Alle übrigen Teile des Randes werden als freie Neumann-Ränder definiert und es werden keine Volumenkräfte angewendet. Wir wählen beim Körper ein Elastizitätsmodul von $E = 50$ und die Poisson-Zahl $\nu = 0.33$ und setzen weiterhin die Fließgrenze $\sigma_0 = 0.17$ und den Verfestigungsparameter $\gamma_{\text{iso}} = 0.01$. Als Hindernis führen wir die Kugel mit Mittelpunkt $(1.48, 0)$ und Radius $R = 0.5$ ein. Die diskrete Lösung wird durch die IIPG Methode mit einem Strafparameter von $\pi = 5000$ berechnet. Obwohl uns die kontinuierliche Lösung dieses Problems nicht zur Verfügung steht, lässt sich aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ableiten, dass ein singuläres Verhalten in der einspringenden Ecke bzw. an den Übergängen der Randbedingungen eintritt. Dementsprechend wird das Finite Elemente Netz im adaptiven Algorithmus in diesen Bereichen, sowie in der Umgebung der Kontaktzone stark verfeinert, siehe Abbildung 5.5(a). In Abbildung 5.5(b) sind die entsprechenden Kontaktkräfte dargestellt. Abgesehen von der symmetrischen Verteilung, die auf die Symmetrie des Hindernisses zurückzuführen ist, lassen sich auch leicht negative Werte am Rand des Kontaktbereichs feststellen. Grund dafür ist die Darstellung der Kräfte in den biorthogonalen Basisfunktionen, in denen auch bei stets positiven Koeffizienten durchaus negative Werte auftreten können. Diese Artefakte treten allerdings nur in Zonen auf in denen ohnehin kleine Kräfte wirken und nehmen auch mit zunehmender Verfeinerung des Netzes an diesen Stellen ab. Abbildung 5.6 zeigt die Werte des Fehlerschätzers in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade im System. Die dazugehörigen Konvergenzordnungen sind in Tabelle 5.1 wiedergegeben.



(a) Adaptiv verfeinertes Netz nach 9 Verfeinerungsschritten



(b) Kontaktkräfte in Mortarbasis

Abbildung 5.5: Finite Elemente Netz und Kontaktkräfte im L-Gebiet

	uniform	adaptiv
1	0.47	0.62
2	0.27	0.48
3	0.67	1.14
4	0.82	1.21
5	0.79	1.09
6	-	1.06
7	-	1.07
8	-	1.00
9	-	1.06

Die geringe Regularität der Lösung führt dazu, dass bei uniformer Verfeinerung nicht die optimalen Konvergenzraten erreicht werden. Dies ist erst beim adaptiven Algorithmus der Fall bei dem sich linear mit der Maschenweite des Netzes abnehmende Fehlerwerte einstellen.

Tabelle 5.1: Konvergenzraten nach entsprechend vielen Verfeinerungsschritten

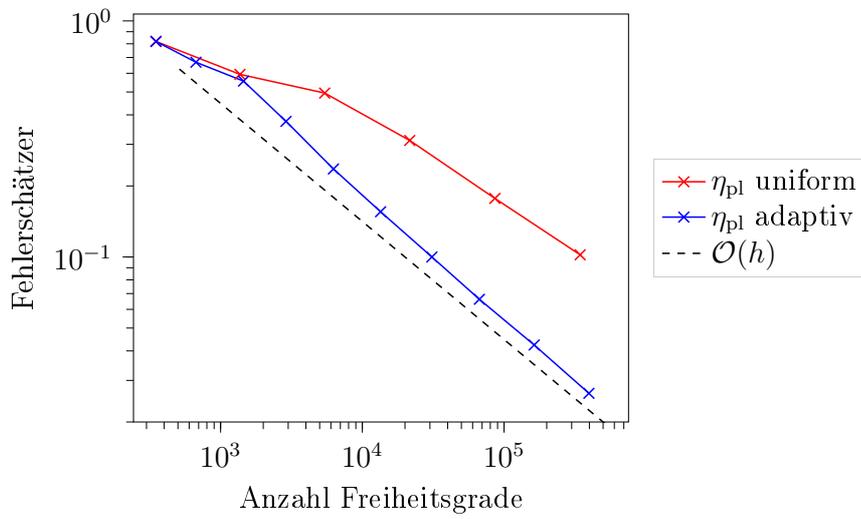


Abbildung 5.6: Auswertung des Fehlerschätzers bei adaptiver bzw. uniformer Verfeinerung

5.3 Elastoplastischer Kontakt in drei Dimensionen

Anders als in den bisherigen Beispielen betrachten wir in diesem Abschnitt eine Kontaktsituation im dreidimensionalen Raum. Bei dem Hindernis handelt es sich um eine Annäherung an die Schneide eines Bohrers welche in den Ingenieurwissenschaften üblicherweise verwendet wird. Dieser besteht zunächst aus einer Verrundung in Form eines Zylinders im vordersten Teil der Schneide welcher im sog. Spanwinkel nach oben bzw. dem Freiwinkel nach unten stetig differenzierbar durch Ebenen fortgesetzt wird. Beide Winkel wurden in der Simulation mit 11 Grad festgesetzt. Dieses Hindernis wird nun bis zu einer Tiefe von 0.03 Einheiten in einen quaderförmigen Körper $\Omega = (0, 3) \times (-1, 1)^2$ mit $\Gamma_C = \{3\} \times [0, 1]^2$ und $\Gamma_D = \{0\} \times [0, 1]^2 \cup [0, 3] \times \{-1\} \times [-1, 1]$ eingedrückt. Beim Körper wählen wir ein Elastizitätsmodul von $E = 70$ und die Poisson-Zahl $\nu = 0.33$ und setzen weiterhin die Fließgrenze $\sigma_0 = 0.17$ und den Verfestigungsparameter $\gamma_{\text{iso}} = 0.01$. Die Kontaktsituation sowie die Verschiebun-

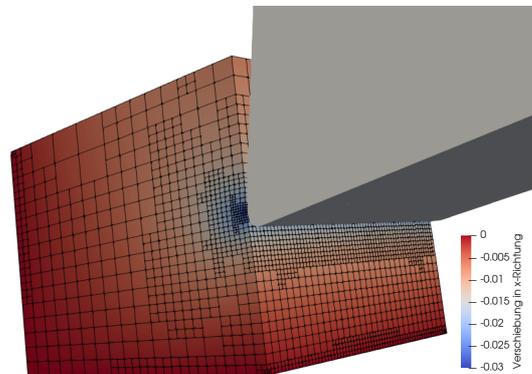


Abbildung 5.7: Verschiebungen des Körpers in Kontakttrichtung

gen der Materialpunkte des Körpers und die herrschenden Kontaktkräfte am Kontaktrand sind in den Abbildungen 5.7 und 5.8 dargestellt. Im Gegensatz zum letzten Beispiel wurden die Kontaktkräfte in den Standardbasen für trilineare Ansatzfunktionen abgebildet.

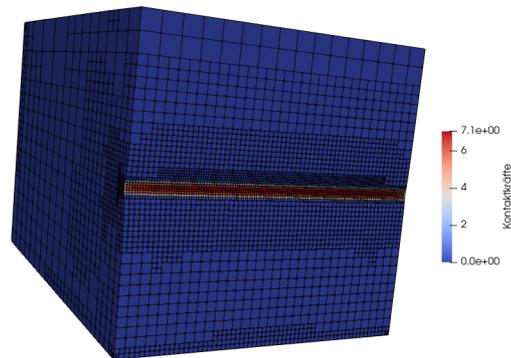


Abbildung 5.8: Darstellung der Kontaktkräfte

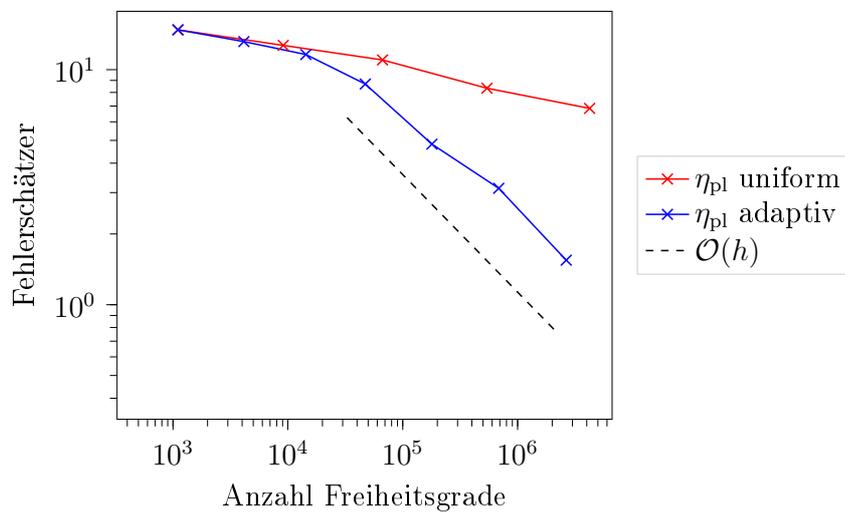


Abbildung 5.9: Entwicklung des Fehlers bzw. Fehlerschätzers

Bei der Auswertung des Fehlerschätzers η_{pl} aus Abschnitt 4.2 beobachten wir die h^1 -Konvergenzordnung erst nach mehreren adaptiven Verfeinerungsschritten während sie hingegen bei uniformer Verfeinerungsstrategie in etwa nur eine $h^{\frac{1}{2}}$ Ordnung erreichen.

5.4 Beispiel zur hybriden FEM

Als ein konkretes Beispiel zur Illustration der simultanen Verwendung von stetigen und unstetigen Ansatzfunktionen betrachten wir die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.1)$$

$$u = u^* \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (5.2)$$

auf dem Schlitzgebiet $\Omega = (-1, 1)^2$ mit einem Schlitz entlang der geraden Strecke zwischen den Punkten $(0, 0)$ und $(0, -1)$. Die exakte Lösung des Problems sei in Polarkoordinaten durch

$$u^*(r, \varphi) = r^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (5.3)$$

vorgegeben. In Abbildung 5.10 ist die berechnete Lösung nach 22 adaptiven Verfeinerungen dargestellt wobei \mathcal{T}_h^{dG} hier aus den Viereckselementen besteht, dessen Mittelpunkte innerhalb des Kreises $\{r^2 < 0.25\}$ liegen. Für die feste Anteilsstrategie wurde hier jedoch der Parameter 0.3 verwendet.

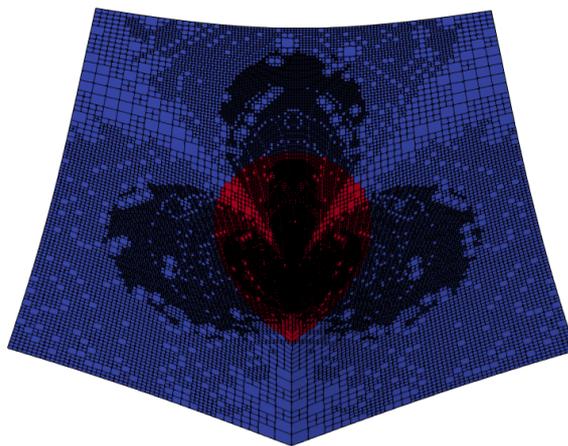


Abbildung 5.10: Wahl von stetigen (blau) und unstetigen (rot) Ansatzfunktionen

Die Grundlage für den adaptiven Algorithmus bildet dabei der Fehler-schätzer aus der Arbeit [53], mit dem eine zunehmende Auflösung des Gebiets um die Singularität der Lösung im Punkt $(0,0)$ erreicht wird. Betrachten wir die Entwicklung des Fehlers in der Energienorm so lässt sich eine Reduktion in der Ordnung h^1 beim adaptiven und $h^{0.5}$ beim uniformen Verfeinerung feststellen. Der Vergleich zwischen den Fehlerwerten des vollständig unstetigen mit dem des hybriden Ansatzes verdeutlicht, dass beim hybriden Ansatz eine Reduktion um einen nahezu konstanten Faktor erzielt wird.

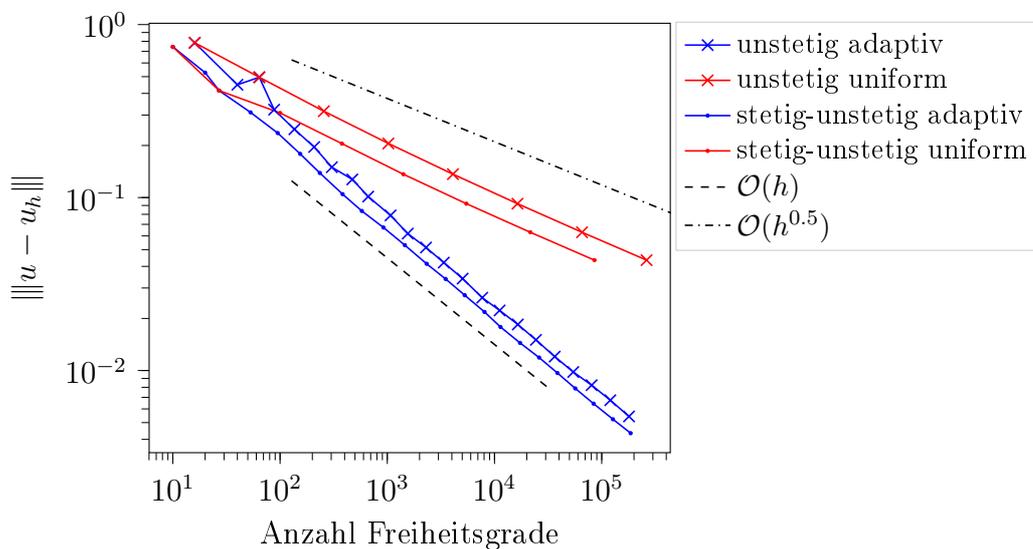


Abbildung 5.11: Auswertung des Fehlers bei adaptiver bzw. uniformer Verfeinerung in der Energienorm

5.5 Netzauftrennung mit unstetigen Elementen

In diesem Abschnitt stellen wir eine Möglichkeit vor mit der die erhöhte Anzahl von Freiheitsgraden bei unstetigen Ansatzfunktionen ausgenutzt werden kann um eine Auftrennung des Finite Elemente Netzes zu ermöglichen. Diese für Span- bzw. Rissbildungssimulationen durchaus wünschenswerte Option ist bei der Verwendung von stetigen Ansatzfunktionen eher mit Schwierigkeiten wie einer Kantenverdopplung oder sogar einer Neuvernetzung des Gebiets verbunden. Durch die Verwendung von unstetigen Elementen können wir diese Umstände umgehen und die Netzauftrennung mit den bereits gegebenen Mitteln in die Simulation integrieren. Zur Illustration greifen wir erneut die Hindernisfunktion aus Abschnitt 5.3 (Freiwinkel = 11° , Spanwinkel = 30°) in zwei Raumdimensionen auf und betrachten (als grobe Näherung) das quasistatische Kontaktproblem mit $\Omega = (-3, 3) \times (-1, 1)$, $\Gamma_C = \{3\} \times [-1, 1]$ und $\Gamma_D = \{-3\} \times [-1, 1] \cup [-3, 3] \times \{-1\}$. Die Materialparameter seien wieder wie in Abschnitt 5.3 gewählt. Während das Hindernis in jedem Zeitschritt um 0.005 Einheiten nach links gedrückt wird ist zunächst die zu öffnende Kante des Netzes zu kennzeichnen. In diesem Anwendungsfall kommt als Grund für die Auftrennung des Materials lediglich der Kontakt mit dem Hindernis in Frage. In Folge dessen wählen wir als Kriterium den Abstand der in Frage kommenden Kanten¹ zum vordersten Punkt des Hindernisses. Sobald dieser Abstand einen vorgegebenen Wert, in dem Fall 0.1 Einheiten, unterschreitet werden sämtliche diese Kanten betreffenden Terme in der Semilinearform (3.10) und somit insbesondere auch der Strafparameter π auf 0 gesetzt. Diese Kanten werden bei der darauf folgenden Assemblierung der Steifigkeitsmatrix und rechten Seite so behandelt als wären sie Teil des Kontaktrandes und die ihren Eckpunkten zugeordneten Freiheitsgrade gemäß der aktiven Mengen Strategie bei Bedarf auf den oberen oder den unteren Rand des Hindernisses

¹Das sind die horizontalen Kanten derjenigen Elemente, die unmittelbar am Kontaktrand liegen.

gesetzt. In gewissem Sinne kann diese Simulation somit als eine Folge von Kontaktproblemen mit einem sich in jedem Zeitschritt ändernden Schlitzgebiet betrachtet werden. In den Abbildungen ist eine deutliche

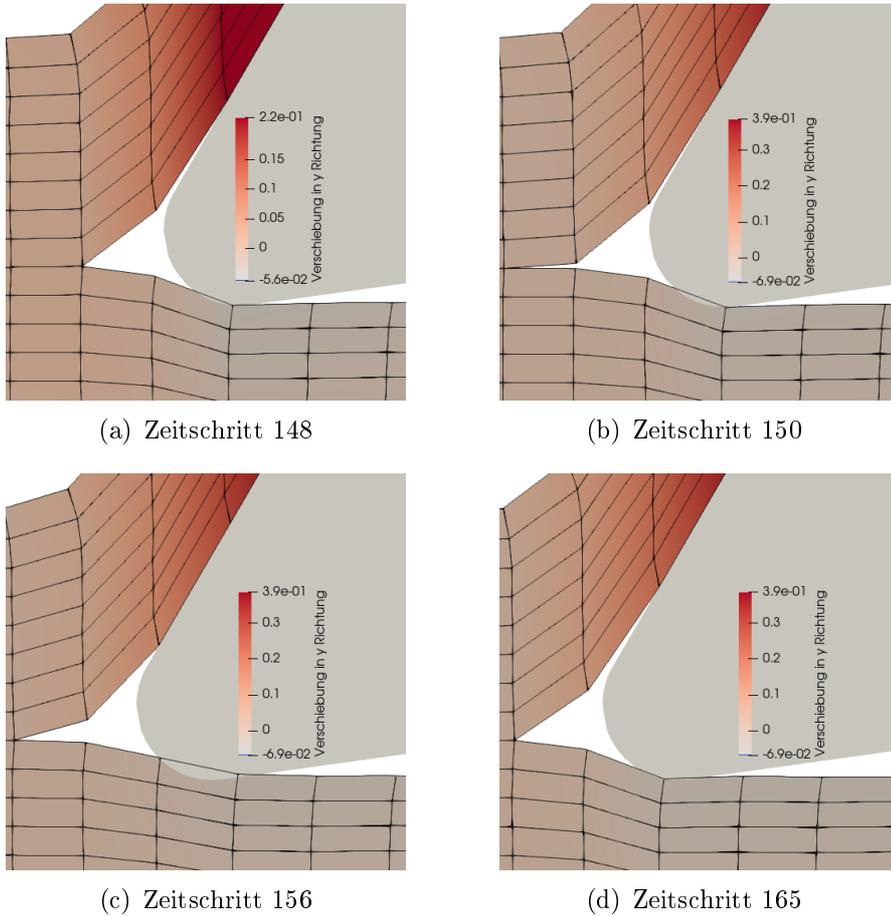


Abbildung 5.12: Verschiedene Zeitschritte bei der Netzauftrennung

Verletzung der Nicht-Durchdringungsbedingung zu sehen. Das ist darauf zurückzuführen, dass diese im Diskreten nur an den Eckpunkten des Elementes gefordert wird. Es ist davon auszugehen, dass diese Effekte mit weiterer Verfeinerung vernachlässigbar klein werden.

Kapitel 6

Fazit und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns mit der numerischen Behandlung von Kontaktproblemen mittels unstetiger Galerkin-Methoden mit besonderem Fokus auf Fehlerkontrolle und Netzadaptivität beschäftigt. Es wurden dabei sowohl rein elastisches als auch elastoplastisches Materialverhalten mit linearer isotroper Verfestigung in einem quasistatischen Modell in Betracht gezogen. Nach einer kurzen Einführung der zugrundeliegenden kontinuierlichen Probleme haben wir zwei mögliche Ansätze zur Diskretisierung mit unstetigen Ansatzfunktionen angegeben und deren Eigenschaften diskutiert. Die dazugehörigen Finiten Elemente Räume sind keinesfalls in den Räumen enthalten, in denen die kontinuierlichen Variationsungleichungen gestellt sind, was die Einführung von zusätzlichen Termen in der Bi- bzw. Semilinearform erforderlich macht. Dazu zählt insbesondere die geeignete Wahl eines Parameters zur Bestrafung von allzu großen Sprüngen in der Lösungsfunktion dessen konkreter Wert in der Literatur häufig nur auf Heuristiken basiert. Die größte Hürde bei unstetigen Methoden bilden jedoch die rasant mit der Feinheit des Netzes wachsende Anzahl von Freiheitsgraden im System, die die Bestimmung der approximativen Lösung rechen- und damit auch zeitintensiv machen. Um eine dem Aufwand angemessene Fehlerreduktion gewährleisten zu können haben wir residuale Fehlerschätzer hergeleitet und für eine adaptive Verfeinerung des Finite Elemente Netzes verwendet. Im Zentrum stand dabei ein Interpolationsoperator mit bekannten Fehlerabschätzungen, welcher eine unstetige Funktion des diskreten Raumes

auf eine stetige Funktion abbildet. Im elastischen Fall konnten wir mittels eines Hilfsproblems, bei dem die Kontaktkräfte als bekannt vorausgesetzt werden, eine Verbindung zu bereits existierenden Fehlerschätzern aus dem Kontext von Variationsgleichungen herstellen und diese somit für den Einsatz heranziehen. Beim elastoplastischen Fall wurde hauptsächlich die starke Monotonie der nichtlinearen Abbildung für die Spannungen benötigt. Durch einige anwendungsnahe Testbeispiele sind wir auch in Lage gewesen die theoretisch zu erwartenden Fehlerordnungen explizit zu beobachten. In der Tat ließen sich die durch die erhöhte Anzahl der Freiheitsgrade gewonnene Flexibilität des Verfahrens weiterhin für zusätzliche Anwendungsfälle ausnutzen. Indem wir Bestrafung von unstetigen Stellen der Lösungen auf ausgewählten Kanten des Netzes aufgehoben haben ließ sich dort eine Netzauftrennung bewerkstelligen, was eine Spanbildungssimulation ermöglicht hat. Das für die Auswahl der Kanten verwendete Kriterium basierte zwar zunächst auf rein geometrischen Gegebenheiten, jedoch sind andere Kennzeichen, wie beispielsweise zahlreich verfügbare Schädigungsmodelle, denkbar, vgl. [63]. Auch andere Stellen dieser Arbeit bieten Ansatzpunkte zur Erweiterung und Verbesserung. Aus Sicht der Modellierung sind hierbei an erster Stelle die Auswirkungen der Reibung bzw. die damit einhergehenden thermomechanischen Effekte über eine Kopplung mit der Wärmeleitungsgleichung zu erwähnen. Diese Aspekte müssten im Materialmodell einfließen und letztendlich zu Simulationsergebnissen führen, die den Beobachtungen im Experiment weitaus besser entsprechen. Eine weitere Grundlage für Erweiterungen bietet sich in der Anwendung von höheren Polynomgradansätzen an mit denen deutlich schnellere Konvergenzen erreicht werden können. Aufgrund des Verzicht auf Stetigkeit der Ansatzfunktionen sind bei unstetigen Galerkin-Methoden alle lokalen Berechnungen auf den Zellen vollständig unabhängig voneinander. Dies erlaubt es fast ohne Aufwand den Grad der lokalen polynomialen Funktionen zu erhöhen. Die Schwierigkeit besteht somit nur noch in der sinnvollen Lokalisierung von Stellen, wo solch ein Verfahren lohnenswert ist. Auch im Gebiet der Fehlerschätzer ist man in der Regel bei der Anwendung nicht am Fehlermaß

in der Energienorm sondern vielmehr an problemspezifische Funktionalen interessiert. Der Zugang hierzu ist über die sog. zielorientierten Fehler-schätzer gegeben bei denen die Güte der Lösung anhand des Werts eines vorgegebenen Zielfunktional gemessen wird. Die Herausforderung dabei besteht in der Regel darin unter angemessenem Aufwand eine Lösung des dem Zielfunktional entsprechenden dualen Problems zu finden.

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS, R. A.: *Sobolev Spaces*. Elsevier Science, 2003 (Pure and Applied Mathematics)
- [2] AINSWORTH, M. ; ODEN, J.T.: *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2000
- [3] AINSWORTH, M. ; ODEN, J.T. ; LEE, C.Y.: Local A Posteriori Error Estimators for Variational Inequalities. In: *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* 9 (1993), S. 23–33
- [4] ALBERTY, J. ; CARSTENSEN, C.: Discontinuous Galerkin time discretization in elastoplasticity: motivation, numerical algorithms, and applications. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191 (2002), Nr. 43, S. 4949–4968
- [5] ALBERTY, J. ; CARSTENSEN, C. ; ZARRABI, D.: Adaptive numerical analysis in primal elastoplasticity with hardening. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 171 (1999), Nr. 3, S. 175–204
- [6] ARNOLD, D. N. ; BREZZI, F. ; COCKBURN, B. ; MARINI, D.: Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (2002), S. 1749–1779
- [7] BANGERTH, W. ; RANNACHER, R.: *Adaptive finite element methods for differential equations*. Basel : Birkhäuser, 2003 (Lectures in Mathematics, ETH Zürich)
- [8] BANZ, L.: *hp -Finite Element and Boundary Element Methods for Elliptic, Elliptic Stochastic, Parabolic and Hyperbolic Obstacle and*

Contact Problems, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Diss., 2011

- [9] BARTELS, S. ; CARSTENSEN, C.: Averaging techniques yield reliable a posteriori finite element error control for obstacle problems. In: *Numer. Math.* 99 (2004), Nr. 2, S. 225–249
- [10] BRAESS, D.: A posteriori error estimators for obstacle problems – another look. In: *Numer. Math.* 101 (2005), Nr. 3, S. 415–421
- [11] BRAESS, D.: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Berlin : Springer-Verlag, 2007
- [12] BRAESS, D. ; HOPPE, R.H.W. ; SCHÖBERL, J.: A posteriori estimators for obstacle problems by the hypercircle method. In: *Comput. Vis. Sci.* 11 (2008), S. 351–362
- [13] BRENNER, S.: Korn’s inequalities for piecewise H^1 vector fields. In: *Math. Comput.* 73 (2003), Nr. 247, S. 1067–1087
- [14] BRENNER, S.: Poincaré- Friedrichs inequalities for piecewise H^1 functions. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 41 (2003), S. 306–324
- [15] CANGIANI, A. ; CHAPMAN, J. ; GEORGOULIS, E. H. ; JENSEN, M.: Implementation of the Continuous-Discontinuous Galerkin Finite Element Method. In: *Numer. Math. Adv. Appl. 2011*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2013, S. 315–322
- [16] CARSTENSEN, C. ; ALBERTY, J.: Averaging techniques for reliable a posteriori FE-error control in elastoplasticity with hardening. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2003), Nr. 11, S. 1435–1450
- [17] CARSTENSEN, C. ; GUDI, T. ; JENSEN, M.: A unifying theory of a posteriori error control for discontinuous Galerkin FEM. In: *Numer. Math.* 112 (2009), Nr. 3, S. 363–379

- [18] CARSTENSEN, C. ; KLOSE, R. ; ORLANDO, A.: Reliable and efficient equilibrated a posteriori finite element error control in elastoplasticity and elastoviscoplasticity with hardening. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 195 (2006), S. 2574–2598
- [19] CARSTENSEN, C. ; SCHERF, O. ; WRIGGERS, P.: Adaptive finite elements for elastic bodies in contact. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 20 (1999), Nr. 5, S. 1605–1626
- [20] CHEN, Z. ; NOCHETTO, R.: Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems. In: *Numer. Math.* 84 (2000), Nr. 4, S. 527–548
- [21] COCKBURN, B. ; KARNIADAKIS, G.E. ; SHU, C.W.: *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications*. Berlin Heidelberg : Springer, 2012
- [22] DEUFLHARD, P. ; WEISER, M.: *Numerische Mathematik 3*. Berlin : De Gruyter, 2011 (Adaptive Lösung partieller Differentialgleichungen)
- [23] DEVLOO, P. ; FORTI, T. ; GOMES, S.: A combined continuous-discontinuous finite element method for convection-diffusion problems. In: *Lat. Am. J. Solids Struct.* 4 (2007), S. 229–246
- [24] DI PIETRO, D. A. ; ERN, A.: *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. Berlin : Springer, 2011
- [25] DI PIETRO, D.A. ; NICAISE, S.: A locking-free discontinuous Galerkin method for linear elasticity in locally nearly incompressible heterogeneous media. In: *Appl. Numer. Math.* 63 (2013), S. 105 – 116
- [26] DJOKO, J.K. ; EBOBISSE, F. ; MCBRIDE, A. ; REDDY, B.D.: A discontinuous Galerkin formulation for classical and gradient plasticity – Part 1: Formulation and analysis. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196 (2007), S. 3881–3897

- [27] DÖRSEK, P. ; MELENK, J.M.: Adaptive hp-FEM for the contact problem with Tresca friction in linear elasticity: The primal-dual formulation and a posteriori error estimation. In: *Appl. Numer. Math.* 60 (2010), Nr. 7, S. 689–704
- [28] DUVAUT, G. ; LIONS, J. L.: *Inequalities in mechanics and physics*. Berlin : Springer-Verlag, 1976
- [29] EKELAND, I. ; TÉMAM, R.: *Convex analysis and variational problems*. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1976 (Studies in Mathematics and its Applications)
- [30] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998
- [31] FICK, P.: An interior penalty discontinuous Galerkin method for a class of monotone quasilinear elliptic problems. In: *Int. J. Numer. Anal. Mod.* 12 (2015), S. 750–777
- [32] FROHNE, H.: *Finite Elemente Methoden höherer Ordnung für reibungsbehaftete, elasto-plastische Mehrkörperkontaktprobleme*, Technische Universität Dortmund, Diss., 2018
- [33] FROHNE, J.: *FEM-Simulation der Umformtechnik metallischer Oberflächen im Mikrokosmos*, Universität Siegen, Diss., 2011
- [34] FROHNE, J. ; HEISTER, T. ; BANGERTH, W.: Efficient numerical methods for the large-scale, parallel solution of elastoplastic contact problems. In: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 105 (2016), S. 416–439
- [35] GLOWINSKI, R.: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Berlin Heidelberg : Springer, 1984
- [36] GUDI, T. ; PORWAL, K.: A posteriori error control of discontinuous Galerkin methods for elliptic obstacle problems. In: *Math. Comput.* 83 (2014), Nr. 286, S. 579–602

- [37] GUDI, T. ; PORWAL, K.: A Remark on the A Posteriori Error Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for the Obstacle Problem. In: *Comput. Meth. Appl. Math.* 14 (2014), S. 71–87
- [38] GUDI, T. ; PORWAL, K.: A posteriori error estimates of discontinuous Galerkin methods for the Signorini problem. In: *J. Comput. Appl. Math.* 292 (2016), S. 257–278
- [39] HAN, W. ; REDDY, B. D.: *Plasticity: mathematical theory and numerical analysis*. New York : Springer, 1999
- [40] HANSBO, P. ; LARSON, M.: Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressible elasticity by Nitsche’s method. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191 (2002), S. 1895–1908
- [41] HANSBO, P. ; LARSON, M. G.: Energy norm a posteriori error estimates for discontinuous Galerkin approximations of the linear elasticity problem. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 200 (2011), Nr. 45-46, S. 3026–3030
- [42] HARTMANN, R.: Numerical Analysis of Higher Order Discontinuous Galerkin Finite Element Methods. In: DECONINCK, H (Hrsg.): *VKI LS 2008-08 CFD - ADIGMA course very high order Discret. methods, Oct. 13-17, 2008*. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode Saint Genèse, Belgium, 2008
- [43] HESTHAVEN, J. S. ; WARBURTON, T.: *Nodal discontinuous Galerkin methods*. New York, London : Springer, 2008
- [44] HILD, P. ; NICAISE, S.: A posteriori error estimations of residual type for Signorini’s problem. In: *Numer. Math.* 101 (2005), Nr. 3, S. 523–549
- [45] HILD, P. ; NICAISE, S.: Residual a posteriori error estimators for contact problems in elasticity. In: *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 41 (2007), S. 897–923

- [46] HINTERMÜLLER, M. ; ITO, K. ; KUNISCH, K.: The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. In: *SIAM J. Optim.* 13 (2003), S. 865–888
- [47] HOPPE, R.H.W. ; KORNHUBER, R.: Adaptive Multilevel Methods for Obstacle Problems. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 31 (1994), S. 301–323
- [48] HÜEBER, S.: *Discretization techniques and efficient algorithms for contact problems*, Universität Stuttgart, Diss., 2008
- [49] HÜEBER, S. ; STADLER, G. ; WOHLMUTH, B.: A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with Coulomb friction. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 30 (2008), Nr. 2, S. 572–596
- [50] HÜEBER, S. ; WOHLMUTH, B.: A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 194 (2005), S. 3147–3166
- [51] JOHNSON, C.: On Plasticity with Hardening. In: *J. Math. Anal. Appl.* 62 (1978), S. 325–336
- [52] JOHNSON, C.: Adaptive Finite Element Methods for the Obstacle Problem. In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2 (1992), S. 483–487
- [53] KARAKASHIAN, O. ; PASCAL, F.: A posteriori error estimates for a discontinuous galerkin approximation of second-order elliptic problems. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 41 (2003), Nr. 6, S. 2374–2399
- [54] KIKUCHI, N. ; ODEN, J.T.: *Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods*. Philadelphia : SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988 (SIAM Studies in Applied Mathematics)
- [55] KLEEMANN, H.: *Adaptive FEM für Mehrkörperkontaktprobleme*, Technische Universität Dortmund, Diss., 2011

- [56] KLEIN, N.: *Consistent FE-Analysis of Elliptic Variational Inequalities*, Universität Siegen, Diss., 2012
- [57] KORNHUBER, R. ; ZOU, Q.: Efficient and reliable hierarchical error estimates for the discretization error of elliptic obstacle problems. In: *Math. Comput.* 80 (2011), S. 69–88
- [58] KRAUSE, R. ; VEESER, A. ; WALLOTH, M.: An efficient and reliable residual-type a posteriori error estimator for the Signorini problem. In: *Numer. Math.* 130 (2015), S. 151–197
- [59] KRIEG, R. D. ; KEY, S. W.: Implementation of a time dependent plasticity theory into structural programs. In: *Am. Soc. Mech. Eng. Appl. Mech. Div. AMD* 20 (1976), S. 125–137
- [60] LADEVÈZE, P. ; MOËS, N.: Adaptive control for finite element analysis in plasticity. In: *Comput. Struct.* 73 (1999), Nr. 1, S. 45–60
- [61] LAURSEN, T.A.: *Computational Contact and Impact Mechanics*. Berlin Heidelberg : Springer, 2003
- [62] LEE, C.Y. ; ODEN, J.T.: A posteriori error estimation of $h - p$ finite element approximations of frictional contact problems. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 113 (1994), Nr. 1-2, S. 11–45
- [63] LEMAITRE, J. ; DESMORAT, R.: *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer Berlin Heidelberg, 2005
- [64] LIU, R.: *Discontinuous Galerkin Finite Element Solution for Poromechanics*, The University of Texas at Austin, Diss., 2004
- [65] LIU, R. ; WHEELER, M. ; YOTOV, I.: On the spatial formulation of discontinuous Galerkin methods for finite elastoplasticity. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 253 (2013), S. 219–236

- [66] LIU, R. ; WHEELER, M. F. ; DAWSON, C. N. ; DEAN, R. H.: On a coupled discontinuous/continuous Galerkin framework and an adaptive penalty scheme for poroelasticity problems. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 198 (2009), Nr. 41-44, S. 3499–3510
- [67] LIU, R. ; WHEELER, M. F. ; DAWSON, C. N. ; DEAN, R. H.: A fast convergent rate preserving discontinuous Galerkin framework for rate-independent plasticity problems. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 199 (2010), S. 3213–3226
- [68] LUBLINER, J.: *Plasticity theory*. Berkeley : Pearson Education, Inc., 2008
- [69] ORTNER, C. ; SÜLI, E.: Discontinuous Galerkin Finite Element Approximation of Nonlinear Second-Order Elliptic and Hyperbolic Systems. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 45 (2007), Nr. 4, S. 1370–1397
- [70] RADEMACHER, A.: *Adaptive finite element methods for nonlinear hyperbolic problems of second order*, Technische Universität Dortmund, Diss., 2009
- [71] RIVIERE, B.: *Discontinuous Galerkin Methods For Solving Elliptic And Parabolic Equations: Theory and Implementation*. Philadelphia, PA, USA : SIAM, 2008
- [72] RIVIERE, B.: *Discontinuous Galerkin Methods For Solving Elliptic And Parabolic Equations: Theory and Implementation*. USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008
- [73] RIVIÈRE, B. ; WHEELER, M.F.: A Posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin method applied to elliptic problems. In: *Comput. Math. with Appl.* 46 (2003), Nr. 1, S. 141–163
- [74] SAUTER, M. ; WIENERS, C.: On the superlinear convergence in computational elasto-plasticity. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 200 (2011), Nr. 49–52, S. 3646–3658

- [75] SCHRÖDER, A.: *Fehlerkontrollierte adaptive h- und hp-Finite-Elemente-Methoden für Kontaktprobleme mit Anwendungen in der Fertigungstechnik*, Universität Dortmund, Diss., 2005
- [76] SCHRÖDER, A.: Error control in h- and hp-adaptive FEM for Signorini's Problem. In: *J. Numer. Math.* 17 (2009), Nr. 4, S. 299–318
- [77] SCHRÖDER, A. ; WIEDEMANN, S.: Error estimates in elastoplasticity using a mixed method. In: *Appl. Numer. Math.* 61 (2011), Nr. 10, S. 1031–1045
- [78] SCHWEIZER, B.: *Partielle Differentialgleichungen.* Springer Berlin Heidelberg, 2013 (Springer-Lehrbuch Masterclass)
- [79] SIMO, J. C. ; HUGHES, T. J. R.: *Computational Inelasticity.* 7. Berlin : Springer, 1998 (Interdisciplinary applied mathematics: Mechanics and materials)
- [80] SYSALA, S.: Application of a modified semismooth Newton method to some elasto-plastic problems. In: *Math. Comput. Simul.* 82 (2012), Nr. 10, S. 2004–2021
- [81] VEESER, A.: Efficient and Reliable A Posteriori Error Estimators for Elliptic Obstacle Problems. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (2001), S. 146–167
- [82] VERFÜRTH, R.: *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods.* OUP Oxford, 2013
- [83] WANG, F. ; HAN, W.: Reliable and Efficient a Posteriori Error Estimates of DG Methods for a Simplified Frictional Contact Problem. In: *Int. J. Numer. Anal. Model.* 16 (2019), S. 49–62
- [84] WANG, F. ; HAN, W. ; CHENG, X.: Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic Variational Inequalities. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 48 (2010), S. 708–733

- [85] WANG, F. ; HAN, W. ; CHENG, X.: Discontinuous Galerkin Methods for Solving the Signorini Problem. In: *IMA J. Numer. Anal.* 31 (2011), S. 1754–1772
- [86] WANG, F. ; HAN, W. ; EICHHOLZ, J. ; CHENG, X.: A posteriori error estimates for discontinuous Galerkin methods of obstacle problems. In: *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 22 (2015), S. 664–679
- [87] WEISS, A. ; WOHLMUTH, B.: A posteriori error estimator and error control for contact problems. In: *Math. Comp.* 78 (2009), Nr. 267, S. 1237–1267
- [88] WIEDEMANN, S.: *Adaptive finite elements for a contact problem in elastoplasticity with Lagrange techniques*, Humboldt-Universität zu Berlin, Diss., 2013
- [89] WIENERS, C.: Orthogonal projections onto convex sets and the application to problems in plasticity / SFB 404, Geschäftsstelle. Universität Stuttgart, 1999. – Forschungsbericht. – 1–24 S.
- [90] WILKINS, M.L.: Calculation of elastic-plastic flow. In: *Methods Comput. physics, Acad. Press. New York* 3 (1964)
- [91] WLOKA, J.: *Partial Differential Equations*. Cambridge : Cambridge University Press, 1987
- [92] WOHLMUTH, B.: A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 38 (2000), Nr. 3, S. 989–1012
- [93] WOHLMUTH, B.: Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems. In: *Acta Numer.* 20 (2011), S. 569–734
- [94] WRIGGERS, P.: *Nonlinear finite element methods*. Berlin Heidelberg : Springer, 2008

- [95] WRIGGERS, P. ; SCHERF, O.: Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems. In: *Math. Comput. Modelling* 28 (1998), Nr. 4-8, S. 437–447
- [96] ZEE, K. v.d.: *An $H^1(P^h)$ -Coercive Discontinuous Galerkin Formulation for the Poisson Problem: 1-D Analysis*, TU Delft, Master's Thesis, 2004