
**Bahnplanung mittels impliziter Methoden für spanende
und beschichtende Fertigungsverfahren**

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines

D o k t o r s d e r I n g e n i e u r w i s s e n s c h a f t e n

der Technischen Universität Dortmund
an der Fakultät für Informatik

von

Marcel Gaspar

Dortmund

2022

Tag der mündlichen Prüfung: 22. November 2022
Dekan: Prof. Dr.-Ing. Gernot Fink
Gutachter: Prof. Dr. Heinrich Müller
Prof. Dr. Stefan Turek

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Bahnorientierte rechnergesteuerte Fertigung	1
1.2	Bahnrepräsentationen	3
1.3	Bahnplanung und Bahnsimulation	4
1.3.1	Bahnplanung	4
1.3.2	Bahnsimulation	8
1.3.3	Forschungsfragen	8
1.4	Implizite Methoden	9
1.5	Bearbeitete Problemstellungen und Resultate	11
1.5.1	Oberflächenbasierte Bahnplanung	12
1.5.2	Implizite Bahnplanung für raumbasiertes Fräsen	16
1.5.3	Implizite Simulation des Materialabtrags beim Fräsen	16
1.5.4	Implementierung der Verfahren	17
1.6	Gliederung	17
1.7	Publikationen	17
1.8	Danksagung	20
2	Implizite Darstellung	21
2.1	Statische Skalarfelder	21
2.1.1	Repräsentationsformen	22
2.1.2	Gitter-Octrees	24
2.2	Dynamische Skalarfelder	29
2.2.1	Implizite und explizite Darstellung dynamischer Objekte	30
2.2.2	Repräsentation dynamischer Skalarfelder	32
2.3	Distanzfelder	33
2.3.1	Medialachsen	34
2.3.2	Berechnung von Distanzfeldern	37
3	Strukturmerkmale von Oberflächen	39
3.1	Normalkurven und Offset-Punkte	39
3.1.1	Explizite Konturausbreitung	41
3.1.2	Implizite Konturausbreitung	49
3.2	Einflussbereiche der Medialachse	55
3.2.1	Bedeutung	55
3.2.2	Berechnung	56
3.2.3	Visualisierung	59
3.3	Kammlinien	60
3.3.1	Bedeutung	61
3.3.2	Projektion der Medialachsen-Randkurve	61

3.3.3	Glättung von Kammlinien mittels aktiver Konturen . . .	62
4	Planung von Werkzeugbahnen	65
4.1	Geometrische Auslegung der Bahnplanung	65
4.2	Geometrische und kombinatorische Bahnplanung	66
4.3	Repräsentation von Werkzeugposen und Bahnen	67
4.4	Kontaktpunkt- und werkzeugpositionsorientierte Bahnplanung .	68
4.5	Implizite Bahnplanung	70
4.6	Stand der Wissenschaft	71
5	Bahnplanung auf Oberflächen	75
5.1	Implizite Repräsentation von Bahnen auf Oberflächen	76
5.1.1	Implizite Kontaktbahnen	77
5.1.2	Implizite Werkzeugpositionsbahnen auf Offsetflächen . . .	77
5.2	Überführung von Kontakt- in Positionsbahnen	78
5.3	Offset-Bahnen expliziter Kontaktbahnen	86
5.3.1	Wahl der Abtastpunkte	87
5.3.2	Senken des Gradientenfelds	88
5.3.3	Definitionsbereich des Distanzfelds	89
5.4	Offset-Bahnen implizit gegebener Kontaktbahnen	91
5.4.1	Berechnung von Offset-Kurven	93
5.4.2	Eigenschaften und Einschränkungen	93
5.5	Lokalisation durch Interpolation	100
5.5.1	Werkzeugpositionskurve für einen einzelnen Kontaktpunkt	100
5.5.2	Werkzeugpositionsfläche für eine Kontaktbahn	103
5.5.3	Interpolationsgewichtung	107
5.5.4	Kollisionsvermeidung	108
5.5.5	Dynamikoptimierung	109
5.6	Relaxierte Offset-Positionsbahnen	111
5.6.1	Singularitätsfreie Schleifenbereinigung	111
5.6.2	Konvexe Normalkrümmung	113
5.7	Glättung von Kontakt- und Positionsbahnen	114
5.7.1	Glättung implizit definierter Kurven auf Oberflächen . . .	115
5.7.2	Gemeinsame Glättung von Kontakt- und Positionskurven durch Glättung von Normalflächen	116
5.7.3	Glättung mit der Methode der aktiven Konturen	117
5.8	Stand der Wissenschaft	121
6	Bahnplanung im Raum	125
6.1	Verfahren der Bahnplanung zur Grobbearbeitung	126
6.2	Sichtbarkeitsfläche	130
6.3	Konturausbreitung	131
6.3.1	Ausbreitungsdomäne	132

6.3.2	Ausbreitungsrichtung	132
6.3.3	Ausbreitungsgeschwindigkeit	133
6.4	Bahnverkettung	141
6.4.1	Struktur der Eingabe	141
6.4.2	Technische Anforderungen an die Bearbeitungsreihenfolge der Bahnabschnitte	142
6.4.3	Randbedingungen an die Bearbeitungsreihenfolge	143
6.4.4	Zuordnung von Bahnabschnitten zu Bearbeitungsrichtungen	144
6.4.5	Verbindungsbahnabschnitte	145
6.4.6	Berechnung von günstigen Anordnungen	146
6.5	Stand der Wissenschaft	147
7	Simulation des Materialabtrags	149
7.1	Problemstellung und Lösungsansatz	149
7.2	Implizite Modellierung des Fräswerkzeugs und des Schnittvolumens	152
7.3	Implizite Berechnung des Schnittvolumens	153
7.3.1	Phase 1: Korrektur in Abhängigkeit des Neigungswinkels	154
7.3.2	Phase 2: Korrektur unter Berücksichtigung des Rollwinkels	160
7.4	Evaluation und Diskussion	163
7.5	Stand der Wissenschaft	166
8	Zusammenfassung und Ausblick	169
	Literatur	175

Einleitung

Inhalt

1.1	Bahnorientierte rechnergesteuerte Fertigung	1
1.2	Bahnrepräsentationen	3
1.3	Bahnplanung und Bahnsimulation	4
1.3.1	Bahnplanung	4
1.3.2	Bahnsimulation	8
1.3.3	Forschungsfragen	8
1.4	Implizite Methoden	9
1.5	Bearbeitete Problemstellungen und Resultate	11
1.5.1	Oberflächenbasierte Bahnplanung	12
1.5.2	Implizite Bahnplanung für raumbasiertes Fräsen	16
1.5.3	Implizite Simulation des Materialabtrags beim Fräsen	16
1.5.4	Implementierung der Verfahren	17
1.6	Gliederung	17
1.7	Publikationen	17
1.8	Danksagung	20

Dieses Kapitel führt in die Thematik und die Ergebnisse der Dissertation ein. Es beginnt mit einer kurzen informellen Beschreibung fertigungstechnischer Anwendungen für die methodischen Konzepte der Dissertation. Bei den fertigungstechnischen Anwendungen handelt es sich um pfadorientierte, computergesteuerte Prozesse, für die NC-Fräsen und roboterbasiertes thermisches Spritzen die wichtigsten Beispiele für diese Arbeit sind. Dann wird die Aufgabe der automatischen Bahnplanung für solche Prozesse aus praktischer und konzeptioneller Sicht betrachtet. Es folgen Übersichten über die wissenschaftlichen Beiträge und die Organisation der Arbeit. Schließlich werden Publikationen des Autors aufgeführt, die im Zusammenhang mit der Dissertation stehen.

1.1 Bahnorientierte rechnergesteuerte Fertigung

Bahnorientierte rechnergesteuerte Fertigungssysteme bewegen ein Werkzeug auf einer Bahn, um ein Werkstück zu modifizieren. Eine Bahn ist eine kontinuierliche Abfolge

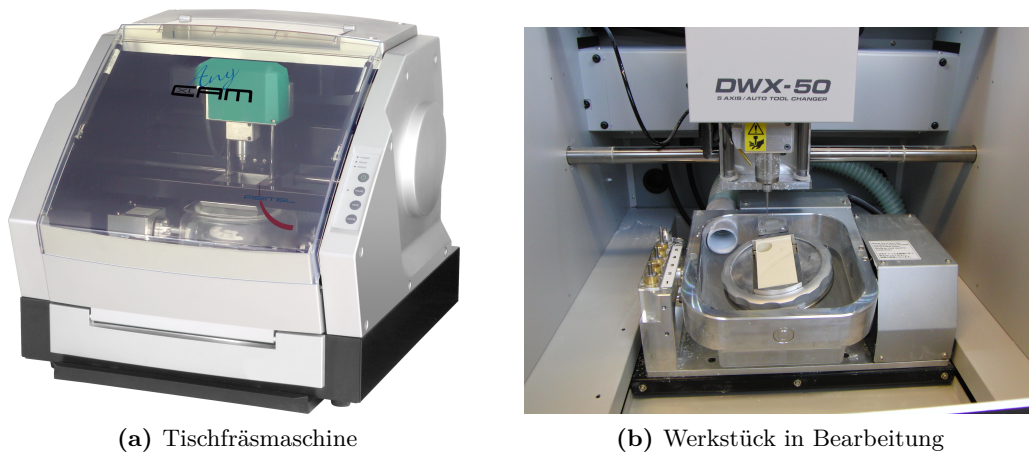
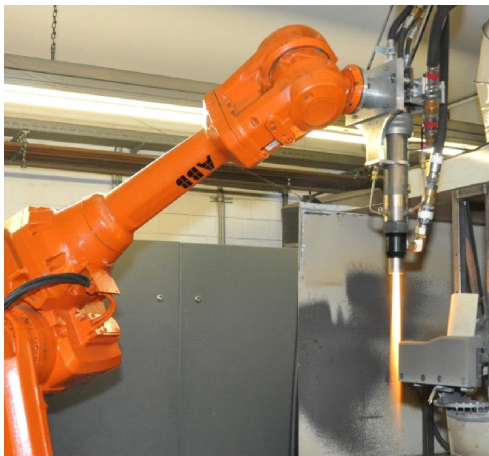


Abbildung 1.1: Tischfräsmaschine Roland DWX40 (a) und DWX50 (b).

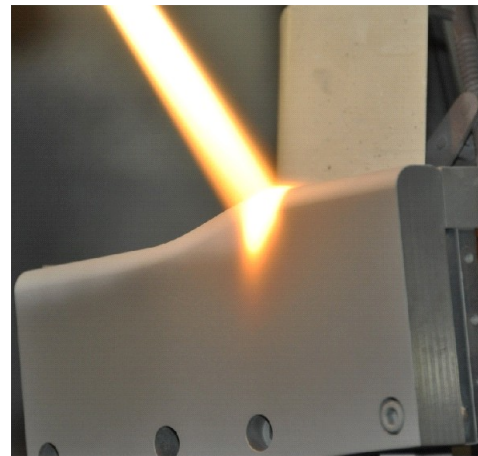
von Werkzeugposen, wobei eine Werkzeugpose insbesondere die Position und die Orientierung des Werkzeugs angibt. Beispiele für Produktionstechnologien, bei denen bahnormierte Systeme weit verbreitet sind, sind Spanen, Walzen und Beschichten. In dieser Arbeit werden grundlegende Konzepte der Bahngenerierung vorgestellt, die durch das NC-Fräsen als Vertreter des Spanens und durch das roboterbasierte thermische Spritzen als Vertreter des Beschichtens motiviert sind.

Beim Fräsen wird ein rotierender Fräser mit mehreren Schneiden relativ zum Material eines Werkstücks bewegt, um seine Oberfläche zu verändern. Dieser Prozess wird in der Regel von spezialisierten sogenannten NC-Fräsmaschinen ausgeführt (Abbildung 1.1). „NC“ steht für „Numerical Control (numerische Steuerung)“ und bedeutet, dass die Bewegung auf Basis eines Fräsprogramms ausgeführt wird, das von einer Steuerungseinheit der NC-Fräsmaschine ausgeführt wird.

Beim roboterbasierten thermischen Spritzen wird eine Spritzpistole relativ zu einer Werkstückoberfläche bewegt. In der Spritzpistole werden geschmolzene Partikel in Richtung einer vorbereiteten Werkstückoberfläche beschleunigt, auf die sie mit hoher Geschwindigkeit auftreffen, abflachen und nach Abkühlung eine dünne Schicht auf dem Werkstücksubstrat bilden [FVV+04; Kou15]. Eine wesentliche Gegebenheit ist, dass die Materialflussrate der Spritzpistole in der Regel konstant ist, die Spritzrichtung idealerweise senkrecht, der Abstand der Spritzpistole zur Werkstückoberfläche konstant und die Verfahrensgeschwindigkeit des Spritzstrahls wegen des starken Hitzeintrags auf der Werkstückoberfläche hoch sein sollte. Das Hauptziel ist, eine gewünschte Schichtdicke auf der Werkstückoberfläche zu erreichen. Beim roboterbasierten thermischen Spritzen ist die Spritzpistole üblicherweise am Arm eines Industrieroboters befestigt (Abbildung 1.2). Der Roboter führt die erforderliche Bewegung der Spritzpistole, gesteuert durch ein Roboterprogramm, aus.



(a) Roboterarm mit montierter Spritzpistole



(b) Werkstück in Bearbeitung

Abbildung 1.2: Beschichten durch thermisches Spritzen mit einem Industrieroboter; entnommen aus [Kou15].

1.2 Bahnrepräsentationen

Zentral für den Effekt auf das Werkstück ist das Verhalten des Werkzeugs. Das Werkzeugverhalten ist gekennzeichnet durch die eingenommenen Posen und die Einstellungen der fertigungstechnischen Parameter des Werkzeugs während des Produktionsprozesses. Die Beschreibung des Ablaufs der Posen des Werkzeugs ist Gegenstand der *Werkzeugpositionsbahn* [Kou15]. Die Pose eines Werkzeugs kann bei den beiden genannten Produktionstechnologien durch die Position und Orientierung eines *Werkzeugreferenzsystems* definiert werden, welches starr mit dem Werkzeug verbunden ist. Ein Werkzeugreferenzsystem besteht im Allgemeinen aus einem Werkzeugreferenzpunkt, der häufig als *Tool Center Point (TCP)* bezeichnet wird, und drei orthonormalen Vektoren am Referenzpunkt. [Abbildung 1.4](#) skizziert die Gegebenheiten beim Fräsen und beim Spritzen. Gezeigt werden jeweils Längsschnitte durch die rotatorischen Hüllen. Bei Fräswerkzeugen mit kugelförmiger bzw. elliptischer Spitze ist der Kugelmittelpunkt bzw. der Mittelpunkt des Ellipsoids und beim thermischen Spritzen der Punkt am Ausgang der Spritzdüse auf der Rotationsachse des Spritzkegels eine natürliche Wahl des TCP. Ein Vektor des Referenzsystems liegt auf der Rotationsachse, die beiden anderen Vektoren in der Ebene senkrecht zu Rotationsachse.

Eine Werkzeugpositionsbahn kann als eine von einem reellen Parameter abhängige stetige Funktion in den Produktraum aus räumlichen Translationen und Rotationen definiert werden, die auf das Werkzeugreferenzsystem angewandt werden und so den Posenverlauf definieren. Wenn der Parameter die Zeit repräsentiert, handelt es sich um eine kinematische Repräsentation der Werkzeugbahn. Besteht nur Interesse an der geometrischen Form der Bahn, ist die Parametrisierung irrelevant.

Bei der rechnergestützten Fertigung wird das Werkzeug von einem rechnergesteuerten Manipulator gesteuert. Beim NC-Fräsen ist dies eine Werkzeugmaschine, beim roboterbasierten Spritzen in der Regel ein Industrieroboter. Wenn das Werkzeug starr mit dem Manipulator verbunden ist, bspw. mit einer Roboterhand, ergeben sich die Posen des Werkzeugs unmittelbar aus den Posen des Manipulators. Die Pose des Manipulators wird durch Steuerparameter, wie etwa die Gelenkwinkel eines Roboterarms, bestimmt. Auf dieser Grundlage kann eine *Manipulatorbahn* analog zur Werkzeugbahn als von einem reellen Parameter abhängige Funktion in den Steuerparameterraum des Manipulators definiert werden.

1.3 Bahnplanung und Bahnsimulation

Die Rechnerunterstützung bei der Realisierung von bahngeführten Produktionsprozessen konzentriert sich auf zwei Aspekte, die *Bahnplanung* und die *Bahnsimulation*.

1.3.1 Bahnplanung

Die Eingabe einer allgemeinen *Bahnplanungsaufgabe* ist eine Konfiguration bestehend aus einem rechnergesteuerten Manipulator, einem am Manipulator angebrachten Werkzeug, einem Startwerkstück und einer Spezifikation des herzustellenden Zielwerkstücks. Die Aufgabe besteht in der Bereitstellung einer Bahn, die durch den Manipulator ausführbar ist und das Startwerkstück in ein Zielwerkstück überführt, das die Spezifikation des herzustellenden Zielwerkstücks möglichst gut erfüllt.

Im Idealfall ist das *Bahnplanungsverfahren* in der Lage, für eine im Prinzip beliebige Instanz einer solchen Eingabe eine Bahn zu ermitteln. Eine praktisch relevante Einschränkung sind Bahnplanungsverfahren, bei denen der Manipulator- und Werkzeugtyp fest vorgegeben sind und nur das Werkstück variabel ist.

Idealerweise ist bei der Bahnplanung die physikalische Dynamik des Fertigungssystems, d.h. die auf die Massen des Systems wirkenden Kräfte und dadurch hervorgerufene Verformungen, zu berücksichtigen. Dies schließt beim Fräsen insbesondere die beim Kontakt zwischen Fräswerkzeug und Werkstück wirkenden Kräfte ein. Wenn die dynamischen Effekte gering sind, etwa bei geringer Vorschubgeschwindigkeit beim Fräsen, genügt anstelle einer derartigen *physikbasierten Bahnplanung* häufig eine *geometrische* bzw. *kinematische Bahnplanung*, welche den örtlichen Bahnverlauf bzw. zusätzlich Geschwindigkeiten betrifft. Geometrisch/kinematisch geplante Bahnen können auch als Startlösungen für die physikbasierte Bahnplanung durch simulationsbasierte Optimierung dienen. Diese Dissertation ist im Bereich der allgemeinen geometrisch/kinematischen Bahnplanung angesiedelt.

Aufgrund der Bedeutung der Werkzeugpositionsbahn für den Effekt auf das Werkstück konzentrieren sich viele Bahnplanungsverfahren auf die Planung von Werkzeugpositionsbahnen, um dann Manipulationsbahnen zu bestimmen, welche die ermittelte Werkzeugpositionsbahn realisieren. Mit Methoden der Berechnung der inversen Kinematik von Manipulatoren besteht die Möglichkeit, Manipulations-

bahnen zu ermitteln, die die Positionsbahnen ohne Berücksichtigung der Dynamik des Manipulators realisiert. Durch die Modellierung und Simulation der Physik des Fertigungssystems können auch dynamikberücksichtigende Manipulatorbahnen generiert werden. Hinsichtlich der Eignung der Positionsbahn-konzentrierten Bahnplanung ist zu beachten, dass durch die Manipulatorbewegung keine Kollisionen mit Objekten im Arbeitsraum des Manipulators entstehen, die die initial ermittelte Werkzeugpositionsbahn nicht ausführbar machen. Diese Dissertation konzentriert sich auf die Planung von Werkzeugpositionsbahnen. In Bezug auf Manipulatorbahnen beim thermischen Spritzen wird auf die Dissertationen von Kout [Kou15] und Hegels [Heg17] verwiesen.

Bei einem Fräs- und Beschichtungsprozess sind die Werkzeugposen zu jedem Zeitpunkt an der aktuellen Oberfläche des Werkstücks angesiedelt. Dabei kann sich die Geometrie der Oberfläche des Werkstücks nur geringfügig oder aber stark ändern. Dies führt auf zwei Kategorien der geometrischen Auslegung von Planungsaufgaben von Werkzeugpositionsbahnen, die *oberflächenbasierte* und die *volumenbasierte Kategorie*.

Bei *oberflächenbasierten Bahnplanungsaufgaben* gibt es eine *statische Bezugsfläche*, bezüglich welcher die komplette Bahnplanung durchgeführt werden kann. Diese Situation tritt speziell dann ein, wenn sich die Startoberfläche und die angestrebte Zieloberfläche nur geringfügig unterscheiden. Beim Fräsen hängt der Grad des Unterschieds vom *Einflussbereich* auf der Oberfläche des Fräasers ab, der die mögliche Frästiefe beeinflusst. Der Einflussbereich eines Fräasers ist das Gebiet seiner Oberfläche, welches mit Schneiden versehen ist. Beim Beschichten durch thermisches Spritzen ist die genannte Situation durch die üblicherweise geringe Schichtdicke, etwa von auszutragenden Schutzschichten, gegeben. Beim Fräsen kann dann die Bahnplanung auf der Zieloberfläche und beim Beschichten durch Spritzen auf der Startoberfläche als Bezugsfläche durchgeführt werden. Die Längsschnitte in [Abbildung 1.3](#) deuten die Bezugsfläche in grüner Farbe an.

Bei der oberflächenbasierten Bahnplanung gibt es für eine zulässige Werkzeugpose eine werkzeugspezifische Menge an Punkten, an denen das Werkzeug auf eine Werkstückoberfläche einwirkt. Die Menge von Punkten wird als *Wirkungsbereich* bezeichnet. Bei den Gegebenheiten von [Abbildung 1.4](#) lässt sich der Wirkungsbereich beim Fräsen und Spritzen über einen *Bezugsflächenkontaktpunkt* auf der Bezugsfläche, eine *Wirkungsrichtung am Kontaktpunkt* und einen *Wirkungsabstand* beschreiben. Der Werkzeugkontaktpunkt \mathbf{k} ist ein Punkt auf der Bezugsfläche, an dem sich eine werkzeugspezifische Wirkung manifestiert oder manifestieren soll. Das Werkzeug wirkt dabei jedoch im Allgemeinen nicht nur an \mathbf{k} selbst, sondern in einer Umgebung von \mathbf{k} , wobei die Wirkung an \mathbf{k} „am stärksten“ ist. So sind die Schneidkanten eines Fräasers im Punkt \mathbf{k} der Bezugsfläche am nächsten, und die Anzahl der von einer Spritzpistole emittierten Partikel, die auf der Startfläche auftreffen, an \mathbf{k} am größten, bezogen auf alle Punkte der Umgebung. Die Wirkungsrichtung und der Wirkungsabstand sind durch die Richtung und die Länge des Vektors vom Bezugsflächenkontaktpunkt zum TCP des Werkzeugs festgelegt.

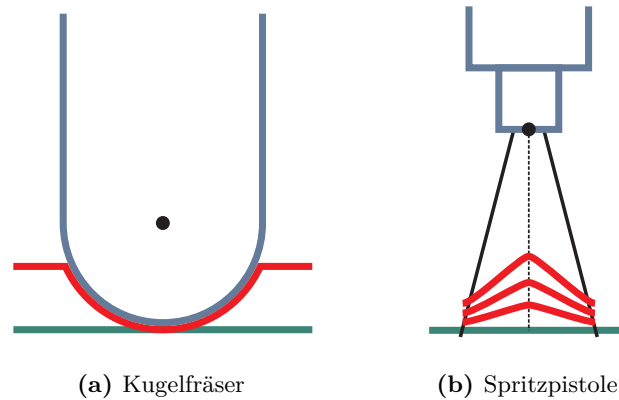


Abbildung 1.3: Fräsen und Beschichten durch thermisches Spritzen; dargestellt sind jeweils die Bezugsfläche (grün), die Startoberfläche beim Fräsen (Unterabbildung (a), rot) und die beim thermischen Spritzen aus der Wirkung des Werkzeugs resultierende Oberfläche nach wachsender Wirkungsdauer (Unterabbildung (b), rot).

Beim Kugelfräser ist der Wirkungsabstand des Fräasers durch den Abstand des Einflussbereichs des Fräasers, d.h. der Schneidkanten, vom TCP (Fräserradius) festgelegt. Dagegen könnten bei der Spritzpistole die emittierten Partikel prinzipiell auf eine in beliebiger Entfernung zur Spritzdüse liegende und beliebig orientierte Oberfläche auftreffen. Wie bereits erwähnt, gibt es zur Erlangung eines bestmöglichen Schichtprofils jedoch einen idealen Spritzabstand und Spritzwinkel, welche den effektiv beschichtbaren Bereich innerhalb des Spritzkegels auf eine Ebene begrenzen, und deshalb als *idealer Wirkungsabstand* und *ideale Wirkungsrichtung* bezeichnet werden.

Eine *Kontaktbahn* ist durch eines oder mehrere Kurvensegmente auf der Bezugsfläche gegeben, deren Punkte als Kontaktpunkte von Werkzeugposen dienen. Diese Kurven müssen die Oberfläche so dicht überdecken, dass die Wirkungsbereiche ihrer Kontaktpunkte die Bahnplanungsaufgabe lösen.

Unter Zuhilfenahme der Kontaktbahn lässt sich die Positionsbahn durch eine räumliche Kurve repräsentieren, welche die Bewegung des TCP angibt. Die Wirkungsrichtung und der Wirkungsabstand lassen sich durch Zuordnung der Kontaktpunkte auf der Kontaktbahn zu den entsprechenden TCP-Positionen auf der Positionsbahn festlegen. Diese Repräsentationsform wird bei der oberflächenbasierten Bahnplanung der Dissertation verwendet.

Bei *volumenbasierten Bahnplanungsaufgaben* unterscheiden sich das Start- und Zielwerkstück so stark, dass eine statische Bezugsfläche für die Bahnplanung nicht ausreicht. Dies tritt beim Fräsen etwa dann auf, wenn ein Werkstück aus einem Rohling, etwa einem Quader, herauszufräsen ist. Die während eines solchen Fräsprozesses auftretenden Werkzeugposen überdecken das Differenzvolumen zwischen Start-

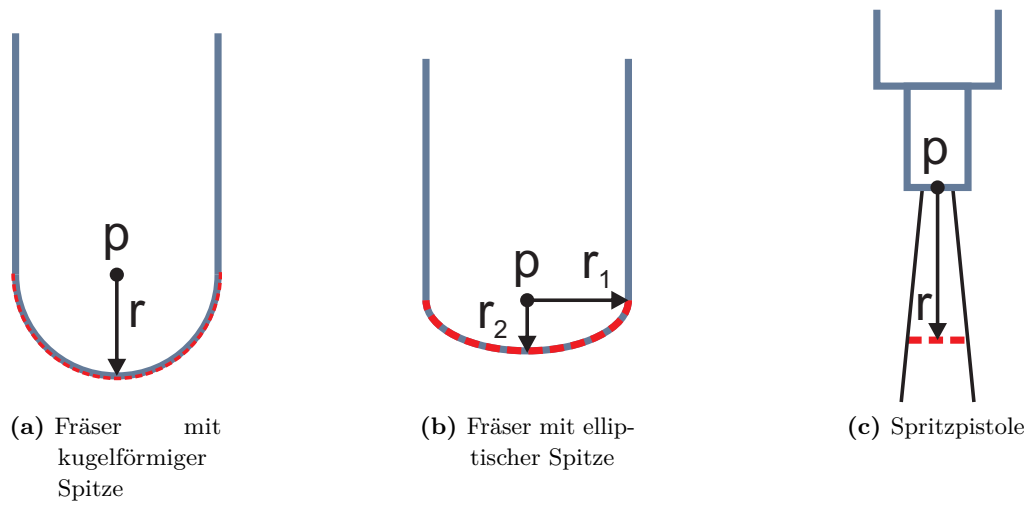


Abbildung 1.4: Werkzeugnullpunkt (p), Wirkungsbereich (rot gestrichelte Kurve) und Wirkungsabstand (r , markiert durch Pfeile)

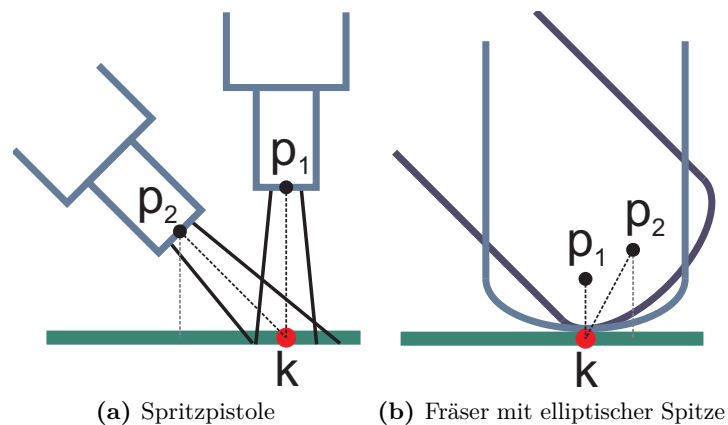


Abbildung 1.5: Wirkungsrichtung und Werkzeugkontaktpunkt (k); dargestellt ist das Werkzeug mit jeweils orthogonaler und um 45° geneigter Orientierung relativ zur Bezugsfläche.

und Zielwerkstück, während die Werkzeugposen bei oberflächenbasierten Bahnplanungsaufgaben eine Fläche überdecken. Ein Bahnplanungsansatz besteht in der Verwendung einer *dynamischen Bezugsfläche*, welche sich während des Fräsprozesses verändert. Eine Realisierungsmöglichkeit dynamischer Bezugsflächen besteht in der Definition einer Sequenz von statischen Bezugsflächen, wobei deren Abstände entsprechend des Einflussbereichs auf der Oberfläche des Fräasers so gewählt werden, dass ein sukzessives oberflächenbasiertes Abtragen möglich ist.

1.3.2 Bahnsimulation

Die Eingabe einer *allgemeinen Bahnsimulation* sind ein Werkstück, ein Werkzeug, ein werkzeugführender Manipulator, ein Modell der fertigungstechnischen Wechselwirkung zwischen Werkzeug und Werkstück, ein Modell des dynamischen Verhaltens des fertigungstechnischen Systems sowie eine Manipulatorbahn. Die Ausgabe ist das aus der Ausführung der Bahn resultierende Werkstück sowie eventuell Information über die Wirkung der Ausführung der Manipulatorbahn auf das Werkstück, das Werkzeug und den Manipulator.

Wesentliche Einsatzgebiete von Bahnsimulationen sind die Verifikation der Brauchbarkeit der Bahnen und die simulationsbasierte Bahnplanung. Analog zur Bahnplanung kann sich die Bahnsimulation auf geometrisch/kinematische Aspekte von Werkzeugpositionsbahnen beschränken. Solche Bahnsimulationen zielen etwa auf die Simulation umfangreicherer Bahnen, etwa für den gesamten Fertigungsprozess, ab, wohingegen sich die allgemeine Bahnsimulation unter Berücksichtigung aller Aspekte aufgrund des hohen Rechenaufwandes eher auf lokale Situationen beschränken muss.

Bei der geometrisch/kinematischen Simulation von Positionsbahnen für das Fräsen und das thermische Spritzen liegt der Schwerpunkt auf der Veränderung der Werkstückoberfläche. Für die Bahnsimulation des thermischen Spritzens, die nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, wird auf die Dissertationen von Wiederkehr [Wie15] und Hegels [Heg17] verwiesen, die neben entsprechenden Originalverfahren auch Übersichten verwandter Arbeiten enthalten.

1.3.3 Forschungsfragen

Das Fräsen ist in Bezug auf die automatische rechnerunterstützte geometrisch/kinematische Bahnplanung und Simulation aus Sicht der Forschung bereits gut erschlossen. Der Schwerpunkt existierender Arbeiten liegt dabei überwiegend auf oberflächenbasierten Bahnplanungsverfahren. Forschungsbedarf besteht insbesondere noch bei der automatisierten physikbasierten Bahnplanung und der *rechnerisch effizienten, geometrisch präzisen Simulation des Fräsvorgangs für komplexer geformte Freiformflächen*. Ferner wurde der *automatischen volumenbasierten Bahnplanung* wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Ein Beispiel für komplexer geformte Freiformflächen sind Zahnkronen und Zahnbrücken, die als wesentliche Fallstudie für die in der Dissertation behandelten Fragestellungen und Verfahren zum Fräsen dienen, siehe [Abbildung 1.6](#).

Bei der automatisierten rechnerunterstützten Bahnplanung für das roboterbasierte Beschichten durch thermisches Spritzen wurden in den letzten Jahren Fortschritte erzielt. Weiter verbreitete auftragende Prozesse, insbesondere das Lackieren, haben jedoch mehr Interesse gefunden. Bahnplanungssysteme hierfür übernehmen häufig Ansätze aus dem Bereich des Fräsens, was beim thermischen Spritzen für komplexer geformte Freiformflächen häufig nicht mehr möglich ist. Der Grund sind die hohen Verfahrensgeschwindigkeiten auf der Werkstückoberfläche, welche aufgrund des



(a) Stiftrohling für einzelnes Werkstück



(b) Tellerrohling für viele Werkstücke

Abbildung 1.6: Gefräste Zahnkronen und Zahnbrücken.

hohen Wärmeeintrags erforderlich und von einem ausladenden Manipulatorsystem zu erbringen sind. Hier gilt es, *bei Flächen mit variierendem Krümmungsverhalten Positionsbahnen zu vermeiden, welche extreme, vom Manipulator nicht mehr realisierbare Bewegungsänderungen aufweisen*. Dieses Problem wird in der Dissertation aufgegriffen.

Zu einer detaillierten Darstellung des Standes der Wissenschaft und der Einordnung der Dissertation wird auf entsprechende Darstellungen von [Kapitel 4](#) für die Bahnplanung allgemein, [Kapitel 5](#) für die oberflächenbasierte Bahnplanung, [Kapitel 6](#) für die volumenbasierte Bahnplanung beim Fräsen und [Kapitel 7](#) für die Frässimulation verwiesen.

1.4 Implizite Methoden

Der Schwerpunkt des methodischen Vorgehens der Dissertation beruht auf dem Konzept der Niveaumengen in Skalarfeldern, auch Level-Sets genannt, als Lösungsmethode. Ein (statisches) *Skalarfeld* ist eine stetige skalarwertige Funktion $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Punkt des Definitionsbereichs M einen reellen Wert zuordnet. Relevante Beispiele für M sind kompakte Teilmengen des dreidimensionalen Raums oder kompakte Gebiete auf Oberflächen im dreidimensionalen Raum. Eine *Niveaumenge* $S(c)$ besteht aus der Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in M$, die von ϕ auf den gleichen Funktionswert $c \in \mathbb{R}$ abgebildet werden, d.h. $S(c) = \{\mathbf{x} \in M \mid \phi(\mathbf{x}) = c\}$. Im dreidimensionalen Raum können auf diese Weise Oberflächen und auf Oberflächen Kurven implizit repräsentiert werden.

Von besonderer Bedeutung für die Dissertation sind Distanzfelder. Ein *Distanzfeld* ist ein Skalarfeld, das jedem Punkt $\mathbf{x} \in M$ seinen kleinsten Abstand zu einer vorgegebenen Menge $B \subset M$, der Nullmenge, unter Verwendung eines in M gültigen Abstandsbegriffs zuweist. Für den Fall von Distanzfeldern im dreidimensionalen

Raum ist die Nullmenge als Fläche und für den Fall von Distanzfeldern auf Flächen als Flächenkurve eine natürliche Wahl. Ist hierbei die Nullmenge geschlossen, unterteilt sie den Definitionsbereich in jeweils einen Bereich innerhalb (M_-) und außerhalb (M_+) der Nullmenge, mit $M = M_+ \cup M_- \cup B$. In diesem Fall wird $\phi(\mathbf{x})$ zu einer vorzeichenbehafteten Distanz erweitert, die positiv für $\mathbf{x} \in M_+$ und negativ für $\mathbf{x} \in M_-$ ist. Ein Beispiel ist die Definition von M als der dreidimensionale Raum und B als Rand eines dreidimensionalen Körpers, bspw. eines Quaders. Die Vorzeichen der Distanzen im Innern des Körpers seien negativ und im Äußeren positiv. Eine Niveaumenge (Level-Set) eines Distanzfeldes besteht aus der Menge aller Punkte, die einen gemeinsamen Distanzwert haben. Die Niveaumengen mit positiven Distanzwert umgeben den Körper mit wachsendem Distanzwert zwiebelschalenförmig und die negativen Niveaumengen bilden entsprechend zunehmend geschrumpfte Varianten des Randes mit fallendem Distanzwert.

Die Nützlichkeit dieser Konzepte für die Bahnplanung ergibt sich durch das Auftreten von Expansionen oder Schrumpfungen in verschiedenen Bereichen:

Bereich A. Mäanderförmige oder spiralförmige Kontaktbahnen: Diese beim oberflächennahen Fräsen weit verbreiteten Bahnformen können näherungsweise als Scharen leicht gegeneinander versetzter Kurven bzw. geschachtelter Kurven angesehen werden (Abbildung 5.2). Durch Verwendung einer der Scharkurven als Nullkurve eines Distanzfeldes auf der Oberfläche lassen sich weitere Scharkurven als Niveaumengen zu einer Folge monoton wachsender bzw. fallender Distanzwerte generieren.

Bereich B. Beziehung zwischen Kontaktbahn und Positionsbahn: Beim Fräsen mit einem kugelförmigen Werkzeug, dessen TCP der Kugelmittelpunkt ist, liegt die Positionsbahn einer Kontaktbahn auf der Niveaumenge des Distanzfeldes der Bezugsoberfläche mit dem Kugelradius als Distanzwert. Mengen dieser Art werden im Folgenden als *Offset-Flächen* bezeichnet. Für stetig differenzierbare Bezugsoberflächen, welche an jedem Punkt eine in Wirkungsrichtung zeigende Normale haben, lässt sich eine verwandte Fläche durch die Menge aller Punkte definieren, die sich durch Verschieben der Oberflächenpunkte längs der Normalen um einen konstanten Wert ergeben. Eine solche Fläche wird im Folgenden als *Normalen-Offset-Fläche* bezeichnet. Im Fall des KugelfräSENS unterscheiden sich diese beiden Flächenarten an den Punkten der Bezugsoberfläche, an welchen sich die Fräskugel nicht ohne Kollision berührend an die Bezugsoberfläche platzieren lässt. Dies ist anschaulich an Stellen der Fall, an denen die Krümmung der Bezugsoberfläche stärker als die Krümmung der Kugel ist. Normalen-Offset-Flächen sind als Positionflächen für den TCP beim Beschichten durch thermisches Spritzen mit idealer Wirkungsrichtung und -abstand von Interesse, d.h. kollinearem Spritzstrahl zur Oberflächennormalen des Kontaktpunkts und konstantem Abstand zwischen Spritzwerkzeug und Kontaktpunkt.

Bereich C. Schichtweises Abtragen beim volumenbasierten Fräsen:

Beim volumenbasierten Fräsen ist der Unterschied zwischen Startwerkstück und Zielwerkstück so groß, dass eine Bahn, die sich an der Oberfläche des Zielwerkstücks orientiert, den notwendigen Abtrag nicht mehr zulässt. Eine Möglichkeit sind mehrere, versetzte Übergänge des Fräswerkzeugs, die jeweils von der aktuellen Werkstückoberfläche aus dem letzten ausgeführten Übergang abhängen. Daraus ergibt sich eine Folge von geschachtelten Oberflächen. Mit der Oberfläche des Startwerkstücks bzw. der Oberfläche des Zielwerkstücks als Nullmenge lassen sich räumlich geschachtelte Offset-Flächen generieren, die, eventuell mit Modifikationen, für das volumenbasierte Fräsen durch schichtweises Abtragen geeignet sind.

Distanzfelder sind stetig, aber im Allgemeinen nicht überall stetig differenzierbar. Bei den nicht differenzierbaren Orten handelt es sich um die sogenannte Medialachse der generierenden Nullmenge B des Distanzfelds. Die *Medialachse* von B lässt sich als die Menge aller Punkte des Definitionsbereichs M definieren, die mehrere nächstgelegene Punkte mit gleichem Abstand in B besitzen, oder anders ausgedrückt zu mehr als einem Punkt in B kleinsten Abstand haben. Ein kugelförmiges Fräswerkzeug, dessen TCP sich auf der Medialachse einer Werkstückoberfläche im Raum befindet, hat mindestens zwei Kontaktpunkte mit der Oberfläche. Zwischen den Kontaktpunkten kann es Oberflächenpunkte geben, die aufgrund zu starker Krümmung der Fläche nicht durch das Fräswerkzeug erreichbar sind. Anhand der Medialachse können solche Flächenbereiche für ein Fräswerkzeug mit gegebenem Radius ermittelt werden. Dies ist ein Beispiel für die Nützlichkeit der Medialachse zur Analyse von Werkstückoberflächen in Bezug auf die Fertigbarkeit.

Die Darstellung von Kurven und Flächen als Niveaumengen von Skalarfeldern wird auch als *implizite* oder *Level-Set-Darstellung von Kurven und Flächen* bezeichnet. Die Dissertation setzt implizite Darstellungen zur Lösung von Aufgaben im Zusammenhang mit der Bahnplanung und Bahnsimulation, insbesondere in den oben genannten Bereichen B und C, extensiv ein. Ein besonderes Merkmal ist die Berücksichtigung struktureller Eigenschaften über das Heranziehen der Medialachse. Bereich A wurde in Kapitel 4 der Dissertation von Kout [Kou15] gründlich auf diese Weise behandelt.

Das Kapitel 2 der Dissertation stellt die entsprechenden mathematischen Konzepte zusammen. Dies schließt Datenstrukturen und Algorithmen für deren Anwendung ein, bei denen besonders auf Berechnungseffizienz geachtet wird und auf deren Grundlage die in der Dissertation präsentierten Verfahren implementiert wurden.

1.5 Bearbeitete Problemstellungen und Resultate

Die folgende Darstellung gliedert sich in vier Unterkapitel, welche sich mit den Themen „Oberflächenbasierte Positionsbahnplanung“, „Implizite Bahnplanung für

raumbasiertes Fräsen“ und „Implizite Simulation des Materialabtrags beim Fräsen“ und „Implementierung der Verfahren“ befassen.

1.5.1 Oberflächenbasierte Bahnplanung

Die Beiträge zur oberflächenbasierten Bahnplanung betreffen die Planung von Positionsbahnen für das thermische Spritzen, welche sich bei Flächen mit variierendem Krümmungsverhalten dämpfend auf das Bewegungsverhalten auswirken und sich an den fertigungstechnisch idealen Bedingungen orientieren (Unterabschnitt 1.3.3). Der Schwerpunkt liegt dabei auf neuartigen Verfahren zur Ermittlung von Positionsbahnen aus Kontaktbahnen.

Wie im Bereich B von Kapitel 1.4 skizziert, sind die Positionskurven beim thermischen Spritzen aus fertigungstechnischen Gründen idealerweise auf der Normalen-Offset-Fläche angesiedelt. Die Normalen-Offset-Fläche kann an Stellen mit stärkerer konkaver Krümmung bei größerem Offset, wie er beim thermischen Spritzen auftritt, ein sehr unausgeglichenes Verhalten aufweisen, welches sich nachteilig auf die Realisierbarkeit der Bewegung der Positionskurven auswirkt. Eine zentrale Idee der Dissertation zur Minderung des Problems besteht in einem Ansatz zur Konstruktion von Positionsbahnen für Kontaktbahnen, wobei die Positionsbahnen auf Offset-Flächen anstelle von Normalen-Offset-Flächen liegen. Dies ist dadurch motiviert, dass Offset-Flächen ein ausgeglichenes Verhalten ausweisen. Anschaulich wird dies dadurch deutlich, dass Offset-Flächen die Ortsfläche der Mittelpunkte aller Kugeln eines festen Radius sind, welche die gegebene Fläche berühren. Positionsbahnen, die auf Offset-Flächen liegen, können damit ein geometrisch ruhigeres Verhalten erwarten lassen. Allerdings geht die fertigungstechnisch ideale Werkzeugpose dadurch verloren, d.h. die „wirkungsgünstigen“ Positionskurven werden durch „dynamikgünstige“ Positionskurven ersetzt. Das Ziel ist, günstige Kompromisse zu finden.

Normalkurven

Der erwähnte Ansatz zur Konstruktion von Positionsbahnen für Kontaktbahnen ersetzt die Verschiebung der Punkte der Kontaktbahnen längs ihres Normalenvektors durch die Verschiebung längs einer sogenannten *Normalkurve*. Die Normalkurve eines Punktes \mathbf{p} einer gegebenen stetig differenzierbaren Bezugsoberfläche Z ist die Ortskurve des zu \mathbf{p} nächstgelegenen Punkts $\mathbf{o} \in O$ auf allen Offset-Flächen O von Z . Die Normalkurve verläuft ausgehend von \mathbf{p} zunächst längs der Normalen an \mathbf{p} , bis sie eventuell auf die Medialachse trifft, innerhalb welcher sie dann weitergeht. Die Offset-Fläche von Z mit Abstand d ist die Menge aller Endpunkte von auf Z startenden Normalkurvensegmenten der Länge d , die mit der Medialachse höchstens ihren Endpunkt gemeinsam haben. [Abbildung 1.7b](#) und [1.7c](#) zeigen zwei Offset-Flächen und Positionskurven zu der Bezugsoberfläche und der Kontaktkurve aus [Abbildung 1.7a](#) zusammen mit korrespondierenden Normalkurven.

Die Dissertation gibt explizite und implizite numerische Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Normalkurven an ([Abschnitt 3.1](#)).

Krümmungskritische Oberflächengebiete und Kammlinien

Diejenigen Punkte auf einer Bezugsoberfläche Z , deren Normalkurve entsprechend des oben genannten Kriteriums keinen Punkt auf einer gegebenen Offset-Fläche von Z erreicht, definieren das sogenannte *Einflussgebiet der Medialachse* für diese Offset-Fläche. [Abbildung 1.7d](#) und [1.7e](#) zeigen die Normalkurven einer Menge von dicht liegenden Punkten auf der Bezugsoberfläche sowie die Einschränkung auf die Normalkurven des Einflussgebiets der Medialachse. Auf dem Einflussgebiet der Medialachse unterscheiden sich die Normalen-Offset-Fläche und die Offset-Fläche und es wird daher als *krümmungskritisches Oberflächengebiet* bezüglich des Offsets der Fläche angesehen. Die Kenntnis des Einflussgebiets der Medialachse bei der Bahnplanung kann helfen, starke Unterschiede bezüglich der Längen von Kontaktbahn und Positionsbahn etwa durch die Anpassung der Wirkungsrichtung und des Wirkungsabstands zu mindern. Verfahren dieser Art werden in der Dissertation angegeben (s.u.).

Zur näherungsweisen Berechnung von Einflussgebieten werden Verfahren angegeben, welche die besondere Eigenschaft aufweisen, nur auf Normalkurven, ohne explizite Verwendung der Medialachse, zu beruhen ([Abschnitt 3.2](#)).

Eines der Verfahren basiert auf der Beobachtung, dass ein Punkt \mathbf{p} der Bezugsoberfläche Z genau dann im Einflussbereich der Medialachse für eine Offset-Fläche liegt, wenn der Abstand zwischen \mathbf{p} und dem Schnittpunkt \mathbf{q} der Normalkurve von \mathbf{p} mit der Offset-Fläche („*Abstandsabweichung*“) größer als der kleinste Abstand zwischen \mathbf{q} und Z oder der Winkel zwischen dem Vektor $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ und der Normale von \mathbf{p} („*Winkelabweichung*“) nicht Null ist. Diejenigen Punkte von Z , die im Einflussbereich der Medialachse einer Offset-Fläche liegen und Winkelabweichung Null haben, liegen auf der Kammlinie von Z ; *Kammlinien* sind Kurven auf einer Oberfläche, die aus Punkten bestehen, an denen der Betrag der Hauptkrümmung längs einer Krümmungslinie maximal ist. Dies ergibt sich aus der Charakterisierung von Kammlinien als senkrechte Projektion des Randes der Medialachse auf die Bezugsoberfläche. Basierend auf dieser Beobachtung wird ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Kammlinien auf Oberflächen angegeben ([Unterabschnitt 3.3.2](#)).

[Abbildung 1.7e](#) zeigt die Normalkurven aus [Abbildung 1.7d](#), für welche die Abstandsabweichung nicht Null ist. Für die Normalkurven in [Abbildung 1.7f](#) ist zusätzlich die Winkelabweichung der dargestellten Normalkurven gleich Null, woraus sich die Kammlinie ergibt.

Kammlinien treten insbesondere an Kanten von Oberflächen auf. Beim thermischen Beschichten kann ein schräges Durchqueren eines Tals durch eine Kontaktkurve, d.h. nicht parallel zu konkaven Kammlinien, einen schleifenförmigen Verlauf der Werkzeugbahn mit eventuell unzulässig hohen Beschleunigungen hervorrufen, sobald der Spritzabstand den kleinsten Krümmungsradius der Kontaktbahn überschreitet. Kammlinien sind auch für das Fräsen relevant, da ein schräges Überfahren einer Kante zu deren Ausfransung aufgrund von unkontrolliert wegbrechendem Material führen kann.

Offset-Positionsbahn einer Kontaktbahn

Eine Offset-Positionsbahn einer gegebenen Kontaktbahn ergibt sich als Abbildung der Kontaktbahn auf eine gewünschte Offset-Fläche, wobei die Punkte der Kontaktbahn auf den ersten Schnittpunkt der dort startenden Normalkurve mit der Offset-Fläche abgebildet werden. Aus geometrischer Sicht ergibt sich die Offset-Positionsbahn als Schnittmenge zwischen der Normalfläche der Kontaktbahn und der Offset-Fläche. Die *Normalfläche* einer Kontaktbahn besteht aus den Punkten aller Normalkurven, die auf der Kontaktbahn starten. [Abbildung 1.7g](#) zeigt eine Bezugsoberfläche (hellgrau opak), eine Offset-Fläche (grün transparent), eine Kontaktbahn (blaue Kurve) mit entsprechender Normalfläche (rot transparent) sowie die Positionsbahn (weiße Kurve) als Schnittmenge aus Offset- und Normalfläche sowie eine Außenhülle (grau transparent), welche bei der spanenden Fertigung den durch einen Fräser vom Material freizulegenden Bereich eines Rohlings begrenzt. Basierend auf der geometrischen Sicht werden abhängig von der Repräsentationsform der Kontaktbahnen auf der Bezugsoberfläche Verfahren zur Berechnung von Offset-Positionsbahnen einer gegebenen Kontaktbahn in einer expliziten und impliziten Variante präsentiert.

In der *expliziten Variante* sind die Kontaktbahnen auf der Bezugsoberfläche durch explizit repräsentierte Kurven gegeben. Die einer Kontaktbahn zugeordnete Normalfläche ergibt sich durch Interpolation von Normalkurven zu Abtastpunkten der Kontaktbahn ([Abschnitt 5.3](#)).

Bei der *impliziten Variante* sind die Kontaktbahnen durch ein Distanzfeld auf der Bezugsoberfläche gegeben (siehe Bereich A in [Abschnitt 1.4](#)). Es wird ein Verfahren zur näherungsweise Generierung von Offset-Positionsbahnen als Schnittmenge von Niveauflächen aus zwei Skalarfeldern angegeben, welche die Bahnabschnitte normal bzw. tangential zur Bezugsoberfläche lokalisieren ([Abschnitt 5.4](#)). Die normale Lokalisierung geschieht durch das räumliche Distanzfeld der gegebenen Oberfläche. Zur tangentialen Lokalisierung wird ein neues Skalarfeld, das *Extrusions-skalarfeld*, eingeführt, das durch Verschiebung der Werte des Oberflächendistanzfeldes in den Raum längs der Normalkurven entsteht. Auf diese Weise lassen sich konzeptionell alle zur Bahngenerierung erforderlichen Informationen unabhängig vom Bahnabstand und Offset innerhalb dieser beiden Skalarfelder kodieren. Aus diesen können dann, ohne erneuten Berechnungsaufwand oder Vorgabe der Bezugsoberfläche, Bahnen mit unterschiedlichem Bahnabstand und Offset generiert werden, je nach Abtastung der Distanzwerte der einzelnen Komponenten.

[Abbildung 1.7h](#) und [1.7i](#) zeigen mit der impliziten bzw. expliziten Methode berechnete Normalflächen für vier beispielhafte Kontaktbahnen (blaue Kurven) auf einer Zahnkrone (graue Fläche). Die weißen Kurven markieren resultierende Positionsbahnen.

Überblendung von Normalen-Offset- und Offset-Positionsbahn einer Kontaktbahn

Die Überblendung der Normalen-Offset- und der Offset-Positionsbahn einer Kontaktbahn ergibt sich durch Interpolation der den Punkten \mathbf{p} der Kontaktbahn entspre-

chenden Punkte $\mathbf{w}(\mathbf{p})$ der Normalen-Offset-Bahn und $\mathbf{o}(\mathbf{p})$ der Offset-Positionsbahn durch eine Kurve $\mathbf{q}(\mathbf{w}(\mathbf{p}), \mathbf{o}(\mathbf{p}), \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, d.h. $\mathbf{q}(\mathbf{w}(\mathbf{p}), \mathbf{o}(\mathbf{p}), 0) = \mathbf{w}(\mathbf{p})$ und $\mathbf{q}(\mathbf{w}(\mathbf{p}), \mathbf{o}(\mathbf{p}), 1) = \mathbf{o}(\mathbf{p})$. Die Kurve wird als *Werkzeugpositionskurve des Kontaktpunkts* und die Vereinigung der Werkzeugpositionskurven über alle Kontaktpunkte als *Werkzeugpositionsfläche der Kontaktbahn* bezeichnet. Die λ -Parameterlinien für konstante Werte von λ definieren dann Kompromissbahnen zwischen der wirkungsgünstigen Normalen-Offset-Bahn und der dynamikgünstigen Offset-Positionsbahn. Durch geeignet definierte Parameterfunktionen $\lambda(\mathbf{p})$, \mathbf{p} auf der Kontaktbahn, lassen sich Positionsbahnen mit vorgegebener konstanter Winkelabweichung bzw. Abstandsabweichungen erzielen. [Abbildung 1.8a](#) visualisiert die Werkzeugpositionsfläche einer Kontaktbahn (blaue Kurve) auf einer kugelförmigen Bezugsfläche (grau) als Flächennetz. Der Offset-Abstand ist der 2.5-fache Kugelradius. [Abbildung 1.8b](#) zeigt zwei Werkzeugpositionsflächen unterschiedlichen Offset-Abstands einer Kontaktbahn (blauen Kurve) auf einer ellipsoidförmigen Bezugsfläche (grau) als Flächennetze. Die Oberflächenfärbung beider Abbildungen kodiert jeweils die Abweichung des Wirkungswinkels von der Normale von 0 Grad (rot) bis 56 Grad an der Spitze (blau). Die Kurven auf den Werkzeugpositionsflächen repräsentieren Kompromissbahnen mit konstanter Winkelabweichung. [Abbildung 1.8c](#) stellt die Werkzeugpositionsfläche für eine wellenförmige Bezugsfläche mitsamt Isokonturen des Interpolationsparameters dar. Die detaillierte Ausarbeitung dieses neuartigen Konzepts ist Gegenstand von [Abschnitt 5.5](#).

Offset-Positionsbahnen für das thermische Spritzen haben die Eigenschaft, praktisch keine Kollisionen zwischen dem Spritzkegel und dem Werkstück außerhalb des Wirkungsgebiets aufzuweisen, was für Normalen-Offset-Positionsbahnen nicht der Fall zu sein braucht. Durch das Konzept der überblendeten Kompromissbahnen besteht die Möglichkeit, Normalen-Offset-Positionsbahnen in Richtung der Kollisionsfreiheit zu verändern. Hierfür wird ein Verfahren skizziert. [Abbildung 1.8d](#) zeigt Werkzeugbahnen für einen Kontaktbahnabschnitt auf einer beckenförmigen Tiefziehform. W1 ist die Normal-Offset-Positionsbahn. W2 umfasst lokale Abweichungen von der idealen Werkzeugposition zur Kollisionsvermeidung. W3 beinhaltet zusätzlich globale Abweichungen von der idealen Werkzeugposition zur Dämpfung der Dynamik. W4 ist die nächstgelegene Positionsbahn auf der Offset-Fläche. Die Wirkung von W4 auf die Fläche ist in [Abbildung 1.8e](#) dargestellt.

Relaxierte Offset-Positionsbahnen einer Kontaktbahn

Offset-Positionsbahnen gliedern sich in bewegungsdominante und schwenkdominante Abschnitte (siehe bspw. [Abbildung 5.8c](#)), wodurch an den Übergangsstellen ein Beschleunigungs- bzw. Abbremsvorgang bezüglich der Bewegung oder des Schwenks erforderlich ist. Es wird ein Verfahren zur weiteren Relaxation der normalenbezogenen Ausrichtung angegeben ([Abschnitt 5.6](#)). Es berechnet Offset-Bahnen zu einer größeren als der erforderlichen Distanz und projiziert diese dann auf die korrekte Offset-Fläche. Diese Vorgehensweise bewirkt eine Überblendung zwischen benachbarten Ausschnitten unterschiedlicher Charakteristik.

1.5.2 Implizite Bahnplanung für raumbasiertes Fräsen

Es werden Varianten eines neuartigen, vollständig auf impliziter Repräsentation basierenden Bahnplanungsverfahrens zum Freilegen eines Zielkörpers (Zielwerkstück) durch dreiachsiges Fräsen präsentiert, der Teilmenge eines gegebenen Körpers (Rohlings) ist (Kapitel 6). Das Verfahren wurde speziell vor dem Hintergrund des FräSENS von Zahnkronen, Brücken oder Inlays entworfen. Für solche dentalen Werkstücke gibt es Blickrichtungen, so dass die Werkstückoberfläche aus einer solchen Blickrichtung und der dazu entgegengesetzten Richtung im Wesentlichen insgesamt komplett einsehbar ist. Durch iterative Anwendung des Verfahrens aus weiteren Richtungen können auch komplexere, nicht hinterschnittfreie Werkstücke freigelegt werden.

Das Verfahren gliedert sich in einen geometrischen und einen kombinatorischen Bahnplanungsteil. Die geometrische Bahnplanung verwendet eine Schar paralleler Zustellebenen senkrecht zur Fräswerkzeugausrichtung, bezüglich denen nacheinander abgetragen wird. Auf den Zustellflächen ergeben sich dann überdeckende Bahnabschnitte, ausgehend von impliziten Repräsentationen in Distanzfeldern, die von der Sichtbarkeitshülle einer Offset-Fläche des Werkstücks und von einer äußeren Hüllfläche, etwa der Oberfläche des Rohlings, induziert werden (Abbildung 1.7j, 1.7k). Die Sichtbarkeitshülle ist durch die Zustellrichtung und die Größe des Offsets der Offset-Fläche durch die Größe des kugelförmigen Werkzeugs festgelegt. Ein besonderer Beitrag besteht in neuartigen Ansätzen zur Vermeidung von Kollisionen zwischen dem Werkzeug und dem aktuellen Werkstück, die die Generierung offener Eingriffsbahnsegmente umgeht, die eine Neuzustellung des Werkzeugs bei der Verbindung von Eingriffsbahnsegmenten erschweren würden. Die kombinatorische Bahnplanung skizziert Vorgehensweisen bei der Ermittlung von Reihenfolgekriterien für die resultierenden Bahnabschnitte, anhand derer sie dann mit einer spezifischen Heuristik zu einer möglichst kurzen Bahn verkettet werden können.

1.5.3 Implizite Simulation des Materialabtrags beim Fräsen

Es wird ein Verfahren angegeben, das für ein gegebenes volumetrisches Werkstück und eine gegebene fünfachsige Positionsbahn eines Fräswerkzeugs den Abtrag sowie die resultierende Form des Werkstücks berechnet, die sich durch Abfahren der Bahn am Werkstück ergeben (Kapitel 7). Dabei sind das Werkstück und das Werkzeug durch vorzeichenbehaftete Skalarfelder implizit repräsentiert. Aus der Verwendung vorzeichenbehafteter Distanzen resultiert eine im Vergleich zu Verfahren, die auf booleschen Voxeln basieren, überlegene Approximationsqualität der Materialoberfläche, da Konturen stetig interpoliert anstatt stückweise konstant sind. Ferner ergibt sich eine höhere Approximationsqualität und Effizienz im Vergleich zu Verfahren, die Fräserposen längs der Bahn diskret abtasten. Die Bahn ist durch eine Folge von Stützstellen gegeben, welche durch Bahnsegmente interpoliert werden. Der Kern des Verfahrens ist die Ermittlung einer Werkzeugpose auf den Bahnsegmenten, zu der ein gegebener Raumpunkt den kleinsten Abstand hat, wofür ein schnelles iteratives Lösungsverfahren angegeben wird, welches, anders als bei anderen bekannten implizi-

ten Lösungen, auch für nicht kugelförmige Fräswerkzeuge arbeitet (Abbildung 1.8f). Die Oberflächen des abgetragenen Volumens und der neuen Form des Werkstücks ergeben sich als Level-Sets der Skalarfeldrepräsentation (siehe Abbildung 1.8g für das abgetragene Volumen).

1.5.4 Implementierung der Verfahren

Die Verfahren wurden im Rahmen einer CAM-Software namens *AnyCAM* des Autors der Dissertation implementiert. Der Anwendungshintergrund war die vollautomatische spanende Fertigung dentaler Modelle mittels Tischfräsmaschinen. *AnyCAM* ist Bestandteil eines Softwareprodukts, welches sich, vertrieben durch eine externe Firma, in ausgewählten Zahnarztpraxen und Dentallaboren zur Fertigung von Zahnersatz im Einsatz befindet. Später wurde *AnyCAM* im Rahmen eines IGF-Projekts zur Entwicklung eines Softwaretools zur automatisierten Bahnerzeugung, Bewegungsoptimierung und Schichtbildungssimulation beim robotergestützten thermischen Spritzen um ein Modul zur Unterstützung der Bahnplanung für das thermische Spritzen erweitert. *AnyCAM* demonstriert die praktische Brauchbarkeit der Verfahren der Dissertation. Die in der Arbeit gezeigten Abbildungen von Resultaten der Verfahren wurden mit *AnyCAM* generiert.

1.6 Gliederung

Kapitel 2 ist den Grundlagen der impliziten Darstellung gewidmet. Kapitel 3 befasst sich mit der Berechnung von Normalkurven und, davon ausgehend, der medialachsenbasierten Krümmungsanalyse. Kapitel 4 präsentiert die Grundlagen des Bahnplanungsansatzes der Dissertation. Kapitel 5 behandelt die oberflächenbasierte Bahnplanung mit dem Verfahren der Zuordnung von Positionsbahnen zu implizit definierten Oberflächenbahnen sowie die Ansätze zur Relaxation der idealen senkrechten Ausrichtung des Werkzeugs zur Fläche. Kapitel 6 greift die raumbasierte Bahnplanung mit dem Schwerpunkt auf dem Verfahren zur Freistellung von Werkstücken durch Fräsen auf. Kapitel 7 präsentiert das Verfahren zur Simulation des Materialabtrags. Kapitel 8 gibt ausgehend von den Resultaten der Arbeit einen Ausblick auf interessante Problemstellungen für die zukünftige Forschung.

1.7 Publikationen

Einen rudimentären Einblick in die spanende Fertigung dentaler Modelle für eine fachfremde Zielgruppe, mitsamt Vorstellung der verwendeten frühen Ansätze zur Fräsbahngenerierung und Simulation, erfolgt in [GWR12a; GWR12b].

Eine detailliertere Dokumentation verfolgter Ansätze zur Generierung und Simulation von Fräsbahnen für dentale Modelle liefert [GW13]. Insbesondere erfolgt darin die erstmalige Vorstellung der impliziten Darstellung von Schnittvolumen im Rahmen der Simulation des Materialabtrags von Kapitel 7.

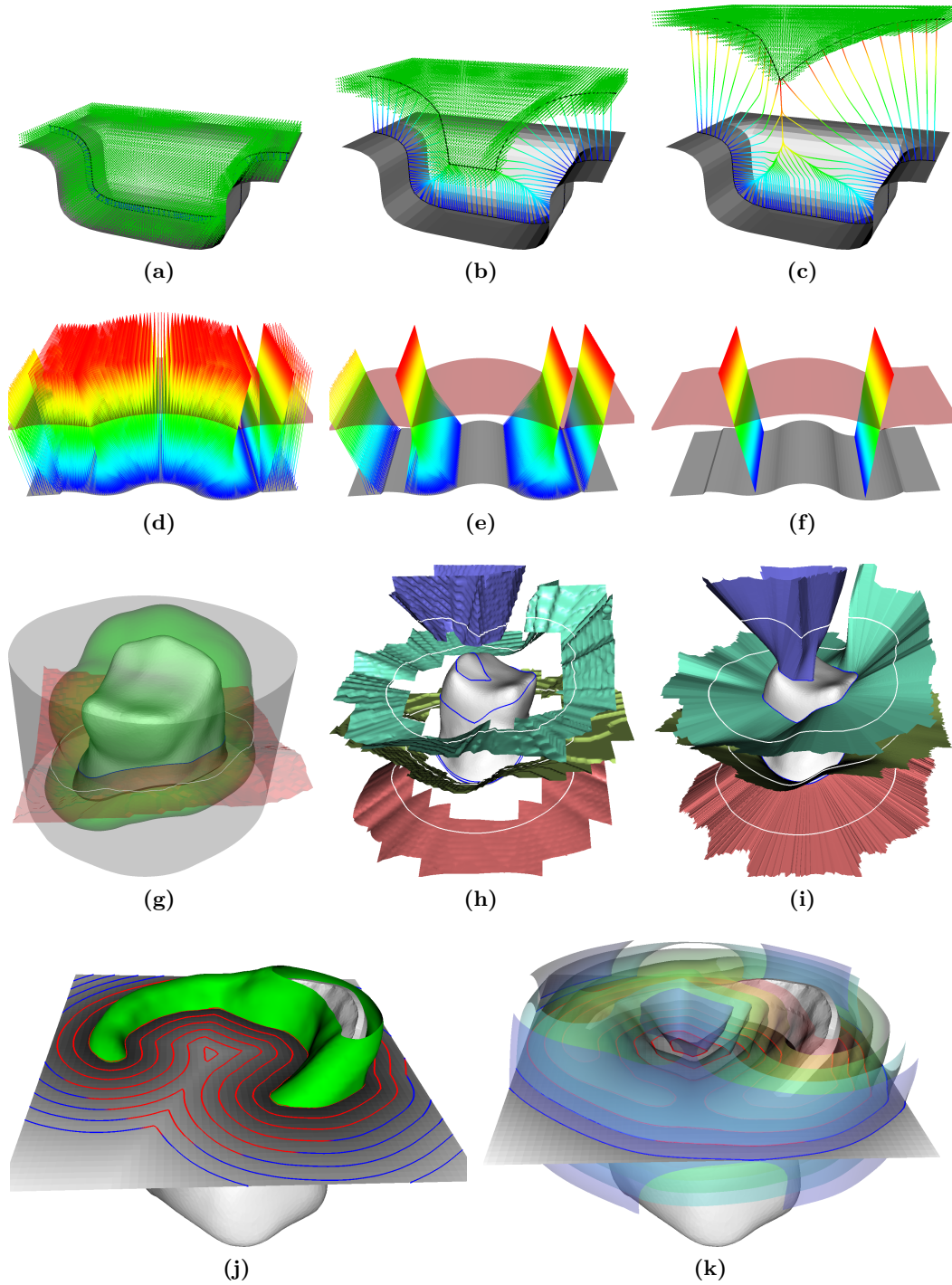


Abbildung 1.7: Visualisierung ausgewählter Herangehensweisen und Resultate. Erläuterung im Text.

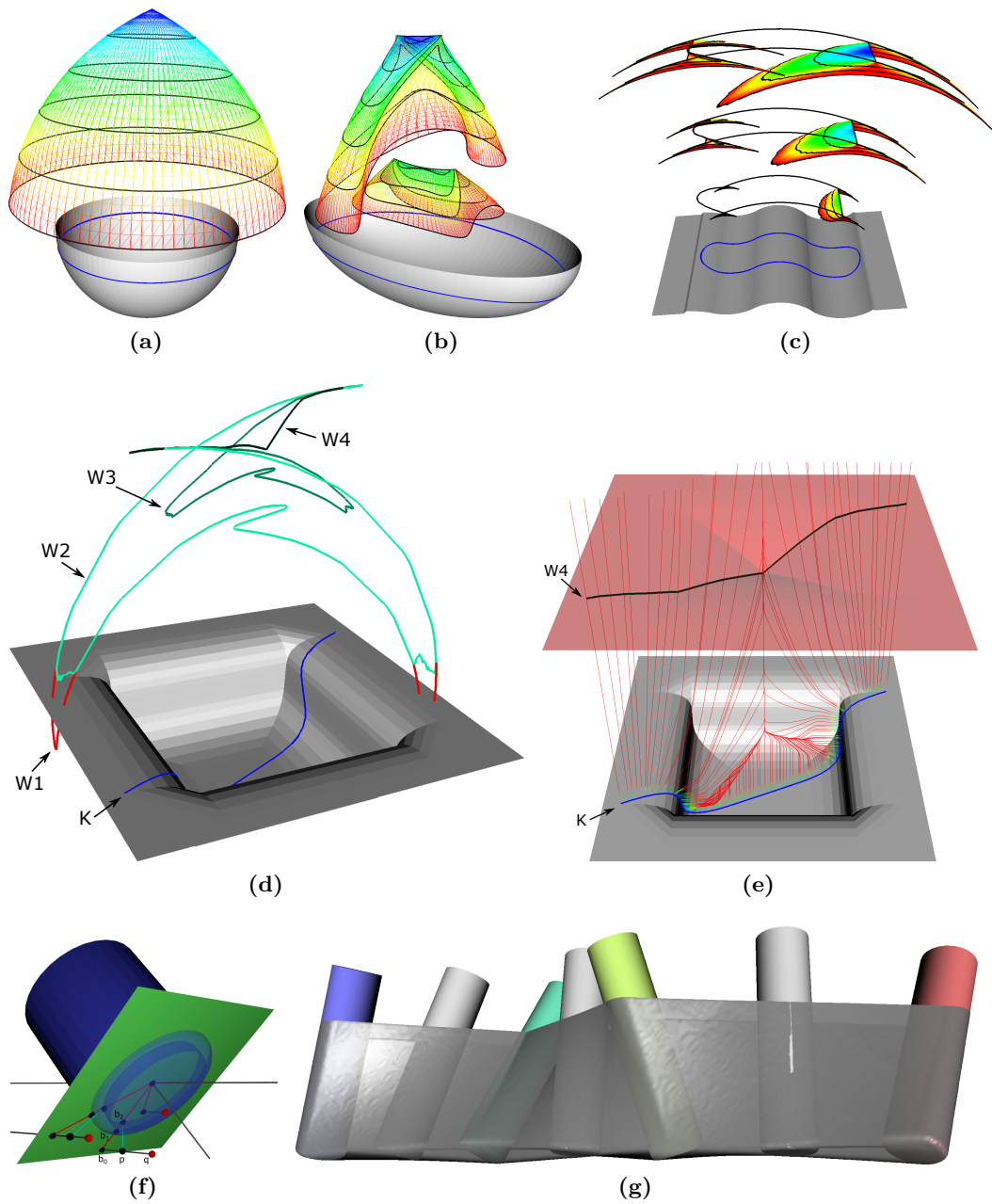


Abbildung 1.8: Visualisierung ausgewählter Herangehensweisen und Resultate. Erläuterung im Text.

Die erstmalige Erprobung der in [Kapitel 5](#) vorgeschlagenen dynamikgünstigen Werkzeugpositionierungsstrategie erfolgt in [\[TSZ+18\]](#), in Verbindung mit einer evolutionsbasierten Kontaktbahnplanungsstrategie für das robotergestützte thermische Spritzen gemäß [\[Heg17\]](#).

Eine Erprobung der dynamikgünstigen Werkzeugpositionierungsstrategie im Rahmen einer Optimierung vorhandener Werkzeugbahnen für das thermische Spritzen erfolgt in [\[TSZ+19\]](#).

Des weiteren wurde der zur Bahnglättung vorgeschlagene Ansatz der Aktiven Konturen in einem anderen Kontext zur Signalextraktion aus Sensordaten erprobt [\[GWM+10; GWM09\]](#).

1.8 Danksagung

Teile der Dissertation sind im Zusammenhang mit folgenden Projekten entstanden:

- ZIM-Projekt KF 2442002WO0: Rechnergestützte Fertigung dentaler Zahnimplantate,
- Industrielle Forschungs- und Entwicklungsprojekte mit der Firma REITEL Feinwerktechnik GmbH,
- IGF-Projekt Nr. 19.393 N: Entwicklung eines Softwaretools zur automatisierten Bahnerzeugung, Bewegungsoptimierung und Schichtbildungssimulation beim robotergestützten thermischen Spritzen.

Der Autor bedankt sich für die Förderung dieser Projekte, sowie für die hervorragende Betreuung der Dissertation durch Prof. Dr. Heinrich Müller.

Implizite Darstellung

Inhalt

2.1 Statische Skalarfelder	21
2.1.1 Repräsentationsformen	22
2.1.2 Gitter-Octrees	24
2.2 Dynamische Skalarfelder	29
2.2.1 Implizite und explizite Darstellung dynamischer Objekte	30
2.2.2 Repräsentation dynamischer Skalarfelder	32
2.3 Distanzfelder	33
2.3.1 Medialachsen	34
2.3.2 Berechnung von Distanzfeldern	37

Implizite Darstellung bezeichnet die Repräsentation geometrischer Objekte wie Kurven und Flächen als Nullstellenmenge oder, allgemeiner, als *Niveaumenge* (Level Set) von Skalarfeldern. Das Kapitel gibt eine Übersicht von Skalarfeldern und deren Repräsentation unter dem Gesichtspunkt der Berechnung impliziter Darstellungen, die sich an den Bedürfnissen der Dissertation orientiert. Dabei wird zwischen statischen und dynamischen, d.h. zeitabhängigen Gegebenheiten unterschieden. Besonders hervorzuheben ist eine Speicherbedarfsanalyse für die Repräsentation von Skalarfeldern durch Octrees. Ferner wird besonders auf Distanzfelder und deren Medialachsen als nicht stetig differenzierbare Stellen eingegangen.

2.1 Statische Skalarfelder

Ein statisches Skalarfeld ist eine skalarwertige Funktion $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Punkt des Raums M einen reellen Wert zuordnet. Als Definitionsbereich M wird ein n -dimensionaler riemannscher Raum angenommen, mit dem euklidischen Raum \mathbb{R}^n als Spezialfall. Die Dimension von M richtet sich nach der Art des implizit darzustellenden geometrischen Objekts: $n = 2$ für Kurven in der euklidischen Ebene oder Kurven auf Oberflächen (Mannigfaltigkeiten), $n = 3$ für Oberflächen im euklidischen Raum.

Ein durch ein Skalarfeld implizit dargestelltes Objekt entspricht der Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in M$, die von ϕ auf den gleichen Funktionswert abgebildet werden, d.h.

$S(c) = \{\mathbf{x} \in M \mid \phi(\mathbf{x}) = c\}$ für einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$, oder anders ausgedrückt das Urbild $S(c) = \phi^{-1}(c)$ des Elements c . $S(c)$ wird auch als Niveaumenge des Skalarfelds bezeichnet. Prinzipiell genügt die Behandlung des Falles $c = 0$, da mittels der Substitution $\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) - c$ jeder andere Fall auf den Fall $c = 0$ zurückführbar ist.

2.1.1 Repräsentationsformen

Für die Darstellung von ϕ lassen sich verschiedene Repräsentationsformen unterscheiden, die nach folgenden Eigenschaften charakterisiert werden können:

- analytisch exakt oder numerisch approximiert,
- uniform oder nicht-uniform numerisch approximiert.

Die analytische Darstellung von ϕ ist hinsichtlich des Ressourcenbedarfs (Speicher, Berechnungsdauer) am effizientesten. Jedoch kann die analytische Darstellung von komplexen Geometrien aufgrund der erforderlichen stückweisen Definition einen großen Formelaufwand verursachen. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf diese Weise das Schnittvolumen eines Zerspanungswerkzeugs dargestellt.

Uneingeschränkte oder komplexe Geometrien und Berechnungen auf diesen bedürfen dagegen im Allgemeinen einer numerischen Approximation des Skalarfelds. Sie kann durch eine Abtastung des Definitionsbereichs mittels Stützstellen erfolgen. Eine Stützstelle repräsentiert den Funktionswert des Skalarfelds an einem Punkt des Definitionsbereichs. In der Regel werden die Stützstellen in zwei oder mehr Dimensionen als Eckpunkte eines Netzes gewählt. Die Abtastung des Definitionsbereichs kann uniform oder nicht-uniform erfolgen. Ein wichtiges Beispiel für eine *uniforme Abtastung* im euklidischen Raum ist die Wahl der Abtastpunkte als Eckpunkte eines volldimensionalen regulären Rechtecksgitters, welches zugleich das Netz definiert. Typischerweise ist der Definitionsbereich dabei quaderförmig. Reguläre Gitter können damit softwaretechnisch durch Arrays repräsentiert werden. [Abbildung 2.1a](#) visualisiert die Repräsentation eines dreidimensionalen Skalarfelds durch ein reguläres Gitter. Bei dem Skalarfeld handelt es sich um das Distanzfeld der Oberfläche einer Zahnkrone, die ebenfalls dargestellt ist. Das Distanzfeld gibt für beliebige Punkte im Raum deren kleinste Distanz zu der Fläche an, siehe [Abschnitt 2.3](#).

Nicht-uniforme Abtastungen zeichnen sich durch eine im Grundsatz beliebige relative Positionierung der Stützstellen aus. Insbesondere kann deren Dichte etwa ortsabhängig mit der Varianz des Skalarfelds variieren. So können die Stützstellen an Orten höherer Varianz oder Details des Skalarfelds dichter als anderswo gesetzt werden. Beispiel sind adaptive und hierarchische Gitter. *Adaptive Gitter* ergeben sich aus regulären Gittern, indem die Länge der Gitterzellen in jede Koordinatenrichtung nicht mehr konstant, sondern unterschiedlich sein kann. Die Repräsentation durch ein Array kann damit beibehalten werden, jedoch muss zusätzlich Information über die Zelllängen gespeichert werden, wofür ein eindimensionales Array pro Richtung verwendet werden kann. *Hierarchische Gitter* entstehen, indem in die Gitterzellen

eines regulären Gitters jeweils ein weiteres reguläres Gitter eingesetzt wird und dieser Vorgang auf diesen dann endlich oft iteriert wird. Die Menge der Stützstellen ergibt sich als Menge der Eckpunkte der Gitterzellen. Spezialfälle sind der *Quadtree* in der Ebene und der *Octree* im Raum. Das initiale Gitter besteht in beiden Fällen aus nur einer einzigen Zelle. Die eingesetzten regulären Gitter haben längs jeder Koordinatenrichtung genau zwei Zellen, sodass im zweidimensionalen Fall eine Unterteilung in vier und im dreidimensionalen Fall eine Unterteilung in acht Zellen resultiert. Die inneren Knoten der resultierenden Baumstrukturen haben damit vier bzw. acht Nachfahren. Baumstrukturen können softwaretechnisch durch verzeigte Strukturen repräsentiert werden; es gibt jedoch diverse Ansätze der kompakten Speicherung, siehe etwa [Sam90]. [Abbildung 2.1b](#) zeigt einen Octree, der im Bereich der Oberfläche der Zahnkrone besonders stark verfeinert ist.

Eine weitere Repräsentationsform sind die Sparse Fields. Ein *Sparse Field* kann als Teilmenge eines regulären Gitters verstanden werden, die aus den Zellen besteht, die für eine aktuelle Aufgabe relevant sind. Ein Beispiel sind Zellen, die in der Umgebung einer gewissen Ausdehnung um eine Fläche, beispielsweise eine Niveaumenge, platziert sind. Der wesentliche Unterschied zu regulären Gittern ist, dass das Gebiet, das sich als Vereinigung der Zellen eines Sparse Field ergibt, nicht quaderförmig zu sein braucht. Dadurch, dass die Zellen im Wesentlichen einer zweidimensionalen Oberfläche folgen, ist ihre Anzahl in diesem Beispiel deutlich kleiner als die des gesamten Gitters. Aus diesem Grund wird die Repräsentation durch ein Array beim Sparse Field durch speichereffizientere Alternativen ersetzt. [Abbildung 2.1c](#) zeigt ein derartiges Beispiel.

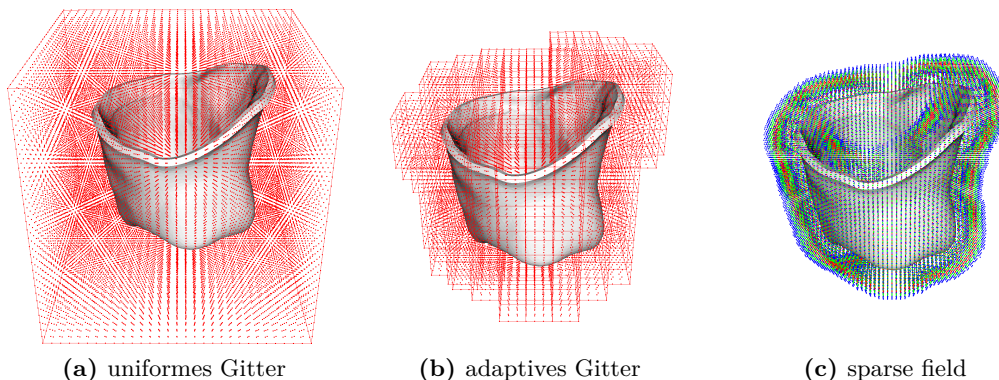


Abbildung 2.1: Beispielhafte Visualisierung der Repräsentation eines Skalarfelds durch ein reguläres Gitter (a), einen Octree (b) und eine Sparse Field (c). Bei dem Skalarfeld handelt es sich um ein Distanzfeld zu der dargestellten Oberfläche einer Zahnkrone.

Der Grund für die Verwendung mehrerer Repräsentationsformen liegt in deren spezifischen Eignung für jeweils unterschiedliche Problemstellungen. Nicht-uniforme Abtastungen erlauben durch eine Anpassung der Abtastdichte an die Varianz des

Skalarfelds oder die Beschränkung auf berechnungsrelevante Gebiete die effizientere Ausnutzung des Speichers und eventuell überhaupt erst die effiziente Darstellung von Objekten mit inhomogenen Detaillierungsgrad. Ferner kann die Beschränkung von Berechnungen auf einen Detaillierungsgrad und ein Gebiet, die für eine Berechnung hinreichend ist, eine Minderung der benötigten Rechenzeit zu Folge haben. Andererseits kann eine uniforme Abtastung die effizientere Parallelisierung von Berechnungen, etwa durch Einsatz von GPUs (Graphics Processing Units) ermöglichen. Diese Beobachtung gilt insbesondere für Distanzfelder, die in dieser Arbeit einen Schwerpunkt bilden. Der [Unterabschnitt 2.1.2](#) ist einer detaillierten Effizienzanalyse von Octrees als wichtiger Spezialfall einer nicht-uniformen Repräsentation gewidmet. Dabei wird insbesondere der Fall der Repräsentation des Gebiets in einem beschränkten Saum um eine Fläche, beispielsweise einer Niveaumenge, betrachtet.

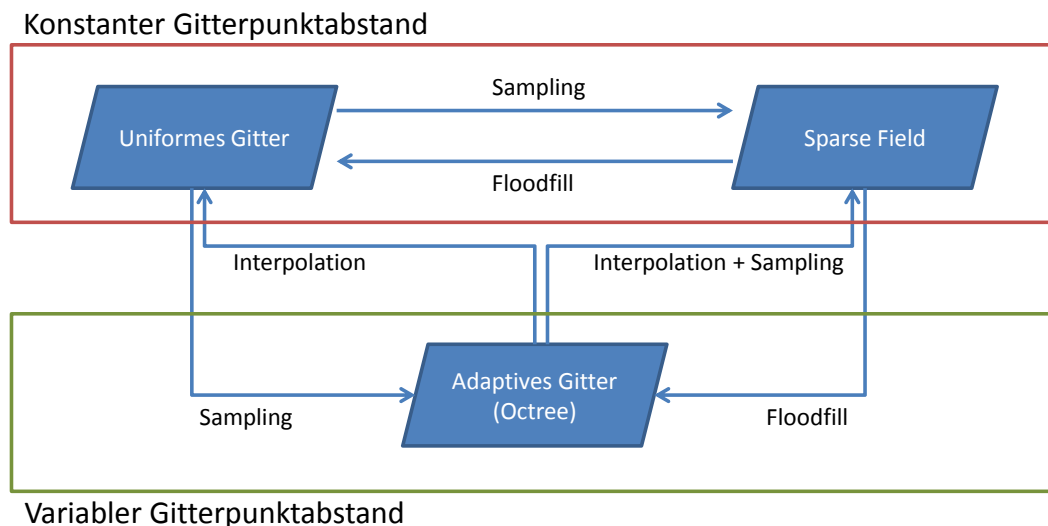


Abbildung 2.2: Übersicht über verwendete Repräsentationsformen von Skalarfeldern und Konvertierungsmethoden

In der Dissertation werden alle drei in [Abbildung 2.1](#) gezeigten Repräsentationsformen verwendet, um den spezifischen Anforderungen unterschiedlicher Problemstellungen gerecht zu werden. Der Wechsel zwischen einer statischen und dynamischen Problemstellung, oder zwischen einem homogenen und inhomogenen Detaillierungsgrad, erfordert demnach den Wechsel der Repräsentationsform. Zu diesem Zweck wurden Konvertierungsmethoden implementiert, die im Wesentlichen aus der Abtastung oder Interpolation von Stützstellen bestehen, siehe [Abbildung 2.2](#).

2.1.2 Gitter-Octrees

Die im Folgenden vorgestellten Gitter-Octrees können als ein verlustbehaftetes Speicherkompressionsverfahren für reguläre Gitter angesehen werden. Sie sind dann besonders wirkungsvoll, wenn Gitterpunkte für eine Anwendung „irrelevant“ sind

oder der Detaillierungsgrad der Gitterrepräsentation lokal eigentlich zu fein ist. Ein Beispiel für den ersten Fall ist die Beschränkung der Speicherung eines Skalarfelds auf die Stützstellen, die in einer Umgebung eines geometrischen Objekts liegen, wie sie [Abbildung 2.1b](#) zeigt. Der zweite Fall ist etwa gegeben, wenn das durch das Gitter repräsentierte Skalarfeld lokal eine so geringe Varianz aufweist, dass es durch ein einfaches Interpolationsverfahren, z.B. stückweise konstant oder stückweise linear, auch aus weniger Stützstellenpunkten lokal gut approximierbar ist.

Gitter-Octrees ergeben sich aus einer Auflösungshierarchie, die wie folgt aufgebaut ist. Die Auflösungshierarchie besteht aus Hierarchieelementen, die jeweils einen quaderförmigen Ausschnitt aus dem gegebenen regulären Gitter repräsentieren. Hierarchieelemente können Nachfolgerelemente der nächstfeineren Hierarchiestufe haben oder ohne Nachfolger auf der feinsten Hierarchiestufe angesiedelt sein. Die Anzahl der Nachfolger ist 8. Die geringste Auflösungsstufe besteht aus genau einem Hierarchieelement und alle anderen Hierarchieelemente haben genau ein Vorgängerhierarchieelement auf der nächstgröberen Stufe.

Die Elemente der feinsten Stufe entsprechen einem quaderförmigen Ausschnitt des gegebenen Gitters mit $N_l > 1$ Gitterpunkten in jede Raumrichtung. Ein Element repräsentiert diesen Ausschnitt durch die entsprechenden Gitterpunkte. Ein Element der nächstgröberen Stufe entspricht dementsprechend einem quaderförmigen Ausschnitt des gegebenen Gitters mit $2 \cdot N_l$ Gitterpunkten in jede Raumrichtung. Es repräsentiert diesen Ausschnitt ebenfalls durch N_l Gitterpunkte, indem in jede Raumrichtung nur jeder zweite Gitterpunkt genommen wird. Damit reduziert sich die Auflösung um den Faktor 2, d.h. der Abstand der Gitterpunkte der Repräsentation ist in jede Raumrichtung das Doppelte des Abstandes der Repräsentation der feinsten Stufe. Diese Vorgehensweise wird nun schrittweise auf jede nächstgröbere Stufe angewandt. Das bedeutet, dass die Gitterrepräsentation bei den Hierarchieelementen stets N_l Gitterpunkte in jede Richtung enthält, deren Abstand in Raumrichtung sich jedoch unterscheidet.

Durch Repräsentation der Hierarchieelemente als Knoten eines Octrees ergibt sich auf natürliche Weise ein vollständiger Gitter-Octree. Indem die hierarchische Verfeinerung nicht überall bis zur feinsten Hierarchiestufe durchgeführt wird, ergeben sich Gitter-Octrees, deren Blätter auf verschiedenen Hierarchiestufen angesiedelt sind. Der Abbruch der Hierarchie erfolgt, wenn das entsprechende Hierarchieelement einen irrelevanten Ausschnitt des Originalgitters repräsentiert oder die Approximation durch die von ihm repräsentierten Gitterpunkte hinreichend gut ist.

Aus softwaretechnischer Sicht kann ein Gitter-Octree als verzeigerte Struktur realisiert werden. Die inneren Knoten referenzieren dabei ihre Nachfolger über 8 Zeiger. Die repräsentierten Gitterpunkte der Hierarchieelemente werden nur an Blattknoten, jedoch nicht an den inneren Knoten gespeichert. Blattknoten, die ein irrelevantes Untergitter repräsentieren, speichern keine Gitterinformation.

Diese Vorgehensweise bei der Speicherung der repräsentierten Gitter enthält eine gewisse Redundanz, da Gitterpunkte mehrfach gespeichert werden. Alternativ könnte diese Vorgehensweise auf Baumknoten am hinteren, rechten und oberen Rand

beschränkt und für alle anderen nur die hintere, rechte und obere Gitterpunktschicht weggelassen werden. Dies erschwert jedoch die Implementierung mancher Operationen auf Octrees, da die Information über den kompletten Rand des Ausschnitts, der durch einen Knoten repräsentiert wird, von Nachbarknoten im Baum, die eventuell sogar unterschiedliche Vorgänger haben können, besorgt werden muss.

Im Folgenden werden eine Reihe von quantitativen Angaben zum Speicherbedarf von Gitter-Octrees gemacht. Insbesondere betrifft dies das zu Beginn des Abschnitts genannte Beispiel der Beschränkung der Speicherung eines Skalarfelds auf die Stützstellen, die in einer Umgebung einer Fläche im Raum liegen.

Sei $N - 1$ die Anzahl der Zellen oder, äquivalent, N die Anzahl Gitterpunkte des gegebenen Gitters in jede der drei Raumrichtungen. N wird auch als Breite des Gitters bezeichnet. Sei entsprechend N_l die Breite des Ausschnitts eines Blatts mit höchster Tiefe. Dann hat die Auflösungshierarchie

$$K = \log_2 \frac{N - 1}{N_l - 1} \quad (2.1)$$

Stufen, d.h. die maximale Tiefe eines Gitter-Octrees ist K . Jede Verringerung (bzw. Erhöhung) der Tiefe eines Blattknotens um 1 führt zur Verdoppelung (bzw. Halbierung) des Gitterpunktabstands durch Verwerfen (bzw. Einfügen) jedes zweiten Gitterpunktes. Für den Gitterpunktabstand s_k in Tiefe $k \leq K$ gilt demnach

$$s_k = 2^{(K-k)} s_K, \quad (2.2)$$

wobei s_K den vorgegebenen kleinsten Gitterpunktabstand in Tiefe K bezeichnet.

Die Breite N_l der Blattknoten stellt einen Kompromiss aus Globalität und Lokalität dar. Für $N_l \rightarrow N$ wird der Baum zunehmend flacher und der Gitterpunktabstand global – der resultierenden höheren Anzahl an Gitterpunkten steht eine geringere Anzahl an Baumknoten gegenüber. Für $N_l \rightarrow 2$ wird der Baum zunehmend tiefer und der Gitterpunktabstand lokal – der resultierenden geringeren Anzahl an Gitterknoten steht eine höhere Anzahl an Baumknoten gegenüber. Da sich der Speicherverbrauch des Baums aus den Nutzdaten (Wert(e) pro Gitterpunkt) und Strukturdaten (Zeiger/Flag pro Baumknoten) zusammensetzt, ist N_l so zu wählen, dass sich ein geeigneter Kompromiss aus Nutz- und Strukturdaten ergibt. Die nachfolgende Untersuchung des Speicherbedarfs des implementierten Octrees soll zur Identifikation eines geeigneten N_l dienen.

Die maximale Gesamtanzahl an Knoten in einem Octree der Tiefe K ist die Summe der Anzahl an Blattknoten der Tiefe K , gegeben durch 2^{3K} , und der Anzahl an inneren Knoten der Tiefen $0, \dots, K - 1$, gegeben durch $\sum_{k=1}^K 2^{3(k-1)}$.

Bei der folgenden Analyse des Speicherbedarfs wird angenommen, dass ein innerer Knoten seine Nachfahren mittels Zeiger referenziert. Der Speicherbedarf S_K eines vollbesetzten Octrees der Tiefe K und mit einer Blattknoten-Gitterpunktanzahl von N_l^3 ist dann

$$S_K = 2^{3K} N_l^3 T_l + \sum_{k=1}^K 2^{3(k-1)} (2^3 T_i + 2) \quad (2.3)$$

$$= 8^K N_l^3 T_l + (8T_i + 2) \frac{1 - 8^K}{1 - 8} \quad (2.4)$$

$$= N_l^3 T_l L^3 + (8T_i + 2) \frac{1}{7} (L^3 - 1) \quad \text{mit} \quad L = \frac{(N - 1)}{(N_l - 1)}, \quad (2.5)$$

wobei T_l und T_i den Speicherbedarf des skalaren Datentyps der Blattknoten bzw. des Zeigertyps der inneren Knoten bezeichnen. Typische Werte sind $T_i = 8$ Byte (x64-Architektur) und $T_l = 1$ oder 4 Byte („Graustufe“ oder Fließkommazahl mit einfacher Genauigkeit). Der Wert L bezeichnet die Anzahl an Blattknoten pro Dimension. Gleichung (2.4) resultiert aus Gleichung (2.3) durch Ersetzung der geometrischen Reihe durch die entsprechende Partialsummenformel. Gleichung (2.5) resultiert aus Gleichung (2.4) durch Einsetzen von K gemäß Gleichung (2.1).

Für einen Octree der Tiefe K und Blattknoten-Gitterpunktanzahl $N_l > 1$ ist die maximale Anzahl N_K an eindeutigen (unterscheidbaren) Gitterpunkten N_K , die der Octree umfassen kann, gegeben durch

$$N_K = 2^K (N_l - 1) + 1. \quad (2.6)$$

Zur Erklärung der Gleichung (2.6) stelle man sich vor, dass jeder der 2^K Blattknoten der Tiefe K seinen rechtesten Gitterpunkt (pro Koordinatenachse) mit dem rechts angrenzenden Blattknoten teilt: die Anzahl an eindeutigen Gitterpunkten pro Blattknoten verringert sich dadurch von N_l auf $(N_l - 1)$, außer für den rechtesten Blattknoten, welcher keinen Nachbarn mehr besitzt, wodurch sich die Gesamtanzahl wiederum um 1 erhöht.

Die maximale Anzahl zu speichernder Gitterpunkte, unter Vernachlässigung der Eindeutigkeit, ist gegeben durch

$$N'_K = 2^K N_l. \quad (2.7)$$

Der Quotient aus N_K und N'_K (Gleichungen (2.6) und (2.7)) ist gegeben durch

$$I_K = \frac{N_K}{N'_K} = \frac{2^K (N_l - 1) + 1}{2^K N_l} = 1 - \frac{1}{N_l} + \frac{1}{2^K N_l} \quad (2.8)$$

$$= 1 - \frac{1}{N_l} + \frac{N_l - 1}{N_l(N - 1)} \quad (2.9)$$

und bestimmt den Anteil der eindeutigen Datenmenge an der gesamten gespeicherten Datenmenge und ist damit ein Maß für die „Informationsdichte“ oder auch „Redundanzfreiheit“ des Baums. Diese strebt gegen 1, wenn sich der Anteil an überlappenden Gitterpunkten verkleinert, d.h. N_l zunimmt, und gegen 0.5, wenn sich der Anteil an überlappenden Gitterpunkten vergrößert, d.h. N_l abnimmt. Trivialerweise ist der Quotient genau dann 1, wenn $1/N_l = 1/(2^K N_l)$ gilt, und damit $K = 0$, d.h. der Baum nur aus einem Blattknoten als Wurzel besteht – dieser Fall entspricht dem uniformen Gitter ohne jegliche Unterteilung. Gleichung (2.9) resultiert durch Einsetzen von Gleichung (2.1) in Gleichung (2.8) und bestimmt die Informationsdichte in Abhängigkeit von der maximal zu umfassenden Gitterpunktanzahl N^3 und der Blattknoten-Gitterpunktanzahl N_l^3 .

Die quantitative Analyse von Speicherbedarf und Informationsdichte ermöglicht die Identifikation eines Trade-offs von Adaptivität und Kompaktheit. Einerseits soll möglichst nur die zur Erfassung relevanter Niveaumengen erforderliche Teilmenge des Gitters gespeichert werden, d.h. die Gitterpunkte in unmittelbarer Nähe zu den Niveaumengen. Diese Anforderung ist essentiell für eine effiziente implizite Repräsentation, deren Speicherbedarf nur von der Komplexität der Konturen abhängen darf und nicht von der Abmessung des umgebenden Raums. Andererseits soll der auf diese Weise reduzierte Speicherbedarf nicht durch den „Adaptivitäts-Overhead“ kompensiert werden, d.h. den zur spärlichen Repräsentation der Teilmenge zusätzlich erforderlichen Speicherbedarf. Dieser Overhead setzt sich zusammen aus den inneren Knoten des Baumes sowie der Redundanz zwischen den Blattknoten (siehe Gleichung (2.9)).

Gleichung (2.5) bestimmt den maximalen Speicherbedarf eines Octrees unter Vorgabe der maximalen Gitterpunktanzahl N^3 und der Blattknoten-Gitterpunktanzahl N_l^3 . Dieser Wert kann zur Verdeutlichung des „Adaptivitäts-Overhead“ dienen, d.h. des Ausmaßes an zusätzlichem Speicherbedarf zur Ermöglichung der Adaptivität. Trivialerweise gilt im Fall $N_l \rightarrow N$ für den Speicherbedarf $S \rightarrow N_l^3 T_l$, d.h. je größer die Blattknoten-Gitterpunktanzahl, umso geringer der zusätzliche Speicherbedarf aufgrund der abnehmenden Redundanz und Anzahl innerer Knoten. Der maximale Speicherbedarf ist jedoch ein äußerst pessimistisches Maß zur Bewertung des Octrees, da dieses von der Notwendigkeit zur Speicherung des vollständigen N^3 -Gitters ausgeht, wofür wiederum die Verwendung eines adaptiven Gitters gar nicht empfehlenswert wäre.

Zur Bewertung des Octrees müssen zunächst Annahmen über dessen Auslastung getroffen werden. Üblicherweise wird davon ausgegangen, dass eine 2D-Mannigfaltigkeit im 3D-Raum von $\mathcal{O}(N^2)$ der insgesamt N^3 Gitterpunkte repräsentiert wird. Davon ausgehend sollen folgende Annahmen gelten:

- Die relevanten Niveaumengen werden durch ein Band der Breite N_b repräsentiert. Daraus lässt sich die Anzahl an Gitterpunkten durch $a N_b N^2$ abschätzen, $a > 0$ eine Konstante.
- Die Anzahl an Blattknoten lässt sich durch $a L_b L^2$ abschätzen, wobei L_b die Breite des Bandes in Blattknoten bezeichnet, mit $L_b = \frac{(N_b - 1)}{(N_l - 1)} + b$, für $b > 0$ eine Konstante.
- Die Anzahl gespeicherter Gitterpunkte in Abhängigkeit von N_l lässt sich somit durch $a (L_b N_l) N^2$ abschätzen und der gesamte Speicherbedarf durch $a (L_b N_l) N^2 T_l + (8 T_l + 2) \frac{1}{7} (L_b - 1)$, $a > 0$ eine Konstante.

Unter derartigen Annahmen zur Anzahl erforderlicher Gitterpunkte und Blattknoten lässt sich der Einfluss von N_l auf den resultierenden Speicherbedarf grob abschätzen, um einen für den Anwendungsfall geeigneten Wert für N_l zu schätzen. Beispielhaft zeigt [Abbildung 2.3a](#) den Einfluss von N_l auf den relativen Speicherbedarf für zwei beispielhafte Szenarien mit unterschiedlichem Anteil erforderlicher

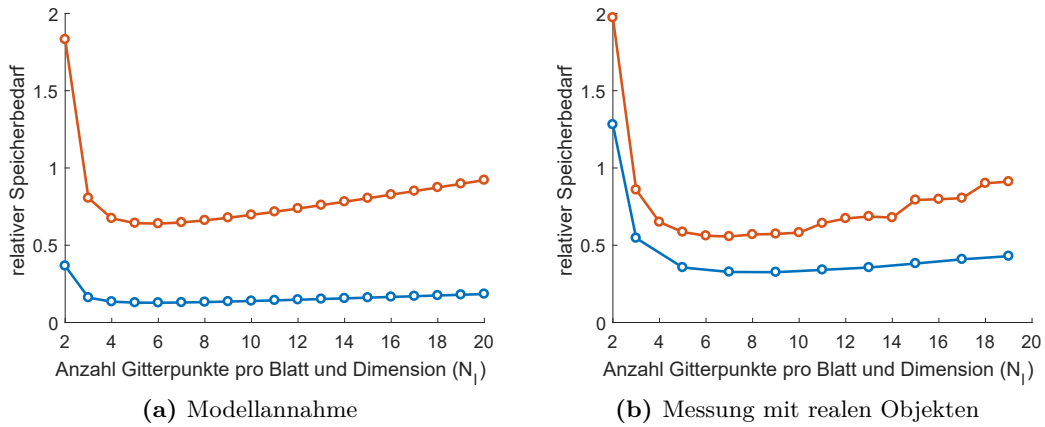


Abbildung 2.3: Speichereffizienz des Octree-Gitters in Abhängigkeit von N_l unter Modellannahmen über den Anteil relevanter Gitterpunkte am Gesamtvolumen, sowie für zwei reale Werkstücke unterschiedlicher Komplexität (orange Kurve: kompakte Zahnkrone, blaue Kurve: 12-elementige Zahnbrücke).

Gitterpunkte an der Gesamtanzahl an Gitterpunkten. Die vertikale Achse zeigt den Speicherbedarf des Octree-Gitters relativ zum Speicherbedarf eines uniformen Gitters. Erwartungsgemäß offenbart sich ein Minimum für N_l , dessen Unterschreitung zum Anstieg aufgrund der Knotenanzahl und Redundanz führt, und dessen Überschreitung zum Anstieg aufgrund der Speicherung unnötiger Gitterpunkte führt. Auf äquivalente Weise zeigt [Abbildung 2.3b](#) den für zwei reale und unterschiedlich komplexe dentale Objekte gemessenen relativen Speicherbedarf in Abhängigkeit von N_l . Die Objekte sind eine einfache Zahnkrone, wie in [Abbildung 1.6b](#) links, (orange Kurve) sowie eine 12-elementige Zahnbrücke, wie in [Abbildung 1.6b](#) unten, (blaue Kurve). Die Ausprägung eines Optimums ist somit auch im realen Szenario zu erkennen. Die Verschiebung der Kurve entlang der vertikalen Achse entspricht der Speichereffizienz des Octree-Gitters relativ zum uniformen Gitter, und ist insbesondere vom Anteil relevanter Gitterpunkte abhängig. Dieser Anteil ist im Falle der einfachen Zahnkrone höher, und damit auch der relative Speicherverbrauch, da die Zahnkrone aufgrund ihrer kompakten Form den größeren Anteil eines uniformen Gitters überdeckt. Demgegenüber beansprucht die Zahnbrücke aufgrund ihrer eher ausladenden gebogenen Form den kleineren Anteil eines uniformen Gitters, womit auch der relative Speicherverbrauch geringer ausfällt.

2.2 Dynamische Skalarfelder

Ein dynamisches Skalarfeld ist eine Funktion $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Tupel aus (Orts-)Punkt $\mathbf{x} \in M$ und (Zeit-)Punkt $t \in \mathbb{R}$ einen reellen Wert zuordnet. Analog zu statischen Skalarfeldern lassen sich Niveaumengen definieren. Die Niveaumengen

werden dabei zu einem festen Zeitpunkt betrachtet. Die Niveaumenge $S(t)$ zum Zeitpunkt t mit Niveau 0 ist definiert durch

$$S(t) = \{\mathbf{x} | \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}. \quad (2.10)$$

Eine entsprechende Definition ist für beliebige Niveaus möglich. Im Folgenden werden jedoch o.B.d.A. nur Niveaumengen zum Niveau 0 betrachtet.

Während Niveaumengen statischer Skalarfelder zur impliziten Repräsentation statischer geometrischer Formen dienen, erlauben dynamische Skalarfelder die Repräsentation von Formen, die sich über die Zeit verändern.

Ein wichtiger Spezialfall dynamischer Skalarfelder sind die *stationären dynamischen Distanzfelder*, die mittels eines statischen Skalarfelds $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ durch

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}(\mathbf{x}) - t = 0 \quad (2.11)$$

definiert werden. Die sich zeitlich verändernde Form ergibt sich damit aus Niveaumengen eines statisches Skalarfelds, wobei sich der zeitliche Verlauf durch die Zeitabhängigkeit der Niveauwerte ergibt.

2.2.1 Implizite und explizite Darstellung dynamischer Objekte

Eine andere Möglichkeit zur Beschreibung der Dynamik geometrischer Objekte ist auf explizite Weise durch Angabe der Trajektorien $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, der Punkte des sich über die Zeit verändernden Objekts. Für stetig differenzierbare Trajektorien lässt sich die Punktbeziehung über den Anfangspunkt $\mathbf{x}(0)$ und Vektoren $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $t \geq 0$, beschreiben, die die Geschwindigkeit eines Punktes \mathbf{x} zum Zeitpunkt t angeben. Für Niveaumengen von stetig differenzierbaren dynamischen Skalarfeldern als dynamische geometrische Objekte erfüllen diese Vektoren die Beziehung

$$0 = \mathbf{v} \cdot \nabla \phi + \partial_t \phi. \quad (2.12)$$

Das ergibt sich aus der Beziehung

$$0 = \partial_t \phi(\mathbf{x}(t), t) = \underbrace{\partial_{\mathbf{x}} \phi}_{\nabla \phi} \cdot \underbrace{\partial_t \mathbf{x}}_{\mathbf{v}} + \partial_t \phi \cdot \underbrace{\partial_t t}_1 \quad (2.13)$$

$$0 = \mathbf{v} \cdot \nabla \phi + \partial_t \phi. \quad (2.14)$$

Ein interessanter Spezialfall sind Geschwindigkeitsvektoren, die senkrecht auf den Niveauflächen stehen, d.h. kollinear zum Normalenvektor $\mathbf{n}(t)$ an $\mathbf{x}(t)$ sind: $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_n(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(t)$. Dabei ist v_n also die skalare Geschwindigkeit. Für diesen Fall gilt

$$0 = (v_n \mathbf{n}) \cdot \nabla \phi + \partial_t \phi \quad (2.15)$$

$$0 = v_n |\nabla \phi| + \partial_t \phi. \quad (2.16)$$

Dabei wird verwendet, dass der Gradient $\nabla \phi(\mathbf{x}, t)$ senkrecht auf der Niveaufläche steht.

An Punkten von Niveauflächen, an denen die Länge des Gradienten ungleich 0 ist, lässt sich aus der Beziehung (2.16) der Geschwindigkeitsvektor berechnen. Dies kann als Explizierung der impliziten Darstellung verstanden werden.

Die Beziehung (2.16) stellt umgekehrt einen Ansatz zur Implizitisierung von dynamischen Objekten dar, die explizit durch Geschwindigkeitsvektoren gegeben sind. Dies bedeutet die Ermittlung einer Lösung ϕ der Differentialgleichung (2.16). Die eindeutige Lösung erfordert die Vorgabe weiterer Information. Dies geschieht durch Vorgabe einer Niveaumenge zum Zeitpunkt $t = 0$. Das resultierende Anfangswertproblem für ϕ

$$\begin{aligned} \partial_t \phi + v_n |\nabla \phi| &= 0 \\ \text{mit } \phi(\mathbf{x}, 0) &\text{ vorgegeben,} \end{aligned} \quad (2.17)$$

ist als Niveaumengenproblem oder Level-Set-Problem bekannt.

Für stationäre dynamische Skalarfelder ergibt sich daraus das Randwertproblem

$$\begin{aligned} v_n |\nabla \hat{\phi}| &= 1 \\ \text{mit } \hat{\phi}(\mathbf{x}) &= 0 \text{ für } \mathbf{x} \in B, \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dies folgt mit $\partial_t \phi = 1$.

Das Randwertproblem ist dadurch effizienter als das Anfangswertproblem zu lösen, dass sich die Konturen für alle Zeitpunkte aus demselben stationären Skalarfeld ergeben, und lediglich die Berücksichtigung des zum Zeitpunkt korrespondierenden Niveaus erfordern. Nachteilig ist dagegen die erforderliche Einschränkung auf eine konstante Ausbreitungsrichtung in Normalenrichtung (stets positive oder stets negative Geschwindigkeit in Normalenrichtung) sowie die Notwendigkeit zur Speicherung des gesamten Skalarfelds zur statischen Abdeckung aller Positionen, an denen sich die Kontur jemals aufhalten kann.

Ein gängiger numerischer Lösungsansatz approximiert $\hat{\phi}$ an einer vorgegebenen Menge an Gitterpunkten entweder mittels eines klassischen Lösungsschemas für partielle Differentialgleichungen, d.h. durch iterative Aktualisierung aller Gitterpunkte bis zur Konvergenz [Set99a], oder mittels einer auf die Problemstellung spezialisierten Methode wie FMM (*Fast-Marching-Method*) [Set96; Cri09], FSM (*Fast-Sweeping-Method*) [Zha04] oder FIM (*Fast-Iterative-Method*) [JW08]. Die Spezialisierung derartiger Methoden liegt allgemein darin, einen für das Randwertproblem in Gleichung (2.18) charakteristischen Informationsfluss zwischen den Gitterpunkten auszunutzen, um auf diese Weise unnötige Iterationen über alle Gitterpunkte zu vermeiden [SV03]. Ein Vergleich ausgewählter spezialisierter Methoden erfolgt in [WH16; CCL+14; HT05].

Der Term $v_n |\nabla \phi|$ des Anfangswertproblems beschreibt eine Bewegung der Kontur in eine von ihrem Verlauf abhängige Richtung \mathbf{n} mit einer Geschwindigkeit v_n . Die Geschwindigkeit kann sich wiederum aus einer von der Kontur *unabhängigen* externen Komponente, sowie einer von der Kontur (bspw. deren Krümmung) *abhängigen*

internen Komponente zusammensetzen. Die Berücksichtigung einer krümmungsabhängigen Geschwindigkeitskomponente ist dabei aus zweierlei Hinsicht üblich. Einerseits lässt sich damit eine Glättung der Konturen modellieren und andererseits das numerische Lösungsschema regularisieren. Die Hinzunahme einer krümmungsabhängigen Geschwindigkeit $\mathbf{v} = -b\kappa\mathbf{n}$, unter Berücksichtigung der Trennung von Termen unterschiedlicher differentieller Ordnung, führt zu folgender Verallgemeinerung von Gleichung (2.17) [OS88; OF02]:

$$\partial_t\phi + v_n|\nabla\phi| = b\kappa|\nabla\phi|, \quad (2.19)$$

wobei nun zusätzlich b einen Glättungs- bzw. Diffusionskoeffizienten bezeichnet und $\kappa(\mathbf{x}, t)$ die mittlere Krümmung der zum Zeitpunkt t durch \mathbf{x} verlaufenden Kontur, definiert als Divergenz der Normale [OF02]:

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right). \quad (2.20)$$

Gleichung (2.19) enthält einen hyperbolischen Advektionsterm zur Berücksichtigung einer externen (positionsabhängigen) Geschwindigkeit v_n sowie einen parabolischen Diffusionsterm zur Berücksichtigung einer internen (krümmungsabhängigen) Geschwindigkeit $b\kappa$. Der numerische Lösungsansatz approximiert ϕ an einer vorgegebenen Menge an Gitterpunkten mittels eines numerischen Lösungsschemas zur Diskretisierung der örtlichen und zeitlichen Ableitungen, siehe auch [OS88; OF02].

2.2.2 Repräsentation dynamischer Skalarfelder

Eine für die nichtstationäre Problemstellung (Anfangswertproblem) spezialisierte Repräsentation von Skalarfeldern ist das spärlich besetzte Skalarfeld (*Sparse Field*) [Whi98], siehe Abbildung 2.1c für ein Beispiel. Unter Annahme eines zugrunde liegenden uniformen Gitters zur Abtastung des gesamten Definitionsbereichs organisiert das Sparse Field diejenigen Gitterpunkte, die sich innerhalb eines schmalen Bandes um die betroffene Kontur befinden, in fünf Listen entsprechend aufsteigenden Abstands beiderseits der Kontur. Im Fall der Bewegungsbeschreibung durch eine Differentialgleichung wird deren numerische Auswertung auf die Liste der zur Kontur angrenzenden Gitterpunkte beschränkt, während deren unmittelbare Nachbarn, die zur Berechnung von Ableitungen erforderlich sind, nach jedem Bewegungsschritt entsprechend des neuen Konturverlaufs aktualisiert werden zur Bewahrung der Distanzfeld-Eigenschaft. Ein Fortschreiten der Kontur führt dazu, dass Gitterpunkte entsprechend ihres Abstands zur Kontur zwischen den Listen ausgetauscht oder gänzlich entfernt werden, sobald sie außerhalb des Bandes liegen, sowie neue Gitterpunkte hinzukommen.

Die konkrete in dieser Arbeit verwendete Methodik wurde in [Whi98] erstmals vorgestellt und in [Lan09] erweitert und korrigiert im Kontext regionenbasierter impliziter aktiver Konturen zur Bildsegmentierung. Die im Rahmen der Konturausbreitung zur Bahnplanung in Abschnitt 6.3.3 verwendeten Level-Set-Gleichungen entstammen wiederum [BW01].

Neben der verwendeten Sparse-Field-Methode existieren alternative Ansätze zur Reduktion des zur numerischen Lösung der Level-Set-Gleichung (nichtstationäre Problemstellung) erforderlichen Berechnungsaufwandes und/oder Speicherverbrauchs, wie z.B. *Dynamic Tubular Grid* [NM06], *Hierarchical RLE Level Set* [HNB+06] sowie das adaptive Gitter mittels Quadtree bzw. Octree [GFO18; MG07]. Die Ansätze unterscheiden sich hinsichtlich der Menge und Organisation zu berücksichtigender Gitterpunkte und der Reinitialisierungsmethodik zur Bewahrung der Distanzfeldeigenschaft, sowie ggf. der Ordnung des davon abhängigen numerischen Lösungsschemas.

Hier sei insbesondere letzterer Ansatz, die Diskretisierung der Level-Set-Gleichung auf einem adaptiven Gitter, hervorgehoben anstatt, wie bei der in der Dissertation verwendeten Sparse-Field-Methode, auf einer Teilmenge eines uniformen Gitters. Im Rahmen der Dissertation erfordert dies die Erweiterung des in [Unterabschnitt 2.1.2](#) thematisierten Octrees um Operatoren zur Gradientenberechnung und Konturfortschreitung über den Blattknotenrand hinweg. Damit würde die Notwendigkeit einer separaten Repräsentationsform für die dynamische Problemstellung entfallen.

2.3 Distanzfelder

Ein Distanzfeld ist ein Skalarfeld, das jedem Punkt $\mathbf{x} \in M$ seinen kleinsten Abstand zu einer vorgegebenen Nullmenge $B \subset M$ unter Verwendung eines in M gültigen Abstandsbegriffs zuweist. Ist die Nullmenge geschlossen, unterteilt sie den Definitionsbereich in jeweils einen Bereich innerhalb (M_-) und außerhalb (M_+) der Nullmenge, mit $M = M_+ \cup M_- \cup B$. In diesem Fall wird $\phi(\mathbf{x})$ zu einer vorzeichenbehafteten Distanz erweitert, die positiv für $\mathbf{x} \in M_+$ und negativ für $\mathbf{x} \in M_-$ ist.

Dieser Abschnitt konzentriert sich auf Distanzfelder mit zwei- und dreidimensionalem Definitionsbereich zur impliziten Repräsentation von Kurven und Oberflächen, wie sie in dieser Dissertation verwendet werden. Im zweidimensionalen Fall werden die Fälle betrachtet, dass der Definitionsbereich, aufgefasst als Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$, eben oder gekrümmt ist. Dies wirkt sich auf den Begriff des Abstands zwischen zwei Punkten $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in M$ aus, definiert als die Länge des kürzesten Weges von \mathbf{p}_1 nach \mathbf{p}_2 , wobei jeder Punkt des Weges in M liegt. Gekrümmte Flächen werden als Dreiecksnetze repräsentiert, welche bspw. die Oberfläche des zu fertigenden Objekts approximieren. Kurven dienen in diesem Fall zur Markierung kritischer Regionen wie z. B. Kanten, oder Unterteilung in Bearbeitungsbereiche auf der Oberfläche. Diese sind in Form von Polygonzügen gegeben, deren Knotenpunkte stets auf den Kanten des Dreiecksnetzes liegen.

Im ebenen Fall ist der kürzeste Weg stets eine Gerade und der Abstand somit euklidisch, während im gekrümmten Fall kürzeste Wege durch Geodäten beschrieben werden und der Abstand somit der Kurvenlänge der kürzesten Geodäte entspricht. Der zweidimensionale ebene Fall tritt in der Dissertation bspw. bei der Werkzeug-

positionsbahnplanung zur Grobbearbeitung auf und der gekrümmte Fall bei der Positions- sowie Kontaktbahnplanung für die Feinbearbeitung.

Die Darstellung für den dreidimensionalen Fall beschränkt sich auf einen nicht gekrümmten Definitionsbereich. Hierbei ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten stets eine Gerade und der Abstand euklidisch. Dieser Fall tritt in der Dissertation bspw. bei der Berechnung von Offset-Flächen und der Abbildung von Kontaktpunkten auf Werkzeugpositionen auf. *Offset-Flächen* sind die Niveau-Flächen von Distanzfeldern. Sie haben überall den gleichen Abstand zur gegebenen Bezugsfläche.

Distanzfelder sind in der Regel nicht überall stetig differenzierbar. An Stellen, an denen Differenzierbarkeit vorliegt, hat der Gradient die Länge 1, d.h. $\|\nabla\phi\| = 1$. Ausnahmen von der stetigen Differenzierbarkeit stehen mit den sogenannten Medialachsen von Distanzfeldern in Verbindung, auf die der nächste Abschnitt eingeht.

2.3.1 Medialachsen

Die Medialachse der Bezugsfläche $Z \subset \mathbb{R}^3$ lässt sich als die Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ aller Punkte definieren, die mehrere nächstgelegene Punkte mit gleichem Abstand auf Z besitzen, oder anders ausgedrückt zu mehr als einem Punkt auf Z einen konstanten kleinsten Abstand haben. Sei der kleinste Abstand zwischen einem Punkt $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ und Z gegeben durch

$$d_Z(\mathbf{q}) = d(\mathbf{q}, Z) = \min \{d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in Z\}, \quad (2.21)$$

mit $d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$. Dann enthält \mathcal{M} jeden Punkt $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, für den mindestens zwei verschiedene Punkte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in Z$ existieren, deren Abstand zu \mathbf{q} identisch zum kleinsten Abstand zu Z ist:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in Z, \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2 : d(\mathbf{q}, Z) = d(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1) = d(\mathbf{q}, \mathbf{p}_2)\}. \quad (2.22)$$

Für jeden Punkt \mathbf{q} auf der Medialachse existiert somit kein eindeutiger kürzester Weg zur Bezugsfläche. Anders herum existieren auch mehrere kürzeste Wege von unterschiedlichen Punkten auf der Bezugsfläche ausgehend hin zum Punkt \mathbf{q} . Dies kann weitreichende Konsequenzen für die Positionierung eines Werkzeugs relativ zur Oberfläche haben, die in [Abschnitt 3.2](#) thematisiert werden.

Aus einer geometrisch motivierten Perspektive lässt sich die Medialachse der Bezugsfläche Z alternativ definieren als Menge der Mittelpunkte aller maximalen Kugeln in dem durch Z begrenzten abgeschlossenen Gebiet G . Eine Kugel K ist dabei maximal, wenn sie vollständig in G liegt, d.h. $K \subset G$ gilt, und keine „größere“ Kugel $K' \supset K$ mit $K' \subset G$ existiert.

Diese Definition unterscheidet sich von der ersteren gemäß [Gleichung \(2.22\)](#) in der Verwendung einer impliziten Metrik und Voraussetzung eines abgeschlossenen und durch Z begrenzten Gebiets G . Je nachdem, ob G das Innere von Z bezeichnet oder dessen abgeschlossenes Komplement, lassen sich die innere und äußere Medialachse unterscheiden.

Eine Untersuchung der lokalen Struktur der Medialachse sowie des Zusammenhangs zwischen der Oberfläche eines geometrischen Objekts und seiner Medialachse erfolgt bspw. in [YL90; GK04]. Laut [GK04] lässt sich jeder Punkt $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$ durch einen Ausdruck der Form A_k^m kennzeichnen, wobei m die Anzahl an Kontaktpunkten der in \mathbf{q} zentrierten maximalen Kugel mit der Oberfläche Z bezeichnet und k die Ordnung des Kontakts, d.h. den Grad der lokalen Übereinstimmung der Kugeloberfläche und Z in den Kontaktpunkten. Ausgehend von dieser Kennzeichnung lässt sich die Medialachse eines dreidimensionalen geometrischen Objekts G in fünf Strukturen unterteilen:

1. Flächen mit Punkten des Typs A_1^2 (zweifacher Kontakt erster Ordnung),
2. Kurven mit Punkten des Typs A_1^3 (dreifacher Kontakt erster Ordnung), entlang derer die A_1^2 -Flächen zusammentreffen,
3. Kurven mit Punkten des Typs A_3 (einfacher Kontakt dritter Ordnung), welche die äußeren Ränder der A_1^2 -Flächen begrenzen,
4. Punkte des Typs A_1^4 (vierfacher Kontakt erster Ordnung), in denen vier A_1^3 -Kurven zusammentreffen,
5. Punkte des Typs A_1A_3 (einfacher Kontakt erster Ordnung und einfacher Kontakt dritter Ordnung), in denen eine A_3 - und eine A_1^3 -Kurve zusammentreffen.

Aufgrund ihrer nachfolgenden Relevanz sei insbesondere die dritte Struktur, Kurven mit Punkten des Typs A_3 , hervorgehoben. Jeder A_3 -Punkt \mathbf{q} resultiert aus dem Grenzübergang einer Folge von A_1^2 -Punkten, deren zwei unterschiedliche Kontaktpunkte $\mathbf{p}^-, \mathbf{p}^+ \in Z$ bei Annäherung an den Rand der Medialachse in einem einzigen Punkt kollabieren. In diesem Kontaktpunkt $\mathbf{p} = \mathbf{p}^- = \mathbf{p}^+$ besitzt die Krümmung von Z in Hauptkrümmungsrichtung eine Extremstelle, und der Vektor $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ steht normal auf Z . [Abbildung 2.4](#) verdeutlicht den Grenzübergang von A_1^2 nach A_3 an einem einfachen Beispiel. Eine wesentliche Erkenntnis ist, dass die Medialachse immer von A_3 -Randpunkten (für 2D-Objekte, siehe auch [Ley87]), bzw. A_3 -Randkurven (für 3D-Objekte, siehe auch [YL90]), begrenzt wird. Im 2D Fall ist der zu einem A_3 -Randpunkt korrespondierende Kontaktpunkt immer ein Krümmungsextremum und im 3D Fall die zu einer Kurve aus A_3 -Randpunkten korrespondierende Kurve aus Kontaktpunkten immer eine Kammlinie der Oberfläche des geometrischen Objekts. Diese Korrespondenz wird in [Unterabschnitt 3.3.2](#) ausgenutzt, um die zur Werkzeugbahnplanung relevante Teilmenge an Kammlinien auf Z , basierend auf der Medialachse, zu bestimmen.

Neben der Klassifikation nach Anzahl und Ordnung des Kontakts lässt sich jedem Punkt $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$ auch der Radius r der in \mathbf{q} zentrierten maximalen Kugel zuordnen. Unter Beschränkung der Medialachse auf Flächen mit Punkten des Typs A_1^2 lässt sich auf jeder A_1^2 -Fläche $F \subset \mathcal{M}$ eine Parametrierung mittels eines Tupels $(u, v) \in [0, 1]^2$ sowie eine (zweidimensionale) Radiusfunktion $r : F \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren. Deren Gradient $\nabla r = (\partial_u r, \partial_v r)^\top$ zeigt innerhalb des Tangentialraums von \mathcal{M} in die Richtung des steilsten Anstiegs des kleinsten Abstands zur Bezugsfläche Z . Mittels einer derartigen Reduktion des räumlichen Distanzfelds auf ein Oberflä-

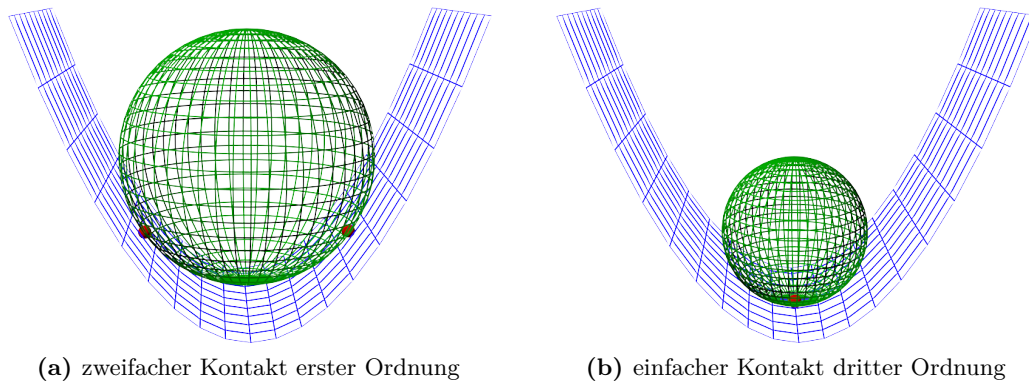


Abbildung 2.4: Übergang von A_1^2 (a) nach A_3 (b) am Rand der Medialachse. Dargestellt sind die Bezugsfläche in Form eines parabolischen Zylinders und die zum Kontakt korrespondierende maximale Kugel. Modifiziert nach [VSP08].

chendistanzfeld auf der Medialachse lässt sich – zumindest konzeptionell – jedem Punkt $\mathbf{q} \in F$ die Richtung des steilsten Distanzanstiegs zuweisen. Bezüglich des räumlichen Distanzfelds ist eine derartige Zuweisung nicht möglich, da der räumliche Distanzfeldgradient für Punkte $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$ nicht definiert ist.

Neben der inneren Struktur der Medialachse sind in dieser Dissertation Ansätze zur Berechnung derselben relevant. Einen Überblick über Arbeiten zur Generierung von Medialachsen liefern [TDS+16; ABE09; VSP08]. Als neuerliche Arbeit zur Berechnung der Medialachse eines 3D-Körpers, welche die Aktualität der Thematik verdeutlicht, sei [YLJ18] erwähnt. Darin wird, ausgehend von der Rasterisierung des Körpers mittels einer Voxelzerlegung, die Medialachse als Teilmenge des Voronoi-Diagramms der Voxelzerlegung approximiert. Die Berechnung von Medialachsen mittels Distanzfeldern, wie in dieser Dissertation relevant, thematisieren [XT11; CXT09; DYQ08]. Grob zusammengefasst wird in diesen Arbeiten die Medialachse approximiert als Menge von Punkten mit spezifischer Krümmung (einer glatten Approximation) des Distanzfelds. Demgegenüber steht die in dieser Dissertation verfolgte Idee der Eingrenzung der Medialachse mittels konvergierender Trajektorien. Vordergründig ist dabei nicht die Berechnung der Medialachse selbst sondern die Erkennung von Oberflächenpunkten, die darauf abgebildet werden.

Die Beschreibung eines geometrischen Objekts durch dessen Medialachse stellt eine Alternative zur etablierten Beschreibung des Objekts durch dessen begrenzende Oberfläche dar. Einen umfassenden Einblick in diese Repräsentationsform mitsamt möglicher Anwendungsgebiete liefert [VSP08].

2.3.2 Berechnung von Distanzfeldern

Im Folgenden sei angenommen, dass der Rand des vom Distanzfeld referenzierten geometrischen Objekts durch eine Simplex-Zerlegung repräsentiert wird, d.h. durch Polygonzüge im Zweidimensionalen oder Dreiecksnetze im Dreidimensionalen. Methoden zur Berechnung euklidischer Distanzfelder auf einem zwei- oder dreidimensionalen *nicht gekrümmten* Definitionsbereich M lassen sich gemäß [JBS06] in suchebasierte und ausbreitungsbasierte Verfahren unterteilen.

Suchebasierte Verfahren identifizieren zur Bestimmung des Distanzwerts an einem Punkt $\mathbf{p} \in M$ zunächst das dem Punkt nächstgelegene Simplex des Randes des geometrischen Objekts, d.h. die nächstgelegene Strecke (2D) oder das nächstgelegene Dreieck (3D), und berechnen den Abstand zu diesem. Einzelne Verfahren unterscheiden sich dabei hinsichtlich der Komplexität der Simplex-Suche und Anforderungen an die Simplex-Zerlegung.

Ausbreitungsbasierte Verfahren propagieren die Distanzwerte mit steigendem Abstand vom Objektrand durch numerisches Lösen des Randwertproblems (2.18) mit $v_n = 1$ auf einem Gitter mittels einer der in Abschnitt 2.2 referenzierten Methoden.

Methoden zur Berechnung geodätischer Distanzfelder auf einem zweidimensionalen *gekrümmten* Definitionsbereich M setzen im Rahmen dieser Arbeit die Diskretisierung von M mittels Dreiecksnetzen voraus. Gemäß [BMS+11] lassen sich graphbasierte und stützstellenbasierte Ansätze unterscheiden.

Graphbasierte Ansätze beruhen auf der Annahme eines diskreten Distanzfelds und ermitteln Distanzwerte an den Knoten des Dreiecksnetzes durch geometrische Konstruktion kürzester Wege zwischen dem Objektrand und den Zielknoten. Dies erfolgt bspw. durch lokales Entfalten benachbarter Dreiecke in eine Ebene und Propagierung von Distanzfeld-Intervallen über die Kanten des Dreiecksnetzes [BK07; SSK+05].

Stützstellenbasierte Ansätze beruhen auf der Annahme eines kontinuierlichen Distanzfelds, welches an den Knoten des Dreiecksnetzes abgetastet wird. Die Berechnung der Werte des Distanzfelds an den Knoten erfolgt durch numerisches Lösen des Randwertproblems (2.18) mit $v_n = 1$ auf dem Dreiecksnetz. Der einzige Unterschied zu den oben genannten ausbreitungsbasierten Verfahren ist also die aufgrund der Krümmung erforderliche spezifische Diskretisierung von M sowie die damit verbundene Einschränkung des Distanzfeldgradienten auf M [Set99b]. Konkrete Methoden werden in Abschnitt 5.1 referenziert.

Sobald ein Distanzfeld auf der Oberfläche M verfügbar ist, lassen sich kürzeste Geodäten mittels Gradientenabstieg ermitteln. Alternativ existieren Ansätze zur Bestimmung von Geodäten auf Dreiecksnetzen ohne Distanzfeld. Diese nutzen die Eigenschaft aus, dass Geodäten Kurven mit verschwindender geodätischer Krümmung sind [CML+16; PS06]. Die Länge der kürzesten Geodäte zwischen zwei Punkten entspricht wiederum dem Abstand der beiden Punkte in M .

Des Weiteren existieren Ansätze zur Berechnung geodätischer Distanzfelder auf einem implizit repräsentierten Definitionsbereich M [WL16], wodurch die Notwendigkeit zur Diskretisierung von M durch ein Dreiecksnetz entfällt.

Im Rahmen der Dissertation erfolgt die Berechnung euklidischer Distanzfelder in der Ebene oder im Raum mittels eines suchebasierten Verfahrens durch effiziente Suche einer Kandidatenmenge aus Dreiecken (im Raum) oder Kanten (in der Ebene), die dem Anfragepunkt $\mathbf{p} \in M$ am nächsten liegen, und Berechnung der kürzesten Distanz zur Kandidatenmenge. Die Motivation für die Wahl dieses Verfahrens liegt einerseits in dessen direkter Parallelisierbarkeit und andererseits in dessen unmittelbarer Verwendbarkeit zur Erzeugung von Gitter-Octrees gemäß Unterabschnitt 2.1.2, indem Berechnungen von Distanzwerten auf relevante Regionen des Definitionsbereichs beschränkt werden können, bspw. zur Verfeinerung von Octree-Knoten nahe der Offset-Fläche. Zur Berechnung geodätischer Distanzfelder auf gekrümmten Oberflächen wurde sowohl ein graphbasiertes Verfahren gemäß [BK07] als auch ein stützstellenbasiertes Verfahren gemäß [KS98] erprobt. Das graphbasierte Verfahren erwies sich dabei als robuster gegenüber einer ungünstigen Netzstruktur zur Diskretisierung der Oberfläche, erfordert dafür aber mehr Rechenzeit und Speicher im Vergleich zum stützstellenbasierten Verfahren. Sofern sich eine homogene Netzstruktur gewährleisten lässt, wird das stützstellenbasierte Verfahren bevorzugt.

Strukturmerkmale von Oberflächen

Inhalt

3.1	Normalkurven und Offset-Punkte	39
3.1.1	Explizite Konturausbreitung	41
3.1.2	Implizite Konturausbreitung	49
3.2	Einflussbereiche der Medialachse	55
3.2.1	Bedeutung	55
3.2.2	Berechnung	56
3.2.3	Visualisierung	59
3.3	Kammlinien	60
3.3.1	Bedeutung	61
3.3.2	Projektion der Medialachsen-Randkurve	61
3.3.3	Glättung von Kammlinien mittels aktiver Konturen	62

Das Kapitel befasst sich allgemein mit der Analyse der Struktur von Oberflächen. Gegenstand der Analyse sind Strukturmerkmale, die der Parametrierung der Bahngenerierung und damit deren Adaptierung an spezifische Eigenschaften der Bezugsoberfläche dienen. Konzeptuell bildet die Strukturanalyse somit die Schnittstelle zwischen der generischen Bahnplanungsmethodik und dem konkreten Zielobjekt. Es werden zwei Strukturmerkmale betrachtet, die für die Bahnplanung in der Fertigung relevant sind. Dabei handelt es sich um kritische Oberflächenregionen im Einflussbereich der Medialachse und Kammlinien. Deren Berechnung beruht insbesondere auf Normalkurven, zu deren näherungsweise Berechnung ein explizites und ein implizites Verfahren angegeben wird.

3.1 Normalkurven und Offset-Punkte

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion einer Abbildung, welche jedem Punkt der Bezugsoberfläche seinen nächstgelegenen Punkt auf einer Offset-Fläche zuordnet. Eine solche Abbildung dient zweierlei Zwecken:

1. Zuweisung einer ausgezeichneten Offset-Werkzeugposition an jeden beliebigen Kontaktpunkt auf der Bezugsoberfläche (siehe [Abschnitt 5.3](#))
2. Bestimmung des Medialachsen-Einflussbereichs als Hilfsmittel zur manuellen oder automatischen Bahnauslegung (siehe [Abschnitt 3.2](#))

Da eine solche Abbildung nur von der Bezugsoberfläche abhängt, wird deren Bildbereich, d.h. die zu den Kontaktpunkten korrespondierenden Offset-Punkte bzw. die zugehörigen Offset-Vektoren, als Strukturmerkmal der Bezugsoberfläche aufgefasst.

Sei $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus Z$ ein beliebiger Punkt, so gilt für den (nicht notwendigerweise eindeutigen) nächstgelegenen Punkt $\mathbf{p} \in Z$ auf der Bezugsoberfläche Z , dass die Verbindungsstrecke $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ senkrecht auf der Tangentialebene von Z in \mathbf{p} steht. Innerhalb eines ausreichend schmalen Bandes um Z herum lässt sich diese Aussage umkehren: Sei $\mathbf{p} \in Z$ ein beliebiger Punkt, so entspricht die Menge aller Punkte $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \setminus Z$, deren nächstgelegener Punkt auf Z gerade \mathbf{p} ist, demjenigen Streckenabschnitt auf der Normalen von Z in \mathbf{p} , der durch \mathbf{p} und dem Schnittpunkt mit einer anderen Normalen (sofern existent) begrenzt wird, der nicht näher als \mathbf{p} an der Fläche liegt. Diese Bedingung ist für den ersten Schnittpunkt der Normale mit der Medialachse von Z erfüllt.

Die Ortskurve des dem Punkt $\mathbf{p} \in Z$ nächstgelegenen Punkts $\mathbf{o} \in O$ auf allen Offset-Flächen O der Bezugsoberfläche sei im Folgenden auch als *Normalkurve* bezeichnet. Ein beliebiger Punkt \mathbf{q} auf dieser Kurve ist also der dem Punkt \mathbf{p} nächstgelegene Punkt auf der Offset-Fläche mit konstantem Abstand $d_Z(\mathbf{q})$ zu Z . Die Normalkurve besteht aus zwei Abschnitten: innerhalb eines ausreichend schmalen Bandes entspricht sie dem Normalvektor im Punkt \mathbf{p} , außerhalb des Bandes verläuft sie auf der Medialachse. Der Übergang erfolgt im ersten Schnittpunkt der Normale mit der Normale in einem anderen Punkt \mathbf{p}' , sofern existent.

Die grundlegende Idee ist nun, den zu $\mathbf{p} \in Z$ korrespondierenden Punkt $\mathbf{o} \in O$ als Schnittpunkt der Normalkurve mit O zu bestimmen, wobei die Normalkurve numerisch durch die Trajektorie von \mathbf{p} bei Ausbreitung von Z mit konstanter Geschwindigkeit in Normalenrichtung approximiert wird. Dieses Vorgehen lässt sich auf unterschiedliche Weise motivieren.

Einerseits kann gezeigt werden, dass O als Lösung eines ebensolchen Ausbreitungsproblems aus Z hervorgeht, sodass besagte Trajektorie tatsächlich der Ortskurve eines Punktes über der Zeit (bzw. dem Abstand) entspricht und keine Variation orthogonal dazu erfolgt, siehe auch [Unterabschnitt 3.1.1](#). Die Minimalität des Weges resultiert dabei aus der besonderen Ausbreitungsrichtung.

Eine alternative Begründung geht von der impliziten Repräsentation der Offset-Fläche als Niveaumenge des Distanzfelds ϕ gemäß $O = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) - r = 0\}$ aus, siehe auch [Unterabschnitt 3.1.2](#). Der Abstand eines Punktes \mathbf{p} zu O ist dementsprechend $d_O(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, O) = |\phi(\mathbf{p}) - r|$. Die Minimierung dieses Abstands erfolgt durch Gradientenabstieg. Der Gradient von d_O ist gegeben durch

$$\mathbf{g} = \nabla (|\phi - r|) = \nabla \phi \frac{\phi - r}{|\phi - r|} = 0 \quad \text{für } |\phi - r| \neq 0. \quad (3.1)$$

Dort wo der Gradient definiert ist, steht er normal auf den Niveaumengen von $d_O(\mathbf{p})$. Der Ausdruck ergibt sich durch Anwendung der Kettenregel auf die Betragsfunktion und Ableitung derselben gemäß der Regel $\frac{d}{dx}|u| = \frac{u}{|u|}$. Der Gewichtungsterm $\frac{\phi-r}{|\phi-r|}$ führt dazu, dass \mathbf{g} in Richtung aufsteigenden Abstands zu O zeigt. Für $\phi = r$ ist \mathbf{g} undefiniert und wird explizit auf 0 gesetzt, wodurch dieser allerdings unstetig wird.

Zur Vermeidung der Unstetigkeit kann anstatt des absoluten auch der quadratische Abstand minimiert werden, womit folgender Gradient resultiert:

$$\mathbf{g}' = \nabla((\phi - r)^2) = 2(\phi - r)\nabla\phi = 0. \quad (3.2)$$

Die Abstiegsrichtung ist somit identisch bei verschiedener Abstiegs geschwindigkeit.

Die Verwendung von \mathbf{g} oder \mathbf{g}' ist dahingehend problematisch, dass $\nabla\phi$ Definitionslücken besitzen kann. Auf diesen Aspekt geht [Unterabschnitt 3.1.2](#) ein.

3.1.1 Explizite Konturausbreitung

Der folgende Abschnitt soll die Probleme bei Ausbreitung einer expliziten Kontur verdeutlichen und dadurch das in der Dissertation verwendete implizite Vorgehen motivieren. Sei zunächst eine Startkontur als Kurve oder als Fläche in Parameterdarstellung gegeben. Die explizite Konturausbreitung besteht in der Verschiebung jedes Konturpunktes in Normalenrichtung. Die Kontur zum Zeitpunkt $t \geq 0$ wird im Kurvenfall durch $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, t) \in \mathbb{R}^2$ und im Flächenfall durch $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, s, t) \in \mathbb{R}^3$ repräsentiert, wobei r bzw. (r, s) einem geeigneten Parameterbereich P entstammen. Die Startkontur entspricht $t = 0$. Die beschriebene Gegebenheit lässt sich damit durch die einfache Bewegungsgleichung

$$\partial_t \mathbf{x} - v \mathbf{n}(\mathbf{x} \upharpoonright_{t=0}) = 0 \quad \text{mit } \mathbf{x} \upharpoonright_{t=0} \text{ vorgegeben} \quad (3.3)$$

ausdrücken, wobei v die konstante Geschwindigkeit in Normalenrichtung und der Ausdruck $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ die Normale der durch den Punkt \mathbf{x} verlaufenden Kontur im selbigen Punkt bezeichnet. Die Auffassung der Normale \mathbf{n} als ortsabhängiges Vektorfeld dient an dieser Stelle der notationellen Vereinheitlichung mit dem nachfolgenden Abschnitt – an dieser Stelle ist der Term vielmehr als Abbildung jedes Punktes der initialen Kontur auf seine Normale zu verstehen, für Punkte fernab der Kontur ist diese undefiniert. Da sich damit bei Ausbreitung in Richtung der Normale selbige zunächst nicht ändert, ist in [Gleichung \(3.3\)](#) die aktuelle Normale auf die Normale $\mathbf{n}(\mathbf{x} \upharpoonright_{t=0})$ auf der Startkontur festgesetzt.

Die Normale ist im Falle der Kurven $\mathbf{x}(r, t) = (x(r, t), y(r, t))$ eine Funktion der ersten Ableitung von $\mathbf{x}(r, t)$ nach r :

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}(r, t)) = (\partial_r y, -\partial_r x) \quad (3.4)$$

und im Falle der Flächen $\mathbf{x}(r, s, t) = (x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t))$ eine Funktion der partiellen Ableitungen von $\mathbf{x}(r, s, t)$ nach r und s :

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}(r, s, t)) = \partial_r \mathbf{x}(r, s, t) \times \partial_s \mathbf{x}(r, s, t). \quad (3.5)$$

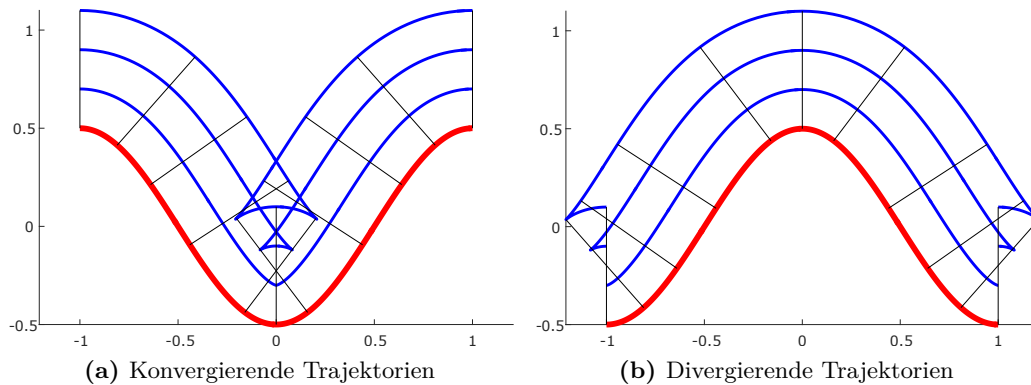


Abbildung 3.1: Ausbreitung des Graphen der Funktion $y = -0.5 \cos(\pi x)$ mit $v = 1$ mitsamt 11 beispielhafter Trajektorien.

Die Berechnung erfolgt durch Diskretisierung des Parameterraums und Approximation der Ableitungen mittels finiter Differenzen. Ist t klein genug, dann enthält im Kurvenfall (analog im Flächenfall) die in einem Punkt $\mathbf{q}_i = \mathbf{x}_i \upharpoonright_{t=0} = \mathbf{x}(r_i, t) \upharpoonright_{t=0}$ startende Trajektorie alle Punkte \mathbf{p} , deren nächstgelegener Punkt auf der Startkontur genau \mathbf{q} ist. Abhängig von der Krümmung der Oberfläche können nun zwei Fälle auftreten, siehe [Abbildung 3.1](#): die Trajektorien konvergieren ([Abbildung 3.1a](#) Mitte) oder sie konvergieren nicht ([Abbildung 3.1b](#) Mitte). Im ersten Fall gibt es einen kleinsten Zeitpunkt $t^* > 0$, nach dem der Startpunkt der Kurve nicht mehr der nächstgelegene Punkt auf Z ist, d.h. für $t > t^*$ gilt $d(\mathbf{x}_i, Z) < d(\mathbf{x}_i, \mathbf{q}_i)$. Für $t = t^*$ existieren mindestens zwei nächstgelegene Punkte $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \in Z$ mit identischem Abstand. In diesem Punkt schneiden sich also die in \mathbf{q}_i und \mathbf{q}_j startenden Trajektorien, wobei beide Kurven den Schnittpunkt zum selben Zeitpunkt t^* erreichen [[Set85](#)]. Die Startpunkte \mathbf{q}_i und \mathbf{q}_j der beiden Kurven würden somit in einem Abstand $d^* = vt^*$ von der Startkontur zu einem einzigen Punkt verschmelzen. Da beide Wege von den Startpunkten bis zu diesem Verschmelzungspunkt einerseits jeweils minimale und andererseits identische Länge besitzen, ist auch der Abstand zwischen beiden Startpunkten und dem Verschmelzungspunkt identisch, womit dieser wiederum auf der Medialachse liegt.

Für [Abschnitt 3.2](#) wird relevant sein, dass diejenigen Startpunkte, für die der Abstand d^* zum Schnittpunkt kleiner als der Abstand zum Werkzeug ist, im Medialachsen-Einflussbereich liegen.

Prinzipiell ließe sich argumentieren, dass die blauen Konturen in [Abbildung 3.1](#) auch als Offset-Konturen sowie als legitime Lösung einer Konturausbreitung in Normalenrichtung bezeichnet werden können. Für einen beliebigen Punkt auf der Offset-Kontur ist in diesem Fall jedoch nur der Abstand zum korrespondierenden Startpunkt konstant und nicht der kleinste Abstand zur gesamten Startkontur. Die Mehrdeutigkeit der Problemstellung resultiert dabei aus unterschiedlichen Möglichkeiten des Umgangs mit Normalenschnittpunkten. Im vorliegenden Fall verliert die

Kontur durch Fortbewegung jedes Punktes in ursprünglicher Normalenrichtung ihre Eigenschaft der Mannigfaltigkeit, da nach erstmaliger Kollision von Trajektorien die Ausbreitung ungeachtet der Punktverschmelzung fortgeführt wird.

Die Eigenschaft, dass einmal verschmolzene Konturpunkte auch verschmolzen bleiben, entspricht der natürlichen Vorstellung einer sich ausbreitenden Kontur, insbesondere wenn diese etwa physikalisch als Grenzfläche zwischen Regionen mit unterschiedlichen Eigenschaften interpretiert wird.¹ Durch Verschmelzen mehrerer Punkte im gemeinsamen Trajektorien Schnittpunkt verschmelzen auch die Ausbreitungsrichtungen, d.h. \mathbf{n} muss zu einer Funktion der Position \mathbf{x} des aktuellen Zeitpunkts anstelle der Startposition $\mathbf{x} \upharpoonright_{t=0}$ werden:

$$\partial_t \mathbf{x} - v \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{mit } \mathbf{x} \upharpoonright_{t=0} \text{ vorgegeben.} \quad (3.6)$$

Andererseits entfällt durch die Verschmelzung ein Teil des Definitionsbereichs der Kontur, wodurch ein Knick, d.h. eine abrupte Änderung des Konturverlaufs, entsteht, der zum Verlust der Differenzierbarkeit führt. An den Schnittpunkten sind Ableitungen, und damit auch Normalen, nicht mehr eindeutig definierbar. Damit ist die Differentialgleichung nicht (eindeutig) erfüllbar.

Das Problem der Normalen im und hinter einem Trajektorien Schnittpunkt lässt sich weiter verdeutlichen. Angenommen die Trajektorien zweier Kurvenpunkte $\mathbf{q}_1 = \mathbf{x}(r_1, 0)$, $\mathbf{q}_2 = \mathbf{x}(r_2, 0)$ der Startkontur kollidieren im Schnittpunkt $\mathbf{p} = \mathbf{x}(r_1, t^*) = \mathbf{x}(r_2, t^*)$. Dann ist die Normale $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ nicht eindeutig definierbar. Die Ableitung $\partial_r \mathbf{x}$ an jeder Stelle (r, t^*) mit $r_1 \leq r \leq r_2$ könnte gleichermaßen zur Definition der Ableitung dienen, sowie Konvexkombinationen daraus, da das Parameterintervall $[r_1, r_2]$ auf einen einzigen Punkt abgebildet wird.

Fraglich ist nun, wie sich eine sinnvolle Ausbreitungsrichtung festlegen lässt. Essentiell ist dabei insbesondere die Übereinstimmung der propagierten Konturen mit den Niveaumengen der Distanzfunktion $d_Z(\mathbf{p})$, um eine korrekte Abbildung von Punkten der Bezugsfläche auf deren Offset-Fläche zu gewährleisten. Ein weiteres, damit verbundenes Problem liegt in der entsprechenden Beschneidung des Definitionsbereichs in der Konturrepräsentation, insbesondere wenn sich die Ausbreitungsrichtung aus der Konturrepräsentation ableitet, wie in Gleichung (3.4) oder (3.5), anstatt aus dem umgebenden Raum, wie in Gleichung (3.8) oder (3.15).

Zur Lösung der Problematik werden im Folgenden drei Ansätze betrachtet:

1. Schwache Lösung einer impliziten Formulierung,
2. Generalisierter Gradient,
3. Glättung.

Schwache Lösung einer impliziten Formulierung

Diese Vorgehensweise thematisiert die Verwendung eines schwachen Lösungsbegriffs, mittels dem die Lösung eine gestellte Advektionsgleichung nur „fast überall“ er-

¹In [Set99b; Eva15] wird ein derartiges Argument auch *Entropiebedingung* genannt, mit der Vorstellung, dass mit fortschreitender Zeit keine Information „aus dem Nichts“ entstehen soll.

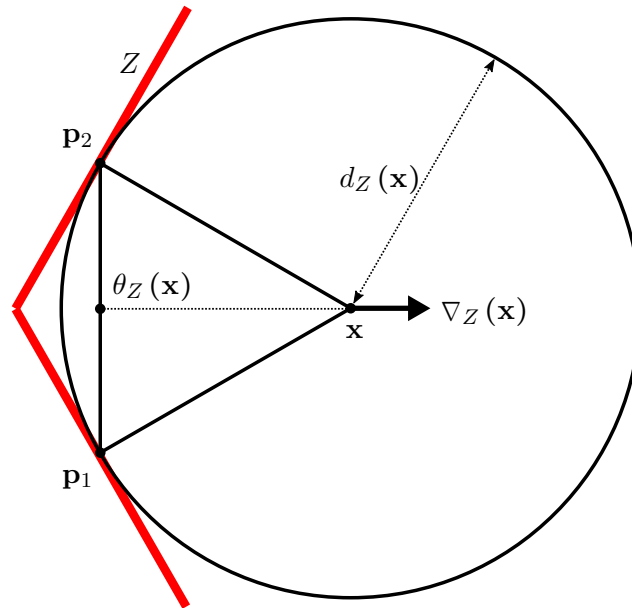


Abbildung 3.2: Generalisierter Gradient $\nabla_Z(\mathbf{x})$ einer Kontur Z am zweidimensionalen Beispiel mit $\Gamma_Z(\mathbf{x}) = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$, siehe auch [CCL09].

füllen muss, d.h. nicht zwangsläufig in jedem Punkt des Definitionsbereichs, siehe z.B. [EGK17; Eva15]. Die numerische Bestimmung einer solchen Lösung erfordert zunächst die implizite Formulierung der Konturausbreitung. Dieses Vorgehen wird in [Unterabschnitt 3.1.2](#) verfolgt.

Generalisierter Gradient

Diese Vorgehensweise verwendet einen generalisierten Gradienten $\nabla_Z(\mathbf{x})$ als Ausbreitungsrichtung, welcher nicht auf Konturnormalen oder partiellen Ableitungen einer Distanzfunktion d_Z beruht. Gemäß [CCL09] lässt sich ein solcher Gradient als Funktion der Menge $\Gamma_Z(\mathbf{x})$ aller dem Punkt \mathbf{x} nächstgelegenen Punkte in Z definieren:

$$\nabla_Z(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \theta_Z(\mathbf{x})}{d_Z(\mathbf{x})}, \quad (3.7)$$

wobei $\theta_Z(\mathbf{x})$ den Mittelpunkt der kleinsten Kugel bezeichnet, welche die Menge $\Gamma_Z(\mathbf{x})$ der nächstgelegenen Punkte einschließt, und $d_Z(\mathbf{x})$ den kleinsten Abstand zwischen \mathbf{x} und Z , siehe [Abbildung 3.2](#). Der generalisierte Gradient besitzt keine Definitionslücken, da die Definition keine partiellen Ableitungen von d_Z bzw. keine Normalen der Niveaumengen beinhaltet. Zudem lassen sich weitere relevante Eigenschaften zeigen, wie die Übereinstimmung des generalisierten und des gewöhnlichen Gradienten im differenzierbaren Bereich von d_Z , sowie die Eignung zur Bestimmung

von Integralkurven des Gradientenfelds [CCL09]. Die Verwendung des generalisierten Gradienten als Ausbreitungsrichtung gemäß

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \nabla_Z(\mathbf{x}) \quad (3.8)$$

birgt im vorliegenden Kontext jedoch numerische Probleme hinsichtlich der Bestimmung des Punktes $\theta_Z(\mathbf{x})$. Dieser Ansatz wurde deshalb zugunsten einer impliziten Formulierung der Problemstellung nicht weiter verfolgt.

Glättung

Diese Vorgehensweise vermeidet Schnittpunkte, und damit auch Definitionslücken, der Normalen durch Glättung des Konturverlaufs. Dies erfolgt durch Erweiterung des Advektionsterms in Gleichung (3.6) um einen künstlichen Diffusionsterm [Set99b]. Aus der konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit v wird dadurch eine krümmungsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit $v - \varepsilon\kappa$ gemäß

$$\partial_t \mathbf{x} - (v - \varepsilon\kappa(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.9)$$

$$\partial_t \mathbf{x} - v\mathbf{n}(\mathbf{x}) = -\varepsilon\kappa(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{mit } \mathbf{x} \upharpoonright_{t=0} \text{ vorgegeben,} \quad (3.10)$$

wobei $\kappa(\mathbf{x})$ die mittlere Krümmung der durch den Punkt \mathbf{x} verlaufenden Kontur im selbigen Punkt bezeichnet und ε die Gewichtung der krümmungsabhängigen Geschwindigkeitskomponente. Die Bedeutung von $\kappa(\mathbf{x})$ entspricht an dieser Stelle derjenigen in Gleichung (2.19), jedoch erfolgt die Definition nicht als Funktion des Skalarfelds ϕ sondern der ersten und zweiten Ableitungen von $\mathbf{x}(r, t)$ bzw. $\mathbf{x}(r, s, t)$.

Es kann gezeigt werden, dass für $\varepsilon > 0$ die Lösung stets differenzierbar bleibt, und somit die Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} stets eindeutig definiert ist. Dies bedeutet insbesondere, dass sich die Trajektorien der Konturpunkte niemals schneiden können. Für $\varepsilon = 0$ resultiert wiederum die ursprüngliche Ausbreitungsgleichung mit undefiniertem Ergebnis bei Erreichen der Medialachse.

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ schwindet auch der Einfluss der künstlichen Glättung auf den Verlauf der Trajektorien. Auf diese Weise kann die Lösung von Gleichung (3.6) mittels Gleichung (3.10) durch Minimierung des Einflusses künstlicher Glättung angenähert werden. Dieses Vorgehen wird auch Methode der verschwindenden Viskosität (vanishing viscosity) bezeichnet. Der Grenzübergang führt zur sogenannten *Viskositätslösung* [CL83; CEL84], einer Form des schwachen Lösungsbegriffs für hyperbolische Differentialgleichungen. Im Folgenden wird die Nutzbarkeit dieses Vorgehens untersucht.

Da sich im vorliegenden Kontext die Lösung nicht analytisch auflösen lässt, muss sie numerisch approximiert werden. Dabei muss $\varepsilon > 0$ so klein wie möglich gewählt werden, um eine möglichst geringe Verfälschung der Lösung durch die zur Bewahrung der Differenzierbarkeit eingeführte Diffusion zu gewährleisten, jedoch so groß wie nötig zur Gewährleistung der Stabilität der Berechnung. Um den Einfluss der

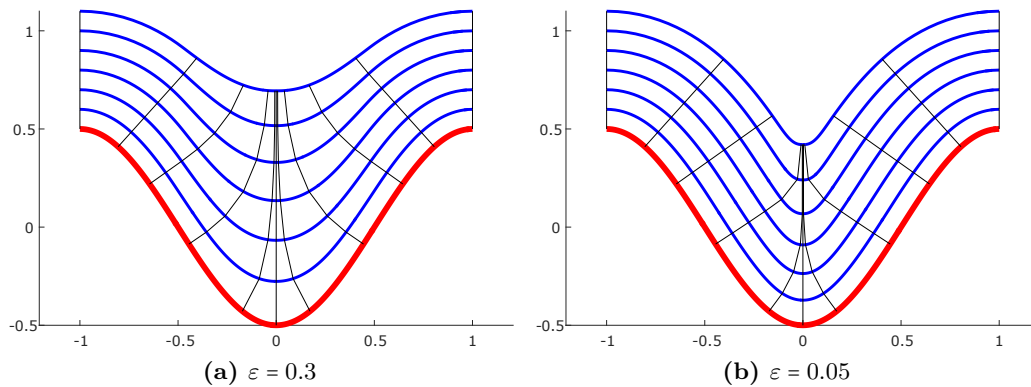


Abbildung 3.3: Ausbreitung des Graphen der Funktion $y = -0.5 \cos(\pi x)$ mit $v = 1 - \varepsilon \kappa$ mitsamt 11 beispielhafter Trajektorien.

Glättung weitergehend zu verringern, kann diese nur auf konvergierende Trajektorien eingeschränkt werden, woraus folgende Erweiterung von Gleichung (3.10) resultiert:

$$\partial_t \mathbf{x} - v \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -\varepsilon g(\kappa(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{mit } g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0 \\ x & \text{für } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Abbildung 3.3 zeigt das Ergebnis der Konturausbreitung durch Lösen des Anfangswertproblems (3.11) für eine diskrete Abtastung der Startkontur. Erwartungsgemäß ist die Verschärfung des Knicks bei sinkendem ε erkennbar. Für $\varepsilon > 0$ nähern sich die Trajektorien einander an ohne sich zu berühren. Würden sie sich berühren, wäre die resultierende Lösung nicht mehr differenzierbar, was im Widerspruch steht zur Tatsache, dass die Lösung für $\varepsilon > 0$ stets differenzierbar ist.

Problematisch bei dieser Problemstellung ist jedoch die numerische Stabilität. \mathbf{n} und κ sind Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen der Kontur. Da diese mittels finiter Differenzen aus den Konturstützstellen approximiert werden, führt die Tatsache, dass der Punktabstand bei Annäherung an den Knick gegen 0 strebt, zur Verstärkung kleinster und unvermeidbarer Variationen in den Stützstellen. Generell erweist sich die stützstellenbasierte Approximation der Normalen und Krümmung als sehr sensitiv gegenüber der Punktedichte, der Zeitschrittweite und dem Glättungsparameter ε , wie folgende Evaluation zeigt.

Abbildung 3.4 visualisiert beispielhaft den Einfluss von Δt und ε auf die Stabilität der Ausbreitung des Funktionsgraphen aus Abbildung 3.3 mittels Gleichung (3.10). Ermittelt wurde die Distanz, ab der die Krümmung einen vorgegebenen Schwellwert überschreitet, was wiederum im weiteren Verlauf zur Verstärkung kleinster Variationen führt. Die Approximation der Startkontur erfolgte über 201 Stützstellen, äquidistant verteilt im Parameterintervall und auf der Kurvenlänge. Zu erkennen ist die wachsende Stabilität – im Sinne der Zeitspanne bis zur Entartung der Lösung – bei zunehmendem ε und abnehmendem Δt . Dies steht im Konflikt mit dem Bestreben, den künstlichen Glättungseffekt zu minimieren (Konsistenz) und die Schrittweite zu

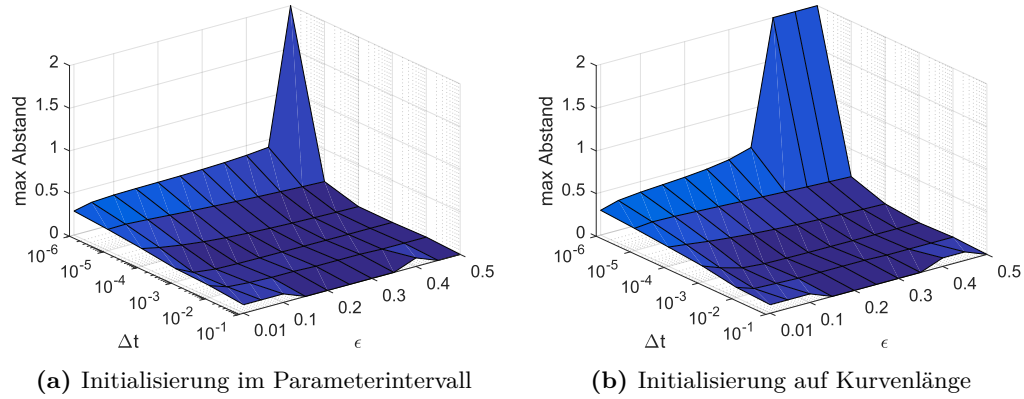


Abbildung 3.4: Stabilität der Konturausbreitung ohne Beschränkung der Glättung

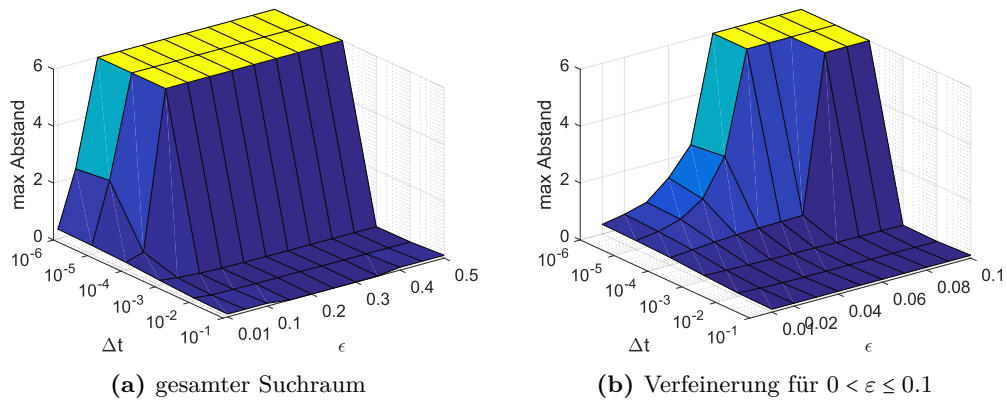


Abbildung 3.5: Stabilität der Konturausbreitung mit Beschränkung der Glättung

maximieren (Berechnungsdauer). Die Initialisierung auf der Kurvenlänge führt zur geringfügigen Erhöhung des erreichbaren Abstands aufgrund eines homogenen Stützstellenabstandes. Einen deutlich signifikanteren Einfluss haben die Punkteanzahl bzw. -dichte und Glättungsbeschränkung.

Abbildung 3.5 zeigt dieselbe Untersuchung unter Verwendung von Gleichung (3.11), d.h. Beschränkung der krümmungsabhängigen Glättung auf konkave Regionen, bei Initialisierung der Startpunkte auf Kurvenlänge. Zu erkennen ist eine deutliche Steigerung des erreichbaren Abstandes. Dieser wurde in der Abbildung auf den Wert 6 beschnitten, da sich danach die Punkte nur noch als Gerade ausbreiten.

Abbildung 3.6 zeigt dieselbe Untersuchung für den Zeitschritt $\Delta t = 10^{-5}$ und unterschiedliche Stützstellenanzahlen bzw. -abstände. Wie Abbildung 3.6a zeigt, existiert ein „ideales Stützstellenabstandsintervall“, welches zur spätestmöglichen Entartung der Lösung führt. Demgegenüber zeigt Abbildung 3.6b, dass unter Glättungsbeschränkung eine Verringerung des Startpunktabstands nicht zur schnelleren

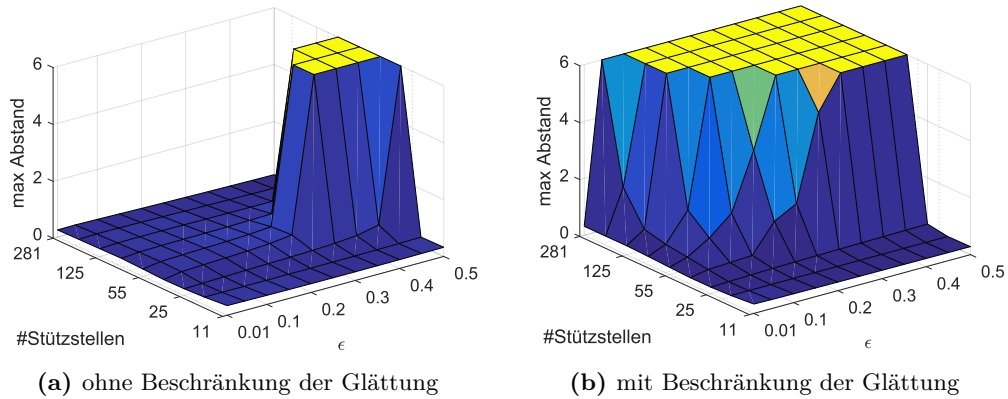


Abbildung 3.6: Stabilität der Konturausbreitung mit unterschiedlicher Stützstellenanzahl ohne und mit Beschränkung der Glättung

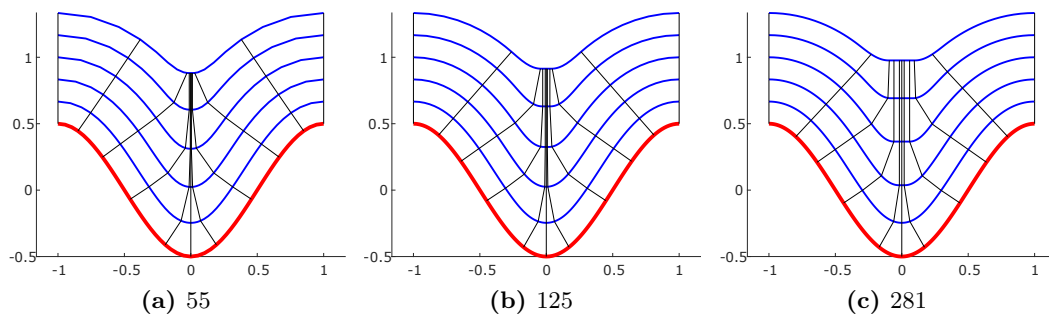


Abbildung 3.7: Konturausbreitung mit Beschränkung der Glättung und unterschiedlicher Stützstellenanzahl

Entartung der Lösung führt. Dass in diesem Fall dennoch ein umso kleinerer Punktabstand nicht zu bevorzugen ist, zeigt [Abbildung 3.7](#). Hierin ist die Verbreiterung des Knicks bei sinkendem Stützstellenabstand zu erkennen.

Bewertung

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich die explizite Propagierung der Kontur unter streng kontrollierten Bedingungen zwar als prinzipiell möglich erweist, jedoch einige Aspekte gegen ein derartiges Vorgehen sprechen:

- Es müssen alle Stützstellen propagiert werden (Berechnung der Ableitungen).
- Es können nur Stützstellen propagiert werden (keine freie Startpunktwahl).
- Es gibt eine hohe Sensitivität gegenüber der Stützstellenverteilung und -dichte.
- Geringe Glättung erfordert geringe Schrittweite und hohe Berechnungsdauer.

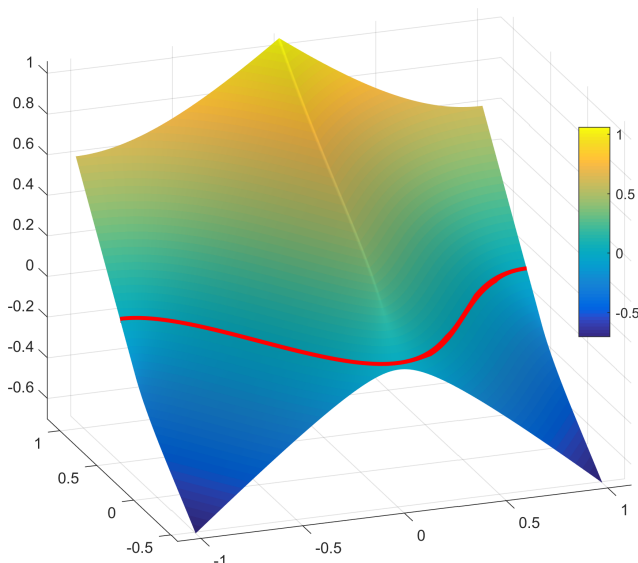


Abbildung 3.8: Graph der Funktion $y = -0.5 \cos(\pi x)$ mit $x \in [-1, 1]$ (rote Kurve) mitsamt Distanzfeld als farbkodierte Höhenkarte.

Die aufgezeigten Nachteile lassen sich auf eine problematische Bestimmung der Ableitungen anhand von Konturstützstellen zurückführen.

Aufgrund der Nachteile erfolgt in der Dissertation, wie im folgenden [Unterabschnitt 3.1.2](#) gezeigt, die Approximation von $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ und $\kappa(\mathbf{x})$ anhand einer impliziten Modellierung der Konturausbreitung als Niveaumenge anstelle der expliziten Modellierung mittels Stützstellen. Dies hat insbesondere den Vorteil einer vom Stützstellenabstand unabhängigen numerischen Stabilität.

3.1.2 Implizite Konturausbreitung

Die in [Unterabschnitt 3.1.1](#) benannten Nachteile lassen sich dadurch mindern, dass die Startkontur implizit als Niveaumenge eines Distanzfelds ϕ repräsentiert wird. Dies ermöglicht den Einsatz deutlich stabilerer numerischer Ansätze als im expliziten Fall.

Sei nun die Startkontur als Nullstellenmenge eines vorzeichenbehafteten Distanzfelds ϕ mit geeignetem Definitionsbereich Ω repräsentiert. [Abbildung 3.8](#) zeigt einen Ausschnitt des zweidimensionalen Distanzfelds ϕ der Funktion $y = -0.5 \cos(\pi x)$, $x \in [-1, 1]$, aus [Abbildung 3.1](#) als farbkodierte Höhenkarte. Die Berechnung des Distanzfelds erfolgt dabei zunächst durch Diskretisierung und Approximation des Funktionsgraphen mittels einer stückweise linearen Kurve, sowie Diskretisierung des Definitionsbereichs von ϕ mittels eines regulären Gitters. Der Distanzwert $\phi(\mathbf{p})$ an einem beliebigen Punkt $\mathbf{p} = (x, y)$ ergibt sich dann aus der Suche des Kurvensegments L , welches \mathbf{p} am nächsten liegt, und Berechnung des Abstands zwischen \mathbf{p} und L (Abstand zwischen Punkt und Strecke). In der Abbildung zu erkennen ist der

„Knick“ der Distanzwerte entlang eines Strahls in der x/y -Ebene, der in Richtung der positiven y -Achse verläuft und im Punkt $(0, 2/\pi^2)$ beginnt, dem Mittelpunkt des kleinstmöglichen Krümmungskreises des Funktionsgraphen. Der kleinstmögliche Krümmungsradius begrenzt den Mindestabstand d^* des Knicks von der Kurve, und damit auch den frühestmöglichen Zeitpunkt t^* einer Trajektorienkollision gemäß

$$t^* = \frac{d^*}{v} > \min_{x \in [0,1]} x \frac{1}{v\kappa(x)} = \min_{x \in [0,1]} \frac{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}{vy''(x)}. \quad (3.12)$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Krümmung einer als Funktionsgraph repräsentierten Kurve.

Mit gegebenem Distanzfeld entspricht die mit konstanter Geschwindigkeit v um den Abstand d in Normalenrichtung ausgebreitete Kontur der t -Niveaumenge von ϕ mit $t = d/v$. Im vorliegenden Kontext ist jedoch nicht die Kontur selbst relevant, sondern der Schnitt der Ortskurve eines einzelnen Konturpunkts mit einer vorgegebenen Offset-Kontur – d.h. gewissermaßen eine Zuordnung zwischen Punkten in Konturen in unterschiedlichen Abständen. Bei impliziter Modellierung lassen sich korrespondierende Punkte nicht mehr trivialerweise über dieselbe Parametrierung adressieren wie in [Unterabschnitt 3.1.1](#). Stattdessen lässt sich der Weg jedes beliebigen Punktes $\mathbf{q} \in Z$ bestimmen durch Betrachtung der Charakteristiken der Eikonalgleichung

$$|\nabla\phi| = 1 \quad \text{mit } \phi(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } \mathbf{x} \in Z. \quad (3.13)$$

Hierzu sei wiederholt, dass eine Funktion $\phi(\mathbf{p}) = d_Z(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, Z)$, die jedem Punkt $\mathbf{p} \in \Omega$ den kleinsten Abstand zu $Z \subset \Omega$ zuweist, [Gleichung \(3.13\)](#) im schwachen Sinn erfüllt, d.h. fast überall außer auf der Medialachse. Genauer gesagt ist $d_Z(\mathbf{p})$ nicht irgendeine beliebige schwache Lösung von [Gleichung \(3.13\)](#), sondern deren eindeutig definierte Viskositätslösung. Die Thematisierung schwacher Lösungen wurde bisher dadurch umgangen, dass $d_Z(\mathbf{p})$ als Lösung eines *Suchproblems* betrachtet wurde anstatt als Lösung eines *Ausbreitungsproblems*. Die Unterschiede dieser Betrachtungsweisen sind eklatant: während beim Suchproblem jedem Punkt $\mathbf{p} \in \Omega \setminus Z$ (mindestens) ein nächstgelegener Punkt $\mathbf{q} \in Z$ zugeordnet werden kann, welcher den Wert $\phi(\mathbf{p})$ eindeutig determiniert, trägt beim Ausbreitungsproblem nicht jeder Punkt $\mathbf{q} \in Z$ zum Wert $\phi(\mathbf{p})$ an irgendeiner Stelle $\mathbf{p} \in \Omega \setminus Z$ bei. Weiterführende Berechnungen auf einem Distanzfeld müssen deshalb dessen differentiale Eigenschaften berücksichtigen, um einen korrekten Informationsfluss zu gewährleisten (s.u.).

Charakteristiken sind Kurven, entlang derer sich die partielle DGL mittels einer gewöhnlichen DGL lösen lässt. Um diese zu bestimmen wird angenommen, dass alle Parameter \mathbf{x} der gesuchten Lösung $\phi(\mathbf{x})$ der partiellen DGL [\(3.13\)](#) von einem einzigen (Kurven)parameter s abhängen, d.h. $\phi = \phi(s) = \phi(\mathbf{x}(s))$. Entlang der Kurve $\mathbf{x}(s)$ entspricht die Lösung $\phi(\mathbf{x})$ der partiellen DGL der Lösung $\phi(\mathbf{x}(s))$ einer gewöhnlichen DGL, d.h. der Informationsfluss findet nur entlang der Charakteristiken statt. Anders ausgedrückt ist der Wert $\phi(\mathbf{x})$ nur vom Wert von ϕ entlang der durch \mathbf{x} führenden Charakteristik(en) abhängig [[SV03](#)]. Im Kontext der

Konturausbreitung entspricht eine solche Kurve somit der Menge korrespondierender Punkte auf Konturen in unterschiedlichem Abstand von der Startkontur.

Zur Berechnung wird zunächst von der Darstellung von [Gleichung \(3.13\)](#) als allgemeine homogene DLG erster Ordnung ausgegangen:

$$F(D\phi, \phi, \mathbf{x}) = 0,$$

wobei der Term $D\phi$ alle partiellen Ableitungen von ϕ zusammenfasst, in diesem Fall also $D\phi = \nabla\phi$, und $f(\mathbf{x})$ den Kehrwert der Ausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet, in diesem Fall also $f(\mathbf{x}) = 1$. Das ergibt

$$\begin{aligned} F(D\phi, \phi, \mathbf{x}) &= |\nabla\phi| - f(\mathbf{x}) \\ &= \nabla\phi \cdot \nabla\phi - f(\mathbf{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i}\phi)^2 - f(\mathbf{x})^2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die charakteristischen Gleichungen der partiellen DGL $F(D\phi, \phi, \mathbf{x}) = 0$ bezeichnen nun allgemein ein System aus gewöhnlichen DGLs, welches die Änderung der drei beteiligten Größen $D\phi$, ϕ und \mathbf{x} als Funktion eines Kurvenparameters s beschreibt. Im vorliegenden Fall ist davon nur \mathbf{x} relevant, welches sich gemäß [\[Eva15\]](#) aus [Gleichung \(3.14\)](#) zu

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= D_{D\phi}F(D\phi, \phi, \mathbf{x}) \\ &= D_{\nabla\phi}(\nabla\phi \cdot \nabla\phi - f(\mathbf{x})^2) \end{aligned}$$

ergibt. Daraus folgt

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \nabla\phi(\mathbf{x}). \tag{3.15}$$

Die Ableitung von \mathbf{x} nach s muss dem Gradienten des Distanzfeldes an der Stelle $\mathbf{x}(s)$ entsprechen, die Lösungen sind somit die Integralkurven des Distanz-Gradientenfeldes. Dabei ist jedoch zu beachten, dass ϕ für alle Punkte auf der Medialachse nicht differenzierbar ist, und somit im Falle des Erreichens der Medialachse keine eindeutige Lösung (im klassischen Sinne) von [Gleichung \(3.15\)](#) existiert. Tatsächlich wäre das Problem der nicht-eindeutigen Lösbarkeit bereits bei der Berechnung des Distanzfeldes aufgetreten, wenn ϕ als Lösung von [Gleichung \(3.13\)](#) eingeführt worden wäre anstatt als Abstand zum nächstgelegenen Startkonturpunkt, welcher per Suche ermittelt wird.

Zur Lösung der Problematik werden folgende Ansätze betrachtet:

1. Glättung,
2. Signalrekonstruktion,
3. Schwache Lösung: Viskositätslösung.

Glättung

Dieser Ansatz besteht in der Vermeidung undefinierter Ableitungen durch Glättung des Distanzfelds. Dies ließe sich prinzipiell erreichen durch Erweiterung von Gleichung (3.13) bzw. (3.14) um einen künstlichen Viskositätsterm, vergleichbar mit dem Vorgehen aus Unterabschnitt 3.1.1. Letztendlich lassen sich die aus Gleichung (3.10) resultierenden Trajektorien als Integralkurven des Gradienten eines geglätteten Distanzfeldes der Startkontur auffassen, da stets normal zu einer geglätteten (differenzierbaren) Version der aktuellen Kontur vorangeschritten wird.

Aufgrund der impliziten Formulierung lässt sich die aus dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ resultierende schwache Lösung auf effektivere Weise annähern. Der einzige Unterschied zwischen der expliziten Formulierung (3.6) und der impliziten Formulierung (3.15) liegt letztendlich darin, dass letztere die Ausbreitungsrichtung $\mathbf{n} = \nabla\phi$ nicht als Funktion der Kontur, sondern eines umgebenden Kontinuums definiert.

Alternative Ansätze zur Generierung approximativer differenzierbarer (glatter) Distanzfelder thematisiert [BS04].

Signalrekonstruktion

Dieser Ansatz beruht auf einer alternativen Erklärung zur Eindeutigkeit der Integralkurven aus einer diskreten Sichtweise. Die tatsächliche (kontinuierliche) Distanzfunktion d_Z , aufgefasst als reellwertiges Signal mit zwei- oder dreidimensionalem Definitionsbereich, wird innerhalb eines vorgegebenen Definitionsbereichs Ω mittels eines Gitters aus $M + 1$ Stützstellen $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_M$ abgetastet. Die Stützwerte d_0, \dots, d_M resultieren dabei entweder durch Bestimmung des Abstands von jedem \mathbf{x}_i zum nächstgelegenen Punkt in Z , oder durch numerische Approximation der Viskositätslösung der Eikonalgleichung (3.13). Aus der Abtastung $\{(\mathbf{x}_i, d_i)\}$ lässt sich wiederum ein kontinuierliches Signal \tilde{d}_Z rekonstruieren. Dieses interpolierte Signal wird in allgemeiner Basisdarstellung repräsentiert durch

$$\tilde{d}_Z(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^M d_i B_i(\mathbf{x}), \quad (3.16)$$

wobei B_0, \dots, B_M geeignete interpolierende Basisfunktionen und d_0, \dots, d_M die Koeffizienten der Signalrepräsentation bezeichnen. Für die Abweichung $\|d_Z - \tilde{d}_Z\|$ zwischen Original und Rekonstruktion lassen sich verschiedene Aussagen zeigen, je nach Wahl der Basisfunktionen: Mittels einer stückweise polynomiellen Basis lässt sich der Interpolationsfehler als Funktion des Polynomgrads k , Stützstellenabstands h und der Norm der $k + 1$ -ten Ableitung beschränken, z. B. gemäß [QSS02] durch

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq Ch^{k+1} \|f^{(k+1)}\|_\infty, \quad (3.17)$$

wobei C eine Konstante, \tilde{f} die Interpolierte und f die originale Funktion bezeichnet und $f^{(k+1)}$ dessen $k + 1$ -te Ableitung. Alternativ lässt sich mittels einer sinc-Basis ein Signal fehlerfrei rekonstruieren, wenn es bandbegrenzt ist und die maximale

Frequenz unterhalb der halben Abtastfrequenz liegt. Im vorliegenden Kontext ist das originale Signal aufgrund der fehlenden Bandbegrenzung an den Knicken nicht exakt aus Abtastpunkten rekonstruierbar, jedoch lässt sich der Fehler durch den Gitterpunktabstand beschränken, sofern die Abtastung sicherstellt, dass zwischen zwei Gitterpunkten nicht mehrere Knicke liegen.

Die Funktion $\tilde{d}_Z(\mathbf{x})$ ist differenzierbar sofern alle B_i differenzierbar sind, da gemäß Summenregel die Ableitung der rekonstruierten Funktion auf die Ableitung der Basisfunktionen verteilt wird:

$$\nabla \tilde{d}_Z(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^M d_i \nabla B_i(\mathbf{x}). \quad (3.18)$$

Falls $\nabla \tilde{d}_Z$ stetig sein soll und die Basis nur stückweise definiert ist, muss zudem sichergestellt werden, dass die Ableitungen benachbarter Basisfunktionen an den Verbindungsstellen übereinstimmen.

Da jegliche Repräsentation des Distanzfelds eine endliche Menge an Koeffizienten enthält, und damit jegliche Auswertung auf einer Rekonstruktion $\tilde{d}_Z(\mathbf{x})$ von $d_Z(\mathbf{x})$ beruht, lässt sich auf diese Weise stets die Differenzierbarkeit des Distanzfelds $\phi(\mathbf{x}) = \tilde{d}_Z(\mathbf{x})$, und damit die Eindeutigkeit von Integralkurven, gewährleisten. Die Konsistenz resultiert daraus, dass gemäß Gleichung (3.17) mit fallendem Gitterpunktabstand auch der Interpolationsfehler sinkt, und sich somit die Integralkurven von $\tilde{d}_Z(\mathbf{x})$ denen von $d_Z(\mathbf{x})$ annähern.

Schwache Lösung

Dieser Ansatz führt einen Lösungsbegriff ein, welcher keiner Differenzierbarkeit bedarf. Solche Lösungen werden allgemein unter dem Begriff „schwache Lösung“ zusammengefasst [EGK17; Eva15]. Ein auf hyperbolische partielle DGL wie die Eikonalgleichung spezialisierter schwacher Lösungsbegriff ist die sogenannte Viskositätslösung. Die Definition dieser Lösung erfolgt entweder durch den Vergleich der Lösung mit Testfunktionen, welche anstelle der Lösung abgeleitet werden können [CL83], oder mittels sogenannter Sub- und Superdifferentialen, einer Verallgemeinerung des Differentialquotienten auf nicht differenzierbare Funktionen [CEL84]. Des weiteren kann gezeigt werden, dass sich die Viskositätslösung approximieren lässt mittels entweder der Methode der verschwindenden Viskosität oder mittels einer Upwind-Diskretisierung der partiellen Ableitungen.

Im folgenden dient ein Upwind-Schema zur Diskretisierung der partiellen Ableitungen in Gleichung (3.15), um zu gewährleisten, dass der Trajektorienverlauf den für Gleichung (3.13) charakteristischen Informationsfluss widerspiegelt. Unter Lösungen von Gleichung (3.15) sind also die Charakteristiken der numerisch approximierten Viskositätslösung von Gleichung (3.13) zu verstehen.

Im einfachsten Fall werden die partiellen Ableitungen folgendermaßen approximiert:

$$\partial_i^- \phi(\mathbf{x}) \approx \frac{\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_i)}{h} \quad (3.19)$$

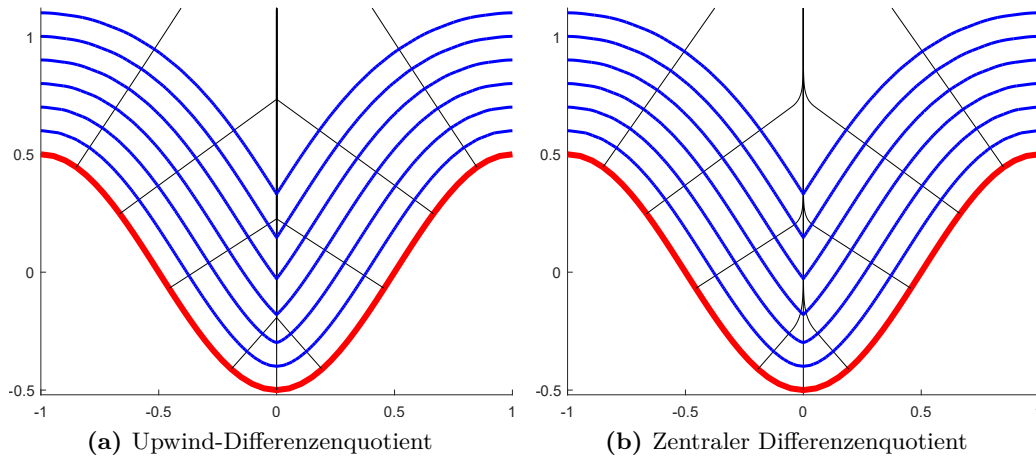


Abbildung 3.9: Trajektorienverlauf.

$$\partial_i^+ \phi(\mathbf{x}) \approx \frac{\phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{x})}{h} \quad (3.20)$$

$$\partial_i \phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \partial_i^- \phi(\mathbf{x}) & \text{wenn } \phi(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_i) \leq \phi(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) \\ \partial_i^+ \phi(\mathbf{x}) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.21)$$

wobei $i \in \{x, y, z\}$, \mathbf{e}_i einen Einheitsvektor in x -, y - oder z -Richtung und h die Schrittweite bezeichnen. Neben diesem einfachsten Upwind-Schema existieren weitere deutlich exaktere Alternativen, siehe z. B. [OF02; Eva15].

Abbildung 3.9a zeigt resultierende Trajektorien nach Ausbreitung von Startpunkten mittels Gleichung (3.15), unter Approximation des Gradienten mittels Gleichung (3.21). Zum Vergleich zeigt Abbildung 3.9b die gleichen Trajektorien unter Approximation des Gradienten mittels eines zentralen Differenzenquotienten. Dessen Verwendung ist dahingehend legitim, dass ein gemäß Gleichung (3.16) aus Stützstellen rekonstruiertes (approximatives) Distanzfeld \tilde{d}_Z stets differenzierbar ist. In gewisser Weise berücksichtigt der einseitige Differenzenquotient die fehlende Differenzierbarkeit des tatsächlichen Distanzfelds d_Z , während der zentrale Differenzenquotient diese ignoriert.

Bewertung

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich durch die implizite Propagierung der Kontur sämtliche der in Unterabschnitt 3.1.1 aufgeführten Mängel beseitigen lassen. Der Nachteil liegt in der mit impliziten Repräsentationen verbundenen Erhöhung der Dimension der Problemstellung, da anstatt der Kontur selbst ein geeigneter Ausschnitt des die Kontur beinhaltenden Raums gespeichert werden muss. Ansätze zur Kompensation dieses Nachteils werden in Unterabschnitt 5.3.3 thematisiert.

3.2 Einflussbereiche der Medialachse

Bei der Planung von Bahnen für die Fertigung sind häufig Normal-Offset-Kurven bedeutungsvoll. Die Normal-Offset-Kurve einer Kurve auf einer Fläche ergibt sich durch Verschieben der Kurve längs der Flächennormalen um eine feste Distanz. Eine Offset-Kurve einer ebenen Kurve entsteht durch entsprechendes Verschieben längs der Kurvennormalen. Wie im vorigen Unterkapitel bereits festgestellt, können solche Offset-Kurven in ihrem Bewegungsverhalten stark von der gegebenen Kurve abweichen. So können etwa starke Krümmungen bis hin zu Knicken auftreten, die von Fertigungswerkzeugen aus physikalischen Gründen nicht abfahrbar sind. Ein Indikator für solche Schwierigkeiten ist die Nähe zu Medialachsen der gegebenen Bezugsfläche oder einer Bezugskurve. In diesem Kapitel wird diese Beobachtung durch die Definition sogenannter Einflussbereiche der Medialachse formalisiert. Einflussbereiche sind Gebiete auf der Bezugsfläche oder Bezugskurve, deren Größe vom Abstand der Offset-Kurve abhängt. Die Kenntnis derartiger kritischer Bereiche kann weiterführend zur Parametrierung einer automatischen oder manuellen Kontaktbahnplanung dienen.

3.2.1 Bedeutung

Um eine vorgesehene Einwirkung an einem vorgegebenen Kontaktpunkt auf der Bezugsoberfläche zu gewährleisten, muss das Fertigungswerkzeug in einer bestimmten Lage relativ zum Kontaktpunkt positioniert werden. Diese Lage hängt zwar idealerweise nur vom Wirkungsmechanismus des Werkzeugs (Wirkungsrichtung und -Abstand) ab, jedoch kann der Verlauf der Bezugsoberfläche und Werkzeugbahn zu Einschränkungen der Positionierung des Werkzeugs führen. Aus einer ursprünglich zweidimensionalen Problemstellung, der Berechnung von Kontaktpunkten bzw. -Bahnen auf der Bezugsoberfläche, wird so eine dreidimensionale Problemstellung, der Berechnung zugehöriger Werkzeugposen im Raum, basierend auf der idealen Werkzeugposition einerseits sowie dem Abstand zur Bezugsoberfläche andererseits.

Wenn dabei die Verbindungslinie zwischen Kontaktpunkt und Werkzeugposition die Medialachse schneidet, kann dies zu folgenden Problemen führen:

Numerische Probleme bei der Offset-Bahnplanung: In den Medialachsen ist das extrudierte Oberflächendistanzfeld unstetig, da ein begrenztes Distanzwertintervall zu einem Punkt kollabiert.

„Statische Unzulässigkeit“ – zu dicht an der Oberfläche: Der kleinste Abstand zwischen Werkzeugposition \mathbf{q} und Bezugsoberfläche ist kleiner als der Abstand zum Kontaktpunkt \mathbf{p} : $d(\mathbf{q}, Z) < d(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

„Dynamische Unzulässigkeit“ – zu große Beschleunigungen: Liegen einzelne Werkzeugpositionen entlang einer Bahn auf unterschiedlichen Seiten der Medialachse, so enthält die Bahn Selbstüberschneidungen/Schleifen.

Aus diesem Grund ist die Teilmenge der Bezugsoberfläche von besonderer Bedeutung, deren zugehörige ideale Werkzeugposition auf oder jenseits der Medialachse

liegt. Diese Teilmenge wird als *Einflussbereich der Medialachse* für die spezifische Kontaktpunkt-Werkzeugposition-Beziehung bezeichnet.

Das erste Problem wird in [Abschnitt 5.4](#) behandelt. Die Medialachse beschränkt in diesem Zusammenhang die Lage potentieller Nullstellenmengen des auf der Bezugsoberfläche definierten Distanzfelds, um zu gewährleisten, dass implizit definierte Kontaktbahnen auf die Offset-Fläche projiziert werden können.

Die beiden anderen Probleme lassen sich auf zweierlei Weise kompensieren:

1. Relaxation von Wirkungsrichtung und -Abstand auf dem Einflussbereich der Medialachse,
2. Einschränkung des Kontaktbahnverlaufs – und damit der resultierenden Bewegungsrichtung, durch Segmentierung der Bezugsoberfläche.

Auf die Relaxation von Wirkungsrichtung und -Abstand zur Vermeidung statischer oder dynamischer Unzulässigkeit wird in [Abschnitt 5.5](#) eingegangen. Die Segmentierung zur Einschränkung des Kontaktbahnverlaufs besteht in der Zerlegung der Bezugsoberfläche in Teilgebiete. Dabei werden die Segmentgrenzen durch die Medialachse beeinflusst.

Wichtig ist zu bemerken, dass der Medialachseneinflussbereich natürlicherweise mit konkav gekrümmten Oberflächenregionen zusammenhängt, jedoch nicht mit diesen koinzidiert. Der Grund ist, dass der Einflussbereich vom idealen Werkzeugabstand abhängt. Diejenige Teilmenge der Medialachse, die innerhalb eines vorgegebenen Maximalabstands zur Oberfläche liegt, bestimmt den Einflussbereich. Dadurch können einerseits Oberflächenregionen trotz konkaver Krümmung aufgrund zu großer Krümmungsradien irrelevant, aber andererseits Regionen trotz konvexer oder keiner Krümmung aufgrund zu kleiner Krümmungsradien in abseitigen Regionen relevant sein.

Die Charakterisierung kritischer Gebiete von Bezugsoberflächen, die durch Dreiecksnetze gegeben sind, über die Medialachse erweist sich als numerisch stabiler als die Schätzung und Klassifikation von Krümmungsradien. Dies hängt damit zusammen, dass die Schätzung der Krümmung an einem gegebenen Punkt die Definition einer „geeigneten“ Umgebung des Punktes erfordert. Demgegenüber ist die Klassifikation des Einflussbereichs an einem gegebenen Punkt eine Funktion der gesamten Bezugsoberfläche, und damit nicht von der Größe oder Form einer lokalen Umgebung abhängig.

3.2.2 Berechnung

Der Einflussbereich der Medialachse bezüglich der Offset-Fläche mit Abstand $c > 0$, der nun berechnet werden soll, besteht aus den Punkten der Bezugsoberfläche, für die die dort startende Strecke der Länge c in Richtung der Normalen die Medialachse schneidet.

Die konzeptionelle Idee ist, die Bezugsoberfläche solange mit konstanter Geschwindigkeit in Normalenrichtung auszubreiten, bis der kleinste Abstand jedes

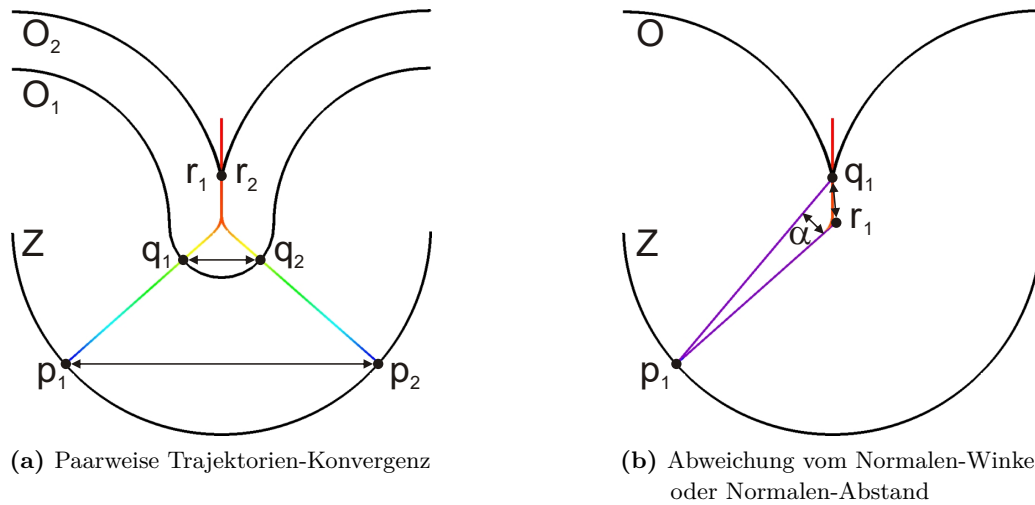


Abbildung 3.10: Normalkurven-basierte Klassifikation von Punkten auf der Bezugsfläche.

Punktes der resultierenden Offset-Fläche zur Bezugsfläche dem vorgegebenen Wert c entspricht. Die Existenz einer Medialachse äußert sich dabei in einem letztendlichen Kollidieren bzw. Verschmelzen von Punkten der Oberfläche aufgrund sich überschneidender Trajektorien. Die Menge aller Positionen, an denen eine Kollision von Oberflächenpunkten stattfindet, entspricht der für die Werkzeugpositionierung relevanten Teilmenge der Medialachse. Die Menge aller kollidierenden Punkte entspricht dem Einflussbereich der Medialachse.

Die Trajektorie eines Punktes unter Ausbreitung der Bezugsfläche in Normalenrichtung wird bereits in [Abschnitt 3.1](#) thematisiert und hier als gegeben vorausgesetzt. Damit verbleibt als Problemstellung die Klassifikation jedes Punktes $p \in Z$ dahingehend, ob er sich inner- oder außerhalb des Einflussbereichs der Medialachse befindet. Dafür werden folgende Ansätze verfolgt (siehe auch [Abbildung 3.10](#)):

1. Paarweise Trajektorien-Konvergenz,
2. Abweichung vom Normalen-Winkel oder Normalen-Abstand.

Klassifikation mittels paarweiser Konvergenz

Zwei Trajektorien konvergieren gegeneinander, wenn ihr Abstand mit zunehmender Entfernung zum Startpunkt abnimmt. Unterschreitet der Abstand der beiden Kurven einen vorgegebenen Abstandsschwellwert $\varepsilon > 0$, welcher proportional zum Gitterpunktabstand des Distanzfelds gewählt wird, so verlaufen die Kurven innerhalb eines genügend schmalen Bandes um die Medialachse herum und werden als „gegen die Medialachse konvergiert“ klassifiziert. Das Kriterium kann zur Berechnung einer diskreten Approximation des Einflussbereiches eingesetzt werden, indem eine endliche

Menge von Abtastpunkten auf der Bezugsfläche gewählt wird, welche die Fläche hinreichend dicht gleichmäßig überdeckt. Hierfür könnten etwa die Knoten eines die Bezugsfläche repräsentierenden Dreiecknetzes in Frage kommen. Die Klassifikation dieser Punkte $\mathbf{p}_i \in Z$ sieht dann wie folgt aus:

1. Bestimme den Schnittpunkt \mathbf{q}_i zwischen der in \mathbf{p}_i startenden Trajektorie mit der Offset-Fläche zur Distanz c .
2. Suche von $k + 1$ dem Punkt \mathbf{q}_i nächstgelegenen Schnittpunkten $\mathbf{q}_{j_0}, \dots, \mathbf{q}_{j_k}$ von „endpunktbenachbarten“ Trajektorien mit der Offset-Fläche.
3. Falls unter den $k + 1$ Nachbarendpunkten ein \mathbf{q}_j mit $\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\| < \varepsilon$ und $\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\| < \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$ existiert, so liegt \mathbf{p}_i im Einflussbereich und andernfalls nicht.

Folgende Erläuterungen seien dazu angefügt. Anstatt für zwei benachbarte *Startpunkte* die zugehörigen Endpunkte zu vergleichen, werden für zwei benachbarte *Endpunkte* die zugehörigen Startpunkte verglichen. Die Motivation dieses rückwärtigen Vorgehens liegt in der fehlenden Notwendigkeit der Konvergenz zweier im Startpunkt benachbarter Trajektorien gegeneinander. Mit ähnlicher Motivation werden $k + 1$ benachbarte Trajektorien berücksichtigt, anstatt nur einer einzigen, da im Endpunkt benachbarte Trajektorien, je nach Lage der Startpunkte, nicht notwendigerweise gegeneinander konvergiert sind.

Abbildung 3.10a zeigt ein Beispiel mit halbkreisförmiger Bezugskontur Z mitsamt zweier Offset-Konturen O_1, O_2 sowie zwei Normalkurven mitsamt Schnittpunkt mit den Offset-Konturen. Für einen Werkzeugabstand $d_1 = d_Z(\mathbf{q}_1) = d_Z(\mathbf{q}_2)$ werden $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ aufgrund eines zu großen Abstands zwischen den Schnittpunkten \mathbf{q}_1 und \mathbf{q}_2 als nicht im Einflussbereich liegend klassifiziert. Für einen Werkzeugabstand $d_2 = d_Z(\mathbf{r}_1) = d_Z(\mathbf{r}_2)$ werden $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ als im Einflussbereich liegend klassifiziert.

Klassifikation mittels Normalen-Winkel- und Abstandsabweichung

Ein Punkt $\mathbf{p} \in Z$ soll genau dann im Einflussbereich liegen, wenn der Abstand zwischen \mathbf{p} und dem Schnittpunkt \mathbf{q} mit der Offset-Fläche größer ist als der kleinste Abstand zwischen \mathbf{q} und Z (Abstandsabweichung), oder der Offset-Vektor $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ und die Normale \mathbf{n} in \mathbf{p} nicht kollinear sind (Winkelabweichung). Abbildung 3.10b zeigt ein Beispiel, in dem \mathbf{p}_1 für einen Werkzeugabstand $d = d_Z(\mathbf{q}_1)$ aufgrund des Abstands zwischen \mathbf{q}_1 und dem Normalen-Endpunkt $\mathbf{r}_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{n}_1 d$, mit \mathbf{n}_1 als Normale in \mathbf{p}_1 , als im Einflussbereich liegend klassifiziert wird.

Abbildung 3.11 visualisiert die Schritte zur Bestimmung des Einflussbereichs auf einer wellenförmigen Bezugsfläche (grau) mitsamt Referenz-Offsetfläche (transparent rot), deren kleinster Abstand zur Bezugsfläche dem idealen Werkzeugabstand entspricht. Abbildung 3.12 zeigt die Begrenzung des Einflussbereichs für vier unterschiedliche Abstände der Offset-Fläche.

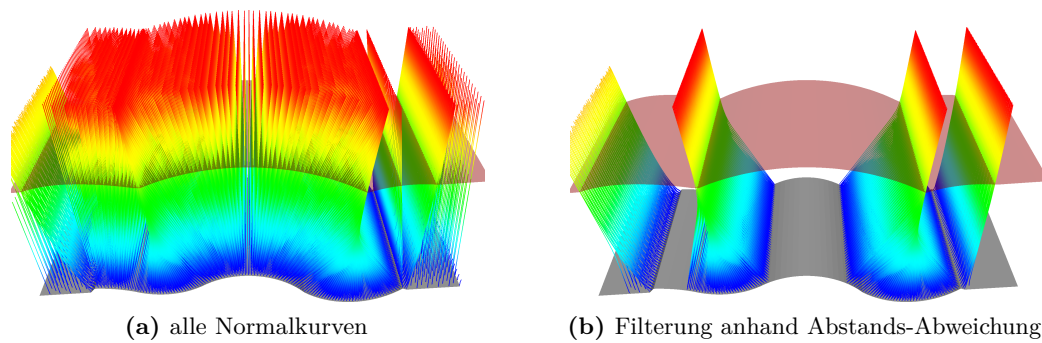


Abbildung 3.11: Schritte zur Bestimmung des Einflussbereichs durch Filterung von Normalkurven.

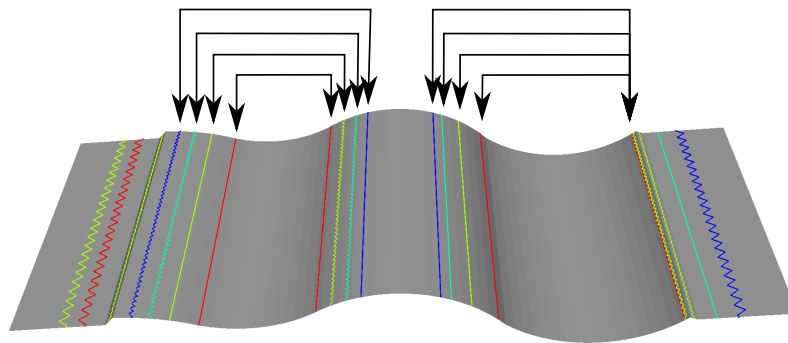


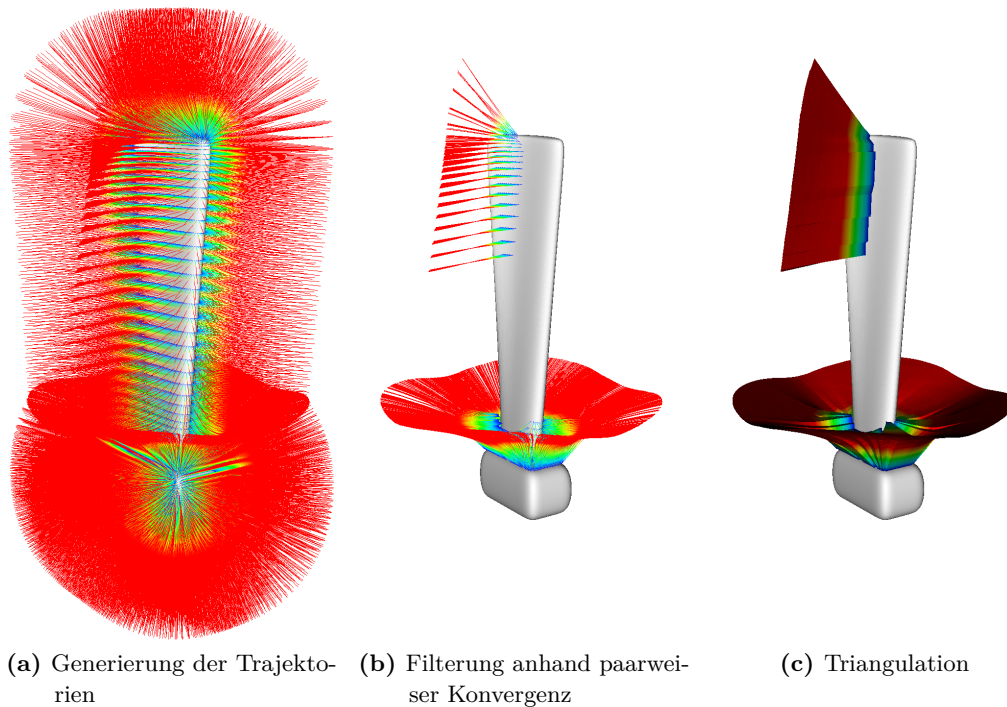
Abbildung 3.12: Einflussbereich für vier unterschiedliche Werkzeugabstände. Die Pfeile markieren zusammengehörige Segmentgrenzen beiderseits der Medialachse. Das jeweils nächstgrößere Segment ergibt sich durch Verdoppelung des Werkzeugabstands.

Bewertung

Unter Voraussetzung einer geeigneten Parametrisierung erwiesen sich die Ergebnisse beider Herangehensweisen als vergleichbar. Dabei ist jedoch die Abweichung vom Normalen-Winkel oder -Abstand wesentlich intuitiver zu parametrisieren und wird deshalb im weiteren Verlauf bevorzugt.

3.2.3 Visualisierung

Die auf beschriebene Weise ausgewählten Trajektorien spannen ein Volumen auf, welches die Medialachse umschließt und sich mit steigendem Abstand zu Z verjüngt. Die Rekonstruktion und Visualisierung dieses Volumens erfordert zunächst dessen Triangulierung, wofür die durch das Eingabenetz induzierte Nachbarschaftsrelation zwischen den Trajektorien ausgenutzt wird: jedes Dreieck des Eingabenetzes, dessen Knoten im Einflussbereich liegen, definiert einen Volumenausschnitt, indem das Dreieck entlang der zu den Knoten gehörigen Trajektorien verschoben und skaliert wird.



(a) Generierung der Trajektorien (b) Filterung anhand paarweiser Konvergenz (c) Triangulation

Abbildung 3.13: Beispielhafter Ablauf

Die Triangulation dieses Volumenausschnitts erfolgt durch sukzessive Verbindung jeweils zweier aufeinanderfolgender Knotenpositionen entlang der Trajektorien mittels dreier Tetraeder. Auf diese Weise resultiert das gesamte Volumen als Vereinigung aller Volumenausschnitte mit dreieckiger Querschnittfläche, siehe [Abbildung 3.13c](#).

[Abbildung 3.13](#) zeigt einen beispielhaften Ablauf anhand eines turbinenschauelförmigen Zielobjekts, bestehend aus der Generierung der Normalkurve für jede Stützstelle der Zieloberfläche ([Abbildung 3.13a](#)), Markierung aller medialachsenrelevanten Normalkurven und Verwerfen aller übrigen ([Abbildung 3.13b](#)) sowie optional die Triangulation der relevanten Kurven zur Approximation des die Medialachse einhüllenden Volumens ([Abbildung 3.13c](#)).

3.3 Kammlinien

Kammlinien sind Kurven auf einer Oberfläche, die aus Punkten bestehen, an denen der Betrag der Hauptkrümmung längs einer Krümmungslinie maximal ist. Alternativ lässt sich eine Kammlinie auch als Oberflächenkurve definieren, an denen es eine dreifach berührende Oberfläche einer maximalen Kugel gibt (siehe [Unterabschnitt 2.3.1](#)). Die Mittelpunkte dieser Kugeln formen den Rand der Medialachse.

3.3.1 Bedeutung

Kammlinien sind in zweierlei Hinsicht relevant. Einerseits kann beim Fräsen ein schräges Überfahren einer Kante, etwa bei zahntechnischen keramischen Werkstoffen, zur Ausfransung oder Zerfurchung der Kante aufgrund von unkontrollierbar wegbrechendem Material führen. Andererseits kann beim thermischen Beschichten ein schräges Durchqueren eines Tals (d.h. nicht parallel zu konkaven Kammlinien) zu einem schleifenförmigen Verlauf der Werkzeugbahn mit unzulässig hohen Beschleunigungen führen, sobald der Spritzabstand den kleinsten Krümmungsradius der Kontaktbahn überschreitet.

Die Kenntnis dieser Kammlinie R ermöglicht die Bestimmung einer bevorzugten Bewegungsrichtung, im Sinne eines Vektorfelds auf der Bezugsoberfläche, zur Parametrierung einer automatischen oder manuellen Bahnplanung: Durch Auslegung eines Kontaktbahnabschnitts parallel anstatt orthogonal zur Kammlinie wird ein schleifenförmiger Werkzeugbahnabschnitt vermieden. Parallel bedeutet mit konstanten Abstand zur Kammlinie, d.h. die Bahnabschnitte entsprechen den Niveaumengen des Distanzfelds, welches jedem Punkt $\mathbf{p} \in Z$ seinen kleinsten geodätischen Abstand zu R zuweist. Durch eine derartige Einschränkung des Kontaktbahnverlaufs lassen sich schleifenfreie Werkzeugbahnabschnitte bereits bei der Kontaktbahnplanung gewährleisten. Die Schleifenvermeidung kann jedoch nur lokal erfolgen: um Kontaktbahnabschnitte beiderseits einer Kammlinie auszulegen, muss zwangsläufig mindestens ein Bahnabschnitt orthogonal zu dieser verlaufen. Der Vorteil der Einschränkung des Bahnverlaufs liegt dennoch in einer Reduktion solcher „problematischen“ Bahnabschnitte, welche überdies ggf. auch in unkritische Regionen der Bezugsoberfläche verschoben werden können.

3.3.2 Projektion der Medialachsen-Randkurve

Beide Definitionen von Kammlinien führen auf Berechnungsverfahren. Für die krümmungsbasierte Definition können Kammlinien wie folgt in zwei Schritten berechnet werden:

1. Berechnung von Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen gemäß [GI04].
2. Lokalisation der Hauptkrümmungs-Extrema gemäß [YBS05].

Für die Definition über die Medialachse können Kammlinien als Projektion der Medialachsen-Randkurve ermittelt werden. Da diese Definition weniger verbreitet ist, wird im Folgenden detaillierter auf ein Berechnungsverfahren eingegangen.

In [Abschnitt 3.2.2](#) wurde die Klassifikation eines Punkts $\mathbf{p} \in Z$ anhand der Abstands- oder Winkelabweichung des Schnittpunkts $\mathbf{q} \in O$ zwischen Normalkurve und Offset-Fläche O von einer idealen Position \mathbf{r} auf dem Normalen-Vektor durchgeführt. Eine Erweiterung dieses Vorgehens, welche genauer zwischen der Abstands- und Winkelabweichung differenziert, kann zur Erkennung der auf einer Kammlinie von Z liegenden Teilmenge des Einflussbereichs der Medialachse genutzt werden.

Ausgangspunkt ist der in [Unterabschnitt 2.3.1](#) beschriebene strukturelle Aufbau der Medialachse. Diese wird durch Randkurven aus Punkten des Typs A_3 (einfacher Kontakt dritter Ordnung) begrenzt, deren korrespondierende Kurven aus Kontaktpunkten gerade den Kammlinien von Z entsprechen, siehe auch [Abbildung 2.4](#). Ferner steht der Vektor $(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ zwischen einem A_3 -Randpunkt $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$ und seinem korrespondierenden Kontaktpunkt $\mathbf{p} \in Z$ stets normal auf Z . Damit verläuft auch die Normalkurve von \mathbf{p} gemäß [Gleichung \(3.15\)](#) durch den Punkt \mathbf{q} und steht normal auf Z – zumindest in einer ausreichend kleinen Umgebung um \mathbf{q} herum, in der die Medialachse keine Krümmung aufweist.

Die auf einer Kammlinie liegende Teilmenge $R \subset E$ des Einflussbereichs $E \subseteq Z$ entspricht der Menge an Punkten $\mathbf{p} \in Z$, für die die Abstandsabweichung größer als Null und die Winkelabweichung gleich Null ist. Somit ist R implizit definiert als Nullstellenmenge eines Skalarfelds $\tau : Z \rightarrow \mathbb{R}$, welches jedem Punkt $\mathbf{p} \in Z$ genau dann die Winkelabweichung des Schnittpunkts zwischen Normalkurve und Offset-Fläche zuweist, wenn die Abstandsabweichung größer 0 ist, und andernfalls einen beliebigen Wert ungleich 0.

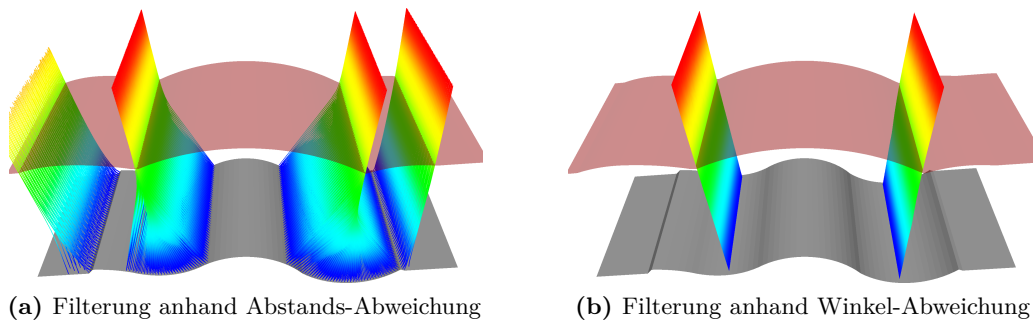
Die Berechnung von R ist dahingehend problematisch, dass τ nicht vorzeichenbehaftet ist und nur an den Knoten des die Bezugsoberfläche approximierenden Dreiecksnetzes abgetastet wird. Aus diesem Grund lassen sich die Nullstellen im Allgemeinen weder in Knoten noch entlang von Kanten des Netzes identifizieren. Verfahren zur Extraktion von Nullstellenmengen aus einem nicht vorzeichenbehafteten Skalarfeld umfassen deshalb die lokale Rekonstruktion des Skalarfelds mittels einer interpolierenden oder approximierenden Funktion in Verbindung mit lokaler Verfeinerung des Definitionsbereichs durch Einfügen von Stützstellen [[GVJ+09](#)]. Alternativ kann die scharfe Winkelabweichung zu einem Winkelabweichungsintervall $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ relaxiert und dadurch die detektierbare Kammlinie verbreitert werden, um zu gewährleisten, dass auch Knoten nahe der Nullstelle berücksichtigt werden.

[Abbildung 3.14](#) visualisiert die Schritte zur Bestimmung der innerhalb des Einflussbereichs liegenden Kammlinien auf einer wellenförmigen Bezugsoberfläche (grau) mitsamt Referenz-Offsetfläche (transparent rot), deren kleinster Abstand zur Bezugsoberfläche dem idealen Werkzeugabstand entspricht.

3.3.3 Glättung von Kammlinien mittels aktiver Konturen

Abhängig von der geometrischen und topologischen Qualität der Eingabedaten sowie der Stabilität und Parametrierung verwendeter numerischer Verfahren, zeigen resultierende Kammlinien üblicherweise einen faltigen bzw. gezackten Verlauf. Unebene Kammlinien wirken sich wiederum negativ auf die Glattheit resultierender Werkzeugbahnen aus. Folgende Fehlerquellen lassen sich diesbezüglich benennen:

- tatsächliche Unebenheiten eines realen erfassten Zielobjekts,
- fehlerbehaftete Oberflächenerfassung: Messfehler des optischen Scanners,
- inhomogene Netztopologie: numerische Schätzungen beruhen auf der Nachbarschaftsrelation,



(a) Filterung anhand Abstands-Abweichung

(b) Filterung anhand Winkel-Abweichung

Abbildung 3.14: Schritte zur Bestimmung der auf einer Kammlinie liegenden Teilmenge des Einflussbereichs durch Filterung von Normalkurven.

- Diskretisierungsfehler der Oberfläche: Approximation der realen Oberfläche mittels Simplexes (Abtastung, Quantisierung, Linearisierung),
- Diskretisierungsfehler der Kurven: Abtastung der Stützstellen und Approximation der realen Kammlinie durch Polygonzug,
- numerische Fehler: numerische Differentiation oder lokale Approximation der Oberfläche durch analytische Funktion(en).

In Anbetracht realer Anwendungsszenarien ist nicht davon auszugehen, dass alle genannten Fehlerquellen stets adäquat kompensiert werden können. Um dennoch einen glatten Bahnverlauf zu bewirken, werden die generierten Kammlinien im Folgenden mittels einer auf die betroffene Oberfläche beschränkten aktiven Kontur ([KWT88]) geglättet. Da im Allgemeinen die zur Glättung einer Kontur modellierten Kräfte keinen Verbleib derselben auf einer vorgegebenen Oberfläche gewährleisten, muss ebendies durch Einführung zusätzlicher Mechanismen erfolgen. Zwei Herangehensweisen erwiesen sich hierfür als geeignet:

- explizite Domäne: Knotenpunkte der Kontur dürfen sich ausschließlich entlang der Kanten des die Oberfläche repräsentierenden Dreiecksnetzes bewegen,
- implizite Domäne: Eine zusätzliche Kraft proportional zum Abstand und normal zur Oberfläche verhindert eine Abweichung von ebendieser.

Die erste Variante setzt eine explizite Repräsentation der Oberfläche als Dreiecksnetz voraus und die zweite Variante eine implizite Repräsentation mittels eines vorzeichenbehafteten Distanzfelds. Zum Glätten der Kammlinien findet dabei die erste Variante Anwendung, aus folgendem Grund. Je nach Bahnplanungsdomäne müssen Kammlinien sowohl für die Bezugsfläche als auch deren Offset-Flächen generierbar sein. Dabei wird vom Anwendungsfall die Bezugsfläche üblicherweise als Dreiecksnetz vorgegeben. Eine exakte implizite Repräsentation dieser als Nullstellenmenge ist nicht immer problemlos möglich, aufgrund der Abtastproblematik und damit verbundener Artefakte sowie einer potentiell fehlerhaften Netztopologie. Aus diesem Grund erwies sich die Verwendung der expliziten Variante, welche auf

dem originalen Eingabenetz zu operieren vermag, anstatt auf dessen Approximation, als robuster. Auf die Umsetzung der auf Dreiecksnetze beschränkten aktiven Kontur, welche sich an [BWK06] orientiert, sei aufgrund des eher technischen anstatt konzeptionellen Charakters nicht näher eingegangen. Ein alternativer Ansatz zur lokal beschränkten Minimierung der geodätischen Krümmung einer Kontur auf einer Oberfläche ist in [LGR+14] dokumentiert. Die zweite (implizite) Variante wird in [Unterabschnitt 5.7.3](#) im Rahmen der Glättung von Positionsbahnen auf der Offset-Fläche thematisiert, da diese per Konstruktion stets implizit repräsentiert werden.

Planung von Werkzeugbahnen

Inhalt

4.1	Geometrische Auslegung der Bahnplanung	65
4.2	Geometrische und kombinatorische Bahnplanung	66
4.3	Repräsentation von Werkzeugposen und Bahnen	67
4.4	Kontaktpunkt- und werkzeugpositionsorientierte Bahnplanung	68
4.5	Implizite Bahnplanung	70
4.6	Stand der Wissenschaft	71

Das Kapitel führt in die prinzipiellen Überlegungen der Planung von Werkzeugbahnen für fertigungstechnische Prozesse ein, die diese Arbeit verfolgt. Zunächst gliedert es die Bahnplanungsaufgaben für fertigungstechnische Prozesse aus geometrischer Sicht in volumenbasierte und oberflächenbezogene Aufgaben. Dann befasst es sich mit der Wahl und der Sequenzialisierung der Werkzeugposen. Dies führt zu zwei Aspekten der Bahnplanung, dem geometrischen und dem kombinatorischen. Dann geht es auf Repräsentationsformen von Werkzeugposen ein, wobei die absolute und die kontaktrelative Repräsentationsform unterschieden werden. Hinsichtlich des geometrischen Aspekts findet eine Konzentration auf oberflächenbezogene Bahnplanungsansätze statt, wobei dann abhängig von der Repräsentation der Werkzeugposen kontaktrelative und werkzeugrelative Bahnplanungsverfahren unterschieden werden. Hierfür wird die Einsatzmöglichkeit impliziter Repräsentationsformen kurz angerissen, die dann in Folgekapiteln ausgearbeitet werden.

4.1 Geometrische Auslegung der Bahnplanung

Die Aufgabe der Bahnplanung für einen Fertigungsprozess besteht darin, eine Menge von Werkzeugposen zu realisieren, die ein Startwerkstück in ein gewünschtes Zielwerkstück überführen. In [Kapitel 1](#) wurde dies für das Fräsen und das thermische Beschichten skizziert. Fertigungsaufgaben dieser Art ist gemeinsam, dass es Einschränkungen bezüglich der Reihenfolge gibt, in der Werkzeugposen während der Realisierung des Prozesses auftreten können. Eine wesentliche Einschränkung ist, dass Werkzeugposen zu jedem Zeitpunkt an der aktuellen Oberfläche des Werkstücks angesiedelt sind. Dabei kann sich die Geometrie der Oberfläche des Werkstücks nur

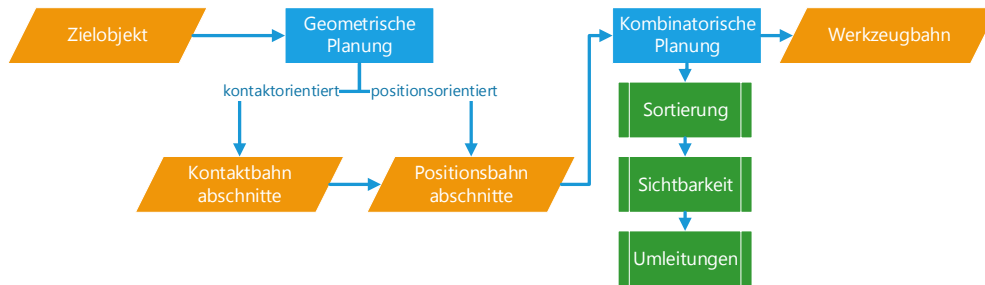


Abbildung 4.1: Allgemeiner Ablauf der Bahnerzeugung: Ein-/Ausgabegeometrien (orange), Planungsphasen (blau), Arbeitsschritte (grün), Kanten zeigen den Datenfluss vom Zielobjekt zur Werkzeugbahn.

geringfügig oder aber stark ändern. Dies führt auf zwei Kategorien der geometrischen Auslegung von Bahnplanungsaufgaben:

oberflächenbasierte Bahnplanung: Überdeckung einer initial gewählten statischen Bezugsfläche mit Werkzeugposen.

volumenbasierte Bahnplanung: Überdeckung eines Volumens mit Werkzeugposen, die sich als Vereinigung der Überdeckungen der Flächen einer Sequenz von Bezugsflächen ergibt, an deren Ende die Oberfläche des Zielwerkstücks steht. Die jeweils nächste Fläche der Sequenz ergibt sich aus der aktuellen durch Ausführung des Fertigungsprozesses mit den Werkzeugposen der Überdeckung.

Ein möglicher Ansatz zur Lösung von volumenbasierten Bahnplanungsaufgaben ist die Rückführung auf eine Folge von oberflächenbasierten Bahnplanungsaufgaben. Ein wesentlicher Aspekt ist hierbei die Wahl der Oberflächensequenz.

4.2 Geometrische und kombinatorische Bahnplanung

Geometrische und prozesstechnische Restriktionen können bewirken, dass es keine sie erfüllende Bahnen gibt, bei denen das Werkzeug stets eine fertigungstechnische Wirkung auf die Werkstückoberfläche ausübt. So kann es beim oberflächenbasierten Fräsen geschehen, dass es eine bereits bearbeitete Umgebung des Werkzeugs gibt, außerhalb von der sich jedoch noch unbearbeitete Gebiete befinden. Ein Beispiel ist das Taschenfräsen mit spiralförmigen Bahnen beim Vorhandensein mehrerer Taschen auf der Oberfläche. Hierbei wird häufig so vorgegangen, dass Bahnsegmente mit Wirkung geplant werden, die dann anschließend durch Bahnsegmente ohne Wirkung verbunden werden, die das Werkzeug von einem bearbeiteten Oberflächensegment zu einem als nächstes zu bearbeitenden Oberflächensegment transportieren.

Generell ist damit die konzeptionelle Gliederung der Planung von Werkzeugbahnen in zwei Phasen zweckmäßig: eine *geometrische* und eine *kombinatorische* Planungsphase (siehe [Abbildung 4.1](#)).

Die *geometrische Bahnplanung* befasst sich mit der geometrischen Auslegung von Kurven im Raum, welche die Position des Werkzeugs und optional die Position des Kontaktpunktes zwischen Werkzeug und Bezugsoberfläche abschnittsweise beschreiben. Das Ergebnis der ersten Phase ist somit eine endliche Menge von Werkzeugposen, die zur Lösung einer vorgegebenen Aufgabenstellung erforderlich sind, auf der eine partielle Ordnung definiert ist. Partielle Ordnung bedeutet, dass Werkzeugposen, die auf demselben Bahnabschnitt liegen, aufeinanderfolgend befahren werden, d.h. entsprechend steigender Kurvenlänge oder Zeitstempel. Hingegen ist für Werkzeugposen auf unterschiedlichen Bahnabschnitten keine spezifische Ordnungsbeziehung vorhanden. Die Bahnabschnitte entsprechen somit total geordneten Teilmengen der Menge aller Werkzeugposen. Die partielle Ordnung mittels Bahnabschnitten dient einerseits zur Vorgabe einer aus geometrischer Sicht bevorzugten Bearbeitungsreihenfolge und andererseits zur Vereinfachung der nachfolgenden Verkettung aller Werkzeugposen zu einer globalen Bahn. Die geschilderte diskrete Sichtweise fasst einen Bahnabschnitt als endliche Menge von Punkten auf einer parametrischen Kurve mitsamt der durch den Kurvenparameter induzierten Ordnung auf, und ist dahingehend technisch motiviert, dass die Positionierung eines realen Werkzeugs üblicherweise mittels einer endlichen Folge von Posen erfolgt. Daneben ließe sich aus kontinuierlicher Sichtweise ein Bahnabschnitt auch direkt als Bildbereich einer parametrischen Kurve, d.h. als unendliche Folge von Werkzeugposen auffassen. Der diskrete Bahnabschnitt entspricht dann einer Abtastung des kontinuierlichen Bahnabschnittes.

Die *kombinatorische Bahnplanung* befasst sich mit der Vervollständigung der partiellen Ordnung zu einer totalen Ordnung, die die globale Werkzeugbahn festlegt. Dabei geht es um die Bestimmung einer möglichst optimalen Reihenfolge der Bahnabschnitte, wobei Einschränkungen zu beachten sind. Dazu gehören Maßnahmen zur Kollisionsvermeidung wie die globale Sichtbarkeitsberechnung und Werkzeug(um)orientierung, Entfernung unerreichbarer Positionen, Aufspaltung und Unterteilung von Bahnabschnitten in Bearbeitungsschritte und Einfügung zusätzlicher Verbindungsbahnen („Umleitungen“) zwischen aufeinanderfolgenden Posen, deren direkte Verbindung zur Kollision führen würde.

4.3 Repräsentation von Werkzeugposen und Bahnen

Bei Fertigungsmaschinen, aber auch Robotern, werden Posen von in sich starren Werkzeugen häufig relativ zu einem globalen Bezugskordinatensystem repräsentiert. Für die oberflächenbasierte Bahnplanung bietet sich jedoch auch eine oberflächenbezogene Beschreibung der Werkzeuglage an. Ein wesentlicher Aspekt der oberflächenbasierten Bahnplanung ist die Verwirklichung eines definierten Kontaktes zwischen Werkzeug und Bezugsoberfläche. Die Art des Kontaktes variiert, aus geometrischer Perspektive, je nach Anwendungsszenario zwischen einer unmittelbaren Berührung und mittelbaren Einwirkung des Werkzeugs auf die Bezugsoberfläche.

Ein unmittelbarer Kontakt erfolgt bspw. bei der spanenden Fertigung, indem die Schneidkante des Fräasers stets die Oberfläche des in Fertigung befindlichen Objektes tangiert, vergleiche [Abbildung 1.5b](#). Ein mittelbarer Kontakt erfolgt bspw. beim thermischen Spritzen, indem ein von der Düse ausgehender Spritzkegel in einem bestimmten Mittelpunkt und unter einem bestimmten Winkel auf die zu beschichtende Oberfläche auftrifft, vergleiche [Abbildung 1.5a](#). Der Ort des Kontaktes wird dabei durch die Pose des Werkzeugs relativ zur Bezugsfläche bestimmt.

Die mit den beiden Ansätzen verbundenen Repräsentationsformen für Werkzeugposen ergeben sich wie folgt:

global repräsentierte Pose: Dem Werkzeug ist ein *Reference Frame* zugeordnet, das starr mit seiner Geometrie verbunden ist. Der Ursprung des Referenzframes wird auch als *Werkzeugnullpunkt* oder TCP (*Tool Center Point*) bezeichnet. Die Werkzeugpose wird durch den Ort und die Orientierung des Reference Frame relativ zu einem globalen Koordinatensystem angegeben.

kontaktrelativ repräsentierte Pose: Auf der Oberfläche ist ein Feld von *Contact Frames* definiert. Die Werkzeugposen werden relativ zu den Contact Frames definiert. Dies geschieht durch den Ort und die Orientierung des Referenzframes des Werkzeugs relativ zum Kontaktframe.

Die Repräsentation einer Bahn durch eine Abfolge global repräsentierter Werkzeugposen wird im Folgenden auch *Positionsbahn*, und durch eine Abfolge kontaktrelativ repräsentierter Posen auch *Kontaktbahn* genannt. Dabei beschränkt sich diese Arbeit bei der Positionsbahn jedoch meist auf den TCP, d.h. den Ursprung des Reference Frame.

4.4 Kontaktpunkt- und werkzeugpositionsorientierte Bahnplanung

Bei der oberflächenbasierten Bahnplanung lassen sich hinsichtlich der Bahnplanungsdomäne zwei Ansätze unterscheiden: die *kontaktpunktorientierte Planung* und die *werkzeugpositionsorientierte Planung*. [Abbildung 4.2](#) zeigt den Ablauf der geometrischen Planung vom Zielobjekt zu den Positionsbahnabschnitten mit dieser bereits in [Abbildung 4.1](#) angedeuteten Unterteilung.

Die *kontaktpunktorientierte Bahnplanung* beruht auf einer expliziten Modellierung eines Kontakts zwischen Werkzeug und Bezugsfläche. Dies beinhaltet die Berücksichtigung des Wirkungsortes und der Wirkungsrichtung des Werkzeugs und erfordert dazu die Generierung von Kontaktbahnabschnitten auf einer Bezugsfläche, üblicherweise der Zieloberfläche. Diese Kontaktbahnen müssen anschließend in korrespondierende, den modellierten Kontakt herbeiführende, Werkzeugpositionsbahnabschnitte transformiert werden. Diese Überführung muss einerseits die Lage des Werkzeugs relativ zum Kontaktpunkt entsprechend Soll-Wirkungsrichtung und -Abstand des Werkzeugs berücksichtigen (lokal), und andererseits die Lage des

4.4. Kontaktpunkt- und werkzeugpositionorientierte Bahnplanung 69

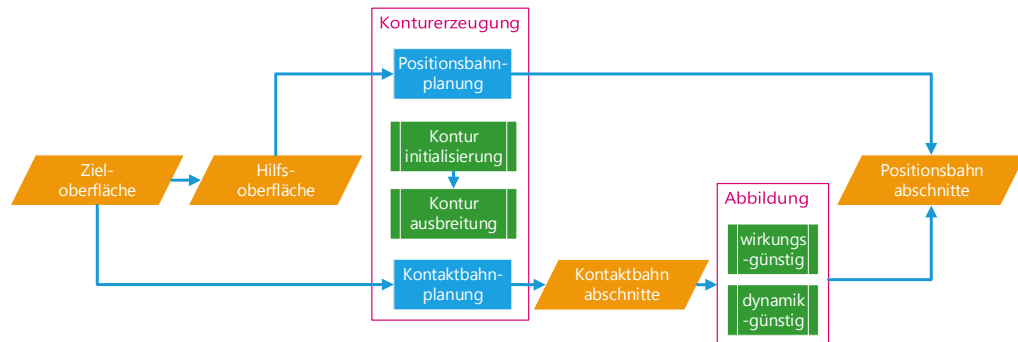


Abbildung 4.2: Kontakt- vs. positionsorientierte Bahnplanung, je nachdem, ob der Definitionsbereich der Konturausbreitung die Bezugsfläche oder eine daraus erstellte Hilfsfläche ist: Ein-/Ausgabegeometrien (orange), Planungsphasen (blau), Arbeitsschritte (grün), Kanten zeigen den Datenfluss vom Zielobjekt zur Werkzeugbahn.

Werkzeugs relativ zur Bezugsfläche (global), um Kollisionen und kinematisch ungünstige Trajektorien zu vermeiden.

Die *werkzeugpositionorientierte Bahnplanung* modelliert ausschließlich und direkt die Werkzeugpose. Dies wird durch Übergang in den Parameterraum der globalen Werkzeugposenrepräsentation erreicht, der auch als Konfigurationsraum bezeichnet wird. Die Oberfläche wird darin durch eine Teilmenge der für die Bahnplanung in Frage kommenden Posen repräsentiert. Eine Bahn ist eine Kurve in diesem Raum, die unter Umständen noch gewisse Randbedingungen erfüllen muss. Die Information über Kontaktmöglichkeiten zwischen Werkzeug und Bezugsfläche ist in diesem Übergang repräsentiert. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Teilmenge möglicher Posen durch eine oder mehrere „Hilfsfläche(n)“ repräsentiert, deren Verlauf relativ zur Bezugsfläche stets eine kollisionsfreie Positionierung des Werkzeugs erlauben soll.

Beide Vorgehensweisen haben Vor- und Nachteile sowie spezifische Anwendungsfälle. Unter bestimmten Voraussetzungen kann es vorteilhaft sein, die Positionsbahn direkt zu generieren, ohne den genauen Ort des resultierenden Kontakts zu berücksichtigen. Zum Ersten erfordert die spanende Formgebung einen Grobbearbeitungsschritt, in dem Rohmaterial aus einem das Zielobjekt umgebenden Volumen entfernt wird, um eine grobe Approximation des Zielobjekts freizulegen. Die Bahnen dieses Bearbeitungsschritts durchqueren systematisch ein das Objekt umgebendes Volumen ohne Kontakt zur Bezugsfläche. Zum Zweiten stellt die positionorientierte Planung weniger Anforderungen an die Qualität der Bezugsfläche und ist weniger komplex und damit auch fehleranfällig als die kontaktorientierte Planung. Durch Verwendung der Offset-Fläche als Hilfsfläche wird das Werkzeug so positioniert, dass sich stets irgend ein Kontakt mit der Bezugsfläche ergibt, ohne Berücksich-

tigung des genauen Ortes oder der Wirkungsrichtung – die Kontaktpunkte ergeben sich dann indirekt durch Projektion der Werkzeugposition auf die Bezugsoberfläche. Dies hat, wie sich herausstellt, den Vorteil einer deutlich geringeren Komplexität und damit auch Fehleranfälligkeit, ist jedoch aufgrund der fehlenden Kontrollierbarkeit der Kontaktpunkte nur für entsprechend einschränkbare Prozesse nutzbar. In der vorliegenden Arbeit dient diese Vorgehensweise zur Erzeugung von Fräsbahnen zur Grobbearbeitung (volumenbasiert, siehe [Kapitel 6](#)) sowie zur Feinbearbeitung mittels Kugelfräsern (offsetflächenbasiert, siehe [Abschnitt 5.1](#)).

Ist dagegen die exakte Kontrollierbarkeit des Kontaktortes auf der Bezugsoberfläche essentiell, so wird zunächst eine Kontaktbahn geplant, welche den Ort und die Richtung der Einwirkung des Werkzeugs auf die Bezugsoberfläche in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, und anschließend in eine geeignete Positionsbahn transformiert. In der vorliegenden Arbeit dient diese Vorgehensweise zur Planung von Werkzeugbahnen zum thermischen Beschichten der Bezugsoberfläche. Im Fokus dieser Arbeit steht dabei nicht die Bestimmung eines fertigungstechnisch optimalen Kontaktbahnverlaufs (siehe [[Kou15](#); [Heg17](#)]), sondern die Transformation von Kontaktbahnen in Werkzeugbahnen, siehe [Kapitel 5](#).

4.5 Implizite Bahnplanung

Im Folgenden wird eine kurze Übersicht über wesentliche Konzepte gegeben, die bei der impliziten Bahnplanung im weiteren Verlauf der Arbeit auftreten werden.

Zentraler Bestandteil der Werkzeugpositionsberechnung in dieser Arbeit ist die implizite Repräsentation der Bezugsoberfläche mittels eines Distanzfelds $\phi : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, welches jedem Punkt \mathbf{x} aus einem geeigneten, die Bezugsoberfläche enthaltenden Volumen $M \subset \mathbb{R}^3$ einen Distanzwert $\phi(\mathbf{x})$ zuweist. Die numerische Repräsentation der Funktion ϕ geschieht durch die Diskretisierung des Definitionsbereichs M durch Abtastung mittels einer endlichen Menge an Stützstellen (Gitterpunkten). Im Rahmen dieser Arbeit werden zur Repräsentation eines Distanzfelds, je nach konkreter Problemstellung, uniforme und adaptive Gitter sowie Sparse Fields gemäß der Darstellung in [Kapitel 2](#) verwendet.

Neben der Bezugsfläche erfordert die Generierung von Werkzeugbahnen noch weitere, ebenfalls implizit definierte Oberflächen:

Offset-Fläche der Bezugsfläche: Die Offset-Fläche der Bezugsfläche resultiert aus der Ausbreitung letzterer mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung der Oberflächennormalen. Diese Ausbreitung lässt sich gemäß [Abschnitt 2.2](#) als Randwertproblem oder als Anfangswertproblem modellieren.

Sichtbarkeitsfläche: Die Sichtbarkeitsfläche, welche in [Kapitel 6](#) zur Generierung von Fräsbahnen zur Grobbearbeitung verwendet wird, resultiert aus der Deformation der Offset-Fläche in Abhängigkeit von der „Blickrichtung“ des Werkzeugs. Diese Deformation führt dazu, dass alle Punkte auf der resultierenden Oberfläche ohne Kollisionen erreichbar sind.

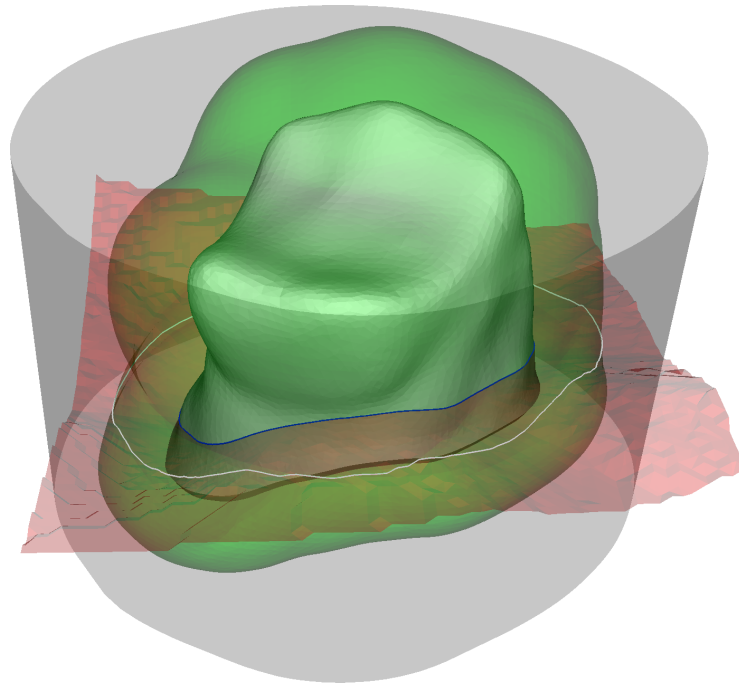


Abbildung 4.3: Bezugsfläche (hellgrau opak), Offset-Fläche (grün transparent), Normalfläche (rot transparent), Außenhülle (grau transparent), Kontaktbahn (blaue Kurve) und Positionsbahn (weiße Kurve) als Schnittmenge aus Offset- und Normalfläche.

Normalfläche: Die Normalfläche, welche in [Abschnitt 5.3](#) und [5.4](#) zur Definition einer Kurve auf der Offset-Fläche dient, resultiert anschaulich aus der Extrusion einer auf der Bezugsfläche definierten Kurve normal zu den Niveaumengen von ϕ . Wenn diese Kurve wiederum implizit mittels eines auf der Bezugsfläche definierten Distanzfelds ψ definiert ist, lässt sich die Normalfläche ebenfalls implizit definieren und in das Distanzfeld ϕ einbetten.

Außenhülle: Die Außenhülle, welche bei der spanenden Fertigung den durch einen Fräser vom Material freizulegenden Bereich eines Rohlings begrenzt, wird implizit mittels eines Distanzfelds ϕ_R repräsentiert.

[Abbildung 4.3](#) zeigt ein beispielhaftes Zielobjekt (Zahnkrone) mitsamt Offset- und Normalfläche sowie der Außenhülle zur Begrenzung des Verfahrbereichs.

4.6 Stand der Wissenschaft

Für einen allgemeinen Überblick über Herangehensweisen zur Planung von Werkzeugbahnen zur spanenden Fertigung sei auf [\[LXG10\]](#) verwiesen. Aktuelle Forschungsfragen der automatisierten Fertigung werden in [\[LLG15\]](#) aufgegriffen und zusammengefasst. Einen umfassenden Überblick über Ansätze zur Generierung von

Werkzeugbahnen für das thermische Spritzen liefern [Heg17; Kou15]. Aus diesem Grund beschränkt sich der Literaturüberblick in der Dissertation vorrangig auf das Anwendungsgebiet der spanenden Fertigung.

Unterschiedliche Ansätze zur Werkzeugbahnplanung lassen sich hinsichtlich der Werkstückrepräsentation unterscheiden, da die gebräuchlichen Darstellungsformen *Freiformflächen*, *Dreiecksnetze*, *Punktwolken* und *Niveaumengen* unterschiedliche Herangehensweisen erfordern. Implizite Repräsentation sind dabei im Kontext von CAM hochaktuell, wie die aufgeführten Referenzen zeigen. Im Unterschied zum „klassischen“ CAM, das auf konstruierten Freiformflächen beruht, beruhen die Werkstücke im dentalen CAM stets auf diskreten Abtastungen [MHK+09] und dementsprechend einer diskreten Darstellungsform.

In der Dissertation erfolgt die Definition von Werkzeugbahnen geometrisch konstruktiv. Eine Alternative dazu ist die Definition von Bahnen als Lösung eines Optimierungsproblems, siehe z.B. [Rad06]. Diese Unterteilung ist jedoch eher konzeptioneller Natur, da sich angesichts der impliziten Definition von Werkzeugpositionsbahnen das repräsentierende Skalarfeld, und damit auch dessen Niveaumengen, stets als Lösung eines Optimierungsproblems auffassen lassen, siehe z.B. [ZZD+14].

In der Dissertation sind die zur Bahnplanung auf Oberflächen verwendeten Distanzfelder stets geodätisch. In [CGH18] wird die Bestimmung *glatter* zweidimensionaler Distanzfelder thematisiert, welche hier als Alternative zum geodätischen Distanzfeld erwähnt seien. Die Vermeidung lokaler Minima im Distanzfeld soll insbesondere zu einem glatten Verlauf von Gradientenkurven führen sowie ein vorzeitiges Terminieren derselben unterbinden. Zu diesem Zweck wird die zur geodätischen Distanz alternative „Divergenzdistanz“ eingeführt. In der Dissertation würde sich mittels dieses Ansatzes unter bestimmten Bedingungen die nachträgliche Glättung von Werkzeugbahn vermeiden lassen.

Eine Untersuchung des Einflusses der Werkzeugorientierung auf die Oberflächenbeschaffenheit beim Fräsen sowie die Bestimmung einer aus fertigungstechnischer Sicht idealen Werkzeugorientierung thematisieren z.B. [ZTX+19; LYL15; OTB09]. Beim thermischen Spritzen ist die ideale Spritzrichtung üblicherweise orthogonal zur Oberfläche. Geometrische, kinematische oder dynamische Einschränkungen können wiederum Abweichungen von der idealen Werkzeugorientierung erforderlich machen.

Die in der Dissertation dokumentierte Idee der Identifikation einer ausgezeichneten Werkzeugorientierung mit Hilfe von Integralkurven eines Distanzfelds ist hochaktuell, und wird auch in [MBI20] erwähnt. Darin ist der Kontext nicht die Generierung von Werkzeugbahnen auf Oberflächen, sondern die Deformation von Oberflächen zur Minimierung einer strukturmechanischen Zielfunktion unter Einhaltung fertigungstechnischer Nebenbedingungen. Die Oberfläche wird dabei als Niveaumenge repräsentiert und mittels der Level-Set-Gleichung deformiert. Die Nebenbedingungen dienen der Verhinderung derjenigen Deformationen, die eine kollisionsfreie Erreichbarkeit mittels eines Fräswerkzeugs gefährden würden, wobei die Erreichbarkeit mit Hilfe besagter Integralkurven entschieden werden kann.

[XL19a; XL19b] zeigen einen Ansatz zur Planung von Bahnen anhand eines digitalen Bildes der Werkstückoberfläche. Diese Herangehensweise vermeidet zwar die Notwendigkeit einer geometrischen Modellierung der Oberfläche des zu fertigenden Werkstücks, ist jedoch auf sehr eingeschränkte Anwendungsszenarien beschränkt.

Neben der *Bahngenerierung* ist auch die *Bahnoptimierung* Gegenstand aktueller Entwicklung. Im Fokus der Bahnoptimierung stehen dabei nicht nur primär fertigungstechnisch relevante Faktoren wie Kinematik, Bearbeitungsdauer oder Oberflächenqualität [AM11], sondern auch der durch eine Werkzeugbahn hervorgerufene Energieverbrauch [LZL+18].

Bahnplanung auf Oberflächen

Inhalt

5.1	Implizite Repräsentation von Bahnen auf Oberflächen . . .	76
5.1.1	Implizite Kontaktbahnen	77
5.1.2	Implizite Werkzeugpositionsbahnen auf Offsetflächen	77
5.2	Überführung von Kontakt- in Positionsbahnen	78
5.3	Offset-Bahnen expliziter Kontaktbahnen	86
5.3.1	Wahl der Abtastpunkte	87
5.3.2	Senken des Gradientenfelds	88
5.3.3	Definitionsbereich des Distanzfelds	89
5.4	Offset-Bahnen implizit gegebener Kontaktbahnen	91
5.4.1	Berechnung von Offset-Kurven	93
5.4.2	Eigenschaften und Einschränkungen	93
5.5	Lokalisation durch Interpolation	100
5.5.1	Werkzeugpositionskurve für einen einzelnen Kontaktpunkt	100
5.5.2	Werkzeugpositionsfläche für eine Kontaktbahn	103
5.5.3	Interpolationsgewichtung	107
5.5.4	Kollisionsvermeidung	108
5.5.5	Dynamikoptimierung	109
5.6	Relaxierte Offset-Positionsbahnen	111
5.6.1	Singularitätsfreie Schleifenbereinigung	111
5.6.2	Konvexe Normalkrümmung	113
5.7	Glättung von Kontakt- und Positionsbahnen	114
5.7.1	Glättung implizit definierter Kurven auf Oberflächen	115
5.7.2	Gemeinsame Glättung von Kontakt- und Positionskurven durch Glättung von Normalflächen	116
5.7.3	Glättung mit der Methode der aktiven Konturen	117
5.8	Stand der Wissenschaft	121

Der Schwerpunkt des Kapitels liegt auf der Ermittlung einer Werkzeugpositionsbahn zu einer gegebenen Kontaktbahn zwischen Werkzeug und Werkstück auf der Bezugsfläche des Werkstücks. Dabei werden die Fälle einer expliziten und

einer impliziten Repräsentation der Kontaktbahn betrachtet. Die implizite Repräsentation der Kontaktbahn geschieht über Niveaulinien eines Distanzfelds auf der Bezugsoberfläche. Für den Fall eines konstanten idealen Wirkabstands und einer idealen Wirkrichtung orthogonal zur Oberfläche werden Verfahren angegeben, die eine möglichst optimale fertigungstechnische Auslegung der Bahnen bei möglichst moderaten Werkzeugbewegungen aufweisen. Der grundsätzliche Ansatz besteht in der Interpolation zwischen Bahnen mit möglichst optimaler fertigungstechnischer Auslegung und kollisionsfreien Bahnen mit möglichst moderaten Werkzeugbewegungen. Letztere sind auf der Offset-Fläche der Bezugsoberfläche mit dem idealen Wirkabstand als Distanz angesiedelt. Abhängig von der Repräsentationsform der gegebenen Kontaktkurve geschieht die Berechnung explizit durch Gradientenabstieg im Distanzfeld der Bezugsoberfläche beziehungsweise implizit unter Verwendung einer impliziten Repräsentation der Normalfläche der Kontaktkurve. Zur Interpolation zwischen den beiden Bahnextremen wird das Konzept der *Werkzeugpositionsfläche* eingeführt, in der potentielle Lösungen liegen.

Unterschiedliche Ursachen führen dazu, dass resultierende Werkzeugbahnen abrupte Positionsänderungen, d.h. „Ecken“, enthalten können. Zum Zwecke einer Kompensation derselben werden abschließend Ansätze zur Glättung von Werkzeugbahnen thematisiert.

5.1 Implizite Repräsentation von Bahnen auf Oberflächen

Die Kontaktbahnen auf einer Bezugsfläche oder die Werkzeugpositionsbahnen auf der entsprechenden Offset-Fläche werden in dieser Arbeit bei der oberflächenbasierten Bahnplanung durch die Ortskurven der Oberflächenkontaktpunkte bzw. der Werkzeugreferenzpunkte repräsentiert. Dabei handelt es sich um Kurven auf Oberflächen, nämlich der Bezugsfläche bzw. der Offset-Fläche.

Eine Möglichkeit, auf die im Folgenden kurz eingegangen wird, ist die Verwendung von Niveaukurven in dynamischen Skalarfeldern ([Abschnitt 2.2](#)) auf Oberflächen $S \subset \mathbb{R}^3$ als Ortskurven. Eine Ortskurve ergibt sich hierbei als Schar $C(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, $i = 0, \dots$ von Niveaukurven (Konturen). In dieser Arbeit werden stationäre dynamische Distanzfelder auf Oberflächen eingesetzt, d.h. $C(t) = \{\mathbf{x} \in S \mid \psi(\mathbf{x}) = t\}$ eines stationären Distanzfelds $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ auf der Oberfläche S . Das bedeutet, dass sich die Kurvenschar, ausgehend von einer vorgegebenen initialen Kontur, mit stets positiver ($\Delta t > 0$) oder stets negativer ($\Delta t < 0$) Ausbreitungsgeschwindigkeit ausbreitet.

Für die Berechnung von ψ für eine Oberfläche S , die durch ein Dreiecksnetz repräsentiert ist, sind mehrere Möglichkeiten bekannt. Eine Vorgehensweise ist die Suche kürzester Wege von der initialen Kontur zu jedem Netzknoten [[BK07](#); [SSK+05](#)]. Ein weiterer Ansatz ist die numerische Approximation der Lösung der Eikonalgleichung (2.18) mittels einer an Dreiecksnetze adaptierten Version von FMM

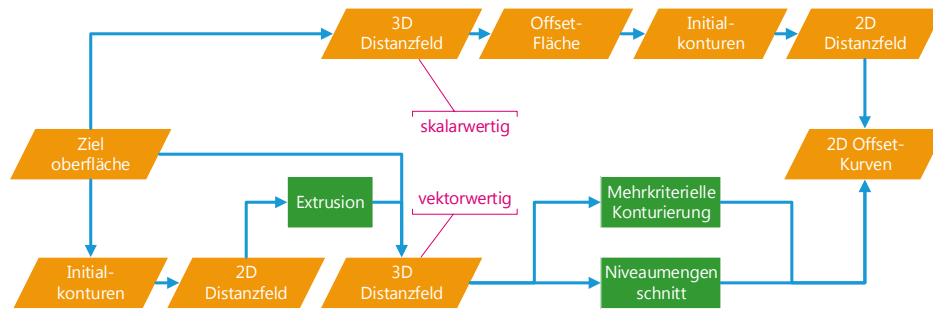


Abbildung 5.1: Vergleich des Ablaufs zur Konturerzeugung mittels eines skalarwertigen (oben) und vektorwertigen (unten) räumlichen Skalarfelds: Ein-/Ausgabegeometrien (orange), Arbeitsschritte (grün), Kanten zeigen den Datenfluss vom Zielobjekt zu den Offset-Konturen.

(*Fast-Marching-Method*) [KS98], FSM (*Fast-Sweeping-Method*) [QZZ07] oder FIM (*Fast-Iterative-Method*) [FJP+11].

5.1.1 Implizite Kontaktbahnen

Eine aus fertigungstechnischer Sicht häufig günstige Wahl der initialen Kontur auf der Bezugsfläche ist die gemäß Abschnitt 3.3 berechnete Menge an Kammlinien der Oberfläche oder eine daran orientierte Kontur. Durch den sich dadurch ergebenden Verlauf der Ortskurve entlang dieser markanten Kanten, und nicht quer dazu, wird bspw. beim Fräsen die Ausfransung oder Zerfurchung des Zielobjekts entlang der Kanten aufgrund von unkontrollierbar wegbrechendem Material vermieden.

Speziell beim Fräsen ermöglicht die Verwendung einer krümmungsabhängigen Metrik anstelle der euklidischen Metrik auf S die Generierung von Bahnen mit konstanter Höhe des Höckers aus Restmaterial, welcher sich zwischen nebeneinander verlaufenden Bahnabschnitten ausbildet („scallop-height“) [Kim07; Kou15]. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_n in Gleichung (2.18) wird damit ortsabhängig.

5.1.2 Implizite Offset-Bahnen auf expliziten Offset-Flächen

Ein Ansatz zur Erzeugung von Werkzeugpositionsbahnen auf der Offset-Fläche einer Zielfläche besteht in der Überführung von Kontaktbahnen auf der Zielfläche in Bahnen auf der Oberfläche, für die das Werkzeug beim Abfahren die gegebene Kontaktbahn realisiert. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 5.2 verfolgt. Ein Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass sie für das Fräsen und das thermische Beschichten anwendbar ist.

Speziell für das Fräsen mit einem kugelförmigen Fräswerkzeug ist die Planung von Werkzeugpositionsbahnen auch direkt auf der Offset-Fläche möglich. Das Verfahren

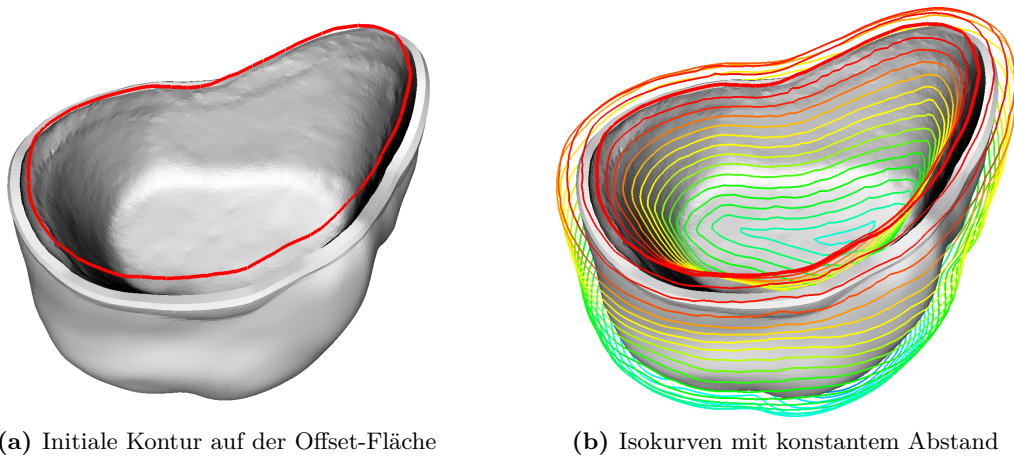


Abbildung 5.2: Beispiel für kantenparallele Isokonturen auf der Offset-Fläche des Modells einer Zahnkrone.

beginnt mit der Überführung der Bezugsfläche Z in eine Offset-Fläche durch die implizite Repräsentation ersterer mittels des skalarwertigen räumlichen Distanzfeldes $\phi : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ von Z (Abbildung 5.1, oben). Dessen Niveaumengen entsprechen den Offset-Flächen von Z . Darauf folgt die Extraktion der zum Fräserradius r korrespondierenden Offset-Fläche O_r , bspw. mit dem Marching-Cubes-Algorithmus, wenn ϕ über einem Gitter diskret repräsentiert ist. Die Ermittlung der Werkzeugpositionsbahnen auf dem resultierenden Dreiecksnetz erfolgt analog zur Berechnung der Kontaktkurven in [Unterabschnitt 5.1.1](#), d.h. indem zunächst Startkonturen in Form von signifikanten Kammlinien von O_r bestimmt werden und dann das dadurch auf O_r definierte Oberflächendistanzfeld $\psi_r : O_r \rightarrow \mathbb{R}$. Dessen Niveaumengen, die mittels eines Marching-Triangle-Algorithmus extrahiert werden können, entsprechen den auf der Offset-Fläche liegenden Werkzeugkontaktbahnen. [Abbildung 5.2](#) zeigt beispielhaft die Auslegung von Werkzeugpositionskurven auf der Offset-Fläche einer Zahnkrone parallel zur Präparationsgrenze.

Ein Nachteil dieser Vorgehensweise ist die Notwendigkeit zur wiederholten Berechnung von Startkonturen und Distanzfeldern bei jeder Änderung des Fräserradius r , da jede Offset-Fläche O_r isoliert behandelt wird. Dies lässt sich durch eine Variante des Ansatzes zur Überführung von Kontaktbahnen auf der Bezugsfläche in Werkzeugbahnen auf der Offset-Fläche vermeiden, der zu Beginn dieses Unterkapitels erwähnt wurde. Dieses Vorgehen ist in [Abbildung 5.1](#), unten, skizziert und wird in [Abschnitt 5.4](#) beschrieben.

5.2 Überführung von Kontakt- in Positionsbahnen

Die Eingabe des im Folgenden behandelten Problems der *Überführung von Kontaktbahnen auf Oberflächen in Werkzeugbahnen* ist eine Ortskontaktbahn auf einer

Oberfläche im Raum, sowie ein Fertigungsprozess mit entsprechendem Werkzeug. Gesucht ist eine Ortspositionsbahn, so dass es eine Bewegung des Werkzeugs in Kontakt mit der Oberfläche gibt, bei der sich der Referenzpunkt (TCP) stetig monoton längs der Ortspositionsbahn, der Kontaktpunkt stetig monoton längs der Ortskontaktbahn bewegt und die folgenden Rahmenbedingungen erfüllt sind:

- *Kollisionsfreiheit*: Die Positionierung des Werkzeugs darf zu keiner Überschneidung zwischen Werkzeug oder Wirkungsbereich und Bezugsfläche führen.
- *ideale Wirkungsrichtung*: Das Werkzeug soll idealerweise mit einer vorgegebenen Orientierung bzw. aus einer vorgegebenen Richtung auf den Kontaktpunkt wirken.
- *idealer Wirkungsabstand*: Der Kontaktpunkt soll sich idealerweise innerhalb der Wirkungsregion des Werkzeugs befinden, d.h. einen vorgegebenen Abstand zu diesem besitzen.
- *Bahnkinematik und -dynamik*: Die resultierende Bahn der Werkzeugposen unterliegt kinematischen und dynamischen Beschränkungen.

Die erste Bedingung, *Kollisionsfreiheit*, bezeichnet die Abwesenheit jeglicher Überschneidungen der Werkzeug- oder Wirkungsbereichsoberfläche mit der Bezugsfläche, die nicht Bestandteil der spezifischen Einwirkung des Werkzeugs auf die Bezugsfläche ist. Die verwendeten Methoden zur Gewährleistung der Kollisionsfreiheit lassen sich in eine lokale und globale Ebene unterteilen. Die *lokale Ebene* thematisiert eine unmittelbare Überschneidung zwischen einer an der Werkzeugposition fixierten Werkzeugoberfläche und der Bezugsfläche, und verhindert diese dadurch, dass der kleinste Abstand zwischen TCP und Bezugsfläche einen vom Werkzeug abhängigen Mindestabstand nicht unterschreiten darf. Ist dieser Mindestabstand kleiner als der Wirkungsabstand, so darf das Werkzeug der Bezugsfläche fernab des Kontaktpunkts näher kommen als dem Kontaktpunkt selbst – der resultierende kleinste Abstand variiert somit zwischen dem vorgegebenen Mindestabstand und dem Wirkungsabstand. Andernfalls sind Mindestabstand und Wirkungsabstand identisch und konstant. Die *globale Ebene* thematisiert mittelbare Überschneidungen mit der Bezugsfläche fernab der Werkzeugposition, entweder durch eine nicht-lokale Wirkungsbereichsoberfläche wie dem Spritzkegel (siehe [Abschnitt 5.5](#)) oder durch die Werkzeugoberfläche bei Bewegung des Werkzeugs entlang der Verbindungskurve zwischen aufeinanderfolgenden Werkzeugpositionen (siehe [Abschnitt 6.2](#) und [6.4](#)). Die Vermeidung derartiger Überschneidungen erfolgt durch Rückführung auf ein geeignetes Sichtbarkeitsproblem.

Während Kollisionsfreiheit eine notwendige („harte“) Bedingung für die Nutzbarkeit des jeweiligen Fertigungsverfahrens ist, stellen die übrigen Faktoren „weiche“ Bedingungen dar, d.h. falls eine Abweichung vom Idealwert zugunsten der übrigen Bedingungen notwendig ist, soll diese Abweichung möglichst minimal sein.

Der zweite und dritte Punkt, Einhaltung von *Wirkungsabstand* und *Wirkungsrichtung*, soll die modellierte Einwirkung des Werkzeugs auf den Kontaktpunkt gewährleisten, bspw. bei der spanenden Fertigung die Spanabhebung mittels der

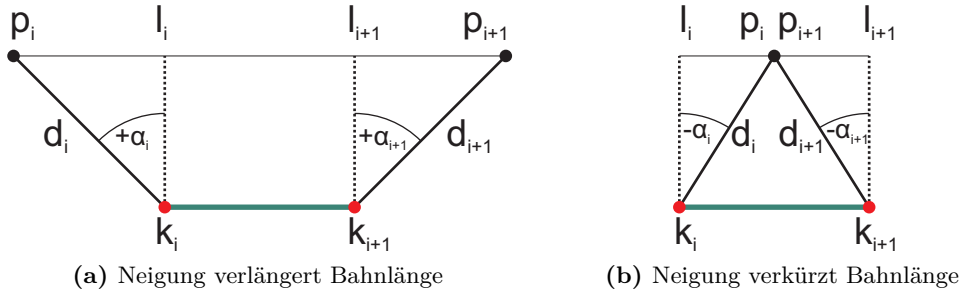


Abbildung 5.3: Approximation von $|\Delta p|$ anhand von $|\Delta k|$ sowie der Neigung α und dem Abstand d zwischen p und k .

in definierter Lage zum TCP befindlichen Schneidkanten, oder beim thermischen Spritzen den Schichtauftrag mit optimalem Spritzabstand und -Winkel. Der Einfluss der Wirkungsrichtung auf die Werkzeugposition hängt dabei von der Wirkungsregion des Werkzeug ab. Auf einer kugelförmigen Fräuserspitze besitzt die Schneidkante einen konstanten (winkelunabhängigen) Abstand zum Mittelpunkt, sodass die Lage des TCP nicht von der Werkzeugrichtung beeinflusst wird. Dagegen weist die Schneidkante eines abgeflachten Fräasers einen richtungsabhängigen Abstand zum Mittelpunkt auf, woraus sich ein von der Wirkungsrichtung abhängiger TCP ergibt. Beim thermischen Spritzen ist ebenfalls der TCP von der Wirkungsrichtung abhängig, um eine Überschneidung der Spritzkegelmittelachse mit dem Kontaktpunkt zu gewährleisten.

Der vierte Punkt, *Bahnkinematik und -dynamik*, soll gewährleisten, dass die tatsächliche Bahn des Werkzeugs auch der modellierten Bahn entspricht. Dazu zählt im Rahmen dieser Arbeit insbesondere, dass die Bewegungsgeschwindigkeit des TCP in einem zulässigen Bereich liegt. Die Bewegungsgeschwindigkeit zwischen aufeinanderfolgenden Werkzeugpositionen $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(t_i)$ und $\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}(t_{i+1})$ ist abhängig von deren örtlichem und zeitlichem Abstand, welcher wiederum vom örtlichen und zeitlichen Abstand der korrespondierenden Kontaktpunkte $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}(t_i)$ und $\mathbf{k}_{i+1} = \mathbf{k}(t_{i+1})$ sowie dem Abstand und der relativen Lageänderung zwischen TCP und Kontaktpunkt abhängt. Für die in [Abbildung 5.3](#) gezeigte zweidimensionale Situation lässt sich die erforderliche Werkzeuggeschwindigkeit folgendermaßen stückweise anhand der Kontaktpunktgeschwindigkeit approximieren:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{p}\|}{\Delta t} \approx \frac{\|\Delta \mathbf{k}\|}{\Delta t} + \frac{d_i \sin(\alpha_i) + d_{i+1} \sin(\alpha_{i+1})}{\Delta t}, \quad (5.1)$$

mit $\|\Delta \mathbf{p}\| = \|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i\|$, $\|\Delta \mathbf{k}\| = \|\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{k}_i\|$, $\Delta t = |t_{i+1} - t_i|$ und $d_i = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i\|$. α_i bezeichnet den zwischen den Strecken $\overline{\mathbf{k}_i \mathbf{p}_i}$ und $\overline{\mathbf{k}_i \mathbf{l}_i}$ eingeschlossenen Winkel, wobei \mathbf{l}_i der Lotfußpunkt von \mathbf{k}_i auf die durch \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_{i+1} verlaufende Gerade ist. Der Winkel α_i ist positiv, wenn \mathbf{p}_i „von \mathbf{k}_{i+1} weg geneigt“ ist, d.h. einen größeren Abstand zu diesem besitzt als \mathbf{l}_i , und umgekehrt. Andernfalls ist α_i negativ, d.h. wenn \mathbf{p}_i „zu \mathbf{k}_{i+1} hin geneigt“ ist. Verlaufen $\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}}$ und $\overline{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_{i+1}}$ gegenläufig („Schleife“), so

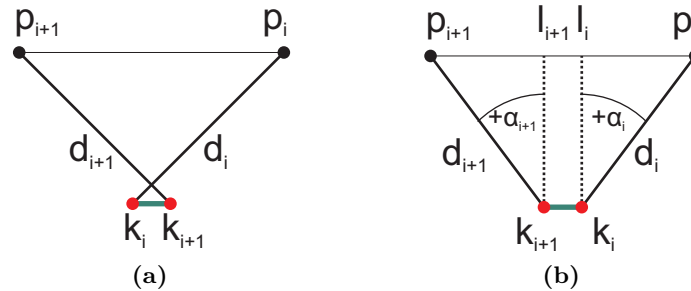


Abbildung 5.4: Verlaufen $\overline{p_i p_{i+1}}$ und $\overline{k_i k_{i+1}}$ gegenläufig (a), erfordert Gleichung (5.1) eine temporäre Schleifenbereinigung (b)

erfordert Gleichung (5.1) eine temporäre Schleifenbereinigung durch Umkehrung von entweder $\overline{p_i p_{i+1}}$ oder $\overline{k_i k_{i+1}}$, siehe Abbildung 5.4.

Die Geschwindigkeit gemäß Gleichung (5.1) ist nur eine Approximation, da sie eine lineare Verbindung zwischen \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_{i+1} voraussetzt sowie eine entsprechende Partitionierbarkeit der Strecke $\overline{p_i p_{i+1}}$ in eine Parallelprojektion der Strecke $\overline{k_i k_{i+1}}$ und einen trigonometrisch bestimmaren Rest. Gleichwohl verdeutlicht die Gleichung den durch den Wirkungsabstand verstärkten Einfluss von Orientierungsänderungen auf die Bewegungsgeschwindigkeit. Wenn $\Delta \mathbf{k}$ gegen Null strebt, und damit auch Δt , können Orientierungsänderungen zu hohen Bewegungsgeschwindigkeiten führen. Dieser Umstand ist insbesondere bei der Überquerung konkaver Oberflächenregionen zu beachten (siehe unten).

Abbildung 5.5 zeigt beispielhafte Konstellationen zwischen Werkzeugposition und Kontaktpunkt in einer zweidimensionalen Illustration. Dabei bezeichnet d_k den resultierenden (Ist-)Abstand zum Kontaktpunkt und d_z den kleinsten Abstand zur Bezugsfläche. Zu erkennen ist, dass in Abhängigkeit vom Verlauf der Bezugsfläche die Einhaltung eines Mindestabstands zu Abweichungen vom Wirkungsabstand und der idealen Wirkungsrichtung des Werkzeugs führen kann. Die Relevanz dieser Abweichungen sind wiederum prozessabhängig. Für den in Abbildung 5.5a schematisierten Kugelfräser liegt \mathbf{k}_2 außerhalb des Wirkungsabstands (Fräserradius) des am nächstgelegenen Punkt \mathbf{p}_2 positionierten Werkzeugs. Dies führt dazu, dass die gefertigte Oberfläche nicht durch \mathbf{k}_2 verläuft, sondern durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie von \mathbf{p}_2 nach \mathbf{k}_2 mit der Wirkungsregion (Halbkreis mit Mittelpunkt \mathbf{p}_2). Das Werkzeug besitzt aufgrund seiner Symmetrie keine ideale Wirkungsrichtung, d.h. jeder Punkt auf der halbkugelförmigen Fräserspitze wäre gleichermaßen zur Spanabhebung an \mathbf{k}_2 geeignet.

Für die in Abbildung 5.5b schematisierte Spritzpistole ist neben dem idealen Spritzabstand auch ein orthogonaler Spritzwinkel erstrebenswert. Beide Werte weichen am Punkt \mathbf{k}_2 von der Vorgabe zugunsten eines konstanten kleinsten Abstands d_z zur Bezugsfläche ab. Die Verringerung des Mindestabstands in Abbildung 5.5c führt dazu, dass der resultierende kleinste Abstand zur Bezugsfläche zwischen dem

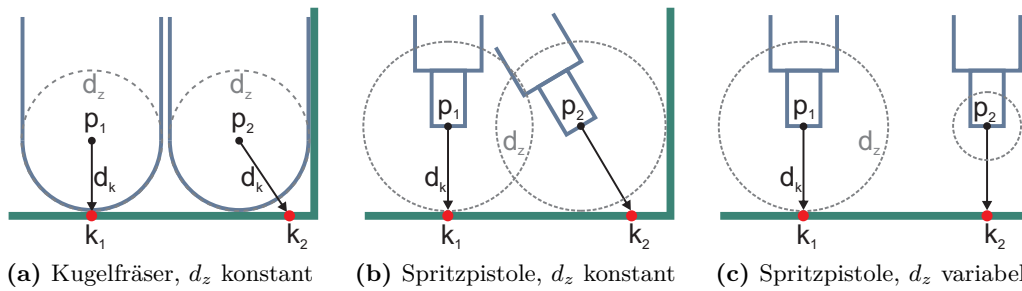


Abbildung 5.5: Veranschaulichung des Abstands zwischen Werkzeug und Kontaktpunkt (Pfeil mit Länge d_k) bzw. Bezugsfläche (Abstandskreis mit Radius d_z) anhand zweier beispielhafter Kontaktpositionen k_1 und k_2 mitsamt nächstgelegener Werkzeugposition p_1 und p_2 .

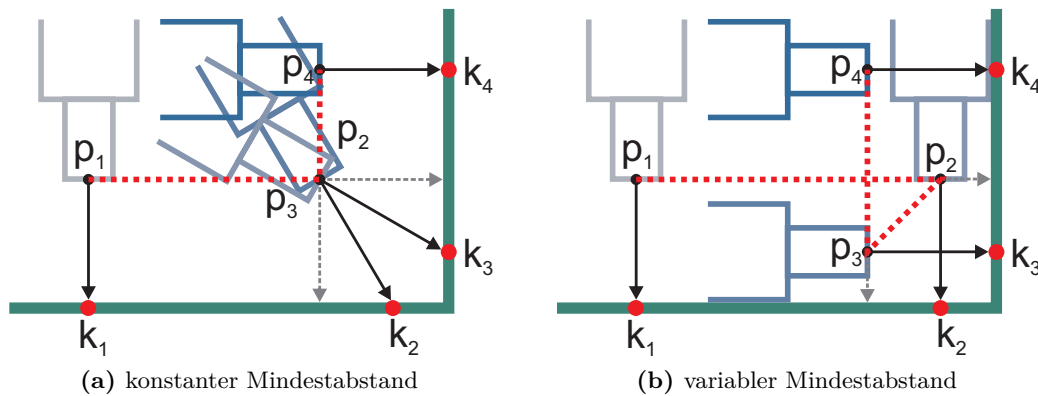


Abbildung 5.6: Resultierende Positionsbahn bei variablem respektive konstantem Mindestabstand zwischen Werkzeug und Bezugsfläche.

idealen Wirkungsabstand und Mindestabstand variiert. Dadurch kann k_2 ohne Abweichung des Spritzabstands und -winkels erreicht werden, und die kritische Region derjenigen Punkte, die eine vom Idealwert abweichende Lagebeziehung zum TCP besitzen, verkleinert sich.

Während in [Abbildung 5.5](#) nur isolierte Werkzeugpositionen berücksichtigt werden, zeigt [Abbildung 5.6](#) die Auswirkung eines konstanten respektive variablen kleinsten Abstands zur Bezugsfläche, wenn aufeinanderfolgende Werkzeugpositionen zu einer Positionsbahn verbunden werden, wiederum illustriert an einem zweidimensionalen Beispiel. Die gestrichelten grauen Pfeile zeigen jeweils auf die Lotpunkte von p_2 und p_3 , d.h. die nächstgelegenen Punkte auf der Bezugsfläche.

Ein variabler kleinster Abstand gemäß [Abbildung 5.6b](#) ermöglicht aufgrund der geringeren Beschränkungen eine geringere Abweichung von Wirkungsabstand und Wirkungsrichtung, da das Werkzeug der Bezugsfläche fernab des Kontaktpunktes näher kommen darf als dem Kontaktpunkt selbst. Problematisch ist dabei jedoch

die Entstehung schleifenförmiger Bahnsegmente über konkav gekrümmten Bezugsflächenregionen, mit Umkehrpunkten und einem ungünstigen Verhältnis zwischen Werkzeugpositions- und Kontaktpunkt Abstand. Für einen zeitkritischen Prozess wie dem thermischen Spritzen bedeutet dieser Umstand sprunghaft hohe Bewegungsgeschwindigkeiten, um innerhalb eines durch einen kleinen Kontaktpunkt Abstand determinierten kleinen Zeitintervalls eine große Positionsänderung zu vollziehen, siehe Gleichung (5.1). Des Weiteren erfordert eine punktuell hohe Bahnkrümmung sprunghafte Richtungsumkehrungen, um dem schleifenförmigen Bahnverlauf zu folgen. Diese beiden Aspekte, sprunghafter Geschwindigkeitsanstieg und Richtungsumkehr, können zu Abweichungen zwischen tatsächlicher und modellierter Werkzeugbahn hinsichtlich Werkzeugposition oder -Geschwindigkeit führen. Der Grund ist, dass die Einhaltung der Position ein Abbremsen und Beschleunigen am Umkehrpunkt und damit eine Verletzung der Geschwindigkeit erfordert, während die Einhaltung der Geschwindigkeit zur einer approximierenden Bahn fernab des Umkehrpunktes führt. Eine Positionsabweichung beeinträchtigt wiederum Wirkungsabstand und -Richtung, und eine Geschwindigkeitsabweichung die Wirkungsdauer. Zusammengefasst bedeutet dies, dass die Erzielung einer geringeren *modellierten Abweichung* von Wirkungsabstand und -Richtung durch eine höhere *reale Abweichung* von Wirkungsabstand, -richtung und -dauer „erkauft“ wird.

Ein konstanter kleinster Abstand gemäß [Abbildung 5.6a](#) führt zur Vergrößerung der Menge an Kontaktpunkten mit Abweichungen vom idealen Wirkungsabstand und -winkel, da der Abstand d_z zum nächstgelegenen Punkt auf der Bezugsfläche stets dem Wirkungsabstand d_k entspricht, unabhängig davon, ob dieser nächstgelegene Punkt der Kontaktpunkt ist. Vorteilhaft ist dabei jedoch die Schleifenfreiheit der resultierenden Bahnen, und die damit verbundene Vermeidung von Umkehrpunkten und sprunghaften Geschwindigkeitsänderungen. In diesem Fall steht einer höheren *modellierten Abweichung* von Wirkungsabstand und -richtung eine geringere *reale Abweichung* von Wirkungsabstand, -richtung und -dauer aufgrund eines schleifenfreien und damit kinematisch günstigeren Bahnverlaufs gegenüber.

Unter Berücksichtigung der Bahnkinematik und -dynamik erscheint es also sinnvoll, gewisse modellierte Abweichungen zugunsten einer Verringerung realer Abweichungen zu erlauben. Diesen Weg gehen die im Folgenden präsentierten Ansätze zur Lösung des Problems der Überführung von Ortskontaktbahnen auf Oberflächen in Ortspositionsbahnen. Dabei wird angenommen, dass der ideale Wirkungsabstand konstant längs der Bahn ist und die ideale Wirkungsrichtung kollinear zur Oberflächennormalen am Kontaktpunkt. Die entscheidende Idee ist, die beiden in obiger Erklärung und [Abbildung 5.6](#) aufgezeigten Fälle als zwei extremale Positionierungsstrategien aufzufassen:

- Die *dynamikgünstige* Lösung positioniert das Werkzeug am dem Kontaktpunkt nächstgelegenen Punkt auf der Offset-Fläche des Wirkungsabstands, und bewirkt somit einen konstanten kleinsten Abstand zur Bezugsfläche ([Abbildung 5.5b](#) und [5.6a](#)).

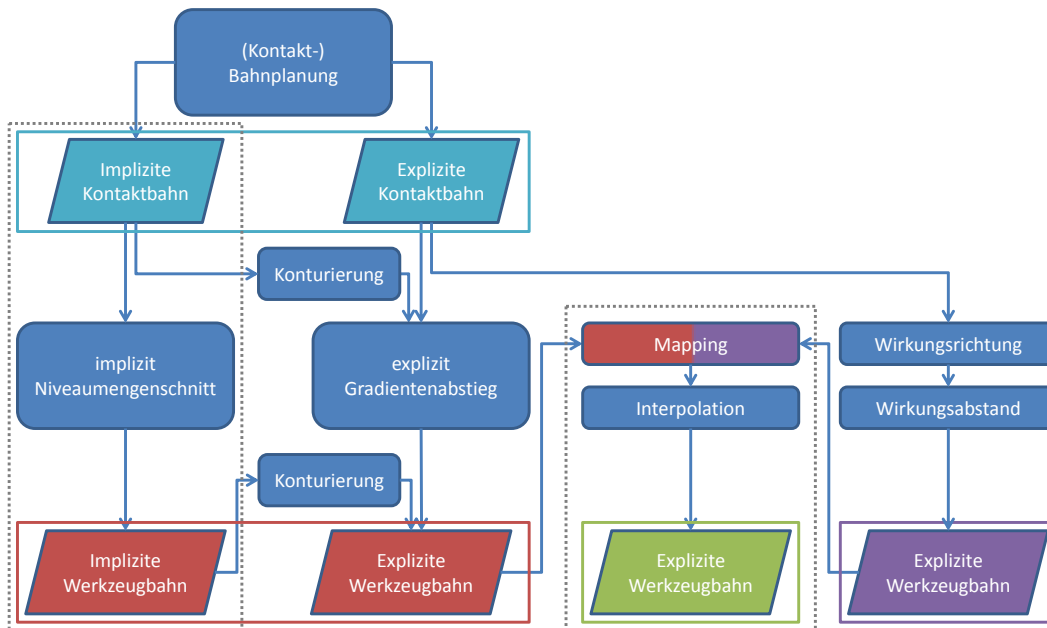


Abbildung 5.7: Übersicht der Ansätze zur Überführung einer Kontaktbahn in eine Positionsbahn.

- Die *wirkungsgünstige* Lösung positioniert das Werkzeug entsprechend der idealen Wirkungsrichtungen und -abstände unter Vernachlässigung des resultierenden kleinsten Abstands zur Bezugsfläche (Abbildung 5.5c und 5.6b). Dies erlaubt insbesondere Kollisionen mit der Bezugsfläche.

Die dynamikgünstige Lösung ist in dreierlei Hinsicht als ausgezeichnet anzusehen:

- Kollisionsfreiheit: alle Punkte der Offset-Fläche besitzen einen konstanten Mindestabstand zur Kontaktfläche,
- Mannigfaltigkeit: aufgrund der Definition als Niveaumenge ist die Offset-Fläche mannigfaltig, d.h. selbstüberschneidungsfrei,
- Die implizite Repräsentation ermöglicht methodische Vereinheitlichung der positions- und kontaktbasierten Bahngenerierung.

Je nach Werkzeug oder Bezugsfläche können die beiden Fälle auch identisch sein. So sind beim Kugelfräser der ideale Wirkungsabstand und Mindestabstand zur Bezugsfläche stets identisch, sodass jede tangierende und kollisionsfreie Werkzeugposition notwendigerweise auf der Offset-Fläche liegt. Wenn die Bezugsfläche entweder konvex gekrümmt, oder bei konkaver Krümmung der Radius der größten Hauptkrümmung größer als der Wirkungsabstand ist, sind die beiden Fälle ebenfalls identisch. Eine Methode zur Identifikation derjenigen Regionen auf einer Oberfläche, in denen sich die beiden Fälle unterscheiden, wird in [Abschnitt 3.2](#) beschrieben.

Abbildung 5.7 gibt eine Übersicht der in der Arbeit präsentierten Vorgehensweisen zur Überführung von Kontaktbahnen in Positionsbahnen. Die dynamikgünstige

Positionierung (linke Hälfte der Abbildung) bildet die Kontaktkurve $K \subset Z$ auf kürzestem Weg im Distanzfeld der Bezugsfläche von der Bezugsfläche Z auf deren Offset-Fläche O ab.

Dies wird für zwei Varianten der Repräsentation der Kontaktkurve ausgeführt, in impliziter Repräsentation gemäß [Abschnitt 5.1](#) sowie in expliziter Repräsentation durch eine Folge von Stützstellen. In der expliziten Repräsentation erfolgt die Berechnung durch punktuelle Verfolgung des kürzestmöglichen Weges vom Kontaktpunkt zur Offset-Fläche mittels Gradientenabstieg im Distanzfeld, siehe [Abschnitt 5.3](#). In der impliziten Repräsentation ergibt sich die Werkzeugpositionskurve als Schnitt zwischen der Offset-Fläche und der Normalfläche der Kontaktkurve. Hierzu wird die Normalfläche implizit als Niveaumenge in einem geeignet definierten Skalarfeld repräsentiert, so dass sich die gewünschte Kurve als Niveaumengenschnitt ergibt, siehe [Abschnitt 5.4](#). Bei beiden Repräsentationsformen ergibt sich eine Werkzeugpositionskurve in expliziter bzw. in impliziter Darstellung (roter Rahmen in [Abbildung 5.7](#)).

Die wirkungsgünstige Positionierung (violetter Rahmen in [Abbildung 5.7](#)), welche sämtliche Nebenbedingungen wie Kollisionsfreiheit oder Bahnkinematik vernachlässigt, ist eindeutig durch die ideale Wirkungsrichtung und den idealen Wirkungsabstand des Werkzeugs festgelegt und wird im hier betrachteten Fall explizit repräsentierter Kontaktkurven für jeden Kontaktpunkt isoliert ermittelt.

Die Kompromisslösung (grüner Rahmen) stellt einen Mittelweg aus beidem dar und dient zur kontrollierten Relaxation der idealen Werkzeugposition mit dem Ziel, einen aus geometrischer (Kollisionsvermeidung) oder dynamischer (Beschleunigungsreduktion) Sicht günstigeren Bahnverlauf zu erreichen. Die Berechnung der Kompromisslösung geschieht für explizit repräsentierte Werkzeugpositionskurven. Aus diesem Grund ist eine Konvertierung von impliziter in explizite Darstellung möglich (in der linken Seite der Abbildung). [Abschnitt 5.5](#) ist den Details der Kompromissbahnberechnung gewidmet, wobei insbesondere die Kollisionsvermeidung und die adaptive Bahnlättung als Anwendungsbeispiele behandelt werden.

[Abbildung 5.8](#) veranschaulicht die konzeptuelle Idee der Kompromisslösung, ausgehend von den beiden extremalen Lösungen. Mit Annäherung an die dynamikgünstige Lösung kollabiert die Schleife in der Positionsbahn nahezu zu einem Punkt und die Bahnlänge und damit die Bahngeschwindigkeit nehmen bis auf nahezu Null ab. Die Einhaltung der vorgegebenen Kontaktpunktgeschwindigkeit wird über einen Schwenk gewährleistet. Dieser möglicherweise rasche Übergang von TCP-Bewegung zu einem Schwenk kann Schwierigkeiten bezüglich der Dynamik bei der Ausführung bereiten. Aus diesem Grund wird ein Ansatz zur Relaxation von Offset-basierten Positionsbahnen präsentiert. Idee dabei ist, die Offset-Bahn zunächst auf einer Offset-Fläche mit größerer als der gewünschten Distanz zu ermitteln und diese dann längs der Strecken zwischen Offset-Punkt und korrespondierendem Kontaktpunkt auf die gewünschte Offset-Fläche zu projizieren, siehe [Abschnitt 5.6](#).

Die berechneten Bahnen erfordern eine Glättung, um praktisch anwendbar zu sein. [Abschnitt 5.7](#) thematisiert entsprechende Ansätze zur Glättung sowohl der Kontakt- als auch Werkzeugpositionsbahnen.

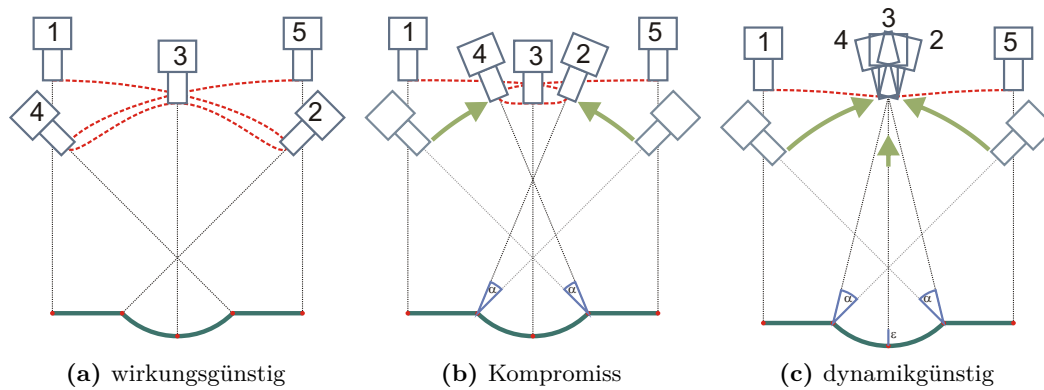


Abbildung 5.8: Veranschaulichung des Übergangs zwischen zwei extremalen Werkzeugposen in (a) und (c) mitsamt Kompromisslösung in (b)

5.3 Offset-Bahnen expliziter Kontaktbahnen mittels Gradientenabstieg

Ausgangspunkt der Berechnung von Offset-Bahnen explizit gegebener Kontaktbahnen ist eine explizit gegebene Kontaktkurve K auf einer Bezugsfläche Z . Die korrespondierende Offset-Bahn $f(K)$ ergibt sich durch Abbildung jedes Kontaktpunkts $\mathbf{p} \in K$ auf den nächstgelegenen Punkt auf der Offset-Fläche:

$$f(K) = \{f(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in K\}. \quad (5.2)$$

Der Punkt $f(\mathbf{p})$ ist derjenige Punkt auf der in \mathbf{p} startenden Normalkurve aus [Abschnitt 3.1](#), dessen kleinster Abstand zu Z gleich dem Offset der Offset-Fläche ist. [Abbildung 5.9](#) illustriert dies auf kontinuierliche Weise durch Betrachtung der Normalfläche. Die *Normalfläche* einer Oberflächenkurve K wird von der Familie der Normalkurven aller Punkte von K aufgespannt. [Abbildung 5.9](#) zeigt beispielhaft die zu zwei Kontaktkurven auf der Bezugsfläche korrespondierenden Normalflächen.

Der resultierende Wirkungswinkel und -abstand ergibt sich anhand der Verbindungslinie zwischen Werkzeugposition $f(\mathbf{p})$ und Kontaktpunkt \mathbf{p} , und wird damit nur vom Verlauf der Bezugsfläche und einem vorgegebenen werkzeugabhängigen Mindestabstand (Offset) determiniert, jedoch nicht vom idealen Wirkungsabstand und -winkel.

Dieses Verfahren berücksichtigt insbesondere auch die Schwierigkeiten, die sich aus der Medialachse ergeben. Diese Schwierigkeiten bestehen darin, dass die Abbildung auf den kritischen Regionen aus [Abschnitt 3.2](#) nicht injektiv ist. Dadurch kann es insbesondere geschehen, dass es Kontaktpunktsegmente geben kann, die auf einen einzigen Punkt einer Positionsbahn abgebildet werden. Dies entspricht einem Schwenk des Werkzeugs um seinen TCP, der die Kontaktpunkte überstreicht.

Für die algorithmische Berechnung der Offset-Kurve wird die Kontaktkurve abgetastet und durch einen Polygonzug näherungsweise repräsentiert. Die Offset-

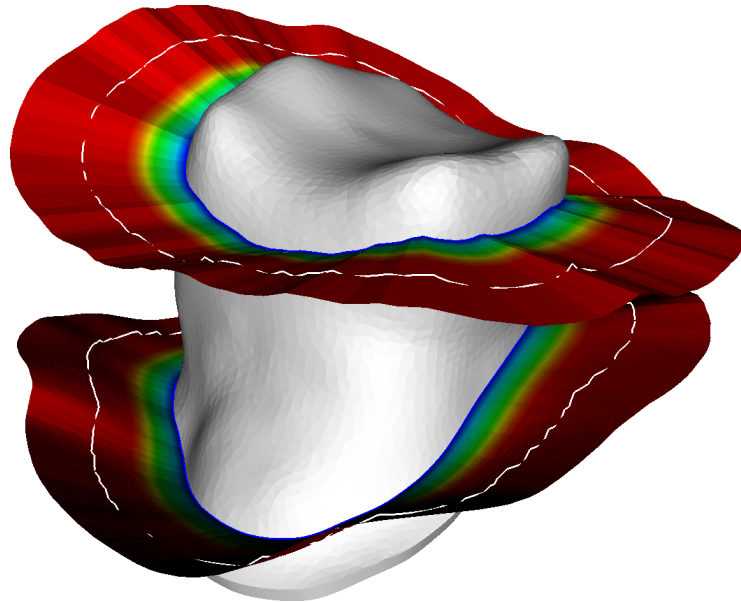


Abbildung 5.9: Normalflächen zu zwei Kontaktkurven auf der Bezugsfläche, mit-
samt zweier beispielhafter Offset-Bahnabschnitte (weiße Kurve
auf Normalfläche).

Kurve ergibt sich durch Berechnung der Bildpunkte der Abtastpunkte durch ein Verfahren der (näherungsweise) Normalkurvenberechnung, die dann durch einen Polygonzug verbunden werden. In Bezug auf die Qualität des Ergebnisses und der Effizienz der Berechnung sind die folgenden Aspekte relevant, auf die in den drei nachfolgenden Abschnitten eingegangen wird:

1. Wahl der Abtastpunkte,
2. Senken des Gradientenfeldes,
3. Bereitstellung des relevanten Teils des Distanzfeldes.

5.3.1 Wahl der Abtastpunkte

Der erste Aspekt befasst sich damit, dass die aus der Verbindung der Offset-Punkte resultierende Polygonkurve nicht notwendigerweise auf der Offset-Fläche liegt. Die Verbindungssegmente weisen eine von der Divergenz der Normalkurven abhängige Abweichung zur Offset-Fläche auf, wie [Abbildung 5.10](#) zeigt, und bedürfen demnach einer Korrekturmaßnahme („Offset-Korrektur“). Diese kann durch Unterteilung entweder der Kontakt- oder Offset-Kurve erfolgen. In dieser Arbeit wird die Unterteilung der Offset-Kurve aus den folgenden beiden Gründen bevorzugt. So hat eine Unterteilung der Kontaktkurve keinerlei Auswirkungen im Falle der stützstellenbasierten Approximation des Gradientenabstiegs (s.u.), da in diesem Fall die resultierende Abweichung durch die Divergenz der Normalkurven der Stützstellen

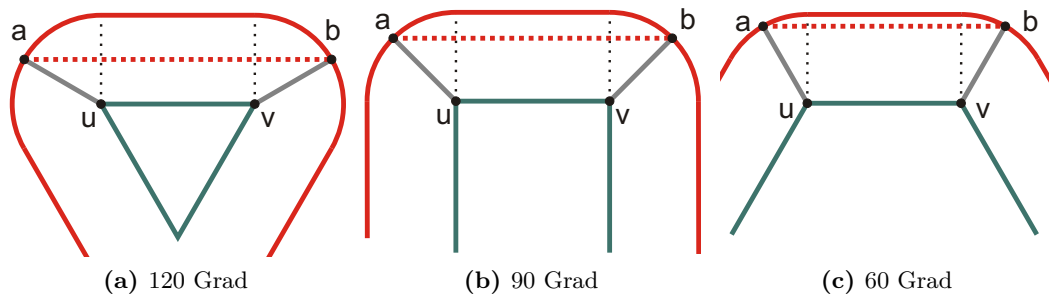


Abbildung 5.10: Abhängigkeit des Knotenpunktabstands einer auf die Offset-Fläche (rot) abgebildeten Kurve (rot gestrichelt) sowie der Abweichung zur Offset-Fläche von der Divergenz der Normalkurven (grau) der Bezugsfläche (grün).

(Knoten der Bezugsfläche) determiniert wird, welche sich durch Verdichtung der Kontaktpunkte nicht ändert. Ferner ist die Identifikation geeigneter Unterteilungspunkte auf der Kontaktkurve aufgrund der nichtlinearen Abbildung auf die Offset-Kurve aufwendiger. Bspw. führt eine äquidistante Unterteilung der Kontaktkurve nicht notwendigerweise zu einer äquidistanten Unterteilung der Offset-Kurve.

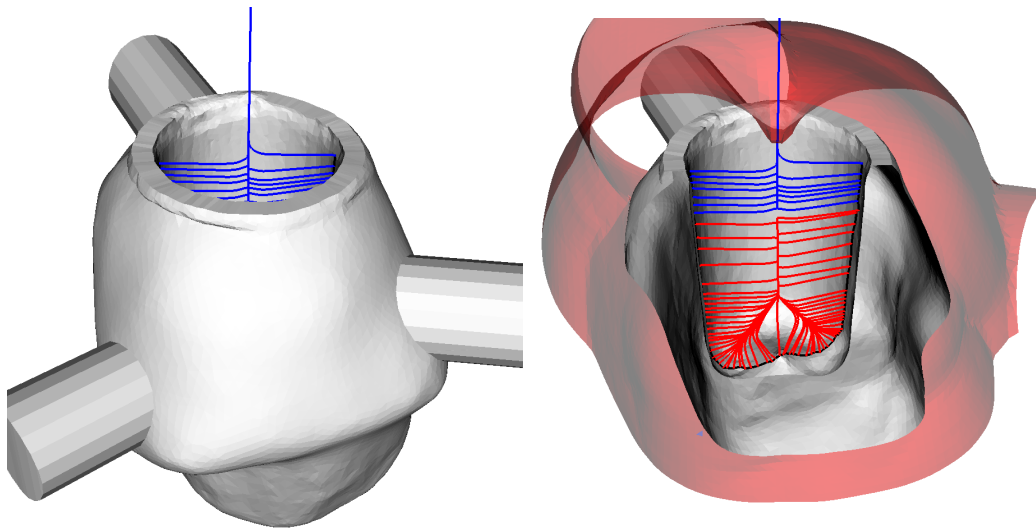
Die Offset-Korrektur der Verbindungsstrecken der approximierenden Offset-Kurve resultiert aus einer iterativen Unterteilung gemäß folgender Schritte:

1. Suche/Einfügen eines Punktes \mathbf{p} auf der approximierenden Offset-Kurve mit maximaler Abweichung zur Offset-Fläche als weitere Stützstelle der approximierenden Offset-Kurve.
2. Abbildung von \mathbf{p} auf die Offset-Fläche mittels Gradientenabstieg.

5.3.2 Senken des Gradientenfelds

Der zweite Aspekt thematisiert die Tatsache, dass diejenigen Kontaktpunkte, deren Normalkurve vor dem Schnitt mit der Offset-Fläche terminiert, keinen korrespondierenden Punkt auf der Offset-Fläche besitzen. Anschaulich tritt diese Situation dort auf, wo eine Erhöhung des Abstands zum Startpunkt zu keiner Erhöhung des kleinsten Abstands zur Bezugsfläche führt. Eine derartige Senke ist ein Punkt auf der Medialachse, an dem der Gradient des auf die Medialachse beschränkten Distanzfelds verschwindet [VSP08]. Durch den Wegfall derjenigen Kontaktpunkte, die kein Abbild der Offset-Fläche besitzen, zerfällt die zur betroffenen Kontaktkurve korrespondierende Werkzeugpositionsbahn in einzelne Kurvenabschnitte, welche nachträglich wieder zu einer Kurve verbunden werden müssen.

Abbildung 5.11 zeigt eine beispielhafte Situation, in der eine Teilmenge des durch ein Bohrloch führenden Kontaktbahnabschnittes kein Abbild auf der Offset-Fläche besitzt. Die rot markierten Normalkurven terminieren in einer Senke des Gradientenfeldes.



(a) Gesamtes Modell mit Bohrloch

(b) Querschnitt mitsamt Offset-Fläche

Abbildung 5.11: Beispiel für vorzeitige Terminierung von Normalkurven: Modell einer Zahnkrone mit durch ein Bohrloch führender Kontaktbahn.

5.3.3 Definitionsbereich des Distanzfelds

Der dritte Aspekt betrifft den aus algorithmischer Sicht gravierenden Nachteil des Gradientenabstiegs, dass für jeden zwischen der Ziel- und Offset-Fläche liegenden Punkt \mathbf{x} potentiell der Gradient $\nabla\phi$ des Distanzfelds ϕ bestimmt werden muss. Die Möglichkeit zur Bestimmung des Gradienten erfordert wiederum die Verfügbarkeit – und damit bei direkter Vorgehensweise die Speicherung – von ϕ im gesamten Zwischenraum, obwohl diese Region hinsichtlich Geometrierepräsentation irrelevant ist. Dieser Nachteil erweist sich als umso kritischer, je größer der Wirkungsabstand des Werkzeugs, und damit auch der Abstand zwischen Ziel- und Offset-Fläche, ist, da bspw. der Speicherverbrauch eines regulären Gitters kubisch mit dem Wirkungsabstand ansteigt.

Aus diesem Grund erscheint ein Vorgehen vorteilhaft, welches ohne die Speicherung des Distanzfelds in der – aus geometrischer Sicht irrelevanten – Region zwischen der Ziel- und Offset-Fläche auskommt. Der Definitionsbereich von ϕ kann dann auf diejenige Teilmenge von \mathbb{R}^3 beschränkt werden, die zur Lokalisation der Offset-Fläche erforderlich ist, ohne zusätzlich auch den Weg von der Ziel- zur Offset-Fläche repräsentieren zu müssen. Ein adaptives Gitter speichert ϕ dann nur nahe der Offset-Fläche, während alle übrigen Regionen undefiniert bleiben.

Drei Vorgehensweisen bieten sich zur Beschränkung des Definitionsbereichs an:

1. *Narrow-Band*: Berechnung der Normalkurven mittels Gleichung (3.15) innerhalb eines schmalen Bandes, in dem ϕ definiert ist, und gleichzeitige Ausbreitung des Bandes und der Normalkurven von der Bezugsfläche weg.

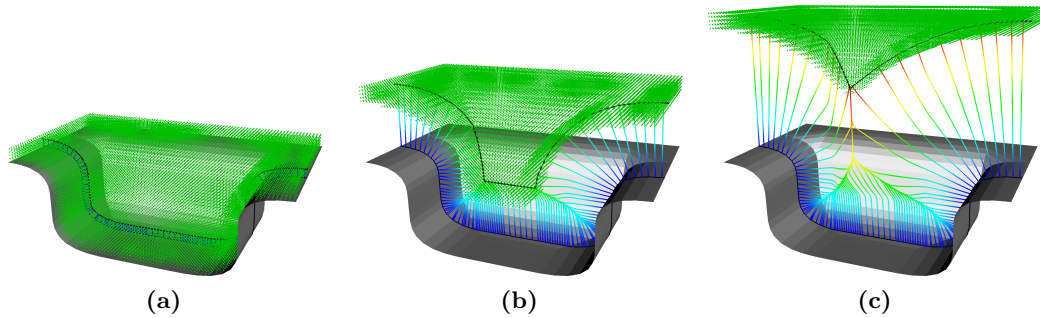


Abbildung 5.12: Verknüpfte Berechnung eines Distanzfeldausschnitts und der Punkttrajektorien. Die grünen Punkte markieren diejenigen Gitterpunkte, an denen das Distanzfeld definiert ist.

2. *Funktionsapproximation:* Berechnung der Normalkurven für eine vorgegebene Menge an Stützstellen auf der Bezugsfläche und Interpolation eines beliebigen Punktes anhand der Stützstellen.
3. *Implizite Definition der Normalfläche:* Erweiterung von ϕ um eine weitere Komponente zur zusätzlichen impliziten Repräsentation der Normalfläche.

Das erste Vorgehen entspricht einer (Neu-)Berechnung von ϕ parallel zur Berechnung der Normalkurven, um zu gewährleisten, dass ϕ stets in demjenigen Band definiert ist, welches aktuell zur Berechnung des Gradienten in [Gleichung \(3.15\)](#) erforderlich ist. Die Berechnungen von ϕ und sämtlicher Normalkurven erfolgen somit gleichzeitig und inkrementell mit wachsendem Abstand zur Bezugsfläche, siehe [Abbildung 5.12](#). Der Vorteil dieser Methode ist die größtmögliche Exaktheit bei der Lokalisierung des zu einem Kontaktpunkt gehörigen Offset-Punktes im Vergleich zu den Alternativen. Ein Nachteil ist dagegen, dass jede nachträglich hinzukommende Kontaktposition die erneute Berechnung des gesamten Distanzfelds erfordert.

Das zweite Vorgehen ergänzt das erste durch Auffassung der Abbildung eines Kontaktpunktes auf seinen nächstgelegenen Offset-Punkt als Funktion $f : Z \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow O \subset \mathbb{R}^3$, welche mittels einer endlichen Menge an Stützstellen $\{\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_{n-1}\}$ approximiert wird. Für die Stützstellen erfolgt die Berechnung der Offset-Punkte exakt mittels [Gleichung \(3.15\)](#) mit dem obigen Narrow-Band Vorgehen. Die Abbildung eines beliebigen Punktes $\mathbf{z} \in Z$ erfolgt daraufhin durch Interpolation der Abbildungen der Stützstellen gemäß

$$\tilde{f}(\mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(\mathbf{z}) f(\mathbf{z}_i) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{n-1} w_i(\mathbf{z}) = 1. \quad (5.3)$$

Die Gewichtung $w_i(\mathbf{z})$ setzt eine topologische Struktur auf dem Definitionsbereich voraus, d.h. eine Nachbarschaft des Eingabepunktes zu den Stützstellen. Die Knotenmenge des die Fläche Z approximierenden Dreiecksnetzes dient als Stützstellenmenge, und die Gewichtung der Stützstellen entspricht den baryzentrischen Koordinaten

des Punktes \mathbf{z} bezüglich des den Punkt enthaltenden Dreiecks, wobei die Gewichte aller übrigen Stützstellen, die keine Eckpunkte des Dreiecks sind, auf 0 gesetzt werden. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass die Abbildung eines beliebigen Punktes $\mathbf{z} \in Z$ auf die Offset-Fläche ohne Berücksichtigung von ϕ und dessen Definitionsbereich erfolgt. Der Nachteil liegt in einer von der Stützstellenverteilung und Normalkurvendivergenz abhängigen Approximationsgüte.

Das dritte Vorgehen ersetzt die bisherige explizite Definition der Normalfläche als eine von Normalkurven aufgespannte Fläche durch eine implizite Definition der Normalfläche als Niveaumenge des Distanzfelds ϕ , welches zu diesem Zweck um eine oder mehrere zusätzliche Komponente(n) erweitert wird. Dies wird in [Abschnitt 5.4](#) thematisiert.

5.4 Offset-Bahnen implizit gegebener Kontaktbahnen mittels Niveaumengenschnitt

Ausgangspunkt der Berechnung impliziter Offset-Bahnen ist eine implizite Repräsentation der Kontaktkurve K als Niveaumenge eines auf der Bezugsfläche Z definierten Distanzfelds $\psi : Z \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist die korrespondierende implizit repräsentierte Positionsbahn auf der implizit repräsentierten Offset-Oberfläche.

Der Lösungsansatz besteht nun darin, nicht die Punkte der Kontaktbahn selbst auf kürzestem Wege auf die Offset-Fläche abzubilden, sondern das die Kontaktbahn auf der Bezugsfläche repräsentierende Distanzfeld ψ . Durch Extrusion von ψ senkrecht zur Bezugsfläche in den umgebenden Raum wird aus dem flächigen Distanzfeld ψ ein räumliches Skalarfeld $\omega : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dieses weist jedem Punkt $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ den Wert des Distanzfelds ψ am nächstgelegenen Punkt $\mathbf{p} \in Z$ zu, d.h. es gilt

$$\omega(\mathbf{q}) = \psi(\mathbf{p}) \quad \text{mit } \mathbf{p} \in Z : d_Z(\mathbf{q}) = d(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (5.4)$$

Aus einer eindimensionalen Kontur von ψ (Kurve K auf der Bezugsfläche) wird auf diese Weise eine zweidimensionale Kontur von ω (Fläche N im umgebenden Raum). Deren Schnittmenge mit der Bezugsfläche entspricht der ursprünglichen Kontur K .

Das Bild $f(K) \subset O$ einer als s -Niveaumenge von ψ repräsentierten Kontaktkurve $K \subset Z$ auf der als r -Niveaumenge von ϕ repräsentierten Offset-Fläche O ist die Schnittkurve zwischen den Flächen O und N :

$$f(K) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(\mathbf{x}) = r \wedge \omega(\mathbf{x}) = s\} \quad (5.5)$$

$$\text{mit } K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(\mathbf{x}) = 0 \wedge \omega(\mathbf{x}) = s\}. \quad (5.6)$$

Die Fläche $N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \omega(\mathbf{x}) = s\}$ soll im Folgenden auch die zur (impliziten) Kurve K korrespondierende (*implizite*) *Normalfläche* genannt werden. Diese hängt konzeptionell mit der in [Abschnitt 5.3](#) konstruierten (expliziten) Normalfläche einer expliziten Kontaktkurve zusammen, siehe [Abschnitt 5.4.2](#). In beiden Fällen resultiert die zur Kontaktbahn K zugehörige Offset-Bahn $f(K)$ als Schnittmenge der Normalfläche mit der Offset-Fläche.

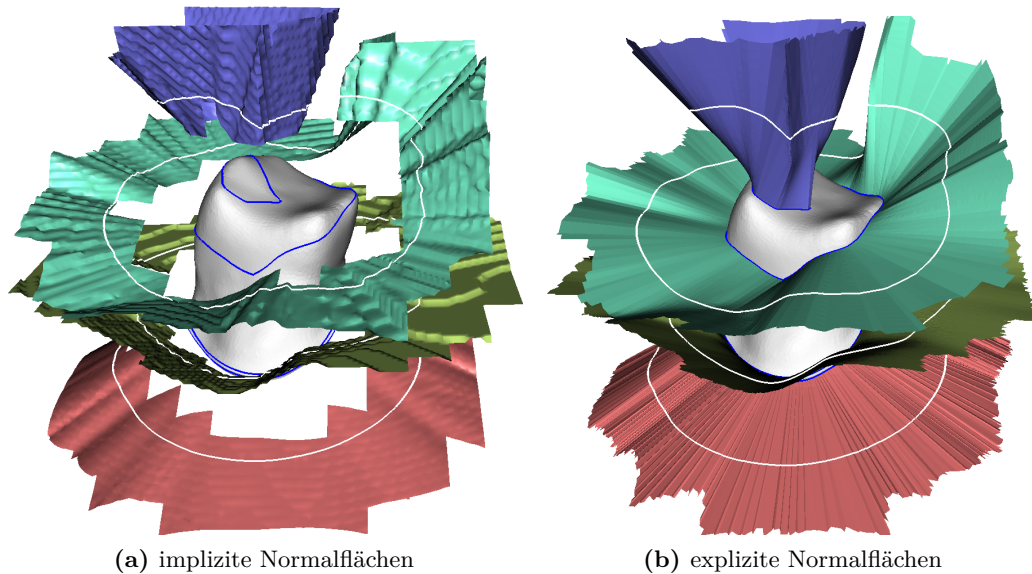


Abbildung 5.13: Normalflächen für vier beispielhafte Kontaktkurven auf einer Zahnkrone (blaue Kurven). Weiße Kurven markieren die Schnittkurven zwischen Normal- und Offset-Fläche.

Nach Extrusion des Bezugsflächendistanzfelds ψ wird jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ein Tupel $(\phi, \omega)(\mathbf{x})$ zugeordnet. Die erste Komponente entspricht dem kleinsten euklidischen Abstand zur Bezugsfläche (*Normalabstand*) und die zweite Komponente dem auf die durch \mathbf{x} verlaufende Offset-Fläche projizierten kleinsten geodätischen Abstand zur Nullstellenmenge von ψ (*Tangentialabstand*). Das Tupel dient zur Lokalisation der Positionsbahn normal und tangential zur Bezugsfläche.

Die numerische Repräsentation des Skalarfeld-Tupels (ϕ, ω) erfolgt analog zur Repräsentation von ϕ durch Diskretisierung des Definitionsbereichs anhand eines Gitters gemäß [Abschnitt 2.1](#). Die Berechnung des Tupels $(\phi, \omega)(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ erfolgt analog zur Berechnung von $\phi(\mathbf{x})$ durch Suche des dem Punkt \mathbf{x} nächstgelegenen Punktes $\mathbf{p} \in Z$ auf einer als Dreiecksnetz repräsentierten Bezugsfläche Z , womit $(\phi, \omega)(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|, \psi(\mathbf{p}))$ gilt.

[Abbildung 5.13](#) zeigt eine beispielhafte Situation mit vier auf dem Modell einer Zahnkrone als Konturen eines Oberflächendistanzfelds definierten Kontaktkurven mitsamt korrespondierenden Normalflächen. Im impliziten Fall beschränkt sich die Repräsentation der Normalflächen mittels eines Octree-Gitters auf ein schmales Band um die Bezugsfläche herum, welches für die Generierung von Werkzeugbahnen für unterschiedliche Werkzeugabstände relevant ist. Die Schnittkurven der Normalflächen mit der Offset-Fläche der Bezugsfläche sind weiß markiert und entsprechen den resultierenden Werkzeugpositionsbahnen.

5.4.1 Berechnung von Offset-Kurven

In diesem Sinne beginnt die Berechnung von Offset-Kurven für implizit gegebene Kontaktkurven gemäß [Unterabschnitt 5.1.2](#) mit der Bestimmung des Skalarfeldpaars (ϕ, ω) ([Abbildung 5.1](#), unten). Die gewünschte Offset-Kurve wird durch ein Paar (r, s) spezifiziert, dem Offset-Wert r einer impliziten Kurve auf der Bezugsfläche zum Niveauewert s . Sie ergibt sich als (r, s) -Niveaumenge des Skalarfeldpaars (ϕ, ω) , d.h. der Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, die in der r -Niveaumenge von ϕ und der s -Niveaumenge von ω liegen. Ein Verfahren zur ihrer Ermittlung besteht in der Anwendung eines Konturextraktionsverfahrens auf das Distanzfeld ϕ zum Niveauewert r . Für eine Repräsentation des Skalarfeldpaars durch ein reguläres Gitter kann die Kontur etwa mit dem Marching-Cubes-Verfahren bestimmt werden. Sie besteht dann aus einer Menge von Dreiecken, die die r -Niveaumenge von ϕ als Dreiecksnetz darstellen. Dessen Knoten erhalten Werte zugewiesen, die sich durch Interpolation der Werte des Skalarfelds ω an den Gittereckpunkten ergeben. Die Knotenwerte werden als abgetastete Werte eines Oberflächenskalarfelds interpretiert, dessen s -Niveaumenge durch ein Marching-Triangle-Verfahren ermittelt werden. Das Resultat besteht aus einer Menge von Strecken, welche die (r, s) -Niveaumenge von (ϕ, ω) approximiert.

Anders als beim expliziten Vorgehen ist beim impliziten Vorgehen die Zuordnung zwischen Offset-Punkt und Kontaktpunkt nicht unmittelbar verfügbar, da die Abbildung der Kurve nicht punktuell erfolgt. Diese Zuordnung wird beim Fräsen mit Kugelfräser nicht notwendigerweise benötigt, jedoch beim thermischen Spritzen.

5.4.2 Eigenschaften und Einschränkungen

Die vorgeschlagene implizite Repräsentation von Offset-Kurven als Schnittmenge implizit definierter Normal- und Offset-Flächen hat den Vorteil, dass das resultierende Tupel (ϕ, ω) die Werkzeugbahnen für alle Werkzeugradien und Schrittweiten repräsentiert, die mit der gegenwärtigen Planungsstrategie generierbar sind. Eine Änderung des Werkzeugradius r oder der Schrittweite s auf der Bezugsfläche erfordert lediglich die Bestimmung einer neuen (r, s) -Niveaumenge. Demgegenüber stehen die in den folgenden Abschnitten dargestellten Einschränkungen.

Distanzfeld auf der Bezugsfläche

Die Berechnung eines Distanzfelds auf der Bezugsfläche kann aufgrund der in realen Bedingungen anzutreffenden Qualität des Eingabernetzes problematisch sein. Die folgenden drei Problemquellen lassen sich identifizieren.

Erstens führt eine *fehlerhafte Topologie* zu Abweichungen aufgrund fehlerhafter Nachbarschaften, die bewirken, dass Punkte auf der Oberfläche entweder gar nicht oder nur über einen anderen als den kürzestmöglichen Pfad erreicht werden können. Zweitens führt eine *inhomogene Netzstruktur* zu ungenauen Distanzen und damit einem verrauschten oder verfälschten Verlauf der Konturlinien. Unterschiedliche Me-

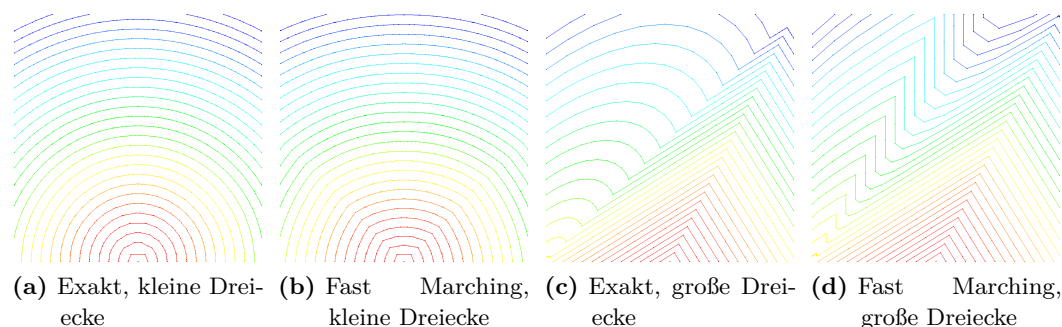


Abbildung 5.14: Pathologische Distanzfelder bei ungünstiger Netzstruktur, Startpunkt mittig auf dem unteren Rand.

thoden zur Distanzberechnung auf Dreiecksnetzen reagieren unterschiedlich sensitiv auf eine inhomogene Netzstruktur. Drittens führt eine zu geringe Knotendichte zu *Diskretisierungsfehlern* bzw. einer *Unterabtastung* des Distanzfeldes.

Abbildung 5.14 verdeutlicht exemplarisch die Abhängigkeit der Distanzfeldqualität von der Netzstruktur und Berechnungsmethode anhand eines durch zwei verschiedene Dreiecknetze diskretisierten Quadrats, auf dem die Distanz jedes Punktes zum Startpunkt mittig auf dem unteren Rand bestimmt wurde. Zu erwarten sind konzentrische Kreise um den Startpunkt. [Abbildung 5.14a](#) weicht lediglich nahe des Startpunkts bedingt durch Unterabtastung davon ab. [Abbildung 5.14b](#) zeigt zusätzlich eine Abflachung der Kreise bedingt durch numerische Approximation der Distanzfunktion. [Abbildungen 5.14c](#) und [5.14d](#) zeigen unbrauchbare Ergebnisse bei ungeeigneter Netzstruktur.

Die Gewährleistung einer fehlerfreien Topologie und homogenen Struktur bei hoher Knotendichte auf beliebigen Eingabenetzen ist eine nichttriviale Aufgabe.

Anwachsende Gradienten

[Abbildung 5.15](#) schematisiert das Problem, welches bei Extrusion des Oberflächen-Distanzfelds an einem konkav gekrümmten Oberflächenabschnitt auftritt, anhand eines vereinfachten zweidimensionalen Beispiels. Ein Schnitt durch einen konkav gekrümmten Oberflächenabschnitt sei durch den Polygonzug von Punkt \mathbf{u} über \mathbf{v} nach \mathbf{w} gegeben. Zudem sei jedem Punkt auf dem Polygonzug mittels einer Funktion ψ ein Distanzwert zugeordnet. Beginnend beim Scheitelpunkt \mathbf{v} lässt sich nun die Medialachse als Kurve konstruieren, auf der alle Punkte einen identischen kleinsten Abstand zu jeweils zwei verschiedenen Punkten auf dem Polygonzug besitzen: jeweils einem auf dem Abschnitt von \mathbf{u} nach \mathbf{v} und von \mathbf{v} nach \mathbf{w} . [Abbildung 5.15a](#) zeigt diese Kurve in rot sowie drei beispielhafte auf der Kurve liegende Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} mitsamt ihrer auf dem Polygonzug liegenden Lotpunkte.

Mit wachsendem kleinsten Abstand des auf der Medialachse liegenden Punktes zum Polygonzug wächst auch der Abstand der beiden Lotpunkte zum Scheitelpunkt

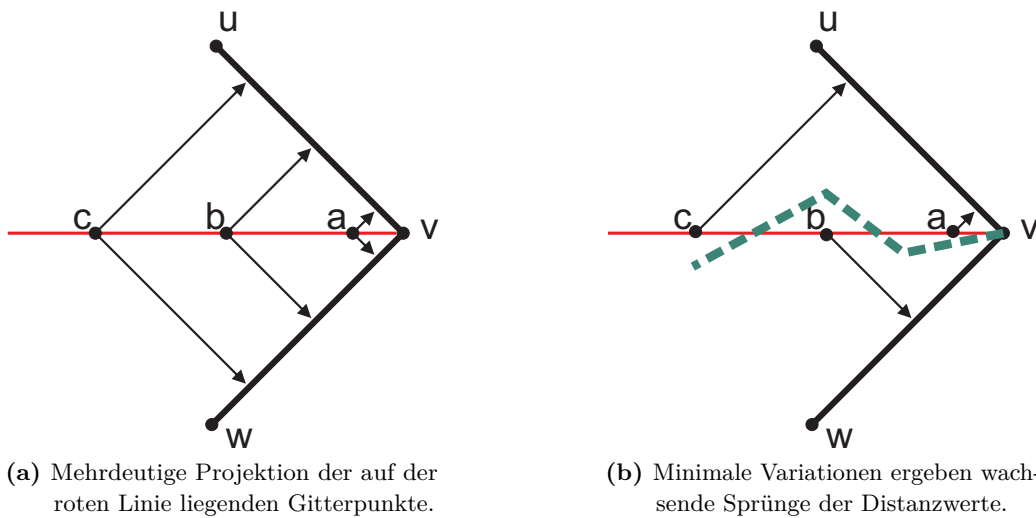


Abbildung 5.15: Anwachsene Schwankungen extrudierter Distanzwerte bei konkaver Krümmung der Zielkontur.

v , und damit auch die Differenz der an den beiden Lotpunkten interpolierten Distanzwerte. Der Wertebereich $[\psi(\mathbf{u}), \psi(\mathbf{w})]$ wird also in eine stetig kleiner werdende Umgebung der Medialachse gestaucht. Der Wert $\psi(\mathbf{v})$ am Scheitelpunkt wird von keiner Stützstelle des Skalarfelds angenommen. Anders ausgedrückt, fällt in ein Band konstanter Breite um die Medialachse herum ein stetig wachsender Wertebereich, d.h. die Länge der Gradienten des extrudierten Distanzfelds wächst entlang der Medialachse. Dies wirkt sich auf die Kondition des Skalarfelds aus, d.h. die Verstärkung von Schwankungen der Lage von Punkten relativ zur Medialachse. Für einen gegebenen Punkt auf der Medialachse (z.B. \mathbf{a} , \mathbf{b} oder \mathbf{c}) resultiert einer der beiden potentiellen Lotpunkte durch Zufall bzw. numerische Schwankungen des Punktes relativ zur Medialachse. [Abbildung 5.15b](#) deutet dies durch Auswahl eines der beiden Lotpunkte an, markiert durch den verbliebenen Pfeil. Die resultierenden Sprünge in den extrudierten Distanzwerten führen zu einem entsprechend sprunghaften Verlauf der im Scheitelpunkt \mathbf{v} beginnenden Niveaulinie zum Distanzwert $\psi(\mathbf{v})$, dargestellt als grüne gestrichelte Kurve.

Die Abhängigkeit des Lotpunktabstands, und damit auch des Abstands extrudierter Distanzwerte, vom Abstand und der Krümmung der Bezugsfläche veranschaulicht [Abbildung 5.16](#). Den Fall konstanter Krümmung zeigt [Abbildung 5.16a](#) anhand zweier Kreisbogenabschnitte mit unterschiedlichem Radius, der erste von Punkt \mathbf{u}_1 nach \mathbf{w}_1 mit Mittelpunkt \mathbf{b}_1 und der zweite von Punkt \mathbf{u}_2 nach \mathbf{w}_2 mit Mittelpunkt \mathbf{b}_2 . Für die drei Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b}_1 , und \mathbf{b}_2 markiert jeweils ein gestrichelter Abstandskreis die Menge aller Punkte mit demselben Abstand wie Punkt \mathbf{v} . Jeder Punkt mit geringerem Abstand zu \mathbf{v} als der Radius des Krümmungskreises, besitzt einen eindeutigen Lotpunkt (siehe beispielhaft Punkt \mathbf{a} mit Lotpunkt \mathbf{v}), sodass in diesem Bereich

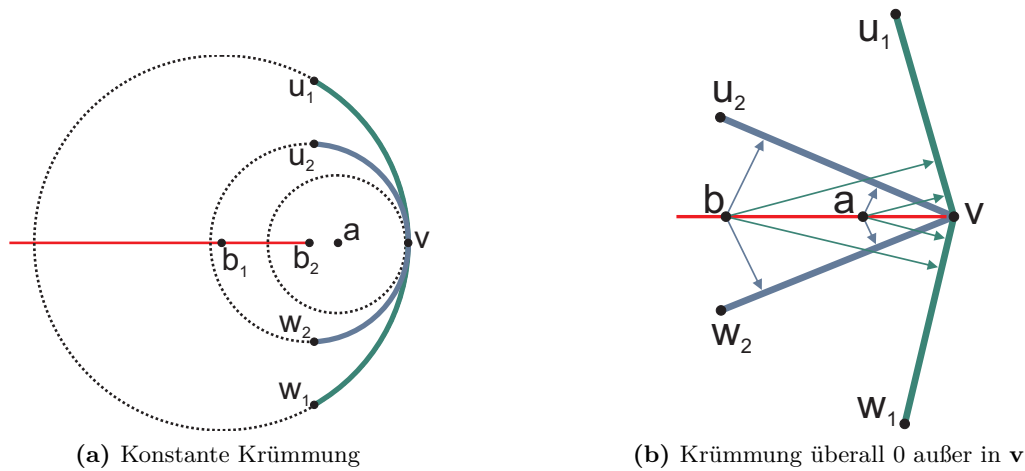


Abbildung 5.16: Abhängigkeit des Lotpunktabstandes von der Krümmung.

keine Sprünge der Distanzwerte resultieren. Wenn der Abstand zu \mathbf{v} dem Radius des Krümmungskreises entspricht, ist jeder Punkt auf dem Kreisbogen ein Lotpunkt (siehe Punkte \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2), und sobald der Abstand den Radius übersteigt, sind beide Endpunkte des Kreisbogens Lotpunkte. Das Gradientenwachstum beginnt somit schlagartig bei Erreichen des Mittelpunkts des Krümmungskreises.

Abbildung 5.16b zeigt den Fall variabler Krümmung anhand zweier Geradenabschnitte, die im Scheitelpunkt \mathbf{v} einen Winkel $< 180^\circ$ einschließen. In diesem Fall beginnt die Medialachse bereits im Punkt \mathbf{v} und entspricht der Winkelhalbierenden. Der resultierende Lotpunktabstand ist umgekehrt proportional zum von den Geradenabschnitten eingeschlossenen Winkel.

Verschwindende Gradienten

Abbildung 5.17 schematisiert das Problem, welches bei Extrusion des Oberflächen-Distanzfelds an einem konvex gekrümmten Oberflächenabschnitt auftritt. Ausgehend vom dargestellten Polygonzug von Punkt \mathbf{u} über \mathbf{v} nach \mathbf{w} , lässt sich ein Ebenensegment konstruieren, innerhalb dessen alle Punkte einen identischen kleinsten Abstand zu ein und demselben Punkt auf dem Polygonzug besitzen. In Abbildung 5.17a ist dieses Ebenensegment durch zwei rote Linien begrenzt – die darin befindlichen Punkte \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} besitzen denselben Lotpunkt und damit einen identischen Distanzwert. In Abbildung 5.17b kennzeichnet der grün schraffierte Bereich die Niveaumenge des zum Punkt \mathbf{v} gehörenden Distanzwerts, welche das gesamte Ebenensegment umfasst. Ein üblicher Konturlinienoperator, welcher überprüft, ob der vorgegebene Konturwert c innerhalb eines halboffenen Intervalls liegt, wird in dieser Situation entweder die obere oder untere Grenzfläche identifizieren, aber nicht beide: mit $\psi(\mathbf{a}) < \psi(\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{c}) < \psi(\mathbf{d})$ gilt bspw. $c \in (\psi(\mathbf{a}), \psi(\mathbf{b})] \Rightarrow c \notin (\psi(\mathbf{c}), \psi(\mathbf{d})]$.

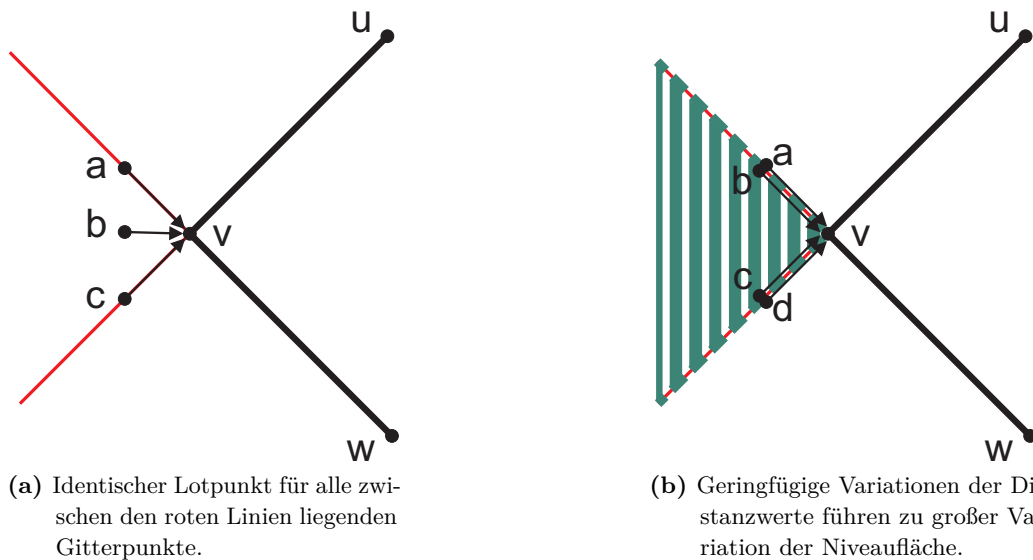


Abbildung 5.17: Verschwindende Skalarfeld-Gradienten bei konvexer Krümmung.

Deshalb führt eine geringfügige Variation der Lage der Gitterpunkte relativ zu den roten Linien zu einem Sprung der Konturlinie über das Ebenensegment hinweg.

Niveaumengen nahe der Nullstellenmenge

Das 2D-Distanzfeld ψ weist jedem Punkt auf der Bezugsfläche seine Distanz zur Nullstellenmenge zu. Um größtmögliche Flexibilität zu ermöglichen, wurde bisher nicht vorausgesetzt, dass die Nullstellenmenge den Definitionsbereich in abgeschlossene Segmente, z.B. „innen“ und „außen“, unterteilt. Dies bedeutet wiederum, dass der Distanzwert nicht um ein Vorzeichen erweitert werden kann. Problematisch wird diese Tatsache, wenn die Niveaumenge für einen Niveaufwert bestimmt werden soll, der kleiner als der Gitterpunktabstand, bzw. die kleinste Kantenlänge bei einem Dreiecksnetz, ist. In diesem Fall lässt sich für eine einzelne Kante nicht unterscheiden, ob diese die Niveaumenge schneidet oder nicht: wenn beide Endpunkte der Kante einen (positiven) Distanzwert besitzen, der kleiner als der Gitterpunktabstand ist, so können die Punkte sowohl auf der selben als auch auf unterschiedlichen Seiten der Niveaumenge liegen. Bei der Auslegung von Kurven auf der Ziel- oder Offset-Oberfläche wird dieses Ambiguitätsproblem dadurch gelöst, dass durch Überführung aller Initialbahnen in Netzkanten im Rahmen einer Netzverfeinerung die Nullstellenmenge des 2D-Distanzfelds stets aus Knoten und Kanten des Netzes besteht.

Für das 3D-Skalarfeld ϕ oder ω lässt sich dagegen im Allgemeinen nicht vermeiden, dass die Nullstellenmenge zwischen Gitterpunkten hindurch verläuft, sodass das Ambiguitätsproblem für Niveaumengen nahe der Nullstellenmenge hier weiterhin besteht. Dies betrifft sowohl die Offset- als auch Normalflächen mit Niveaus kleiner als der Gitterpunktabstand. Aufgrund des anwachsenden Gradienten entlang der

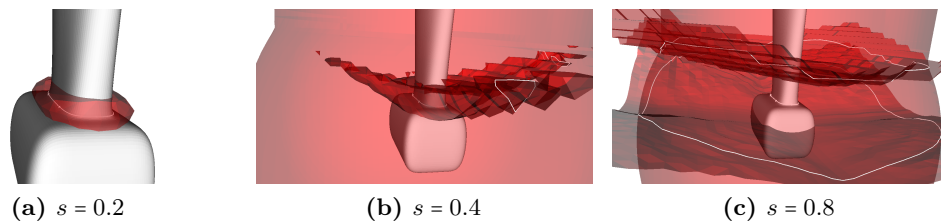


Abbildung 5.18: Niveauflächen des extrudierten *vorzeichenlosen* Oberflächen-Distanzfelds nahe einer in der Medialachse liegenden Nullmenge.

Medialachse erweist sich das Ambiguitätsproblem bei dem zur Repräsentation der Normalflächen dienenden Skalarfeld ω als weitreichender. Sei nun angenommen, dass die Initialbahn in einer Schlucht der Bezugsfläche verläuft, sodass die resultierende Nullmenge des extrudierten Skalarfelds in oder nahe der Medialachse verläuft. In diesem Fall steigt mit dem Abstand eines Gitterpunkts zur Bezugsfläche auch das kleinstmögliche Niveau der zu repräsentierenden Niveaumenge.

Abbildung 5.18 zeigt beispielhafte Niveauflächen nahe der Nullmenge für ein vorzeichenloses Skalarfeld, dessen Nullmenge in der Medialachse liegt. Während die Nullmenge selbst gar nicht extrahierbar ist, fällt auch die Beschneidung nahe gelegener Niveauflächen mit steigendem Abstand zur Bezugsfläche auf. Erst in einem relativ großen Abstand zur Medialachse in [Abbildung 5.18c](#) lassen sich Niveauflächen extrahieren, die weit genug von der Bezugsfläche weg reichen, um eine erwartungsgemäß um das Zielobjekt herumlaufende Schnittkurve mit der Offset-Fläche zu bilden.

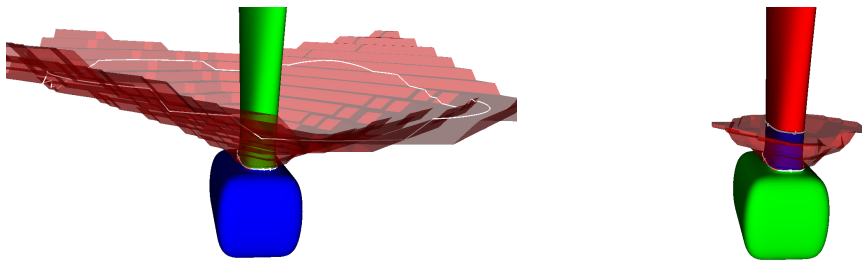
Zur Lösung des Ambiguitätsproblems bieten sich zwei prinzipielle Vorgehen an:

1. Lokale Funktionsapproximation des extrudierten Skalarfelds
2. Verwendung vorzeichenbehafteter Distanzen durch:
 - (a) Voraussetzen der Partitionseigenschaft der Initialbahnen,
 - (b) Segmentierung des extrudierten Skalarfelds.

Der erste Punkt behält die Vorzeichenlosigkeit bei und nutzt zur Berechnung der Niveaumenge eine lokale Funktionsapproximation mit höherer Ordnung als linear, d.h. insbesondere unter Berücksichtigung von mehr Gitterpunkten [[GVJ+09](#)].

Der zweite Punkt erzwingt vorzeichenbehaftete Werte, entweder durch Einschränkung der Flexibilität bei der Auslegung von Initialbahnen auf der Bezugsfläche, oder durch nachträgliche Segmentierung des Skalarfelds.

Im Nachfolgenden wird die Ausstattung des Skalarfelds mit Vorzeichen basierend auf einer Partitionierung der Bezugsfläche mittels der Initialbahnen verfolgt. Das Vorzeichen an einem Gitterpunkt lässt sich daraufhin anhand des Segments bestimmen, in welchem der zugehörige Lotpunkt liegt. [Abbildung 5.19a](#) zeigt die Nullmenge eines auf diese Weise mit Vorzeichen ausgestatteten Skalarfelds für eine zu [Abbildung 5.18](#) äquivalente Auslegung der Initialbahn. Die Beschneidung der Fläche entfällt erwar-



(a) $s = 0$ bei 2 Segmenten auf der Bezugsfläche (b) $s = 0$ bei 3 Segmenten auf der Bezugsfläche

Abbildung 5.19: Niveauläche des extrudierten *vorzeichenbehafteten* Oberflächen-Distanzfelds nahe einer in der Medialachse liegenden Nullmenge.

tungsgemäß durch Beseitigung der Ambiguitäten. [Abbildung 5.19b](#) zeigt wiederum die Nullmenge nach Hinzufügen einer zweiten Initialbahn nahe der ersten, d.h. innerhalb derselben Zusammenhangskomponente des Medialachsen-Einflussbereichs. Trotz vorzeichenbehaftetem Skalarfeld wird die Niveaumenge entlang der Schnittkurve zwischen der aus der zweiten Initialbahn resultierenden Teil-Nullmenge und der Medialachse beschnitten. Die Beschneidung lässt sich anschaulich dadurch erklären, dass im gezeigten Fall nur diejenigen Gitterpunkte negative Werte aufweisen können, deren Lotpunkt innerhalb der eingeschlossenen blauen Region auf der Bezugsfläche liegt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass einerseits die Lokalisation der impliziten Normalfläche nahe der Initialbahn ein vorzeichenbehaftetes Distanzfeld durch Partitionierung der Bezugsfläche erfordert, und dass andererseits innerhalb einer Zusammenhangskomponente des Medialachsen-Einflussbereichs nicht mehr als eine Initialbahn liegen darf, um eine Beschneidung der Niveaumengen fernab der Bezugsfläche zu vermeiden.

Unterschied zur expliziten Normalfläche

Innerhalb eines ausreichend schmalen Bandes um die Bezugsfläche herum sind die explizite und implizite Normalfläche per Definition identisch. Dies ist bspw. dadurch ersichtlich, dass die explizite Ausbreitung jedes Kontaktpunkts entlang des Distanzfeldgradienten verläuft und orthogonal zum Gradienten der Distanzwert nicht variiert. Somit liegen alle auf diese Weise von einem Startpunkt aus erreichbaren Punkte in derselben Niveaumenge wie der Startpunkt selbst. Jenseits der Schnittkurve mit der Medialachse können sich die Flächen jedoch unterscheiden. Einerseits führt eine ungünstige Wahl der Nullstellenmenge zum Beschnitt der impliziten Normalfläche, siehe [Abbildung 5.18](#) und [5.19](#). Andererseits können aufgrund der stationären Auslegung des Skalarfelds die Niveaumengen zu zwei verschiedenen Niveauebenen nicht koinzidieren. [Abbildung 5.20](#) und [5.21](#) zeigen exemplarisch einen Vergleich der Überführung zweier im Medialachsen-Einflussbereich verlaufender Kon-

taktbahnen auf ihre Offset-Bahnen mittels des impliziten und expliziten Ansatzes. Da die expliziten Normalflächen gegen die Medialachse konvergieren, werden die beiden Kontaktbahnen auf eine (näherungsweise) identische Offset-Bahn abgebildet, siehe [Abbildung 5.20b](#), worin sich die beiden Offset-Bahnen in einer roten Kurve überlagern. Die Niveaumengen weisen dagegen einen Abstand zueinander auf, der proportional zum Gitterpunktabstand ist und zu zwei parallel verlaufenden Offset-Bahnen beiderseits der Medialachse führt, siehe [Abbildung 5.20a](#), worin die beiden roten Kurven parallel zueinander verlaufen. [Abbildung 5.21](#) zeigt ein Schnittbild der Situation. Eine weitere Annäherung der Niveaumengen an die Medialachse ließe sich in diesem Fall durch Verfeinerung des Gitters entlang der Medialachse erreichen.

5.5 Lokalisation durch Interpolation

Da die Positionierung des Werkzeugs entsprechend des idealen Wirkungswinkels und -abstands den Verlauf der Oberfläche abseits des Kontaktpunkts missachtet, ergeben sich zwei Gründe, um von einer wirkungsgünstigen Werkzeugbahn abzuweichen:

1. Kollision zwischen Werkzeug oder Wirkungsregion mit der Bezugsfläche
2. kinematische/dynamische Beschränkungen (Beschleunigungen/Kräfte)

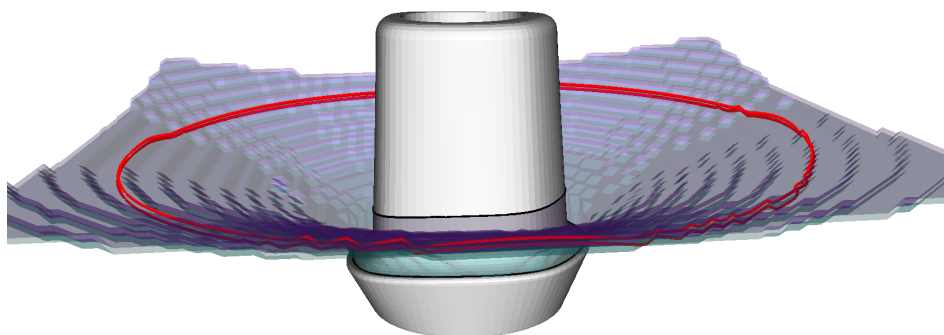
Andererseits ist die dynamikgünstige Werkzeugbahn aufgrund des stets konstanten kleinsten Abstands zur gesamten Bezugsfläche kollisions- und schleifenfrei, missachtet aber den idealen Wirkungswinkel und -abstand zum Kontaktpunkt. Aus dieser Motivation heraus werden die wirkungs- und die dynamikgünstige Lösung im Folgenden nicht isoliert betrachtet, sondern als Intervallgrenzen bzw. Randpunkte einer kompakten Menge potentieller Lösungen, die sich durch Interpolation aus beiden ergibt. Dazu wird zunächst die Interpolation zwischen korrespondierenden Punkten beider Positionskurven, d.h. die aus dem gleichen Kontaktpunkt hervorgehen ([Unterabschnitt 5.5.1](#)), und dann die Interpolation zwischen beiden Kurven insgesamt betrachtet ([Unterabschnitt 5.5.2](#)).

5.5.1 Werkzeugpositionskurve für einen einzelnen Kontaktpunkt

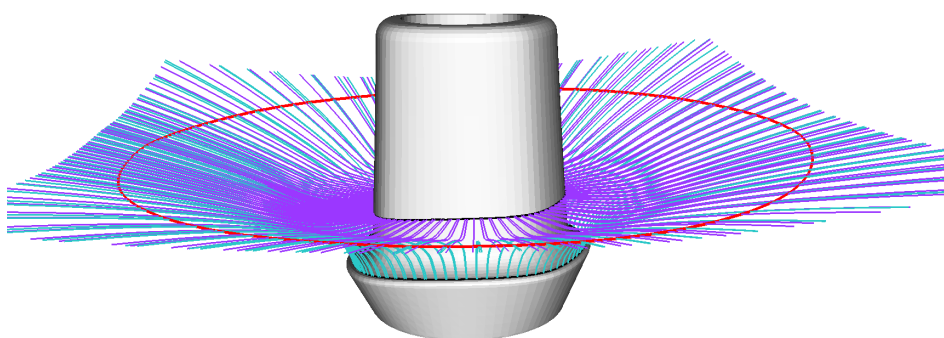
Seien \mathbf{w} und \mathbf{o} die wirkungs- und dynamikgünstigen Positionen auf den entsprechenden Kurven zum gleichen Kontaktpunkt \mathbf{p} , die im Folgenden als *Randpunkte* bezeichnet werden. Eine *Kompromisslösung* ist ein Punkt auf einer Kurve $\mathbf{q}(\lambda)$, welche die beiden Randpunkte miteinander verbindet, mit $\lambda \in [0, 1]$ als Kurvenparameter. Diese Kurve wird *Werkzeugpositionskurve* zum Kontaktpunkt \mathbf{p} genannt. Die Werkzeugpositionskurve ergibt sich also als Interpolationskurve aus den beiden Randpunkten. Eine einfache Möglichkeit ist die lineare Interpolation:

$$\mathbf{q}(\lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{w} + \lambda\mathbf{o}. \quad (5.7)$$

Eine Schwierigkeit der Interpolation ist, dass der Kontaktpunktabstand einer interpolierten Werkzeugposition in der Regel kleiner als an den Randpunkten wird ([Abbildung 5.22a](#)).

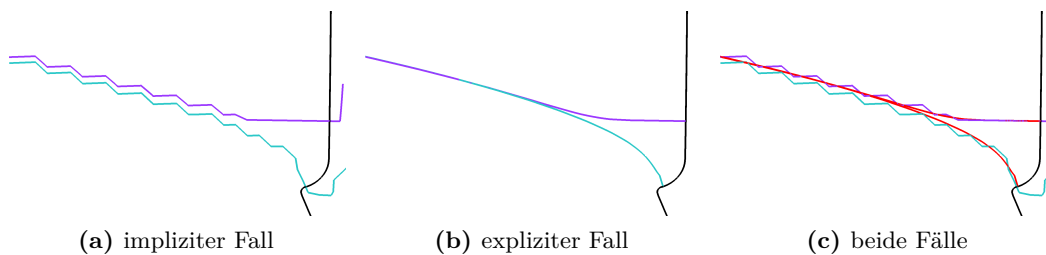


(a) impliziter Fall: zwei parallel verlaufende Offset-Kurven



(b) expliziter Fall: zwei (näherungsweise) identische Offset-Kurven

Abbildung 5.20: Vergleich implizite und explizite Normalflächen zu zwei Kontaktbahnen im Medialachsen-Einflussbereich.



(a) impliziter Fall

(b) expliziter Fall

(c) beide Fälle

Abbildung 5.21: Vergleich der Normalkurven in der Schnittansicht.

Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeit zu mindern, ist an den Randpunkten zusätzlich die Werkzeugorientierung zu berücksichtigen. Die Interpolation erfolgt in diesem Fall kubisch (hermitesch) gemäß [CRE01]:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\lambda) = & (2\lambda^3 - 3\lambda^2 + 1) \mathbf{w} + (-2\lambda^3 + 3\lambda^2) \mathbf{o} \\ & + (\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda) \mathbf{m}_w + (\lambda^3 - \lambda^2) \mathbf{m}_o, \end{aligned} \quad (5.8)$$

wobei \mathbf{m}_w und \mathbf{m}_o die Tangenten der Interpolationskurve an den Randpunkten bezeichnen (Abbildung 5.22b). Die Tangente \mathbf{m}_w am Punkt \mathbf{w} steht senkrecht auf der Wirkungsrichtung und zeigt in Richtung \mathbf{o} , im Sinne einer geringsten Abweichung zur Verbindungsstrecke $\overline{\mathbf{w}\mathbf{o}}$. Die Berechnung erfolgt bspw. durch Projektion der Strecke $\overline{\mathbf{w}\mathbf{o}}$ auf die durch \mathbf{w} führende Ebene mit der Wirkungsrichtung als Normale, oder durch Rotation des Wirkungsrichtungsvektors um 90 Grad um denjenigen durch \mathbf{w} verlaufenden Vektor, welcher senkrecht auf der Strecke $\overline{\mathbf{w}\mathbf{o}}$ und der Wirkungsrichtung steht. Die Tangente \mathbf{m}_o am Punkt \mathbf{o} ergibt sich analog. Auf diese Weise wird erreicht, dass die Interpolationskurve den Punkt \mathbf{w} bzw. \mathbf{o} orthogonal zur Verbindungsstrecke $\overline{\mathbf{p}\mathbf{w}}$ bzw. $\overline{\mathbf{p}\mathbf{o}}$ zum Kontaktpunkt verlässt.

Eine weitere Alternative ist die sphärische lineare Interpolation (SLERP) gemäß

$$\mathbf{q}(\lambda) = \frac{\sin((1-\lambda)\nu)}{\sin\nu} \mathbf{w} + \frac{\sin(\lambda\nu)}{\sin\nu} \mathbf{o}, \quad (5.9)$$

wobei ν den von $\overline{\mathbf{p}\mathbf{w}}$ und $\overline{\mathbf{p}\mathbf{o}}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet (Abbildung 5.22c). Dies ermöglicht die Positionsinterpolation basierend auf dem zwischen $\overline{\mathbf{p}\mathbf{w}}$ und $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ einzuschließenden Winkel $\alpha = \lambda\nu$, d.h. der Abweichung vom idealen Wirkungswinkel. Im Falle eines unterschiedlichen Abstands $\|\mathbf{w} - \mathbf{p}\|$ bzw. $\|\mathbf{o} - \mathbf{p}\|$ der Randpunkte vom Kontaktpunkt, d.h. \mathbf{w} und \mathbf{o} liegen nicht auf demselben Kreisbogen um \mathbf{p} , ist dabei Vorsicht geboten: zwar deckt Gleichung (5.9) aufgrund ihrer Allgemeingültigkeit diesen Fall prinzipiell ab, jedoch unter Verzerrung des resultierenden Winkels zwischen $\overline{\mathbf{p}\mathbf{w}}$ und $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$. Um auch in diesem Fall mittels eines vorgegebenen Winkels interpolieren zu können, müssen die Neigung und Länge der Strecke $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ separat interpoliert werden, ersteres unter Annahme eines identischen Abstands der Randpunkte \mathbf{w} und \mathbf{o} zu \mathbf{p} , siehe die gestrichelte rote Kurve (Abbildung 5.22c). Die durchgezogene rote Kurve in der Abbildung zeigt das Ergebnis.

Letztendlich ist die Wahl der Interpolationsmethode dahingehend anwendungsabhängig und nebensächlich, dass das Ausmaß einer zu tolerierenden Abweichung vom idealen Wirkungswinkel von der Notwendigkeit zur Einhaltung geometrischer und kinematischer Nebenbedingungen abhängt. Unter einer derart determinierten Abweichung des Wirkungswinkels führen unterschiedliche Interpolationsmethoden lediglich zu einer gewissen Variation des Wirkungsabstands, entsprechend der unterschiedlichen Länge der Strecke $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ in Abbildung 5.22, deren Toleranz vom Fertigungsprozess abhängt. Im Rahmen dieser Arbeit wird aus zwei Gründen die sphärische lineare Interpolation bevorzugt: einerseits aufgrund der bereits erwähnten Monotonie des Wirkungsabstands, andererseits aufgrund des direkten Zusammenhangs zwischen Kurvenparameter λ und Winkelabweichung α gemäß $\lambda = \frac{\alpha}{\nu}$.

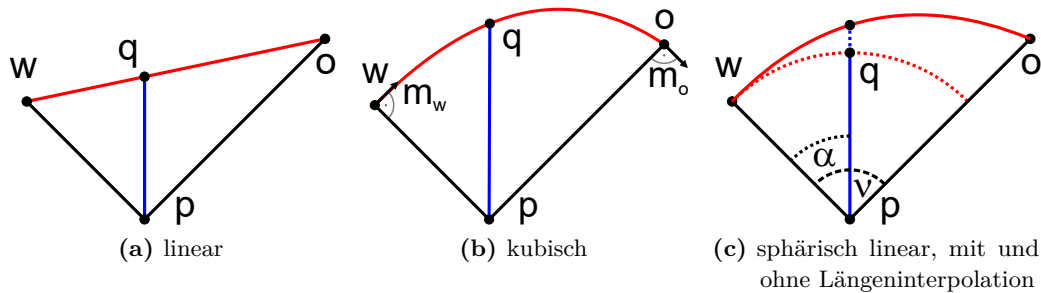


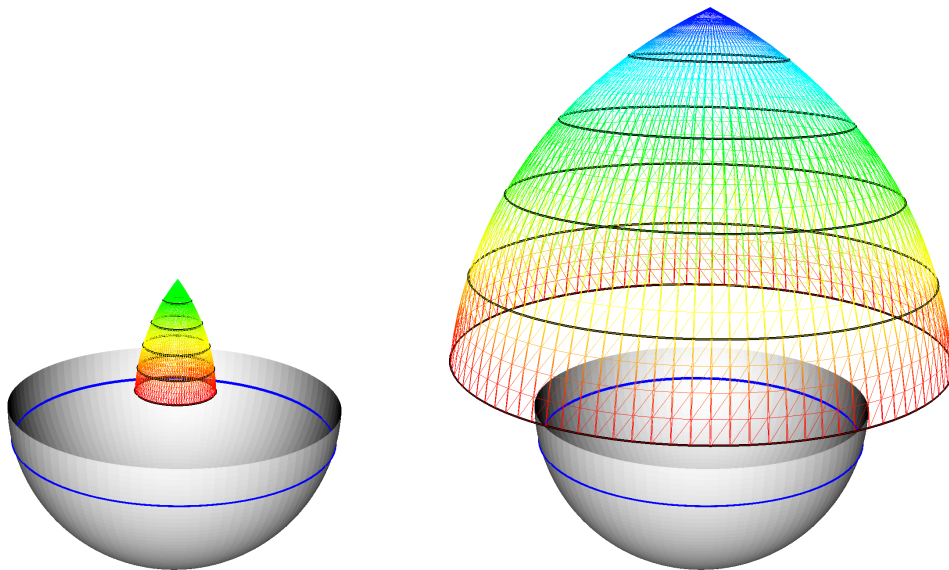
Abbildung 5.22: Interpolation einer Kompromisslösung \mathbf{q} aus den zum Kontaktpunkt \mathbf{p} korrespondierenden Randpunkten \mathbf{w} und \mathbf{o} .

Jede Lösung $\mathbf{q}(\lambda)$ innerhalb des Intervalls $\lambda \in [0, 1]$ stellt einen Kompromiss aus Wirkungs- und Dynamikgünstigkeit dar, d.h. sie erlaubt gewisse Abweichungen von Wirkungsabstand und -Richtung im Austausch für Kollisionsfreiheit und eine gewisse Kontrollierbarkeit der relativen Lage der Werkzeugpositionen zueinander.

5.5.2 Werkzeugpositionsfläche für eine Kontaktbahn

Im Folgenden sei nicht nur ein isolierter Kontaktpunkt \mathbf{p} mit zugehöriger Werkzeugpositionskurve $\mathbf{q}(\lambda)$ betrachtet, sondern der den Kontaktpunkt beinhaltende Kontaktbahnabschnitt $P = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{N-1})$ mitsamt zugehöriger Folge von Werkzeugpositionskurven $Q(\boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{q}_0(\lambda_0), \dots, \mathbf{q}_{N-1}(\lambda_{N-1}))$, mit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$. \mathbf{p}_i , $i = 0, \dots, N-1$, sind Stützstellen, die den Kontaktbahnabschnitt diskret repräsentieren. Aus einer derartigen Aneinanderreihung der Werkzeugpositionskurven aller zu einem Bahnabschnitt gehörigen Kontaktpunkte entsteht eine Fläche, die sogenannte *Werkzeugpositionsfläche* zur Kontaktbahn P . Diese Fläche entspricht wiederum dem Bild einer zweidimensionalen Abbildung, die jedem Tupel (i, λ) aus Kontaktbahn- und Interpolationsparameter eine Werkzeugposition zuweist. Der erste Parameter dient dabei zur Indizierung eines Kontaktpunkts auf der Bahn und der zweite zur Indizierung einer Werkzeugposition auf der zum Kontaktpunkt gehörigen Werkzeugpositionskurve.

Aufgrund ihrer zweidimensionalen Struktur lässt sich diese Bildmenge als Fläche visualisieren, wie beispielhaft [Abbildung 5.23](#) für eine ebene Kontaktkurve auf einer einfachen halbkugelförmigen Bezugsfläche zeigt. Dargestellt ist jeweils die Bezugsfläche (in grau) mitsamt Kontaktbahn (in blau) sowie die Bildmengen für zwei unterschiedliche Werkzeugabstände als triangulierte und farbkodierte Fläche. Die Färbung der Fläche visualisiert die Abweichung des resultierenden vom idealen Wirkungswinkel von 0 Grad (rot) am unteren Rand bis 56 Grad (blau) an der oberen Spitze. Die wirkungsgünstigen Positionen liegen auf dem unteren Rand und die dynamikgünstigen Positionen auf dem oberen Rand (in diesem einfachen Fall eine Spitze). Alle dazwischen liegenden Punkte resultieren aus der sphärisch linearen Interpolation gemäß [Gleichung \(5.9\)](#).



(a) Abstand = 1.25-facher Kugelradius, max. Winkelabweichung an der Spitze: 32 Grad
 (b) Abstand = 2.5-facher Kugelradius, max. Winkelabweichung an der Spitze: 56 Grad

Abbildung 5.23: Visualisierung der Werkzeugpositionsfläche der blauen Kurve (Kontaktbahn) auf einer kugelförmigen Bezugsfläche (grau) als triangulierte Fläche. Die Färbung kodiert die Abweichung des Wirkungswinkels von der Normale von rot (0) bis blau (56 Grad).

Die zur Konstruktion der Fläche relevanten Komponenten zeigt [Abbildung 5.24a](#): der Schnittpunkt der Normalkurve (rot) mit der Offset-Fläche (rosa) definiert die dynamikgünstige Position \mathbf{o} auf dem oberen Rand und der ideale Wirkungswinkel und -Abstand die wirkungsgünstige Position \mathbf{w} auf dem unteren Rand der Positionsfläche. Jede zulässige Position \mathbf{q} liegt auf einer Kurve von \mathbf{w} nach \mathbf{o} .

Die Positionsfläche in [Abbildung 5.23a](#) ist demnach so zu verstehen, dass die zu einem Kontaktpunkt auf der blauen Kurve korrespondierende Werkzeugposition auf der entgegengesetzten Seite der Positionsfläche liegt. Die Tatsache, dass die Verbindungslinie zwischen Kontaktpunkt und Werkzeugposition die Medialachse schneidet, äußert sich darin, dass sich wirkungs- und dynamikgünstige Position unterscheiden, d.h. letztendlich die Positionsfläche überhaupt existiert.

Im allgemeinen ist die Positionsfläche nicht mannigfaltig, d.h. sie kann sich bspw. selbst überschneiden oder auch zu einer Kurve kollabieren.

Jede Kurve auf der Positionsfläche, die aus anschaulicher Sicht durch Verschiebung des unteren Randes in Richtung des oberen Randes entsteht, d.h. in gewissem Sinn diffeomorph zum unteren Rand ist, stellt eine potentielle Werkzeugbahn für die gegebene Kontaktbahn dar. Die Ähnlichkeit zum unteren Rand soll sicherstellen, dass jeder Kontaktpunkt genau einmal überquert wird. Dabei erfolgt die besagte

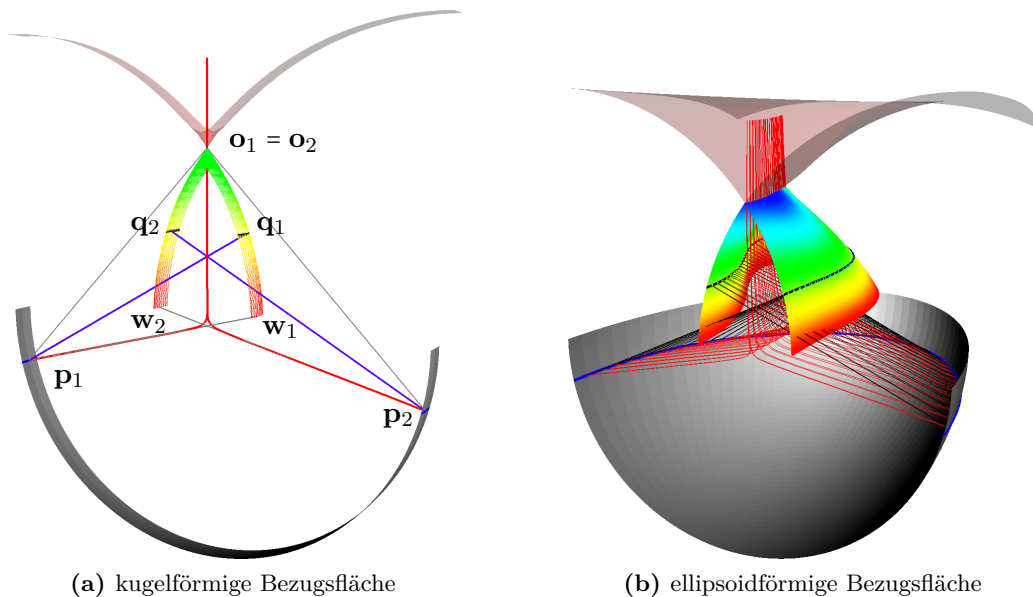


Abbildung 5.24: Komponenten der Positionsflächenberechnung: Normalkurven (rot), Offset-Fläche (rosa), Verbindungslinien zwischen Kontakt- und interpoliertem Werkzeugpunkt (Winkelabweichung 15 Grad).

Verschiebung durch Zuweisung eines Parameters λ für jeden Kontaktpunkt, wodurch die Werkzeugbahn eindeutig festgelegt wird.

In [Abbildung 5.23](#) markieren schwarze Kurven auf den Positionsflächen Isokonturen des Interpolationsparameters λ – diese Kurven resultieren also, wenn die λ_i für alle Punkte einer Kontaktbahn identisch sind. Im dargestellten Fall entsprechen diese Kurven auch den Isokonturen der Winkelabweichung, da für jeden Bahnpunkt eine Änderung $\Delta\lambda$ von λ zu einer identischen Änderung $\Delta\alpha$ des Wirkungswinkels α führt. Im Allgemeinen führt jedoch eine Änderung $\Delta\lambda$ von λ an unterschiedlichen Bahnpunkten zu unterschiedlichen Winkelabweichungen, da die Länge der Kurve zwischen wirkungs- und dynamikgünstiger Werkzeugposition variiert.

[Abbildung 5.25](#) zeigt auf äquivalente Weise eine Situation mit etwas komplexeren Positionsflächen mit Selbstüberschneidungen. Visualisiert sind jeweils die Flächen für zwei unterschiedliche Werkzeugabstände mitsamt der Isokonturen des Interpolationsparameters ([5.25a](#)) bzw. der Isokonturen der Winkelabweichung ([5.25b](#)). In diesem Fall ist der Zusammenhang zwischen $\Delta\lambda$ und $\Delta\alpha$ nicht konstant, was bereits anhand der variierenden Kurvenlänge vom unteren bis zum oberen Rand der Positionsfläche ersichtlich ist. Die zur Konstruktion relevanten Komponenten zeigt [Abbildung 5.24b](#).

[Abbildung 5.26](#) zeigt weitere Beispiele von Werkzeugpositionsflächen für zwei unterschiedliche Kontaktbahnen auf einer wellenförmigen Bezugsfläche.

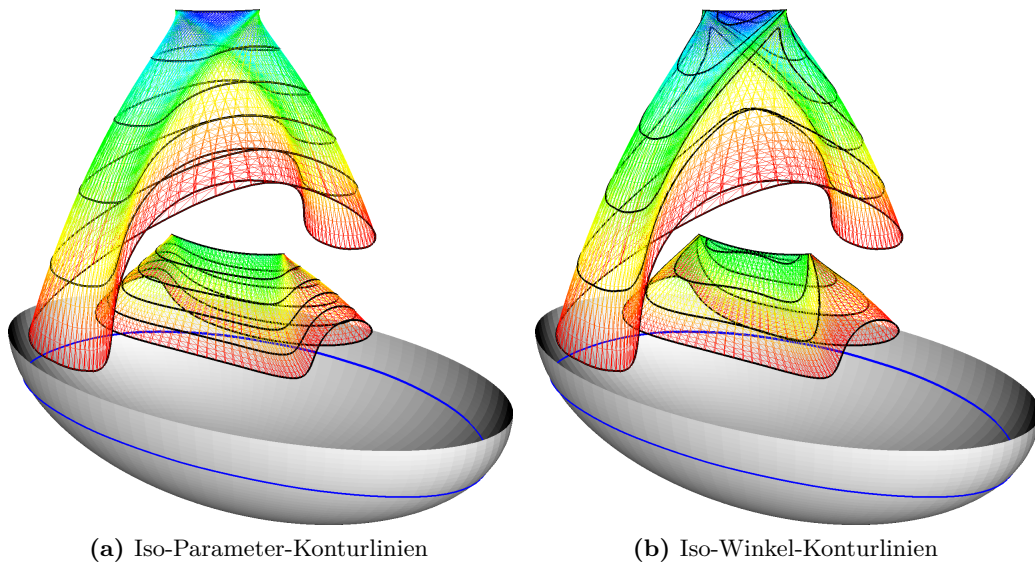


Abbildung 5.25: Visualisierung zweier Werkzeugpositionsflächen der blauen Kurve (Kontaktbahn) auf einer ellipsoidförmigen Bezugsfläche (grau) als triangulierte Fläche. Die Färbung zeigt die Abweichung des Wirkungswinkels von der Normale von rot (0) bis blau (56 Grad).

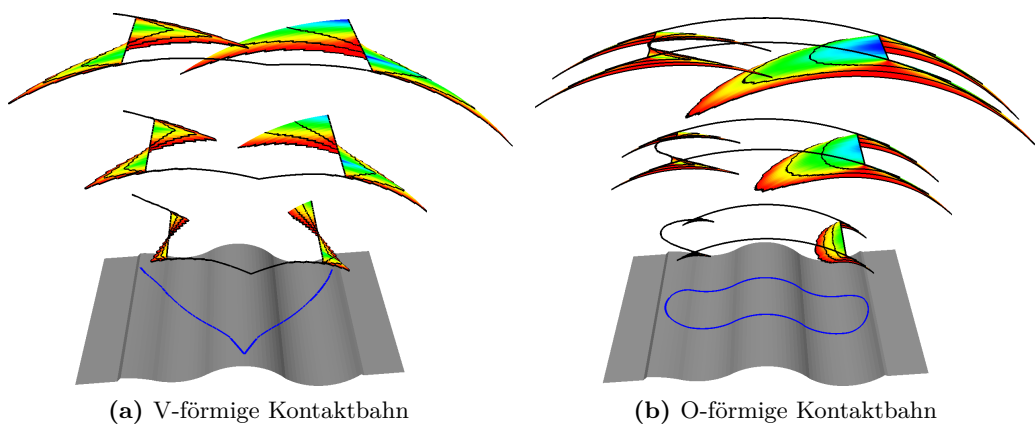


Abbildung 5.26: Beispielhafte Positionsflächen für eine wellenförmige Bezugsfläche mitsamt Isokonturen des Interpolationsparameters.

5.5.3 Interpolationsgewichtung

Die Bestimmung geeigneter Interpolationsgewichte $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$ zur Abbildung eines Kontaktbahnabschnitts auf eine Werkzeugpositionsbahn lässt sich entweder als eindimensionales oder mehrdimensionales Optimierungsproblem modellieren. Das Ziel ist dabei die Minimierung des Abstands zwischen der resultierenden Bahn $Q(\boldsymbol{\lambda})$ und der wirkungsgünstigen Bahn $Q(\mathbf{0})$, d.h.

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}} \|Q(\boldsymbol{\lambda}) - Q(\mathbf{0})\| = \min_{\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}} \sum_{i=0}^{N-1} \|\mathbf{q}_i(\lambda_i) - \mathbf{q}_i(\mathbf{0})\|, \quad (5.10)$$

unter der Bedingung, dass $Q(\boldsymbol{\lambda})$ geometrisch und physikalisch zulässig ist. Ohne Nebenbedingung oder Verletzung derselben gilt trivialerweise $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, d.h. es besteht keine Notwendigkeit zur Modifikation der Bahn. Andernfalls soll die zur Erfüllung der Nebenbedingungen erforderliche Verschiebung der Bahnpunkte so geringfügig wie möglich sein.

Bei der eindimensionalen Problemstellung sind alle Gewichte von einem einzigen Parameter u abhängig, d.h. es gibt eine streng monotone Funktion $g: I \rightarrow [0, 1]^N$ mit $\boldsymbol{\lambda} = (g_0(u), \dots, g_{N-1}(u)) = g(u)$, $u \in I$, für ein geeignetes Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Beispiele für eine derartige Funktion sind:

1. Allen λ_i wird dasselbe Gewicht u zugewiesen: $g_i(u) = u$.
2. λ_i ist das zur Winkelabweichung $u = \alpha$ gehörige Gewicht: $g_i(u) = \frac{u}{\nu_i}$
3. λ_i ist das zur Längenabweichung u gehörige Gewicht: $g_i(u) = \frac{u - \|\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{w}_i}\|}{\|\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{o}_i}\| - \|\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{w}_i}\|}$

Im ersten Fall entsprechen die resultierenden Bahnen den Isokonturen des Interpolationsgewichts gemäß [Abbildung 5.25a](#). Im zweiten und dritten Fall dient u zur Vorgabe der erlaubten Abweichung des Wirkungswinkels (bzw. Abstands) vom Idealwert. Die resultierenden Bahnen entsprechen dann den Isokonturen der Winkelabweichung (bzw. Abstandsabweichung), vergleiche [Abbildung 5.25b](#). Die angegebenen Formeln setzen eine sphärisch lineare Interpolation voraus, vergleiche [Abbildung 5.22c](#), wobei ν_i den zwischen wirkungs- und dynamikgünstiger Position eingeschlossenen Winkel bezeichnet und $\|\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{o}_i}\|$ und $\|\overline{\mathbf{p}_i \mathbf{w}_i}\|$ deren Abstand vom Kontaktpunkt \mathbf{p}_i .

Mit wachsendem u bewegt sich der Bahnabschnitt $Q(g(u))$ auf der Positionierungsfläche vom „unteren“ Rand ($u = a$) zum „oberen“ Rand ($u = b$), vergleiche [Abbildung 5.25](#), d.h. die Überquerung der Positionierungsfläche wird durch u parametrisiert. Die einzelnen Punkte des Bahnabschnitts nähern sich somit gleichförmig ihrer jeweiligen dynamikgünstigen Lösung an. Diese Annäherung erfolgt im allgemeinen jedoch mit unterschiedlicher Geschwindigkeit, da der Abstand zwischen wirkungs- und dynamikgünstiger Werkzeugposition entlang eines Bahnabschnittes variiert. Zu beachten ist, dass sich stets alle Punkte des Bahnabschnitts gleichzeitig bewegen, wobei die relative Geschwindigkeit mittels der Funktion g gesteuert werden kann.

Bei der mehrdimensionalen Problemstellung wird die Überquerung der Positionierungsfläche nicht durch einen einzigen Parameter vermittelt, sondern für jeden Bahnpunkt isoliert gesteuert. Im Gegensatz zur eindimensionalen Problemstellung, bei der sich die gesamte Bahn streng monoton von einem Rand der Positionierungsfläche zum anderen ausbreitet, ermöglicht die mehrdimensionale Problemstellung auch eine nicht monotone Ausbreitung. Dies bedeutet insbesondere, dass sich größere Winkelabweichungen an einzelnen Werkzeugpositionen (bspw. aufgrund des Auftretens von Kollisionen) nicht auf die gesamte Bahn auswirken. Umso mehr muss in diesem Fall jedoch durch zusätzliche Nebenbedingungen an die Gewichtsverteilung eine gewisse Glattheit der resultierenden Positionsbahn sichergestellt werden.

In den folgenden beiden Abschnitten wird die Interpolation zur Kollisionsvermeidung und Dynamikoptimierung verwendet. Die Kollisionsvermeidung erfolgt mit dem mehrdimensionalen und die Dynamikoptimierung mit dem eindimensionalen Ansatz.

5.5.4 Kollisionsvermeidung

Unter *Kollision* wird in dieser Arbeit eine Überschneidung der Werkzeug- oder Wirkungsbereichsoberfläche mit der Bezugsfläche verstanden, die nicht Bestandteil der werkzeugspezifischen Wirkung des Werkzeugs am Kontaktpunkt ist, siehe auch [Abschnitt 5.2](#). Die Motivation zur Modellierung der Kollisionsvermeidung als mehrdimensionale Gewichtsoptimierung liegt einerseits in der Lokalität der zur Vermeidung von Kollisionen erforderlichen Bahnverschiebung und andererseits in der effizienten Berechenbarkeit eines Gewichtsgradienten durch punktuelle Kollisionstests.

Ausgehend von der wirkungsgünstigen Bahn $Q(\mathbf{0}) = (\mathbf{q}_0(0), \dots, \mathbf{q}_{N-1}(0))$ werden zunächst diejenigen Intervalle, welche zu einer Kollision mit der Bezugsfläche führen, schrittweise solange zur jeweiligen dynamikgünstigen Position hin verschoben, bis keine Kollision mehr auftritt oder der gegenüberliegende Rand erreicht wurde. Letztendlich führt dieser Vorgang zu einer Beschneidung der Positionierungsfläche an ihrem wirkungsgünstigen Rand. Treffen sich bei diesem Vorgang der wirkungs- und dynamikgünstige Rand bei fortbestehender Kollision, so ist die Kontaktbahn unzulässig und wird verworfen. Im Punkt $\mathbf{o} = \mathbf{q}(1)$ kann zwar keine unmittelbare Kollision des Werkzeugs mit der Bezugsfläche auftreten, da alle Punkte der Offset-Fläche einen konstanten kleinsten Abstand zur Bezugsfläche besitzen. Jedoch können mittelbare Kollisionen zwischen Wirkungsregion und Bezugsfläche weiterhin auftreten, wenn der Kontaktpunkt oder dessen Umgebung verdeckt, d.h. von einem an der Werkzeugposition platzierten imaginären Auge aus nicht sichtbar ist.

Das Ergebnis dieser Kollisionsbereinigung ist ein Gewichtsvektor λ , welcher einen neuen (kollisionsfrei-)wirkungsgünstigen Rand der Positionierungsfläche definiert durch Verschiebung jedes Punktes des ursprünglichen Randes entlang seiner jeweiligen Positionskurve.

Zur Berechnung von λ_i eignen sich verschiedene Ansätze, siehe [Abbildung 5.27](#):

- Suche einer zulässigen Lösung durch Abtastung des Suchintervalls mittels Strahlentests ([Abbildung 5.27a](#))
- Beschneidung der vom Kontaktpunkt \mathbf{p}_i mitsamt Positionierungskurve $\mathbf{q}_i(\lambda)$ aufgespannten Fläche um den unzulässigen Bereich ([Abbildung 5.27b](#))

Beide Fälle verwenden ein abstandsbasiertes Modell des Wirkungsbereichs, welches jedem Punkt auf der Verbindungslinie zwischen Werkzeugposition und Kontaktpunkt den erlaubten Mindestabstand zur Bezugsfläche zuweist. Gibt es einen Punkt auf der Verbindungslinie, dessen Abstand zur Bezugsfläche kleiner als dessen erlaubter Mindestabstand ist, so überschneiden sich Wirkungsbereich und Bezugsfläche. Im Falle des Spritzkegels entspricht der Mindestabstand dem Abstand zwischen Kegelachse und Kegelschnittkurve für eine entsprechend positionierte Schnittebene.

Im ersten Fall reduziert sich der Kollisionstest auf den Vergleich von Ist- und Soll-Abstandswerten an Abtaststellen entlang der zu testenden Verbindungslinien zwischen Werkzeugposition und Kontaktpunkt. [Abbildung 5.27a](#) zeigt eine Situation, in der eine kollisionsfreie Wirkungsrichtung durch Abtastung des Suchintervalls ermittelt wird. Der oberste grüne Strahl zeigt eine zulässige Richtung, die übrigen roten Strahlen zeigen unzulässige Richtungen.

Im zweiten Fall ist die Idee, die von $\mathbf{q}_i(\lambda)$ und \mathbf{p}_i aufgespannte Fläche geeignet zu beschneiden, sodass eine zulässige Lösung konstruiert werden kann, indem der Spritzkegel derart in besagte Fläche gelegt wird, dass der Kegelrand den Flächenrand tangiert. Die resultierende Kegelachse entspricht dann der dem wirkungsgünstigen Rand nächstgelegenen kollisionsfreien Wirkungsrichtung. [Abbildung 5.27b](#) visualisiert eine solche Fläche farbkodiert nach dem Abstand zur Bezugsfläche. Die weißen Kurven zeigen den Schnitt mit der Offset-Fläche der Bezugsfläche. In diesem Fall entspräche die zulässige Lösung einer im Kontaktpunkt beginnenden und die linke Schnittkurve mit der Offset-Fläche tangierenden Kegelachse.

5.5.5 Dynamikoptimierung

Die Motivation zur Modellierung der Dynamikoptimierung als eindimensionale Problemstellung liegt einerseits in einer Reduktion der Lösungsraumkomplexität und andererseits in der Möglichkeit zur globalen Parametrierung der Werkzeugbahn mittels einer maximalen Winkel- oder Abstandsabweichung, welche fertigungstechnische Relevanz besitzt. Des weiteren erscheint die Annahme einer Korrelation der Gewichte sinnvoll zur Bewahrung der Glattheit der Werkzeugbahn. Gemäß Zielsetzung soll die Bewertung einer Bahn den Aufruf einer Dynamiksimulation beinhalten, welche zugunsten einer gewissen Modularität geringstmögliche Anforderungen erfüllen soll. Im einfachsten Fall soll diese lediglich klassifizieren, ob die Eingabebahn befahrbar ist, im komplexeren Fall die Abweichung zwischen Soll- und Ist-Bahn ermitteln.

[Abbildung 5.28a](#) zeigt für einen Kontaktbahnabschnitt auf einer beckenförmigen Tiefziehform vier potentielle Werkzeugbahnabschnitte:

- W1 bewahrt an jedem Punkt den idealen Spritzwinkel und -Abstand, führt jedoch zu einer weit ausladenden Schleife mit Kollisionen.

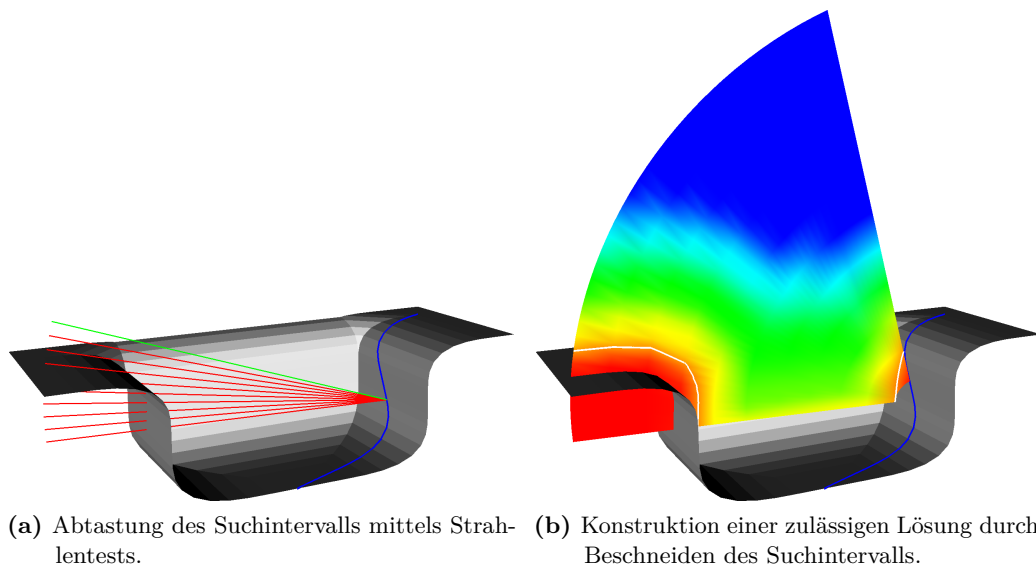


Abbildung 5.27: Bestimmung eines kollisionsvermeidenden Interpolationsgewichts.

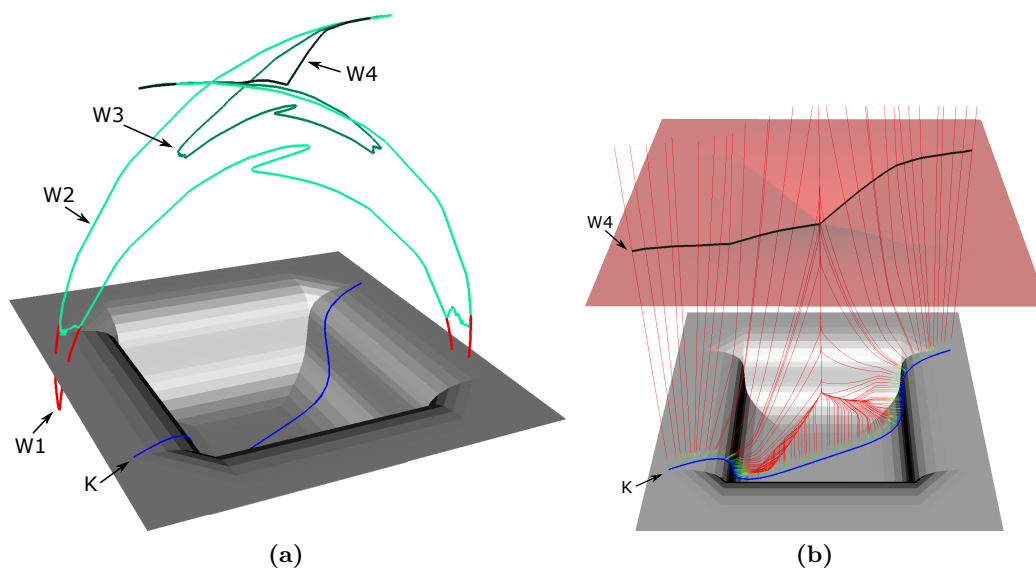


Abbildung 5.28: Werkzeugbahnen für einen Kontaktbahnabschnitt auf einer beckenförmigen Tiefziehform.

- W2 beinhaltet *lokale* Abweichungen von der idealen Werkzeugposition zur Kollisionsvermeidung.
- W3 beinhaltet *globale* Abweichungen von der idealen Werkzeugposition zur Schleifenreduktion.
- W4 ist die nächstgelegene Kurve auf der Offset-Fläche und damit schleifenfrei.

Abbildung 5.28b veranschaulicht die Berechnung der Offset-Bahn (W4) als Menge der Schnittpunkte der Normalkurven aller Kontaktpunkte mit der Offset-Fläche.

5.6 Relaxierte Offset-Positionsbahnen

Der bisher dargestellte Ansatz zur Relaxation von Wirkungswinkel und -Abstand beschränkte sich auf den Fall, dass sich die zu einer Kontaktkurve gehörige wirkungsgünstige und dynamikgünstige Werkzeugpositionskurve unterscheiden, und setzt somit insbesondere eine konkave Krümmung der Bezugsfläche voraus. Werden unterschiedliche Abschnitte der Kontaktkurve auf unterschiedliche Seiten der Medialachse der Bezugsfläche abgebildet, enthält die wirkungsgünstige Werkzeugpositionskurve stets eine Schleife. Durch Relaxation von Wirkungsrichtung und -abstand mittels des dargestellten Verfahrens kollabiert diese Schleife letztendlich zu einem einzigen Punkt auf der Medialachse. Dadurch entsteht eine Singularität auf der Werkzeugpositionskurve, in der die Ableitungen nach der Kurvenlänge verschwinden. In diesem Punkt bewegt sich das Werkzeug nicht, sondern ändert nur seine Orientierung. Aus dynamischer Sicht bedeutet dies, dass das Werkzeug immer noch bis zum Stillstand abgebremst und anschließend wieder beschleunigt werden muss, ähnlich zur Situation an den beiden Umkehrpunkten des zuvor schleifenförmigen Bahnverlaufs, jedoch mit reduzierter Beschleunigung aufgrund reduzierter Weglängen. Durch Relaxation bleibt die Schleife also erhalten und wird solange verkleinert, bis sie in einer Singularität kollabiert.

Beide Aspekte, Beschränkung auf konkave Krümmung und Bereinigung von Schleifen mittels Singularitäten, können in bestimmten Szenarien problematisch sein. Einerseits kann auch bei konvexer Normalkrümmung der Kontaktkurve eine Relaxation von Wirkungsrichtung und -Abstand wünschenswert sein zur Reduktion der erforderlichen Werkzeugbeschleunigung. Andererseits kann ein Werkzeugbahnverlauf wünschenswert sein, der keine Positionen mehr enthält, an denen das Werkzeug bis zum Stillstand abgebremst werden muss. Im Folgenden werden beide Aspekte im Rahmen einer Verallgemeinerung des Relaxationsverfahrens berücksichtigt.

5.6.1 Singularitätsfreie Schleifenbereinigung

Eine Singularität entsteht dort, wo mehrere aufeinanderfolgende Kontaktpunkte $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots$ auf dieselbe (dynamikgünstige) Werkzeugposition $\mathbf{o}_0 = \mathbf{o}_1 = \dots$ auf der Medialachse \mathcal{M} der Bezugsfläche abgebildet werden. Der Punkt \mathbf{o}_i ist dabei als der Schnittpunkt zwischen der Normalkurve des Kontaktpunkts \mathbf{p}_i mit der Offset-Fläche

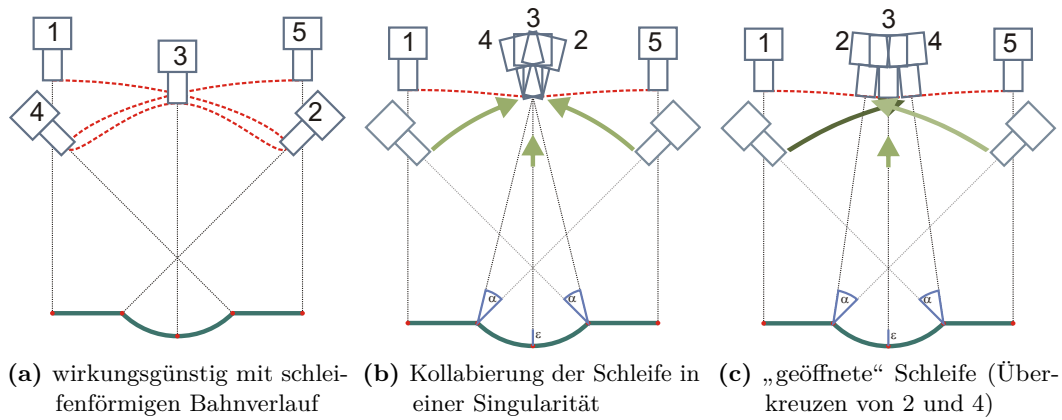


Abbildung 5.29: Öffnung einer Schleife im Bahnverlauf.

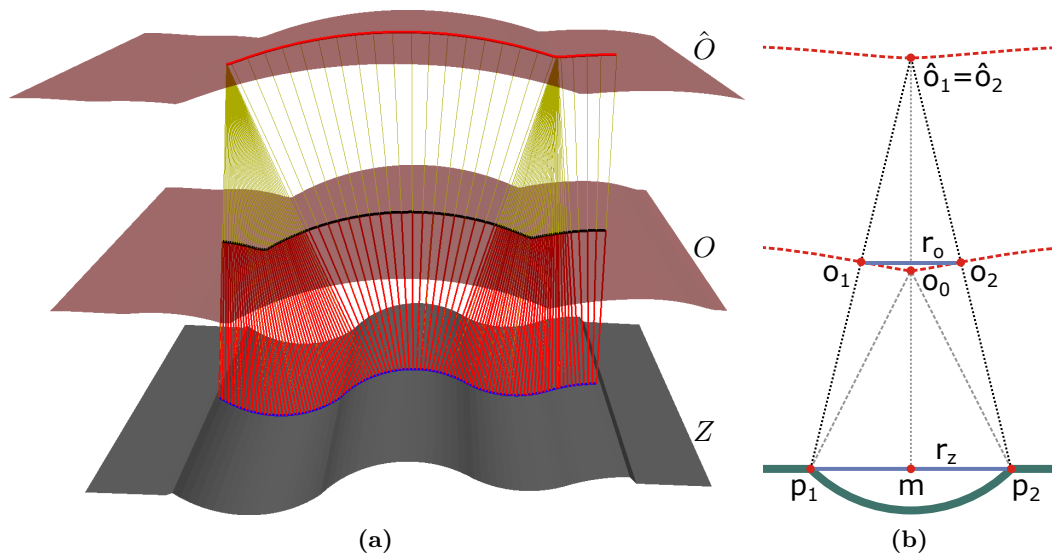


Abbildung 5.30: Verschiebung der Singularität auf eine neue Offset-Fläche \hat{O} während die Werkzeugposition auf O verbleibt.

O der Bezugsfläche Z definiert. Die grundlegende Idee liegt nun in der Verwendung unterschiedlicher Offset-Flächen O und \hat{O} zur Bestimmung von Wirkungsrichtung und -abstand, wie [Abbildung 5.30](#) zeigt. Die Wirkungsrichtung wird durch den Schnittpunkt $\hat{o} \in \hat{O}$ der Normalkurve eines Punktes $\mathbf{p} \in Z$ mit \hat{O} festgelegt und der Wirkungsabstand durch den Schnittpunkt $\mathbf{o} \in O$ der resultierenden Verbindungslinie $\overline{\mathbf{p}\hat{o}}$ mit O . Anschaulich wird die Singularität auf diese Weise auf eine andere Offset-Fläche \hat{O} verschoben als diejenige, auf der das Werkzeug verfährt. Ist der Abstand zu \hat{O} größer als der Abstand zu O , so liegen die ursprüngliche und resultierende Werkzeugposition auf unterschiedlichen Seiten der Singularität. Dies kann als „Öffnung“ der Schleife interpretiert werden, wie [Abbildung 5.29](#) veranschaulicht.

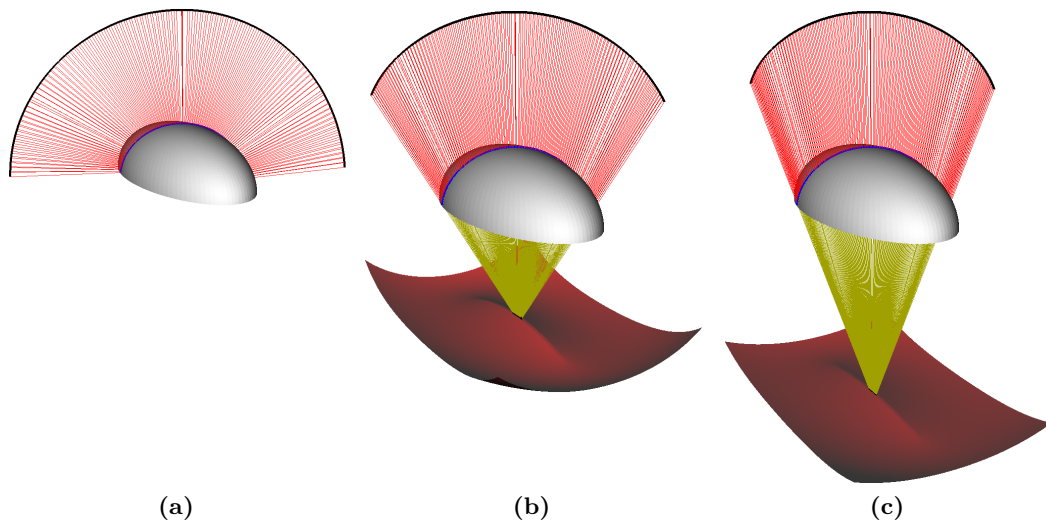


Abbildung 5.31: Relaxation bei konvexer Krümmung.

5.6.2 Konvexe Normalkrümmung

Die Tatsache, dass aus einer konvexen Krümmung durch Invertieren der Normalen eine konkave Krümmung wird, führt zur Verallgemeinerung von Kompromissbahnen auf Kontaktkurven mit konvexer Normalkrümmung. In diesem Fall erfolgt die Verfolgung der Normalkurven bis zum Schnittpunkt mit der Offset-Fläche innerhalb des durch den negativen Normalenvektor festgelegten Halbraums. Erreicht wird dies durch Verwendung des negativen Distanzfeld-Gradienten als Ausbreitungsrichtung (im Falle eines vorzeichenbehafteten Distanzfelds) oder durch Initialisierung des Startpunktes entlang des negativen anstatt positiven Normalenvektors (im Falle eines nicht-vorzeichenbehafteten Distanzfelds). Der Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{o}$ vom Kontaktpunkt \mathbf{p} zum korrespondierenden Offset-Punkt \mathbf{o} wird anschließend invertiert und entsprechend des Wirkungsabstands skaliert.

Abbildung 5.31 zeigt eine Kontaktbahn mitsamt zugehöriger Positionsbahn auf der konvexen Seite der ellipsoidförmigen Bezugsfläche (grau) aus [Abbildung 5.25](#), sowie einen Ausschnitt der Offset-Fläche auf der konkaven Seite der Bezugsfläche. Zu erkennen ist die zunehmende Kontraktion der Positionsbahn bei zunehmendem Abstand der Offset-Fläche auf der konkaven Seite der Bezugsfläche. Aufgrund der Abwesenheit einer Medialachse auf der konvexen Seite bleibt der Wirkungsabstand dort konstant. An dieser Stelle sei wiederholt, dass die Abbildung eines Kontaktpunkts auf seine Werkzeugposition nicht nur von der Krümmung der Bezugsfläche am Kontaktpunkt abhängt, sondern auch von der Medialachse, und damit dem globalen Verlauf der Bezugsfläche. D.h. ob am Kontaktpunkt eine konkave oder konvexe Krümmung oder ein Wende- oder Sattelpunkt vorliegt, beeinflusst nicht notwendigerweise die Abbildung auf die Werkzeugposition. Dies ist bspw. beim Vergleich der in [Abbildung 5.31c](#) und [5.30a](#) dargestellten Situationen ersichtlich. In

Abbildung 5.31c erfolgt die Kontraktion der zur konvex gekrümmten Kontaktbahn gehörigen Werkzeugbahn durch Überführung in den konkaven Fall durch Invertieren der Normalen. In [Abbildung 5.30a](#) ist der über den mittleren Hügel hinweg führende Kontaktbahnabschnitt zwischen den Wendepunkten ebenfalls konvex gekrümmt. Trotz konvexer Krümmung des Kontaktbahnabschnitts erfolgt eine Kontraktion des zugehörigen Werkzeugbahnabschnitts, und zwar aufgrund der angrenzenden konkaven Kontaktbahnabschnitte bzw. der damit einhergehenden Medialachse.

5.7 Glättung von Kontakt- und Positionsbahnen

Die mit den geschilderten impliziten Verfahren berechneten Kontakt- und Positionsbahnen können einen unruhigen Verlauf aufweisen. Dies kann konzeptionell bedingt sein, etwa da Offset-Flächen an ihrem Durchschnitt mit der Medialachse in der Regel nur stetig, aber nicht unbedingt stetig differenzierbar sind. Ein weiterer Grund kann in der Diskretisierung liegen, etwa im Ersetzen glatter Flächen durch Dreiecksnetze und glatter Kurven durch Polygonzüge. In diesem Zusammenhang beeinflussen bspw. die Netzstruktur und Knotenverteilung die Glattheit des resultierenden Oberflächendistanzfelds, und damit auch die Glattheit der Niveaumengen. Des Weiteren kann die Erkennung von Kammlinien auf einer diskretisierten Oberfläche gemäß [Abschnitt 3.3](#) zu einem unruhigen Verlauf der Nullstellenmenge des Oberflächendistanzfelds führen, und damit auch aller weiteren Konturen. Dieses Unterkapitel befasst sich mit der Berechnung von geglätteten Kontakt- und Werkzeugpositionsbahnen. Glättung bedeutet dabei nicht nur die Herstellung einer höheren Differenzierbarkeitsordnung, sondern auch eines global ausgeglicheneren Verhaltens. Aus fertigungstechnischer Sicht kann jede sprunghafte Änderung der Bewegungsrichtung potentiell die Abbremsung und Beschleunigung des Werkzeugs erfordern, und damit die reale Werkzeugposition oder die Wirkungsdauer beeinflussen. Die Glättungsverfahren basieren auf den Definitionen der Bahntypen. Dies hat den Vorteil, dass damit Bahneigenschaften eher als bei allgemeinen Glättungsfiltren erhalten werden können.

Im Folgenden werden Verfahren zur Erzeugung geglätteter Varianten für implizit definierte Kontakt- und Positionsbahnen auf Oberflächen nach [Abschnitt 5.1](#) und implizit definierte Positionsbahnen zu Oberflächen als Durchschnitt zwischen Normalfläche und Offset-Fläche nach [Abschnitt 5.4](#) präsentiert. Für Positionsbahnen werden zwei grundsätzlich unterschiedliche Ansätze vorgestellt, von denen einer direkt auf der Definition der Bahnen aufbaut, wohingegen der andere die allgemeine Methode der aktiven Konturen einsetzt. Als weitere Herangehensweise sei die in [Unterabschnitt 3.3.3](#) thematisierte Glättung von Kammlinien als Nullstellenmenge des Oberflächendistanzfelds erwähnt.

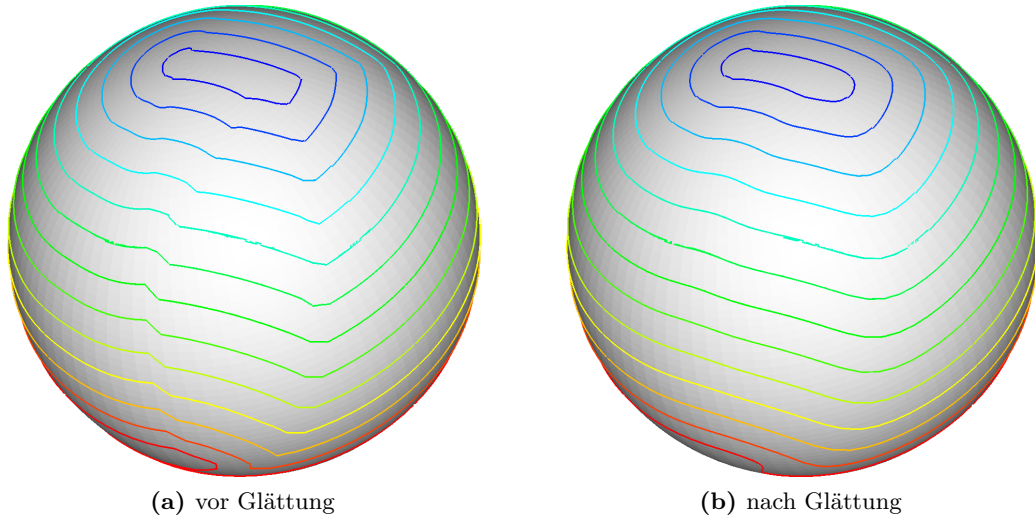


Abbildung 5.32: Glättung impliziter Kurven auf einer Kugeloberfläche.

5.7.1 Glättung implizit definierter Kurven auf Oberflächen

Gegenstand dieses Abschnitts sind implizit repräsentierte Kontakt- oder Positionsbahnen auf Oberflächen gemäß [Abschnitt 5.1](#). Diese Bahnen sind durch Niveaumengen eines Oberflächendistanzfeldes ψ definiert, d.h. durch $\psi^{-1}(c)$, c ein Niveauewert. Eine Glättung dieser Bahnen kann indirekt durch Ersetzen des Oberflächendistanzfeldes durch eine geglättete Version durchgeführt werden, in dem dann die entsprechenden Niveaumengen bestimmt werden. Ein Ansatz besteht in der Verwendung der Level-Set-Gleichung

$$\partial_t \psi = \Delta_S \psi, \quad (5.11)$$

die einen auf einer Mannigfaltigkeit S definierten Diffusionsprozess beschreibt, der zur Glättung der Isokonturen des auf S definierten Distanzfeldes ψ führt. Mit Δ_S wird der Laplace-Beltrami-Operator bezeichnet, ein auf der Mannigfaltigkeit S definierter verallgemeinerter Laplace-Operator. Für Dreiecksnetze kann dieser Operator durch

$$\Delta_S \psi(\mathbf{v}_i) \approx \frac{1}{2a_i} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (\psi(\mathbf{v}_i) - \psi(\mathbf{v}_j)), \quad (5.12)$$

approximiert werden, wobei \mathbf{v}_i den i -ten Knoten des Netzes bezeichnet, a_i dessen Flächeninhalt der Voronoi-Zelle, $N(i)$ dessen Nachbarknoten-Indizes und α_{ij} bzw. β_{ij} denjenigen Winkel, der der Kante von Knoten \mathbf{v}_i nach \mathbf{v}_j auf der linken bzw. rechten Seite gegenüberliegt. [Abbildung 5.32](#) zeigt ein beispielhaftes Ergebnis auf einer einfachen kugelförmigen Oberfläche.

Der Vorteil dieses Ansatzes liegt in dessen Globalität, da die Glättung des Skalarfeldes alle Isokonturen gleichermaßen betrifft. Der Nachteil liegt jedoch in dessen Abhängigkeit von der Qualität der Oberflächendiskretisierung. Als Operator

zweiter Ordnung erweist sich der Laplace-Operator als sehr sensitiv gegenüber der Knotenverteilung und Netzhomogenität. So können bspw. eine inhomogene Knotenverteilung oder fehlerhafte Topologie das Ergebnis schnell unbrauchbar machen. Aus diesem Grund wurde dieser Ansatz zugunsten eines deutlichen robusteren expliziten Vorgehens nicht weiter verfolgt.

Des weiteren sei erwähnt, dass, unabhängig von der numerischen Methode, eine glatte Kontaktkurve nicht notwendigerweise eine glatte Werkzeugpositionskurve impliziert.

5.7.2 Gemeinsame Glättung von Kontakt- und Positionskurven durch Glättung von Normalflächen

Gegenstand dieses Abschnitts sind Positionsbahnen, die gemäß [Abschnitt 5.4](#) als Durchschnitt der implizit gegebenen Normalfläche $\omega^{-1}(c)$ zu einer implizit gegebenen Kontaktbahn $\psi^{-1}(c)$ auf einer Oberfläche Z und einer Offsetfläche $\phi^{-1}(r)$ von Z definiert ist.

Ein möglicher Ansatz zur Glättung solcher Positionsbahnen ist die Glättung der Kontaktbahnen auf der Oberfläche mit dem Verfahren des vorigen Unterabschnitts. Allerdings zeigt es sich, dass die aus dem Skalarfeld ω resultierenden Artefakte zu weit größeren Schwankungen der Positionsbahnen als Schwankungen in den originalen Kontaktbahnen führen, die nicht durch eine vorangestellte Glättung des Oberflächendistanzfeldes behoben werden.

Dieser Abschnitt behandelt diese Schwierigkeit durch Glättung der Normalflächen, die sich als Niveaumengen des durch Extrusion eines Oberflächendistanzfelds ψ entstehenden räumlichen Skalarfelds ω von [Abschnitt 5.4](#) ergeben. Die Glättung der Normalfläche ist motiviert durch die Idee der verknüpften Glättung einer implizit definierten Kontaktkurve mitsamt ihrer zugehörigen implizit definierten Offset-Kurve. Da beide Kurven auf derselben Normalfläche mit unterschiedlichem Abstand zur Bezugsfläche liegen, führt eine Glättung der Normalfläche insbesondere zur verknüpften Glättung von deren Schnittkurve mit der Ziel- und der Offset-Fläche. Analog zum vorigen Abschnitt erfolgt die Glättung der Niveaumengen des Skalarfelds ω durch einen Diffusionsprozess, der durch eine Level-Set-Gleichung beschrieben wird, der aus [Gleichung \(2.19\)](#) durch Weglassen der externen Geschwindigkeit v_n hervorgeht:

$$\partial_t \omega = \kappa |\nabla \omega| \quad \text{mit } \kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \omega}{|\nabla \omega|} \right) \quad (5.13)$$

$$= \Delta \omega \quad \text{falls } |\nabla \omega| = 1, \quad (5.14)$$

wobei Δ den Laplace-Operator gemäß $\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}$ bezeichnet. Aufgrund der in [Unterabschnitt 5.4.2](#) benannten Einschränkungen erweist sich die Lösung des Anfangswertproblems auf dem durch Extrusion des Oberflächendistanzfelds ψ hervorgegangenen räumlichen Skalarfelds ω als instabil. Dieses Problem wird

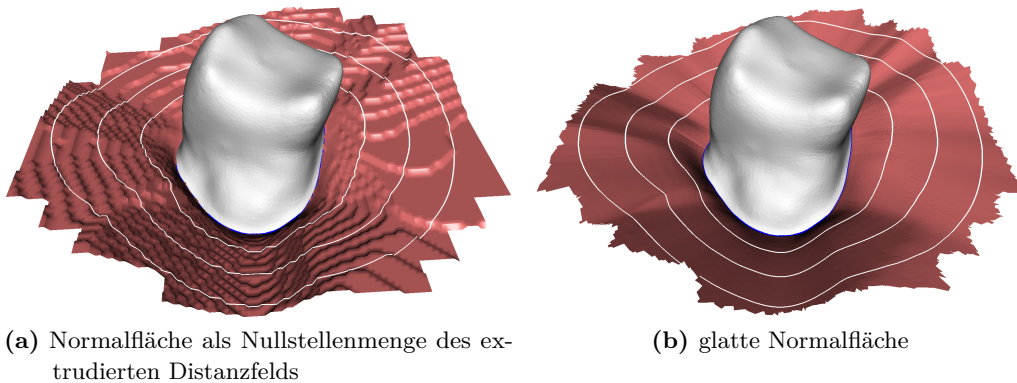


Abbildung 5.33: Glättung der Normalfläche einer Kontaktbahn, und damit auch aller darauf befindlichen Kontakt- und Werkzeugpositionskurven.

dadurch angegangen, dass ω zunächst in ein Distanzfeld überführt wird, womit sich folgender Ablauf ergibt:

1. Repräsentation der c -Niveaumenge des Skalarfelds ω als Nullstellenmenge eines vorzeichenbehafteten Distanzfelds τ (Randwertproblem).
2. Lösen der Level-Set-Gleichung (5.13) auf τ .
3. Konturierung der geglätteten Kontakt- und Werkzeugpositionskurve als $(r, 0)$ -Niveaumenge von (ϕ, τ) anstatt als (r, c) -Niveaumenge von (ϕ, ω) .

Abbildung 5.33a zeigt beispielhaft eine als Nullstellenmenge des durch Extrusion hervorgegangenen Skalarfelds ω repräsentierte Normalfläche. Diese weist wellenförmige Störungen bedingt durch die Medialachse des Zielobjekts auf. Abbildung 5.33b zeigt eine glatte Version der Normalfläche.

5.7.3 Glättung mit der Methode der aktiven Konturen

Gegenstand dieses Abschnitts sind wiederum Positionsbahnen der Art des vorigen Abschnitts. Der nun präsentierte Ansatz basiert nicht auf der Glättung der Flächen, als deren Durchschnitt sich Positionskurven ergeben, sondern formuliert das Kurvenverhalten als Zielfunktion über Kurveneigenschaften, nämlich die Länge und die Krümmung, wobei die Beziehung zur Definition der Originalpositionskurve durch weiche Nebenbedingungen hergestellt werden. Dadurch bekommt das Kurvenverhalten stärkere Relevanz als bei den anderen Verfahren.

Aufgrund der Tatsache, dass Niveaumengen mannigfaltig sind, lässt sich der Durchschnitt prinzipiell als Kurve $\mathbf{u}(s)$, $\mathbf{u} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ in Parameterdarstellung, s der Parameter, repräsentieren. Da \mathbf{u} nur zur Herleitung und nicht zur Implementierung des Verfahrens vonnöten ist, wird hier auf eine Konkretisierung des Zusammenhangs zwischen parametrischer und impliziter Kurvenrepräsentation verzichtet. In Anlehnung an das Konzept der aktiven Konturen [KWT88] wird der Kurve $\mathbf{u}(s)$ die folgende Energie zugewiesen:

$$E(\mathbf{u}(s)) = \underbrace{\int_a^b \frac{\alpha_0}{2} \|\mathbf{u}'\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|\mathbf{u}''\|^2 ds}_{\text{interne Energie}} + \underbrace{\int_a^b \beta_0 |\phi(\mathbf{u}) - r| + \beta_1 |\omega(\mathbf{u}) - c| ds}_{\text{externe Energie}} \quad (5.15)$$

$$\text{mit } \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}'' = \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2}. \quad (5.16)$$

Diese Energie ist abhängig von intrinsischen Eigenschaften (Länge, Krümmung) der Kurve sowie von deren Lage innerhalb der Skalarfelder ϕ und ω .

Die externe Energie ist proportional zum Abstand der Kurve sowohl von der Offset-Fläche (linker Summand der externen Energie) als auch von der Normalfläche (rechter Summand der externen Energie). Eine Kurve mit minimaler externer Energie wird demnach in der Offset-Fläche liegen (sofern $\beta_0 > 0$) und/oder in der Normalfläche (sofern $\beta_1 > 0$) bzw. in der Schnittmenge beider Flächen (sofern $\beta_0 > 0 \wedge \beta_1 > 0$). In diesen Fällen ist die Energie 0.

Die interne Energie ist proportional zur Länge und Krümmung der Kurve. Eine Kurve, welche ausschließlich die interne Energie minimiert, wird sich zu einem einzelnen Punkt zusammenziehen (sofern $\alpha_0 > 0$) und/oder zu einer Geraden verformen (sofern $\alpha_1 > 0$). Dies ist der triviale Fall. Nützlicher wird diese Energie in Anwesenheit von Nebenbedingungen, bspw. durch Fixierung der Endpunkte einer offenen Kurve – in diesem Fall entspricht eine Kurve mit minimaler interner Energie einer kürzestmöglichen, und damit auch glattesten, Verbindung der Endpunkte.

Durch die Kombination der Energien gemäß [Gleichung \(5.15\)](#) soll erreicht werden, dass die Kurve stets auf der Offset-Fläche verbleibt und sich zur Erhöhung ihrer Glattheit zu einem gewissen Grad von der Normalfläche entfernen kann.

Die Berechnung einer Kurve \mathbf{u} , welche [Gleichung \(5.15\)](#) minimiert, erfolgt mittels der Variationsrechnung unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichung. Diese besagt, dass ein Extremum des Funktionals $E(\mathbf{u})$ mit

$$E(\mathbf{u}) = \int_a^b f(s, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') ds, \quad (5.17)$$

die Gleichung

$$\frac{dE}{d\mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{ds} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}'} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}''} = 0 \quad (5.18)$$

erfüllen muss, wobei $\mathbf{u}(s)$, $\mathbf{u}'(s)$ und $\mathbf{u}''(s)$ in diesem Fall die Raumkurve und deren erste und zweite Ableitung nach dem Kurvenparameter bezeichnen. Das „Hilfsfunktional“ $f(s, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'')$ dient der Zusammenfassung des zu integrierenden Terms des Energiefunktionals, welcher nur von der (unbekannten) Funktion $\mathbf{u}(s)$ sowie dessen Argument s und Ableitungen \mathbf{u}' und \mathbf{u}'' abhängt. Die in [Gleichung \(5.18\)](#) aufgeführten Ableitungen von f lassen sich folgendermaßen ermitteln:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\beta_0 |\phi(\mathbf{u}) - r| + \beta_1 |\omega(\mathbf{u}) - c|) \quad (5.19)$$

$$= \beta_0 \nabla \phi \frac{\phi - r}{|\phi - r|} + \beta_1 \nabla \omega \frac{\omega - c}{|\omega - c|} \quad (5.20)$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}'} = \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'} \left(\frac{\alpha_0}{2} \|\mathbf{u}'\|^2 \right) \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{ds} \alpha_0 \|\mathbf{u}'\| \\ &= \alpha_0 \mathbf{u}'', \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}''} = \frac{d^2}{ds^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}''} \left(\frac{\alpha_1}{2} \|\mathbf{u}''\|^2 \right) \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d^2}{ds^2} \alpha_1 \|\mathbf{u}''\| \\ &= \alpha_1 \mathbf{u}'''' . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Gleichung (5.20) ergibt sich aus Gleichung (5.19) durch Anwendung der Kettenregel auf die Betragsfunktion und Ableitung derselben gemäß der Regel $\frac{d}{du} |u| = \frac{u}{|u|}$.

Nach Einsetzen der Ableitungen (5.20), (5.22) und (5.24) in die Euler-Lagrange-Gleichung (5.18) resultiert folgender Ausdruck für die Ableitung von E :

$$\frac{dE}{d\mathbf{u}} = -\alpha_0 \mathbf{u}'' + \alpha_1 \mathbf{u}'''' + \beta_0 \nabla \phi \frac{\phi - r}{|\phi - r|} + \beta_1 \nabla \omega \frac{\omega - c}{|\omega - c|} = 0. \quad (5.25)$$

Eine geschlossene Lösung dieser Gleichung ist im Allgemeinen nicht möglich. Durch Auffassung des Ausdrucks als Energiegradient, welcher stets in die Richtung des steilsten Energieanstiegs zeigt, lässt sich die Lösung jedoch iterativ mittels Abstieg in Richtung des negativen Energiegradienten finden. Dies lässt sich durch folgende gewöhnliche Differentialgleichung darstellen, welche die Änderung $\partial_t \mathbf{u}$ von \mathbf{u} mit dem negativen Energiegradient $-\frac{dE}{d\mathbf{u}}$ gleichsetzt:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \underbrace{\alpha_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2}}_{f_1} - \underbrace{\alpha_1 \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial s^4}}_{f_2} - \underbrace{\beta_0 \nabla \phi \frac{\phi - r}{|\phi - r|}}_{f_3} - \underbrace{\beta_1 \nabla \omega \frac{\omega - c}{|\omega - c|}}_{f_4}. \quad (5.26)$$

Da die Funktion \mathbf{u} durch den Gradientenabstieg nun zusätzlich zum Kurvenparameter s auch von einer Zeit t abhängt, sind aus den Ableitungen von \mathbf{u} nun partielle Ableitungen geworden. Diese Zeitabhängigkeit dient jedoch ausschließlich zur Darstellung des iterativen Lösungsverfahrens als Anfangswertproblem.

Die vier Terme lassen sich als vier von der Kurvenenergie induzierte Kräfte interpretieren, die auf jeden Punkt der Kurve wirken. Dabei wirken die Kräfte f_1 und f_2 einer Dehnung und Biegung der Kurve entgegen und bewirken dadurch eine gewisse Steifigkeit, während f_3 und f_4 eine Anziehung der Kurve in Richtung der Niveaumengen (Offset- und Normalfläche) bewirken. Im Gleichgewichtsfall löschen sich die Kräfte gegenseitig aus und der Energiegradient ist 0, d.h. die Kurve hat (lokal) minimale Energie.

Zur iterativen Berechnung einer Kurve mit minimaler Energie mittels Gleichung (5.26) sind nun zwei Schritte erforderlich:

1. Diskretisierung der parametrischen Kurve $\mathbf{u}(s)$ durch Einführung von Stützstellen $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_N$ mit $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(s_i)$,
2. Approximation der partiellen Ableitungen $\partial_t \mathbf{u}$, $\partial_{ss} \mathbf{u}$, $\partial_{ssss} \mathbf{u}$, $\nabla \phi$, $\nabla \omega$ mittels finiter Differenzen.

Diskretisierung der Funktion \mathbf{u}

Wie eingangs erwähnt, soll das Bild der Funktion $\mathbf{u}(s)$ initial der (r, c) -Niveaumenge von (ϕ, ω) entsprechen, d.h. der Schnittmenge aus Offset- und Normalfläche. Die zur Diskretisierung von $\mathbf{u}(s)$ verwendeten Stützstellen $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_N$ bilden dann eine endliche Teilmenge der Schnittkurve. Die Bestimmung dieser Teilmenge mitsamt Topologie (Nachbarschaftsbeziehung zwischen den Elementen) resultiert natürlicherweise aus der Repräsentation von ϕ und ω mittels eines adaptiven Gitters, sowie der Berechnung von Niveaumengen mittels eines gitterbasierten Konturierungsverfahrens. Letzteres konstruiert Iso-Flächen oder -Kurven durch sukzessives Erzeugen von Kanten bzw. Dreiecken für jede Gitterzelle, welche die Niveaumenge schneidet. Die Knoten der resultierenden Kanten- bzw. Dreieckmenge entsprechen den Stützstellen von \mathbf{u} , während die Kanten die Topologie definieren.

Eine Sortierung der Knoten (Stützstellen) anhand aufsteigender Kurvenlänge lässt sich durch Suche eines Pfades zwischen zwei Endknoten mit nur einem Nachbarn (offene Kurve) bzw. eines Pfades von einem beliebigen Startknoten zu sich selbst (geschlossene Kurve) ermitteln. Dafür werden aus der Kantenmenge zunächst alle offenen Kurven extrahiert, indem von einem beliebigen Endknoten mit nur einem Nachbarn beginnend ein Pfad verfolgt und die besuchten Knoten markiert bzw. aus der Kantenmenge entfernt werden, solange bis kein Endknoten mehr existiert. Die verbliebenen unmarkierten Knoten liegen dann auf einer oder mehreren geschlossenen Kurven, da alle Knoten, die von einem Endknoten aus erreichbar sind und somit auf einer offenen Kurve liegen, bereits im vorherigen Schritt markiert wurden. Anschließend wird von einem beliebigen unmarkierten Knoten aus ein zyklischer Pfad gesucht und die besuchten Knoten markiert, solange bis kein Knoten mehr existiert.

Approximation der partiellen Ableitungen

Die in Gleichung (5.26) auftretenden partiellen Ableitungen von \mathbf{u} nach dem Kurvenparameter s lassen sich mittels des zweiten bzw. vierten zentralen Differenzenquotienten approximieren und die Gradienten $\nabla \phi$ und $\nabla \omega$ mittels des Upwind-Schemas, siehe auch [Unterabschnitt 3.1.2](#).

Die Integration über die zeitliche Ableitung von \mathbf{u} erfolgt mittels eines expliziten Einschrittverfahrens. Dabei ist zu beachten, zu welchem Zeitpunkt welche Kraft wirken bzw. ausgewertet werden darf. Eine wesentliche Voraussetzung für die Kollisionsfreiheit der Werkzeugbahnen ist die Einhaltung eines vorgegebenen Abstands zur Bezugsfläche, was in Gleichung (5.26) durch die Anziehungskraft f_3 zur Offset-Fläche vermittelt wird. Innerhalb eines Zeitschrittes muss nun sichergestellt werden, dass

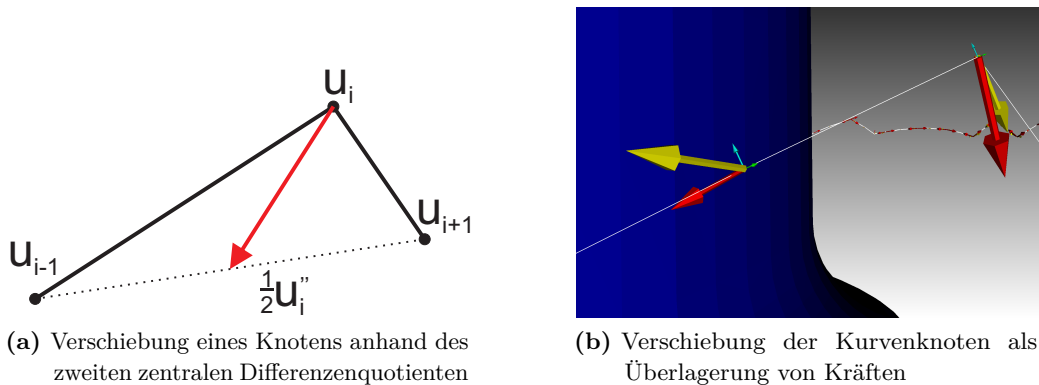


Abbildung 5.34: Visualisierung der an den Knoten wirkenden Kräfte.

diese Anziehungskraft eine durch die anderen Kräfte bedingte Abweichung von der Offset-Fläche kompensiert, d.h. von der Position der Kurvenpunkte *nach* Anwendung der anderen Kräfte abhängt. Dadurch ergibt sich ein zweistufiges explizites Lösungsschema, in dem f_3 für die Zwischenlösung berechnet wird, die durch Anwendung von f_1 , f_2 und f_4 resultiert. [Abbildung 5.34](#) visualisiert beispielhaft die Verschiebung von Kurvenknoten als Überlagerung von Kräften.

5.8 Stand der Wissenschaft

In [\[ZZD+14\]](#) werden Werkzeug-Kontaktbahnen zur spanenden Fertigung als Abfolge von Niveaukurven eines statischen Bezugsflächenskalarfelds ψ repräsentiert, vergleichbar zur Herangehensweise in dieser Dissertation. Im Fokus steht dabei ein in der Dissertation nicht thematisierter Aspekt, die besondere Auslegung des Skalarfelds ψ , indem dieses als Lösung eines Optimierungsproblems, welches die beiden Kriterien Approximationsfehler (Abweichung zwischen Ist- und Soll-Werkstückoberfläche) und Niveaukurvenkrümmung als gewichtete Summe in einer Zielfunktion kombiniert. Der Approximationsfehler ist eine Funktion der Norm des Skalarfeld-Gradienten sowie der Krümmung von Fräser und Bezugsfläche. Die Niveaukurvenkrümmung ist eine Funktion der Divergenz des Skalarfeld-Gradienten (geodätische Krümmung) sowie der Krümmung der Oberfläche, auf der das Skalarfeld definiert ist (Normalkrümmung). Die Minimierung der gewichteten Summe aus der Abweichung des Approximationsfehlers von einer vorgegebenen Schranke sowie der Niveaukurvenkrümmung führt zu einem nichtlinearen Least-Squares-Optimierungsproblem. Der Glättungsterm entspricht dabei einer Erweiterung der in [Unterabschnitt 5.7.1](#) thematisierten geodätischen Krümmung um die Normalkrümmung der Niveaukurven, welche durch die Krümmung des Definitionsbereichs von ψ induziert wird. Wie in [Unterabschnitt 5.7.1](#) erörtert, stellt die Glättung impliziter Kurven hohe Anforderungen an die Homogenität der Diskretisierung der Bezugsfläche.

Einen ähnlichen Ansatz verfolgt [ZT16], indem ebenfalls ein Oberflächenskalarfeld zur Darstellung der Kontaktbahnabschnitte als Niveaumengen dient, und damit insbesondere die Vorschubrichtung determiniert als den in der Tangentialebene orthogonal auf dem Skalarfeldgradienten stehenden Vektor. Ein zweites Oberflächenskalarfeld dient zur Definition der Vorschubgeschwindigkeit entlang der Bahnabschnitte. Die Berechnung der Skalarfelder erfolgt durch iterative Minimierung der Bearbeitungsdauer unter den Nebenbedingungen einer konstanten Restmaterial-Scheitelhöhe (als Funktion der Gradientennorm des ersten Skalarfeld) sowie einer maximalen Werkzeuggeschwindigkeit und -Beschleunigung (als Funktion der Gradientennorm des zweiten Skalarfelds).

Beide Arbeiten sind dahingehend komplementär zu dieser Dissertation, dass sie die besondere Auslegung des Oberflächenskalarfelds als Lösung eines Optimierungsproblems thematisieren, dabei jedoch die Initialisierung des Skalarfelds sowie die Überführung der Kontaktbahnen in Werkzeugpositionsbahnen missachten, worauf sich wiederum diese Dissertation fokussiert.

Unter Verwendung des metrischen Tensors dient in [KM14] eine krümmungsabhängige Metrik zur Generierung eines Skalarfelds, dessen Niveaumengen Kontaktbahnen mit vorgegebener resultierender Restmaterial-Scheitelhöhe entsprechen.

Die zur Positionsbestimmung des Werkzeugs erforderliche Offset-Fläche wird im Rahmen dieser Arbeit als Niveaumenge eines statischen Distanzfelds entsprechend der schwachen Lösung des Randwertproblems Gleichung (2.18) definiert. Eine alternative Methode zur Bestimmung der Offset-Fläche als Lösung des Anfangswertproblems (Level-Set-Gleichung) thematisiert [SFC+10]. Diese Herangehensweise ist im Allgemeinen weniger effizient als die Lösung des Randwertproblems. Des Weiteren ist im resultierenden Skalarfeld nur die Nullstellenmenge von Bedeutung, und die Änderung des Offset-Wertes erfordert eine erneute Lösung des Anfangswertproblems. Der Vorteil dieser Herangehensweise ist dagegen die fehlende Beschränkung auf eine monotone Ausbreitungsrichtung, sodass sich z.B. eine konturabhängige Glättung berücksichtigen oder die Ausbreitung anhalten lässt (siehe Abschnitt 6.3.3).

In [ZHT15] werden Kontaktkurven als Schnittmenge zwischen der Bezugsfläche und einer Sequenz aus speziell konstruierten Oberflächen zur Lokalisation des Werkzeugs definiert. Die Oberflächen resultieren aus der Forminterpolation zwischen einem inneren und äußeren Rand einer zu bearbeitenden Region auf der Bezugsfläche. Die Schrittweite der Interpolation wird dabei entsprechend einer vorgegebenen Restmaterial-Scheitelhöhe zwischen benachbarten Bahnen gewählt. Die konzeptuelle Idee der Verwendung forminterpolierender Flächen zur Definition von Werkzeugbahnen ähnelt derjenigen in Abschnitt 6.3.3. Jedoch unterscheidet sich die methodische Umsetzung insbesondere hinsichtlich der Verwendung impliziter Repräsentationen.

Eine grundlegend alternative Herangehensweise zur Bahngenerierung für die spanende Fertigung dentaler Werkstücke, welche direkt auf einem Dreiecksnetz operieren soll, zeigt [MBM16]. Darin wird zunächst eine zweidimensionale Parametrierung der Netzknoten ermittelt und anschließend jedem Knoten ein Vektor in der Tangentialebene zugewiesen, der in diejenige Richtung zeigt, die ein vorde-

finiertes Zielkriterium optimiert wie z.B. schnellstmögliche Achsenbewegung der Fräsmaschine oder maximales Schnittvolumen. Ausgehend von diesem Vektorfeld aus bevorzugten Bearbeitungsrichtungen erfolgt die Bestimmung einer Kurvenschar als iterative Lösung eines Optimierungsproblems, wobei die Knoten der Kurven auf den Kanten des Dreiecksnetzes liegen und entlang dieser verschoben werden.

Ein für diese Dissertation besonders relevanter Aspekt der Bahngenerierung liegt in der Vermeidung von Schleifen, sowohl in der Kontaktpunkt- als auch der Werkzeugpositionsbahn. Einen grundlegend verschiedenen nicht-impliziten Ansatz zur Schleifenvermeidung zeigt [XSZ15], durch Bestimmung von Selbstüberschneidungen der in einen zweidimensionalen Bildraum transformierten Bahnkurven.

[XGS+19; ZZ13] zeigen Methoden zur Planung von Bahnen auf Oberflächen, die durch Punktwolken approximiert werden. Punktwolken stellen eine zu den Niveaumengen und Dreiecksnetzen alternative Repräsentationsform dar, welche bspw. unmittelbar aus der Erfassung realer Objekte mittels eines optischen oder taktilen 3D-Scanners resultiert. In bestimmten Anwendungsszenarien kann dieses Vorgehen vorteilhaft sein und die Konvertierung eines Scans in eine kontinuierliche Darstellungsform entfallen.

Ein in diesem Kapitel nicht thematisierter Aspekt ist die kombinatorische Bahnplanung gemäß [Abbildung 4.1](#), zu der hier insbesondere die Werkzeugorientierung und Vermeidung indirekter Kollisionen zählen soll. Ansätze hierzu sind in [CXT15; LZL+11] zu finden und beruhen auf der Idee, jeder Werkzeugposition eine Menge potentieller kollisionsfreier Orientierungen (*accessibility map*) zuzuweisen und die Auswahl der Orientierung als Lösung eines Optimierungsproblems über einen Bahnabschnitt darzustellen. Die im Rahmen der Software *AnyCAM* eingesetzte Herangehensweise dokumentiert [GW13].

Bei der Bestimmung der Fräserorientierung beschränkt sich die Dissertation auf den Fall kugelförmiger Fräterspitzen. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass die Fräserposition und -Orientierung voneinander unabhängig sind. Bei Fräsern mit nicht kugelförmiger Spitze beeinflusst dagegen die Werkzeugposition die Menge potentieller Orientierungen und umgekehrt, siehe auch [Abbildung 1.5b](#). Die Berechnung der Orientierung eines Fräasers mit zylindrischer Spitze thematisiert bspw. [FB14].

Bahnplanung im Raum

Inhalt

6.1	Verfahren der Bahnplanung zur Grobbearbeitung	126
6.2	Sichtbarkeitsfläche	130
6.3	Konturausbreitung	131
6.3.1	Ausbreitungsdomäne	132
6.3.2	Ausbreitungsrichtung	132
6.3.3	Ausbreitungsgeschwindigkeit	133
6.4	Bahnverkettung	141
6.4.1	Struktur der Eingabe	141
6.4.2	Technische Anforderungen an die Bearbeitungsreihenfolge der Bahnabschnitte	142
6.4.3	Randbedingungen an die Bearbeitungsreihenfolge	143
6.4.4	Zuordnung von Bahnabschnitten zu Bearbeitungsrichtungen	144
6.4.5	Verbindungsbahnabschnitte	145
6.4.6	Berechnung von günstigen Anordnungen	146
6.5	Stand der Wissenschaft	147

Das Kapitel präsentiert ein Verfahren zur Grobbearbeitung beim Fräsen, die das Freilegen eines Zielkörpers (Zielwerkstück) zum Ziel hat, der Teilmenge eines gegebenen Körpers (Rohlings) ist. Das Verfahren basiert auf dem Dreiachsfräsen mit einem kugelförmigen Fräs Werkzeug, d.h. die Zustellrichtung des Fräs Werkzeugs steht fest. Nicht hinterschnittfreie Zielwerkstücke können durch mehrfache Anwendung des Verfahrens mit unterschiedlichen Zustellrichtungen bearbeitet werden. Die Lösung dieses volumenbezogenen Bahnplanungsproblems gliedert sich in einen geometrischen und einen kombinatorischen Bahnplanungsteil. Die geometrische Bahnplanung verwendet eine Schar paralleler Zustellebenen, bezüglich denen nacheinander abgetragen wird. Auf den Zustellflächen ergeben sich dann überdeckende Bahnabschnitte, ausgehend von impliziten Repräsentationen in Distanzfeldern, die von der Sichtbarkeits hülle einer Offset-Fläche des Werkstücks und von einer äußeren Hüllfläche, etwa der Oberfläche des Rohlings, induziert werden. Die Sichtbarkeits hülle ist durch die Zustellrichtung, die Größe des Offsets der Offset-Fläche und durch die Größe des kugelförmigen Werkzeugs festgelegt. Ein besonderer Beitrag besteht in neuartigen

Ansätzen zur Vermeidung von Kollisionen zwischen dem Werkzeug und dem aktuellen Werkstück, die die Generierung offener Eingriffsbahnsegmente vermeidet, die eine Neuzustellung des Werkzeugs bei der Verbindung von Eingriffsbahnsegmenten erschweren würden. Die kombinatorische Bahnplanung gibt Reihenfolgekriterien für die resultierenden Bahnabschnitte an, anhand derer sie dann mit einer spezifischen Heuristik zu einer möglichst kurzen Bahn verkettet werden.

6.1 Verfahren der Bahnplanung zur Grobbearbeitung

Die Eingabe des hier behandelten Problems der Bahnplanung zur Grobbearbeitung ist ein solider Körper, der Rohling, und ein Zielkörper, das Zielwerkstück, der Teilmenge des Rohlings ist. Gesucht ist eine Fräsbahn zur Freilegung des Zielkörpers, die eine Reihe von fertigungstechnisch motivierten Rahmenbedingungen berücksichtigt:

1. Stückweise konstante Eingriffsrichtung (Werkzeugorientierung) bedingt durch eingeschränkte Bewegungsfreiheit aufgrund des umgebenden Materials,
2. Ebenen- und schichtweiser Materialabtrag zum Erreichen einer homogenen Arbeitsbelastung,
3. Unterteilung der Bearbeitung in Unter- und Oberseite bedingt durch die Begrenzung des freizulegenden Bereichs innerhalb eines Rohlings,
4. Materialabhängige optionale Bedingungen:
 - (a) konstante Schnittrichtung durch konstanten Umlaufsinn (Gegenlauf- vs. Gleichlaufräsen),
 - (b) Vermeidung offener Bahnabschnitte, um ein schräges/spiralförmiges Eintauchen sowie einen konstanten Richtungssinn zu ermöglichen.

Hierbei handelt es sich um ein volumenbasiertes Bahnplanungsproblem im Sinne von Kapitel 4.1. Die im Folgenden präsentierte Lösung folgt der dort beschriebenen Vorgehensweise der Generierung einer Sequenz von Hilfsoberflächen in dem zu entfernenden Gebiet, an deren Ende die Oberfläche des Zielwerkstücks steht. Die jeweils nächste Oberfläche der Sequenz ergibt sich aus der aktuellen durch Ausführung des Fertigungsprozesses mit den Werkzeugposen der Überdeckung.

Die Lösung beschränkt sich dabei auf eine fest vorgegebene Eingriffsrichtung, d.h. das Dreiachsfräsen. Die Anforderung von stückweise konstanten Eingriffsrichtungen der ersten Rahmenbedingung der Problemspezifikation kann dadurch berücksichtigt werden, dass das Lösungsverfahren mehrmals hintereinander, jeweils mit einer anderen Eingriffsrichtung, ausgeführt wird. Ferner beschränkt sich das Verfahren auf die Bearbeitung nur einer Seite des Zielwerkstücks im Sinne der dritten Rahmenbedingung. Die Anforderung der dritten Rahmenbedingung kann durch Hintereinanderanwenden für die Ober- und die Unterseite erfüllt werden.

Abbildung 6.1 gibt einen Überblick über die Lösung. Die dort am Anfang stehende Offset-Fläche entsteht aus der Oberfläche des Zielwerkstücks und der Größe des Fräswerkzeugs. Die der Offset-Fläche zugeordnete Sichtbarkeitsfläche ergibt sich

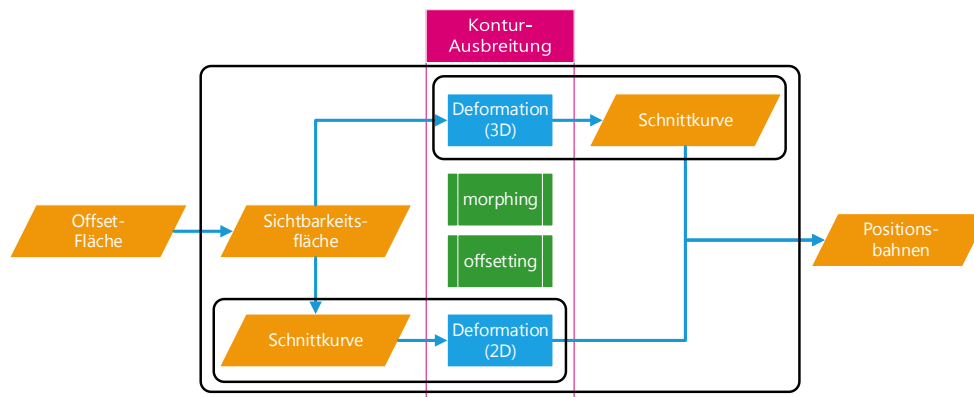


Abbildung 6.1: Ablauf der Positionsbahngenerierung zur spanenden Grobbearbeitung: Ein-/Ausgabegeometrien (orange), Deformationsprozess (blau) mit Arbeitsschritten (grün), Kanten zeigen den Datenfluss von der Offset-Fläche zur Werkzeugbahn. Die schwarzen Kästen markieren die zu iterierenden Schrittfolgen.

als Oberfläche des Durchschnitts der Sichtbarkeitsflächen mit der Eingriffsrichtung bzw. der entgegengesetzten Richtung als Sehrichtung. Ein Punkt im Raum gehört zur Sichtbarkeitsfläche eines geometrischen Objekts bezüglich einer Sehrichtung, wenn der von ihm ausgehende Strahl entgegen der Sehrichtung einen nichtleeren Durchschnitt mit dem Objekt hat. [Abbildung 6.3](#) zeigt ein dentales Zielobjekt (weiß) mit einer Offset-Fläche (rot) in Frontalansicht, in der die z-Achse nach oben zeigt. [Abbildung 6.3a](#) zeigt die Sichtbarkeitsfläche zur z-Achse als Sehrichtung und [Abbildung 6.3b](#) die Sichtbarkeitsfläche für die Sehrichtung entgegengesetzt zur z-Achsenrichtung. Der Durchschnitt beider Sichtbarkeitsflächen ist in [Abbildung 6.3c](#) wiedergegeben.

Die Schnittkurven in [Abbildung 6.1](#) ergeben sich durch Schnitt mit einem Element einer Sequenz paralleler Zustellebenen. Hierfür sind zwei Varianten angegeben. [Abbildung 6.2](#) illustriert die beiden Varianten für die Ausbreitung einer Startkontur mit konstanter Geschwindigkeit vom Zielobjekt weg.

In der *2D-Variante*, dargestellt im unteren Teil von [Abbildung 6.1](#), ergibt sich die Schnittkurve als Durchschnitt der Sichtbarkeitsfläche oder der äußeren Hüllfläche mit der Zustellebene. Die Schnittkurve ist der Ausgangspunkt der Generierung einer Sequenz von Bahnen in der Zustellebene. Die Bahnen ergeben sich durch Deformation der Schnittkurve mittels unterschiedlicher Konturausbreitungsstrategien. Die resultierende Kurve wird als Positionsbahn ausgegeben.

Die *3D-Variante*, dargestellt im oberen Teil von [Abbildung 6.1](#), generiert zunächst eine Sequenz von Flächen durch Deformation der Sichtbarkeitsfläche oder der äußeren Hüllfläche nach dem gleichen Prinzip wie in der 2D-Variante. Eine Schnittkurve

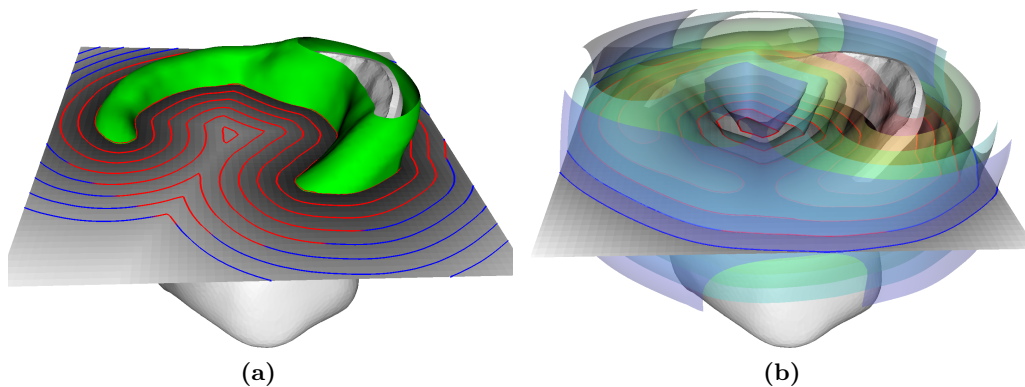


Abbildung 6.2: (a) 2D-Ausbreitung einer Schnittkurve der Sichtbarkeitsfläche mit einer Ebene vs. (b) 3D-Ausbreitung der Sichtbarkeitsfläche und Schnitt mit derselben Ebene.

ergibt sich dann als Durchschnitt einer Fläche der Sequenz mit einer Zustellebene. Die Schnittkurve wird als Positionsbahn ausgegeben.

Beide Varianten führen zu einer Menge von Positionsbahnabschnitten, die in einer anschließenden kombinatorischen Planung zu einer Gesamtbahn verkettet werden.

Durch die Sequenz paralleler Zustellebenen und der Verwendung von Offset-Flächen wird die zweite Rahmenbedingung der Problemspezifikation berücksichtigt.

Die vierte Rahmenbedingung, insbesondere die Vermeidung offener Bahnabschnitte, wird im Grundsatz durch die Verwendung der Offset-Flächen berücksichtigt. Der Grund ist, dass aufgrund ihrer impliziten Repräsentation als Niveaumengen initial alle Bahnabschnitte geschlossen sind. Eine Schwierigkeit ergibt sich jedoch dann, wenn ein Bahnabschnitt aus aktueller Eingriffrichtung durch Kollisionen zwischen Werkzeug und aktuellem Werkstück unerreichbare Positionen aufweist. Eine Möglichkeit des Umgangs mit diesem Problem ist das Entfernen solcher Positionen, wodurch der Bahnabschnitt geöffnet und in kollisionsfrei erreichbare offene Unterabschnitte zerteilt wird und dann das Werkzeug an jeden dieser Unterabschnitte mittels einer kollisionsfreien Anfahrt herangefahren wird. Dies könnte entweder von oben, d.h. durch „Überspringen“ des Kollisionsbereichs und anschließendes Absenken des Werkzeugs, oder seitwärts durch Umfahrung des Kollisionsbereichs mit konstanter Zustellung geschehen. Aus prozesstechnischer Sicht problematisch ist dabei ein Vordringen des Fräasers über seine Spitze, d.h. ein senkrecht Absenken bzw. Eintauchen des Fräasers in den Werkstoff.

Um dies zu verhindern, wird bei der hier präsentierten Lösung die Anzahl überhaupt erforderlicher Anfahrten durch Vermeidung der Notwendigkeit einer Zerteilung von Bahnabschnitten in Unterabschnitte minimiert, indem ausschließlich kollisionsfrei erreichbare geschlossene Bahnsegmente generiert werden. An den verbleibenden eintauchenden Verbindungsstellen erlauben die geschlossenen Bahnabschnitte dann zudem ein problemloses schräges bzw. spiralförmiges Eintauchen in den Werkstoff.

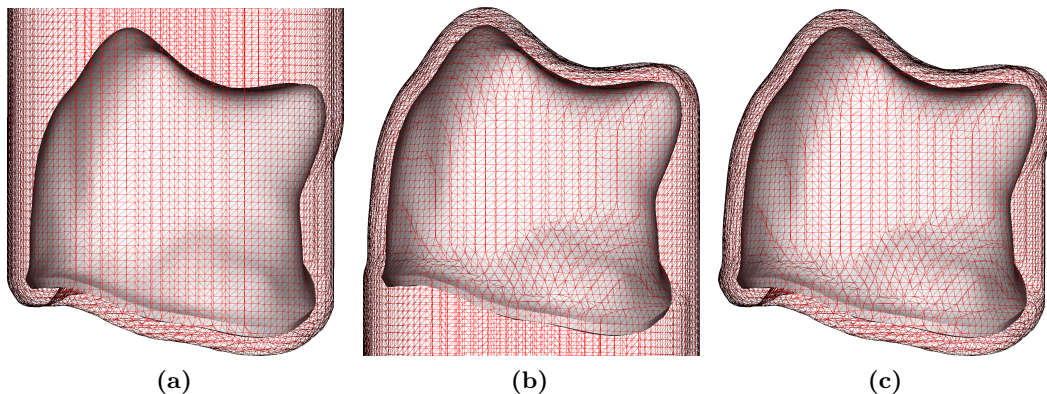


Abbildung 6.3: Hilfsoberflächen zur Werkzeugpositionierung für das Objekt aus [Abbildung 6.4](#): von unten (a) bzw. oben (b) erreichbare Sichtbarkeitsfläche sowie deren Schnittmenge (c) (Hinterschnittbereinigung: von unten *oder* oben erreichbare Fläche).

Im Falle eines offenen Bahnabschnitts wäre ein schräges/spiralförmiges Anfahren i. Allg. problematisch, da möglicherweise Richtungsumkehrungen der Werkzeugbewegung notwendig sind, um alle Bahnpositionen zu erreichen – dies sollte aus prozesstechnischer Sicht wegen des daraus resultierenden Schnittrichtungswechsels vermieden werden. Durch das Voranstellen einer derartigen Schräganfahrt lässt sich der betroffene resultierende Bahnabschnitt in einen Anfahrts- und einen Nutzbahnabschnitt unterteilen. Welche Bahnabschnitte davon betroffen sind hängt von der Sortierung der Bahnabschnitte in der kombinatorischen Bahnplanung ab.

Eine Alternative zu der Vorgehensweise der Vermeidung offener Bahnabschnitte im Rahmen der geometrischen Planung bestünde darin, die Generierung offener Bahnabschnitte zunächst zu erlauben und stattdessen im Rahmen der kombinatorischen Planung ausschließlich Umfahrungen ohne Zustellungsänderung zur kollisionsfreien Verbindung aufeinanderfolgender offener Bahnabschnitte zuzulassen. Dies würde der kombinatorischen Planung mehr Freiheiten bei der Kürzeste-Wege-Suche einräumen, jedoch auf Kosten einer höheren Komplexität und Berechnungsdauer.

Der Rest des Kapitels geht auf die Details der einzelnen Berechnungsschritte des Verfahrens ein. [Abschnitt 6.2](#) gibt ein Verfahren zur Berechnung der Sichtbarkeitsfläche an. [Abschnitt 6.3](#) befasst sich mit Aspekten der Konturausbreitung, die die Ausbreitungsdomäne (2D- oder 3D-Variante), die Ausbreitungsrichtung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit betreffen. [Abschnitt 6.4](#) ist der Verkettung der resultierenden Bahnabschnitte durch kombinatorische Bahnplanung gewidmet.

Die Menge aller zulässigen Werkzeugkontaktpunkte im räumlichen Gebiet zwischen der Oberfläche des Zielwerkstücks und der äußeren Hüllfläche wird im Folgenden auch *Kontaktregion* (*cutter contact region*) $CCR \subset \mathbb{R}^3$ genannt. Die aus der Kontaktregion resultierende Menge aller zulässigen Werkzeugpositionen heißt im Folgenden auch *Positionierungsregion* oder *cutter location region* $CLR \subset CCR$.

Diese wird durch die jeweilige Offset-Fläche der Oberfläche des Zielwerkstücks und der äußeren Hüllfläche begrenzt.

6.2 Sichtbarkeitsfläche

Der erste Schritt des Verfahrens besteht, wie geschildert, aus der Ersetzung der Offset-Fläche durch eine Sichtbarkeitsfläche entsprechend der aktuellen Eingriffsrichtung. Die Positionierung des Werkzeugs auf dieser aus der Offset-Fläche generierten Sichtbarkeitsfläche hat den Vorteil, dass alle Positionen bei der gewählten Zustellrichtung kollisionsfrei erreichbar sind, während die Positionierung auf der originalen Offset-Fläche die nachträgliche Identifikation und Entfernung unerreichbarer Positionen erfordern würde. Die Entfernung solcher unerreichbaren Positionen aus einem Bahnabschnitt führt wiederum zwangsläufig zu dessen Öffnung bzw. Zerteilung in Unterabschnitte, die mittels einer kollisionsvermeidenden Umfahrung verbunden werden müssen. Sofern diese Umfahrung ohne Änderung der Zustellung erfolgen soll, muss sie auf oder jenseits der Sichtbarkeitsfläche liegen, um kollisionsfrei zu sein – das Ergebnis entspricht somit einer auf der Sichtbarkeitsfläche liegenden Bahn. Alternativ würde ein Anheben des Werkzeugs zum „Überspringen“ der die Kollision verursachenden Oberflächenregion führen, dies erfordert danach jedoch ein erneutes Eintauchen in das Material, was aus prozesstechnischer Sicht möglichst vermieden werden muss (siehe oben).

Die Berechnung einer Sichtbarkeitsfläche erfolgt als Niveaufläche eines skalaren Feldes, das sich durch Monotonisierung der Werte des Distanzfelds der Zielwerkstückoberfläche, aus dem sich die Offset-Fläche als Niveaufläche ergibt, entlang parallel zur Eingriffsrichtung verlaufender Sichtstrahlen ergibt. Zunächst wird angenommen, dass die Sichtstrahlen parallel in Richtung bzw. entgegengesetzter Richtung der z-Achse des das Distanzfeld approximierenden Gitters verlaufen, so wie in [Abbildung 6.3](#) gezeigt. Die Berechnung für ein 3D-Gitter mit den Werten $\{v_{i,j,k} \mid 0 \leq i, j, k < n_i, n_j, n_k\}$ entlang der vertikalen Gitterkanten erfolgt durch Iteration über den Index k , der eine aktuelle Schnittebene senkrecht zur z-Achse festlegt. Ein 2D-Hilfsgitter dient zur Speicherung des kleinsten Distanzwerts $v'_{i,j} = \min(v_{i,j,0}, \dots, v_{i,j,k-1})$ aller bis dato durchquerter Ebenen $0, \dots, k-1$ für den durch den Index (i, j) gegebenen Sehstrahl und zum Vergleich mit den Werten der aktuellen Ebene k , siehe [Abbildung 6.4a](#).

Indem die resultierenden Distanzwerte entlang jedes Sichtstrahls monoton abnehmen, verläuft mit steigendem Abstand zu dessen Anfangspunkt die resultierende Oberfläche auf den Strahl zu oder parallel dazu, jedoch nicht davon weg. Diese Deformation gewährleistet, dass jeder Punkt \mathbf{p} auf der resultierenden Sichtbarkeitsfläche auf einem Strahl liegt, der parallel zur Eingriffsrichtung verläuft und zwischen seinem Anfangspunkt fernab des Zielobjekts und dem Punkt \mathbf{p} die Oberfläche an keiner anderen Stelle schneidet. In [Abbildung 6.3](#) ist deutlich zu erkennen, wie sich die Sichtbarkeitsfläche ähnlich zu einem nach unten fallenden Tuch mit einem vorgegebenem Mindestabstand über das Zielobjekt legt und jedwede Verjüngung

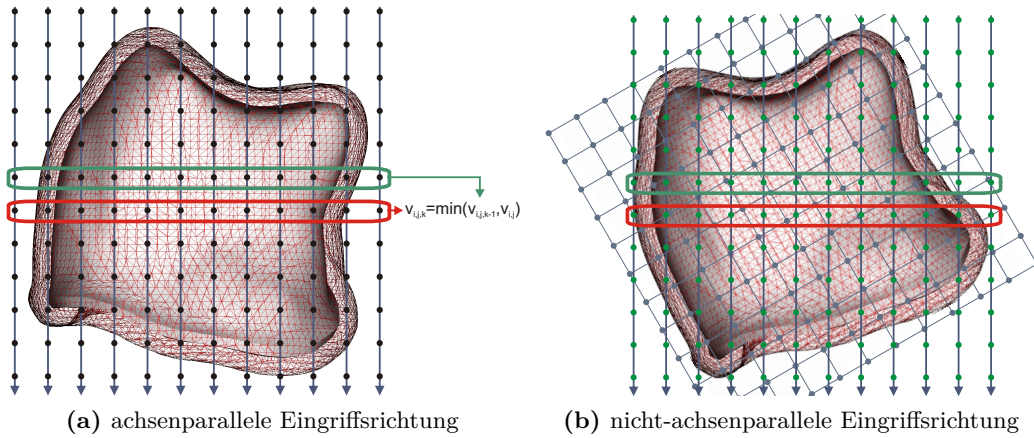


Abbildung 6.4: Deformation einer Offset-Fläche in eine Sichtbarkeitsfläche durch Monotonisierung der Distanzwerte entlang der Eingriffsrichtung

begradigt. Die hinterschnittbereinigte Fläche in [Abbildung 6.3c](#) begradigt dagegen nur die von keiner Seite aus erreichbare Konkavität auf der rechten Seite.

Die Berechnung für den allgemeinen Fall einer beliebigen Eingriffsrichtung lässt sich realisieren, indem wieder die z-Achse des das Sichtbarkeitsflächen-Distanzfeld approximierenden Gitters parallel zur Eingriffsrichtung ausgerichtet und die resultierenden Gitterpunkte aus dem das Offsetflächen-Distanzfeld approximierenden Gitter interpoliert werden (siehe [Abbildung 6.4b](#)).

Die Berechnung kann einfach auf ein adaptives Gitter gemäß [Unterabschnitt 2.1.2](#) erweitert werden, indem, beginnend mit einem leeren adaptiven 2D-Hilfsgitter, eine 2D-Stützstelle (i, j) entweder, sofern nicht vorhanden, hinzugefügt oder andernfalls der Wert $v_{i,j,k}$ mit dem im Hilfsgitter befindlichen Wert $v'_{i,j}$ verglichen wird.

6.3 Konturausbreitung

Der zweite Schritt des Verfahrens besteht aus einer iterativen Berechnung von Positionskurven mit vorgegebenem maximalen Kurvenabstand durch Wiederholung der Schritte *Schnittkonturextraktion* und *Konturausbreitung* solange, bis mit dem Erreichen eines Maximalabstands das gesamte das Zielobjekt umgebende Volumen ebenen- und schichtweise mittels Positionskurven gefüllt ist. Die folgenden drei Eigenschaften legen die Konturausbreitung fest:

1. Ausbreitungsdomäne bzw. Dimensionalität,
2. Ausbreitungsrichtung,
3. Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Sie werden nachfolgend genauer betrachtet.

6.3.1 Ausbreitungsdomäne

Die Ausbreitungsdomäne legt die Variante der Bahnplanung, 2D oder 3D, im Sinne von [Abschnitt 6.1](#) fest. Abhängig von der Reihenfolge der Schritte *Schnittkonturextraktion* und *Konturausbreitung* ergibt sich eine zwei- oder dreidimensionale Ausbreitungsdomäne:

- 2D: Schnitt der Startkontur (Oberfläche) mit der aktuellen Zustellebene E_i und Ausbreitung der resultierenden Schnittkurven innerhalb E_i (unterer schwarzer Rahmen in [Abbildung 6.1](#))
- 3D: Ausbreitung der Startkontur (Oberfläche) und anschließender Schnitt mit den Zustellebenen E_0, \dots, E_{N-1} zur Erzeugung von Schnittkurven (oberer schwarzer Rahmen in [Abbildung 6.1](#))

[Abbildung 6.2](#) zeigt eine beispielhafte Gegenüberstellung beider Varianten unter Ausbreitung einer Startkontur mit konstanter Geschwindigkeit vom Zielobjekt weg. Während bei der 2D-Variante der kleinste Abstand der Konturen zum außerhalb der Schnittebene liegenden Teil der Sichtbarkeitsfläche variieren kann, liegen bei der 3D-Variante alle Konturen auf Offset-Flächen der Sichtbarkeitsfläche, d.h. sie haben einen konstanten kleinsten Abstand zu eben dieser.

Beide Varianten haben spezifische Vor- und Nachteile. Die Propagierung der 3D-Kontur ermöglicht eine Kontrollierbarkeit der relativen Lage der resultierenden Schnittkurven unterschiedlicher Schnittebenen zueinander, da alle Schnittkurven mit gleichem Abstand zur Startkontur stets auf derselben Oberfläche liegen. Dies ist bei der Propagierung von 2D-Schnittkurven nicht notwendigerweise der Fall, da diese sich unabhängig voneinander auf jeder Schnittebene ausbreiten, und somit zwischen Kurven auf unterschiedlichen Schnittebenen kein Bezug mehr existiert. Dies ist jedoch dann von Vorteil, wenn jede Schnittebene mit möglichst wenig Kurven mit vorgegebenem Maximalabstand zueinander gefüllt werden muss, da dieser Maximalabstand lediglich zwischen benachbarten 2D-Konturen innerhalb einer Schnittebene gelten muss und nicht zwischen benachbarten 3D-Konturen innerhalb des gesamten Volumens.

6.3.2 Ausbreitungsrichtung

Bezüglich der Ausbreitungsrichtung lassen sich, wie [Abbildung 6.5](#) zeigt, je nach Wahl der Startkontur drei Fälle unterscheiden:

- Ausbreitung der Zieloberfläche bzw. deren Sichtbarkeitsfläche (innerer Rand) vom Zielobjekt weg ([Abbildung 6.5a](#)),
- Ausbreitung der äußeren Hülle (äußerer Rand) auf das Zielobjekt bzw. deren Sichtbarkeitsfläche zu ([Abbildung 6.5b](#)),
- Ausbreitung des inneren und äußeren Randes aufeinander zu ([Abbildung 6.5c](#)).

Der letzte Fall ist dahingehend problematisch, dass die Verwendung einander gegenüber liegender Startkonturen zu einer mittig durch die Positionierungsregion

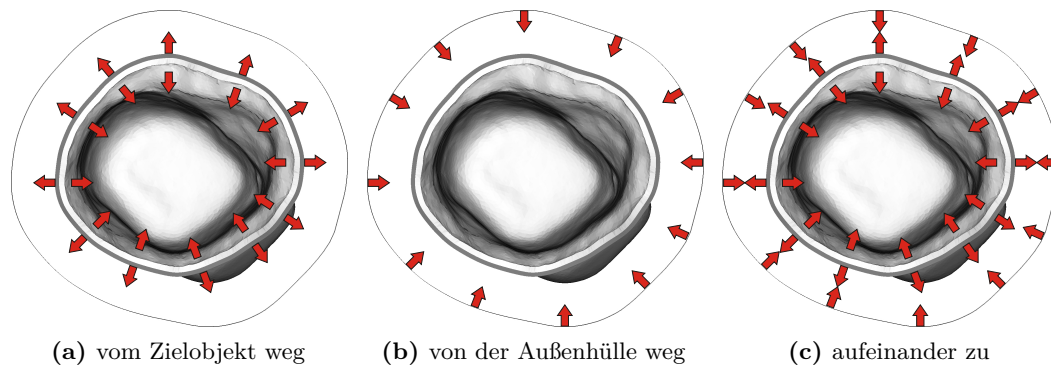


Abbildung 6.5: Mögliche Richtungen der Konturausbreitung

hindurch verlaufenden Medialachse und damit zusammenhängend zur Überschreitung des vorgegebenen Konturabstands und „Inselbildung“ führt. Aufgrund dieser Problematik wurde eine gegenläufige Ausbreitung entsprechend [Abbildung 6.5c](#) nicht weiter berücksichtigt.

6.3.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beeinflusst den Abstand benachbarter Konturen. Sie ermöglicht die Berücksichtigung unterschiedlicher Anforderungen an den Verlauf resultierender Werkzeugbahnen. Aufgrund der Modellierung der Ausbreitung mittels zeitabhängiger Niveaumengen bestimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Niveaumenge letztendlich deren zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten zurückgelegte Wegstrecke. Hinsichtlich der Ortsabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit werden die Fälle

- konstante Geschwindigkeit und Bahnabstände: Offset-Konturen,
- stückweise konstante Geschwindigkeit: Offset-Konturen mit Hindernis,
- variable Geschwindigkeit: Morphing-Konturen,

betrachtet, auf die im Folgenden genauer eingegangen wird.

Konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit

Diese Variante dient im Rahmen der werkzeugpositionsorientierten Planung zur Erzeugung von Konturen mit konstantem kleinsten Abstand zueinander. Dies beinhaltet sowohl die initiale Bestimmung der zur Zieloberfläche korrespondierenden Offset-Fläche, als auch deren drei- oder zweidimensionale (schichtweise) Ausbreitung durch das umgebende Volumen. Der Vorteil eines konstanten kleinsten Abstands liegt in der Erzeugung einer unter gegebenen Umständen kürzestmöglichen Bahn durch die Positionierungsregion, da der Abstand zwischen resultierenden benachbarten Bahnabschnitten nirgendwo kleiner ist als nötig. Nachteilig ist dagegen die

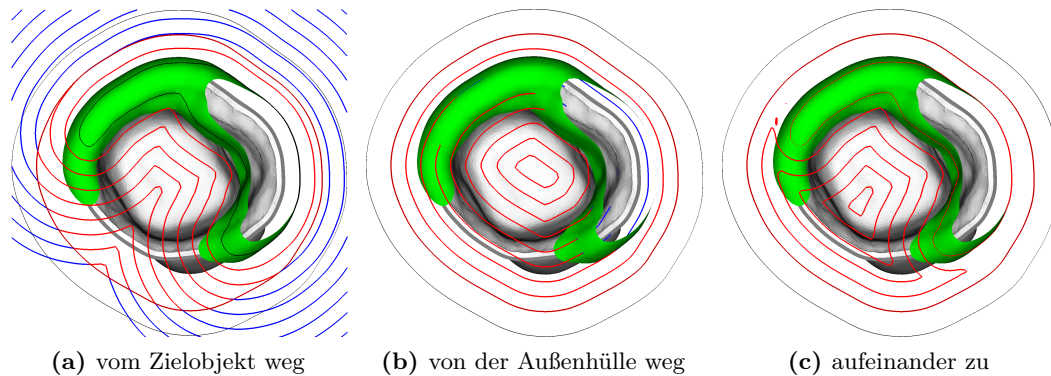


Abbildung 6.6: Beispielhafte Ausbreitung von 2D-Offset-Konturen. Die Färbung der Kurven zeigt deren Lage innerhalb (rot) und außerhalb (blau) des zulässigen Bereichs. Der relevante Ausschnitt der Sichtbarkeitsfläche ist grün dargestellt.

Tatsache, dass die Offset-Konturen entweder dem Verlauf der Zieloberfläche oder dem Verlauf der Außenhülle (Oberfläche des Rohlings) folgen, je nach Wahl der Startkontur, jedoch nicht beiden. Dies führt zu Konturabschnitten, die außerhalb der Positionierungsregion verlaufen, d.h. sie schneiden entweder die äußere Hülle (Abbildung 6.6a) oder die Sichtbarkeitsfläche (Abbildung 6.6b).

Da die Positionierung des Werkzeugs außerhalb der Positionierungsregion unzulässig ist, bedarf jede betroffene Kontur einer Sonderbehandlung. Mögliche Maßnahmen könnten sein:

- Löschen des Abschnitts und Umfahrung der entstehenden Lücke,
- Deformation/Projektion in die Positionierungsregion.

Konzeptionell erfordert jede propagierte Kontur, die außerhalb des zulässigen Bereichs verläuft, eine derartige Geometriemodifikation – im Falle der 2D-Ausbreitung ist eine solche Kontur eine Kurve und im Falle der 3D-Ausbreitung eine Oberfläche. Dennoch genügt für beide Ausbreitungsdomänen eine Beschränkung der Geometriemodifikation auf den (einfacheren) Fall von Kurven, da auch im Fall der 3D-Ausbreitung nur die aus dem Schnitt der Oberfläche mit einer Ebene resultierenden Schnittkurven relevant sind, d.h. nur diese auf den zulässigen Bereich eingeschränkt werden müssen.

Das Löschen von Konturabschnitten würde in offenen Positionsbahnen resultieren, so dass es, wie in [Abschnitt 6.1](#) erläutert, für das Verfahren nicht in Frage kommt. Die Projektion bewahrt geschlossene Kurven, indem diese lokal deformiert werden, um wieder vollständig innerhalb des zulässigen Bereichs zu verlaufen. Dies erhöht jedoch die Redundanz der resultierenden Bahnen, da ein deformierter Abschnitt die Anzahl an Werkzeugpositionen erhöht, ohne einen Mehrwert zu besitzen. Problematisch ist dies insbesondere im Falle eines Fertigungsprozesses mit zeitab-

hängiger Wirkung (d.h. vorgegebener Wirkungsdauer), da aufgrund der Deformation bestimmte Bahnabschnitte vielfach durchlaufen werden können.

Stückweise konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit

In der zweiten Variante breiten sich die Konturen innerhalb des zulässigen Bereichs wie gehabt mit konstanter Geschwindigkeit aus und bleiben bei Erreichen des Randes auf diesem stehen. Es existieren also zwei Geschwindigkeitszustände: fernab des Randes konstant größer als 0 und auf dem Rand konstant 0. Somit lässt sich der Rand in zwei Teilmengen untergliedern, eine Teilmenge dient als Startkontur und die andere als undurchdringbares Hindernis.

Die Umsetzung dieser Idee könnte prinzipiell durch Erweiterung der Konturdynamik um Maßnahmen zur Berücksichtigung von Hindernissen erfolgen, siehe bspw. [BCS14]. Eine derartige Situation lässt sich jedoch nicht mehr als stationäre Level-Set-Problemstellung darstellen, da Letztere eine stets positive oder stets negative Ausbreitungsgeschwindigkeit erfordert, und somit ein Verweilen der Kontur auf dem Rand des zulässigen Bereichs nicht mittels eines statischen Distanzfelds modellierbar ist (siehe Abschnitt 2.2). Ein weiterer gravierender Nachteil dieses Vorgehens liegt in der fehlenden Möglichkeit, ein geschlossenes Hindernis zu „überspringen“ und die Ausbreitung dahinter fortzusetzen. Dies ist im vorliegenden Fall bspw. dann besonders relevant, wenn bei Ausbreitung einer Kontur auf das Zielobjekt zu (vgl. Abbildung 6.6b) zwar die innerhalb der Offset-Fläche des Zielobjekts verlaufenden Konturabschnitte unzulässig sind, jedoch nach Überbrückung einer von der Wanddicke des Zielobjekts abhängigen Distanz die Ausbreitung zur Berücksichtigung der Innenseite des Zielobjekts fortgesetzt werden muss.

Aus diesen Gründen wird ein alternatives Vorgehen bevorzugt, welches die unbeschränkte Konturausbreitung beibehält und stattdessen nachträglich alle außerhalb des zulässigen Bereichs verlaufenden Konturabschnitte in diesen zurück projiziert. Hierfür werden die folgenden beiden Ansätze verfolgt:

- explizite Abbildung jedes Kurvenpunktes $\mathbf{x} \notin CLR$ auf einen Punkt $\mathbf{x}^* \in CLR$ mit kleinstmöglichem Abstand zu \mathbf{x} ,
- Constructive Solid Geometry (CSG): Subtraktion der außerhalb des zulässigen Bereichs liegenden Teilmenge der Kontur.

Zur Berechnung einer derartigen Projektion in den zulässigen Bereich wird eine implizite Repräsentation des Randes Ω_0 der Positionierungsregion, d.h. der äußeren Hüllfläche bzw. der Sichtbarkeitsfläche, als Nullstellenmenge einer vorzeichenbehafteten Distanzfunktion $\phi_R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vorausgesetzt. Daraus ergibt sich eine Unterteilung des Definitionsbereichs Ω in eine Teilmenge $\Omega_+ \subset CLR$ innerhalb, eine Teilmenge $\Omega_0 \subset CLR$ auf dem Rand und eine Teilmenge $\Omega_- = \Omega \setminus CLR$ außerhalb der Positionierungsregion mit $\Omega_+ \cup \Omega_0 = CLR$.

Punktuelle Projektion. Der erste Ansatz zur Projektion einer Kontur C in den zulässigen Bereich verwendet eine *punktuelle Abbildung* jedes Punkts $\mathbf{x} \in C \wedge \mathbf{x} \in \Omega_-$ auf den nächstgelegenen Punkt $\mathbf{x}^* \in \Omega_0$ mittels der Berechnung

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}' \in CLR} (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|) \quad (6.1)$$

$$= \mathbf{x} - \phi_R(\mathbf{x}) \nabla \phi_R(\mathbf{x}). \quad (6.2)$$

Die Tatsache, dass diese Gleichung nur für $\mathbf{x} \in \Omega$ gilt, bedeutet aus praktischer Perspektive, dass ϕ_R für alle Positionen \mathbf{x} definiert sein muss, durch die jemals eine Offset-Kontur verlaufen kann. Da diese jedoch prinzipiell weit abseits von Ω_0 verlaufen kann, wie in [Abbildung 6.6a](#) angedeutet, ist eine numerische Repräsentation von ϕ_R fernab des Randes unnötig speichereffizient. In dieser Region empfiehlt sich eine analytische Repräsentation von ϕ_R durch explizite Suche des dem Argument \mathbf{x} nächstgelegenen Punktes \mathbf{x}^* auf einem den Rand Ω_0 repräsentierenden Dreiecksnetz.

Die punktuelle Abbildung hat den Vorteil einer einfachen und schnellen Berechnung. Nachteilig ist aber die erforderliche Beschränkung der Menge zu projizierender Punkte auf diejenige Teilmenge von Ω , die sich *eindeutig* auf den Rand Ω_0 abbilden lässt, d.h. wo [Gleichung \(6.1\)](#) tatsächlich eine Abbildung im mathematischen Sinn definiert. Das bedeutet, dass sich alle Punkte eines zu projizierenden Kurvenabschnitts fernab von Medialachsen des Distanzfelds ϕ_R befinden müssen, da andernfalls der projizierte Kurvenabschnitt nicht notwendigerweise zusammenhängend ist. [Abbildung 6.7a](#) zeigt eine innerhalb der Sichtbarkeitsfläche (grüner Ausschnitt) des Zielobjekts verlaufende Kurve, die zur Kollisionsvermeidung punktuell auf die Sichtbarkeitsfläche projiziert wird (Pfeile). Aufgrund eines Schnitts der Kurve mit der Medialachse der Sichtbarkeitsfläche wechselt dabei die Projektionsrichtung, sodass die resultierende Kurve immer noch das Zielobjekt schneidet.

Die kohärente Abbildung aller Punkte einer Kurve in den zulässigen Bereich ohne derartige Wechsel der Projektionsrichtung wird durch Erweiterung in eine *abschnittsweise Abbildung* erreicht. Dabei wird zunächst für jeden Punkt \mathbf{x} der Kurve ein initialer Projektionsvektor zum nächstgelegenen Punkt $\mathbf{x}^* \in \Omega_0$ gemäß [Gleichung \(6.2\)](#) ermittelt, siehe [Abbildung 6.7a](#). Bezogen auf den Umlaufsinn der Kurve erfolgt die resultierende Verschiebung jedes Punktes entweder in seinen rechts- oder linksseitigen Halbraum (grüne bzw. blaue Pfeile in [Abbildung 6.7a](#)). Mittels eines Mehrheitsentscheides wird nun ein für die gesamte Kurve zu bevorzugender Halbraum identifiziert, in [Abbildung 6.7b](#) bspw. der rechtsseitige in Richtung der grünen Pfeile. Diejenigen Punkte, deren Verschiebungsvektor bereits in den bevorzugten Halbraum zeigt, werden direkt auf ihre Zielposition in Ω_0 abgebildet, und allen übrigen Punkten eine temporäre, nicht notwendigerweise in Ω_0 liegende Position im bevorzugten Halbraum zugewiesen. Daraus resultiert eine „Hilfskurve“ innerhalb eines für jeden Punkt der originalen Kurve kohärenten Halbraums, siehe [Abbildung 6.7b](#). Konstruktionsbedingt liegt diese Hilfskurve noch nicht notwendigerweise in Ω_0 , jedoch darf sie nicht mehr dessen Medialachse schneiden, um eine eindeutige Abbildung auf Ω_0 im nachfolgenden Schritt zu erlauben. Die Generierung

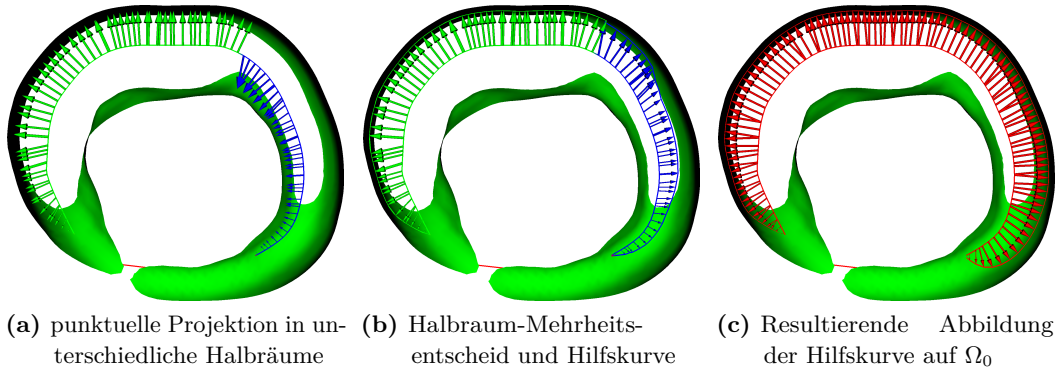


Abbildung 6.7: Kohärente Abbildung eines die Medialachse schneidenden Kurvenabschnittes auf die Sichtbarkeitsfläche

temporärer Positionen für alle Kurvenpunkte, die einen Wechsel der Projektionsrichtung erfordern, muss also sicherstellen, dass die generierte Hilfsposition jenseits der Medialachse liegt, d.h. der Verschiebungsvektor ebendiese schneidet. Die Abbildung dieser Hilfskurve auf eine schleifenfreie Kurve in Ω_0 , siehe [Abbildung 6.7c](#), erfolgt nun mittels eines Aktive-Konturen-Ansatzes durch Lösung des Optimierungsproblems

$$\text{Energie}(\mathbf{u}) = \underbrace{\int_a^b \frac{\alpha_0}{2} \|\mathbf{u}'\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|\mathbf{u}''\|^2 ds}_{\text{interne Energie}} + \underbrace{\int_a^b \beta_0 |\phi_R(\mathbf{u}) - r| ds}_{\text{externe Energie}} \quad (6.3)$$

$$\text{mit } \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}'' = \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2}, \quad (6.4)$$

wobei α_0 und α_1 die Elastizität und Steifigkeit der Kurve parametrieren und r das Niveau des Randes bezeichnet, auf den die Kurve projiziert werden soll, gemäß obigem Fall also $r = 0$. Die Berechnung einer Kurve, die [Gleichung \(6.3\)](#) minimiert, erfolgt iterativ durch Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \alpha_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} - \alpha_1 \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial s^4} - \beta_0 \nabla \phi_R \frac{\phi_R - r}{|\phi_R - r|}, \quad (6.5)$$

wobei als Anfangswert $\mathbf{u}(t = 0)$ die gemäß obiger Erklärung konstruierte Hilfskurve verwendet wird. Zur Herleitung und Berechnung von [Gleichung \(6.5\)](#) sei auf die detailliertere Ausführung in [Unterabschnitt 5.7.3](#) verwiesen, worin eine um einen zusätzlichen Distanzterm erweiterte Version von [Gleichung \(6.3\)](#) zur Glättung resultierender Werkzeugbahnen verwendet wird.

Constructive Solid Geometry. Für den zweiten, mengenalgebraisch motivierten Ansatz zur Projektion einer Kontur in den zulässigen Bereich wird neben der impliziten Repräsentation des Randes der Positionierungsregion als Nullstellenmenge

Ω_0 auch eine implizite Repräsentation der betroffenen Kontur als Nullstellenmenge C_0 einer vorzeichenbehafteten Distanzfunktion $\phi_C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vorausgesetzt. Daraus ergibt sich eine Unterteilung des Definitionsbereichs Ω in die Teilmengen C_- innerhalb und C_+ außerhalb des Randes C_0 mit $\Omega = C_+ \cup C_- \cup C_0$.

Ausgehend von der Menge C_- aller von der Kontur eingeschlossenen Punkte bezeichnen $C_- \cap \Omega_+$ bzw. $C_- \cap \Omega_-$ die innerhalb bzw. außerhalb des zulässigen Bereichs liegenden Teilmengen. Die Deformation in den zulässigen Bereich mittels CSG erfolgt nun durch Subtraktion der Menge $C_- \cap \Omega_-$ von C_- , oder anders ausgedrückt durch Ersetzung von C_- durch $C_- \cap \Omega_+$. Da lediglich der Rand von C_- relevant ist, lässt sich die Problemstellung auch auf die Ersetzung der innerhalb von Ω_- liegenden Teilmenge des Randes C_0 durch die innerhalb von C_- liegende Teilmenge des Randes Ω_0 einschränken:

$$C_0 \cap \Omega_- \rightarrow \Omega_0 \cap C_- \quad (6.6)$$

Während sich die konzeptuelle Idee leicht mittels der implizit definierten Mengen Ω_0 und C_0 darstellen lässt, erfolgt die Berechnung gemäß nachfolgender Erklärung anhand der expliziten Repräsentation von C_0 als Kurve bzw. Punktefolge, deren innerhalb von Ω_- verlaufende Kurvenabschnitte identifiziert und durch einen geeigneten Abschnitt der Kurve Ω_0 ersetzt werden. Dies ist dadurch motiviert, dass aus Gründen der Speichereffizienz eine Definition des Distanzfelds ϕ_C für Positionen abseits des Randes Ω_0 unerwünscht ist, und damit nur der innerhalb des Definitionsbereichs Ω liegende Teil der Konturen überhaupt repräsentiert ist, siehe auch die Bemerkungen zu Gleichung (6.2). Aus methodischer Sicht erfolgt die Ersetzung des Randabschnitts $C_0 \cap \Omega_-$ durch den Randabschnitt $\Omega_0 \cap C_-$ mittels folgender Schritte:

1. Auffinden aller Schnittpunkte zwischen der Kontur C_0 und dem Rand Ω_0 des zulässigen Bereichs (Auffinden der in C_0 liegenden Nullstellen von ϕ_R).
2. Entfernen aller in Ω_- liegenden Punkte von C_0 , d.h. alle Punkte für die gilt $\mathbf{x} \in C_0 \wedge \phi_R(\mathbf{x}) < 0$.
3. Identifizieren zusammengehöriger Schnittpunktpaare ($\mathbf{s}_{+-}, \mathbf{s}_{-+}$).
4. Verbinden jedes Schnittpunktpaares ($\mathbf{s}_{+-}, \mathbf{s}_{-+}$) mittels einer zusammenhängenden Teilmenge aus Ω_0 .

Während die beiden ersten Schritte eher trivial sind, werden der dritte und vierte Schritt, Identifikation und Verbindung zusammengehöriger Schnittpunktpaare, die zur Erhaltung der Konturtopologie essentiell sind, hier genauer diskutiert. Da Niveaumengen stets mannigfaltig sind, treten Überschneidungen zwischen den Mengen C_0 und Ω_0 stets paarweise auf; der Fall der Berührung beider Mengen in einem einzigen Punkt wird nicht berücksichtigt, da dieser aufgrund der Definition des Randes Ω_0 als Teilmenge des zulässigen Bereichs keine Modifikation von C_0 erfordert.

Unter Beschränkung der Niveaumengen auf Kurven und Annahme einer Sortierung (bzw. Parametrierung) der Punkte der Kurve C_0 nach Kurvenlänge lässt sich jedem Schnittpunkt \mathbf{s}_{+-} , an dem die Kurve in den unzulässigen Bereich Ω_- hinein führt, auch ein zugehöriger Schnittpunkt \mathbf{s}_{-+} zuweisen, an dem die Kurve wieder aus

dem unzulässigen Bereich herausführt. Dabei ist \mathbf{s}_{-+} derjenige Schnittpunkt, der bei aufsteigender Kurvenlänge dem Schnittpunkt \mathbf{s}_{+-} unmittelbar folgt, d.h. es existiert kein weiterer dazwischenliegender Schnittpunkt. Diese Tatsache resultiert aus der Mannigfaltigkeit und Geschlossenheit von Niveaumengen sowie aus der isolierten Betrachtung der einzelnen Niveaus. Für die Suche von Paaren aufeinanderfolgender Schnittpunkte $(\mathbf{s}_{+-}, \mathbf{s}_{-+})$ ist also die Geschlossenheit der Konturen essentiell, da andernfalls offene Konturabschnitte, bzw. die darauf liegenden Schnittpunkte, nicht (oder zumindest schwer) einander zugeordnet werden können.

Während Isokonturen aus theoretischer Sicht stets geschlossen sind, wird diese Eigenschaft aus praktischer Sicht dann verletzt, wenn das zur Repräsentation des Skalarfelds verwendete Gitter aus Speichereffizienzgründen nicht den gesamten Definitionsbereich aller relevanten Konturen umfasst. Letztere können somit „aus dem Gitter heraus“ führen. Um auch in diesem Fall geschlossene Konturen zu gewährleisten, und die Suche von Schnittpunktpaaren zu ermöglichen, muss künstlich vermieden werden, dass Konturen außerhalb des Gitters verlaufen können. Dies geschieht, indem dem Gitter ein zusätzlicher äußerer Rand aus Gitterpunkten mit einem Wert jenseits aller relevanten Konturniveauwerte angefügt wird.

Im letzten Schritt wird für jedes identifizierte Paar $(\mathbf{s}_{+-}, \mathbf{s}_{-+})$ aufeinanderfolgender Schnittpunkte der zwischen \mathbf{s}_{+-} und \mathbf{s}_{-+} liegende Kurvenabschnitt von C_0 durch einen zwischen denselben Punkten liegenden Kurvenabschnitt von Ω_0 ersetzt. Aufgrund der Geschlossenheit der Kurve Ω_0 existieren prinzipiell stets zwei Pfade von \mathbf{s}_{+-} nach \mathbf{s}_{-+} , je nachdem, in welcher Richtung Ω_0 durchlaufen wird. Mindestens einer dieser Pfade enthält zwischen \mathbf{s}_{+-} und \mathbf{s}_{-+} keinen weiteren Schnittpunkt, genauso wie dies für den entsprechenden Abschnitt auf C_0 gilt. Der zweite Pfad kann weitere Schnittpunkte enthalten oder auch nicht. Der zu wählende Pfad ist nun derjenige, der folgende Bedingung erfüllt:

- Falls einer der beiden Pfade unzulässig ist, d.h. weitere Schnittpunkte enthält, wähle denjenigen ohne weitere Schnittpunkte.
- Falls beide Pfade zulässig sind, wähle denjenigen,
 - der zu keiner Änderung der Schnittrichtung führt, oder
 - der am kürzesten ist.

Beispielhaft zeigt [Abbildung 6.8a](#) eine Kontur bei Ausbreitung vom Zielobjekt weg, mit einem innerhalb (rot) und außerhalb (blau) des zulässigen Bereichs (begrenzt durch schwarze Hülle) verlaufenden Abschnitt. [Abbildung 6.8b](#) zeigt die beiden Möglichkeiten zur Verbindung des Schnittpunktpaares mittels eines Randabschnitts entgegen (grün) und im Uhrzeigersinn (blau). Der blaue Abschnitt ist kürzer, führt aber zu einer Umkehr der Schnittrichtung.

Äquivalent zeigt [Abbildung 6.9a](#) eine Kontur bei Ausbreitung auf das Zielobjekt zu, mit einem Abschnitt innerhalb (rot) und außerhalb (blau) des zulässigen Bereichs, welcher in diesem Fall durch die grüne Sichtbarkeitsfläche begrenzt wird. [Abbildung 6.9b](#) zeigt die beiden Möglichkeiten zur Verbindung des Schnittpunktpaares

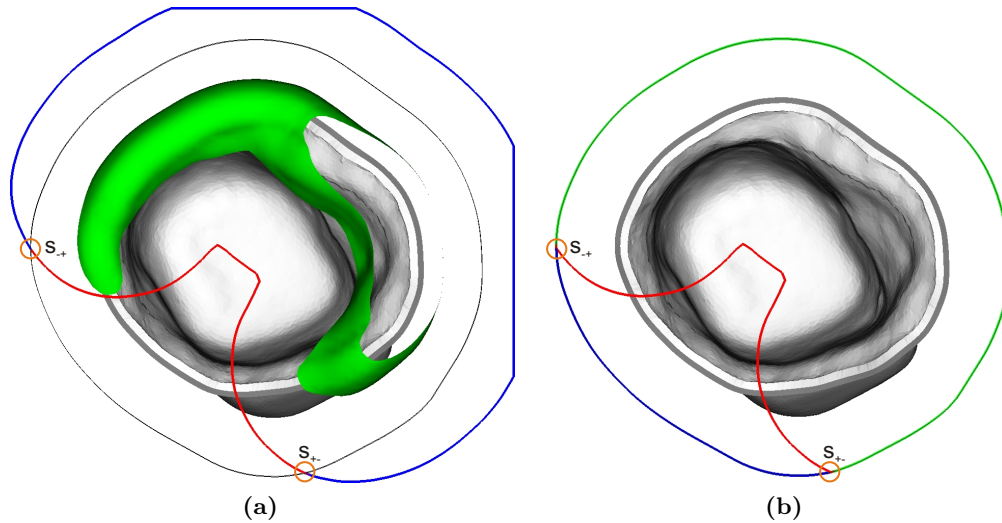


Abbildung 6.8: Ersetzung unzulässiger Konturabschnitte durch den äußeren Rand bei Ausbreitung vom Zielobjekt weg.

mittels einer auf der Sichtbarkeitsfläche liegenden Kurve entgegen (blau) und im Uhrzeigersinn (grün).

Je nach Situation kann höchstens einer dieser Pfade weitere Schnittpunkte enthalten, während mindestens ein Pfad keine weiteren Schnittpunkte enthalten kann. Dies ergibt sich aus derselben Argumentation wie die Aufeinanderfolge der beiden Schnittpunkte entlang C_0 . In bestimmten Situationen können dabei zwei Möglichkeiten zur Verbindung beider Schnittpunkte bestehen, in Anlehnung an [Abbildung 6.8b](#) im oder gegen den Uhrzeigersinn.

Variable Ausbreitungsgeschwindigkeit

Ein Problem der Offset-Konturen liegt darin, dass diese entweder die Außenhülle schneiden (Ausbreitung vom Zielobjekt weg, [Abbildung 6.6a](#)), das Zielobjekt schneiden (Ausbreitung von der Außenhülle weg, [Abbildung 6.6b](#)), oder von der Medialachse der Positionierungsregion separiert werden (Ausbreitung aufeinander zu, [Abbildung 6.6c](#)). Die dritte Variante, „variable Ausbreitungsgeschwindigkeit“, vermeidet den dadurch möglichen Zerfall einer geschlossenen Bahn in offene Bahnabschnitte. Sie erzeugt eine (dynamische) Kontur $C(t)$, die zwischen der Form des äußeren und inneren Randes der Positionierungsregion interpoliert. Da der Abstand zwischen dem inneren und äußeren Rand variiert, müssen unterschiedliche Punkte auf der Kontur dabei unterschiedlich lange Wege zurücklegen, d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit variiert. Gemäß [\[BW01\]](#) resultiert eine forminterpolierende Kontur aus der Lösung des Anfangswertproblems

$$\partial_t \phi(\mathbf{x}) = \|\nabla \phi(\mathbf{x})\| d_B(\mathbf{x}) \quad (6.7)$$

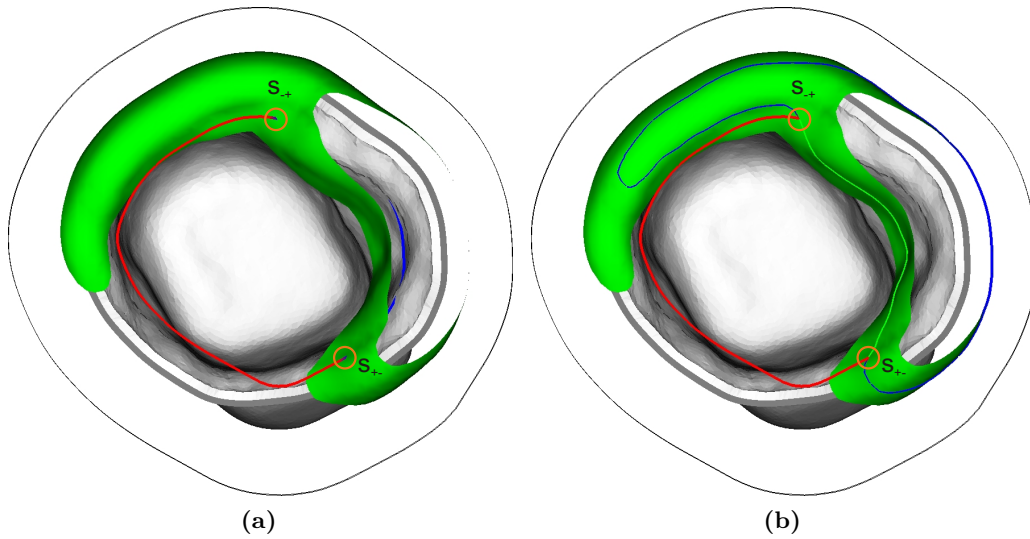


Abbildung 6.9: Ersetzung unzulässiger Konturabschnitte durch inneren Rand bei Ausbreitung auf das Zielobjekt zu.

$$\text{mit } A = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) \upharpoonright_{t=0} = 0\}, \quad (6.8)$$

wobei A und B die beiden Ränder der Positionierungsregion bezeichnen, und $d_B(\mathbf{x})$ den kleinsten vorzeichenbehafteten Abstand zwischen \mathbf{x} und B .

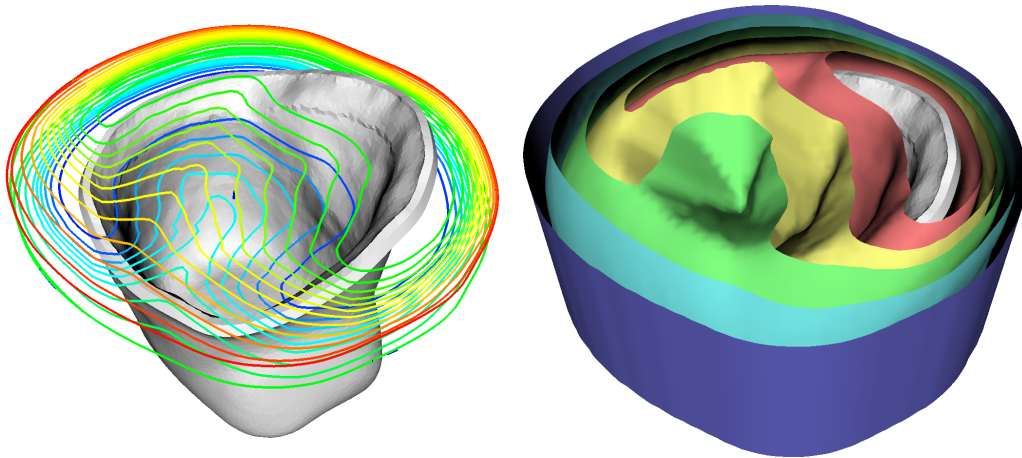
Der Vorteil der Forminterpolation liegt darin, dass einerseits keiner der Ränder geschnitten wird und andererseits keine redundanten Bahnabschnitte entstehen, wie dies im Falle der Projektion in den zulässigen Bereich erfolgt. **Abbildung 6.10** zeigt beispielhafte forminterpolierende Konturen für den zwei- und dreidimensionalen Definitionsbereich.

6.4 Bahnverkettung

Die bisherigen Ausführungen sind der geometrischen Bahnplanung im Sinne von **Abbildung 4.1** zugeordnet. Das Resultat besteht aus einer endlichen Menge an Bahnabschnitten. Daraus wird nun durch eine kombinatorische Bahnplanung, siehe **Abbildung 4.1**, eine zusammenhängend befahrbare Bewegungsbahn generiert. Diese Bewegungsbahn ergibt sich als Verkettung der Bahnabschnitte in einer geeigneten Reihenfolge durch zusätzliche Verbindungsabschnitte. Im Folgenden wird eine Vorgehensweise hierfür skizziert.

6.4.1 Struktur der Eingabe

Die Eingabe für die Ermittlung einer Bahnverkettung ist eine Folge von parallelen Ebenen, auf denen sich Positionsbahnabschnitte befinden. Die Bahnabschnitte jeder Ebene bilden eine endliche Menge sich nicht kreuzender beschränkter geschlossener



(a) 2D-Forminterpolation von Schnittkurven der Sichtbarkeitsfläche mit Zustellebenen (b) 3D-Forminterpolation der Sichtbarkeitsfläche

Abbildung 6.10: Forminterpolation zwischen dem äußeren und inneren Rand der Positionierungsregion mittels einer ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Bahnabschnitte. Auf der Menge der Bahnabschnitte einer Ebene lässt sich eine Relation „umschließend“ definieren. Ein Bahnabschnitt B_2 umschließt einen Bahnabschnitt B_1 , wenn B_1 im Abschluss des von B_2 berandeten beschränkten inneren Gebiets liegt. B_2 umschließt B_1 *unmittelbar*, wenn es keinen weiteren Bahnabschnitt B_3 gibt, so dass B_3 den Bahnabschnitt B_1 und B_2 den Bahnabschnitt B_3 umschließt. Ein Bahnabschnitt ist *minimal*, wenn er keinen anderen Bahnabschnitt umschließt, und *maximal*, wenn es keinen anderen ihn umschließenden Bahnabschnitt gibt. Ein Bahnabschnitt ist ein *Startkonturabschnitt*, wenn er Bestandteil einer Startkontur ist. Für eine Startkontur, die vom zu fräsenden Objekt induziert wird, sind Startkonturabschnitte minimal.

In *Abbildung 6.11a* repräsentiert jede der geschlossenen Kurven einen Bahnabschnitt in der Ebene. Es gibt drei minimale und einen maximalen Bahnabschnitt. Die minimalen Bahnabschnitte können zu einem Objekt gehören, das eine Schnittebene mit diesen Bahnabschnitten hat und in Höhe dieser Schnittebene aus drei Komponenten besteht, für welche die Startkontur die minimalen Bahnabschnitte als Startkonturabschnitte hat.

6.4.2 Technische Anforderungen an die Bearbeitungsreihenfolge der Bahnabschnitte

Die Abarbeitungsreihenfolge der Menge aller Bahnabschnitte sollte folgende technisch bedingte Anforderungen erfüllen:

1. Schichtweiser Materialabtrag: vor dem Befahren einer tiefer liegenden Bahn muss das oberhalb der Bahn liegende Material entfernt werden,
2. Konstanter Umlaufsinn, der davon abhängig ist, ob Gleichlauf- oder Gegenlauffräsen erfolgen soll,
3. Möglichst einseitiger Materialabtrag entlang der Bahnabschnitte bzw. kürzestmögliche Bahnabschnitte mit beidseitigem Materialabtrag,
4. Schräger Zustellungswechsel: das Eintauchen in Material sollte schräg bzw. spiralförmig anstatt senkrecht erfolgen.

Die erste Anforderung ist aufgrund des für raumfüllende Fräsbahnen üblichen Dreiachsfräsens zwingend. Die in der zweiten Anforderung aufgeführte Vorgabe eines Gleichlauf- oder Gegenlauffräsens legt letztendlich fest, auf welcher Seite eines Bahnabschnittes, bezogen auf die Fahrtrichtung, ein Materialabtrag idealerweise stattfinden soll. Bahnabschnitte mit beidseitigem Materialabtrag, welche immer dann entstehen, wenn durch Änderung der Zustellung der Fräser in eine unbearbeitete Schicht vordringt, müssen deshalb minimiert werden (dritte Anforderung). Dies kann dadurch erfolgen, dass eine unbearbeitete Region stets mittels des jeweils kürzestmöglichen Bahnabschnittes begonnen wird und für alle daran angrenzenden Bahnabschnitte der Materialabtrag daraufhin wieder einseitig erfolgt. Die vierte Anforderung greift das Problem auf, dass am Scheitelpunkt der Frälerspitze die Schnittgeschwindigkeit 0 beträgt und deshalb ein senkrechtes Absenken des Fräasers vermieden werden muss. Da jedes Absenken des Fräasers aufgrund des erforderlichen Voranstellens eines Schräg- bzw. Spiralbahnabschnittes zur Verlängerung der resultierenden Bahn führt, sollte ein wiederholtes Anheben und Absenken des Fräasers vermieden und stattdessen zusammenhängende Komponenten mit konstanter Zustellung bearbeitet werden.

6.4.3 Randbedingungen an die Bearbeitungsreihenfolge

Ausgehend von diesen Anforderungen werden folgende Randbedingungen an die Bearbeitungsreihenfolge der Gesamtmenge der Bahnabschnitte festgelegt:

1. Bahnabschnitte einer Bearbeitungsrichtung (Ober-/Unterseite) werden vor den Bahnabschnitten der anderen Bearbeitungsrichtung bearbeitet.
2. Bahnabschnitte einer Ebene werden vor den Bahnabschnitten der nächsttieferen Ebene bearbeitet.
3. Wechsel von einem Bahnabschnitt auf die nächsttiefere Ebene erfolgen zu einem nächstgelegenen minimalen Bahnabschnitt der nächsttieferen Ebene.
4. Wechsel zwischen Bahnabschnitten derselben Ebene erfolgen zu einem unmittelbar umschließenden Bahnabschnitt oder zu einem nächstliegenden minimalen Bahnabschnitt.

Abbildung 6.11b zeigt eine Reihenfolge einer Menge von Bahnabschnitten innerhalb einer Ebene zu einer Bearbeitungsrichtung. Die Kurven sind entsprechend ihrer Bearbeitungsreihenfolge gefärbt von Rot (Start) bis Blau (Ende). Die Anordnung

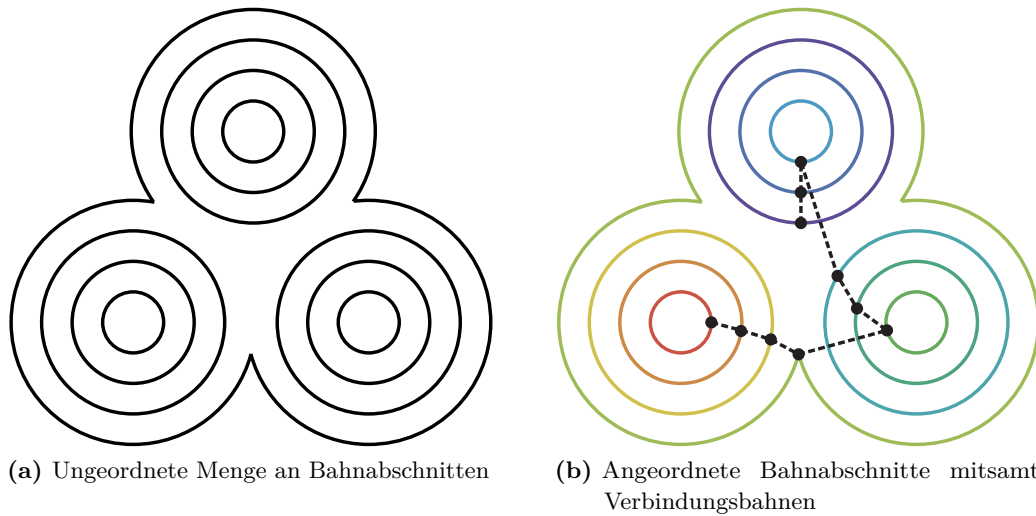


Abbildung 6.11: Beispielhafte Menge zu verkettender Bahnabschnitte.

bevorzugt den Wechsel zu einem unmittelbar umschließenden Bahnabschnitt und wendet den Wechsel zu einem nächstliegenden Startkonturabschnitt dann an, wenn dies nicht möglich ist (Randbedingung 4).

6.4.4 Zuordnung von Bahnabschnitten zu Bearbeitungsrichtungen

Die Randbedingung 1 erfordert die Zuordnung jedes gegebenen Bahnabschnitts entsprechend seiner Sichtbarkeit zu einer Bearbeitungsrichtung (Ober-/Unterseite). Das folgende Zuordnungsverfahren nutzt u.a. die Anforderung, dass aufgrund des schichtweisen Materialabtrags für jede Richtung mit der Zuordnung einer Bahn zu einer Seite auch sämtliche „darüber“ liegenden Bahnen derselben Seite zugeordnet werden müssen. Das Verfahren verwendet einen gerichteten Graphen, dessen Knoten den Bahnabschnitten entsprechen. Zwei Knoten bzw. Bahnabschnitte B_i , B_j sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der kleinste Abstand zwischen B_i und B_j kleiner als der Werkzeugradius ist sowie B_j auf derselben oder angrenzenden nächstgeringeren Tiefe im Material wie B_i liegt. Die Knoten des gerichteten Graphen werden in eventuell mehreren Schritten mit einer Bearbeitungsrichtung markiert. Ein Schritt beginnt mit der Wahl eines bisher unmarkierten Knotens B_{start} , der am tiefsten im Material liegt und ausschließlich aus genau einer der Bearbeitungsrichtungen erreichbar ist. B_{start} erhält, ebenso wie alle von B_{start} aus durch Breitensuche erreichbaren Knoten des Graphen, diese Bearbeitungsrichtung als Markierung.

Die Korrektheit des Verfahrens kann wie folgt eingesehen werden. Für B_{start} wird auf diese Weise diejenige Teilmenge von Knoten zu Bahnabschnitten geringerer oder gleicher Tiefe wie der Bahnabschnitt zu B_{start} markiert, von denen eine eventuelle Bearbeitung von B_{start} abhängt, d.h. entweder erhalten alle markierten Knoten dieselbe Bearbeitungsrichtung als Markierung oder gar keine. Eine Verletzung dieser

Bedingung würde zur Verletzung des schichtweisen Materialabtrags aufgrund des aus der entstehenden Lücke resultierenden vergrößerten Bahnabstands und damit Materialabtrags führen. Da jedoch B_{start} ausschließlich aus einer Bearbeitungsrichtung erreicht werden kann, verbleibt keine andere Wahl und die Zuordnung ist eindeutig.

6.4.5 Verbindungsbahnabschnitte

Verbindungsbahnabschnitte verbinden zwei aufeinanderfolgende Bahnabschnitte kollisionsfrei. [Abbildung 6.11b](#) zeigt Verbindungsbahnabschnitte zu der gewählten Bearbeitungsreihenfolge als gestrichelte schwarze Linien mit schwarz markierten Start-/Endpunkten. Die Verbindungsbahnabschnitte führen also von unten links nach unten rechts und abschließend nach oben.

Verbindungsbahnabschnitte, die nicht länger als der Fräserdurchmesser sind, können stets direkt mit Materialeingriff abgefahren werden. Sie treten insbesondere zwischen zwei unmittelbar benachbarten Bahnabschnitten im Sinne von [Unterabschnitt 6.4.1](#) auf. Längere Verbindungsbahnabschnitte werden ohne Materialeingriff realisiert, sofern bei direkter Verbindung eine Kollision entstünde, d.h. eine Überschneidung zwischen Werkzeug- und Zieloberfläche für eine beliebige Werkzeugpose auf der Verbindungsbahn. Sie können etwa aus einer Kurve in der aktuellen Bearbeitungsebene durch Zurückziehen des Fräasers – d.h. Verringerung der Zustellung – während des Kurvendurchlaufs bis zum Verschwinden der Kollision resultieren. Diese verschwindet spätestens bei Zurückziehen des Fräasers über die Ebene mit geringster Tiefe im Material hinaus. Zu Beginn des Fräsens eines Folgebahnabschnitts tritt dann ein Neueindringen in das Material auf. Das Neueindringen sollte aus technischen Gründen in Rampenform oder Spiralform erfolgen, siehe Anforderung 4 in [Unterabschnitt 6.4.2](#).

Der Test eines Verbindungsbahnkandidaten auf Kollision erfolgt durch Strahlenschnitttests vergleichbar zu [Unterabschnitt 5.5.4](#). Dabei ist zu berücksichtigen, dass sowohl die Spitze als auch der Schaft des Fräasers mit der Zieloberfläche kollidieren kann. Eine spezialisierte Konstruktionsmethode für den Fall einer konstanten Fräserorientierung, einfachen Fräsergeometrie mit zylindrischem Schaft ausreichender Länge und geradliniger Verbindungsbahn besteht darin, mit einer garantiert kollisionsfreien Verbindungsbahn zu beginnen, indem der Fräser am Start- und Endpunkt zunächst bis über die Ebene mit geringster Tiefe im Material hinaus zurückgezogen wird. Die resultierende Verbindungslinie wird nun sukzessive bis auf die ursprüngliche Tiefe im Material abgesenkt, solange keine Überschneidung der Verbindungslinie mit der Offset-Fläche der Zieloberfläche besteht. In diesem Fall entfällt die Überprüfung abgetasteter Posen auf dem Verbindungsbahnkandidaten, da Überschneidungen zwischen Schaft und Zieloberfläche per Konstruktion ausgeschlossen sind. Eine allgemeine Konstruktionsmethode für den uneingeschränkten Fall besteht darin, mit einer direkten Verbindung zwischen Start- und Endpunkt als initialer Verbindungsbahnkandidat zu beginnen. Bei Auftreten einer Kollision auf einem Kandidaten wird der Fräser durch Verringerung der Zustellung zurückgezogen

und dadurch ein neuer Verbindungsbahnkandidat generiert. Der Kollisionstest besteht aus der Abtastung der Verbindungsbahn und Überprüfung jeder abgetasteten Werkzeugpose auf Überschneidung mit der Zieloberfläche. Alternativ lassen sich Überschneidungen mit der Methode aus [Kapitel 7](#) auffinden.

Das Bestreben bei der Festlegung der Verbindungsbahnabschnitte ist, unter Beibehaltung der anderen Randbedingungen möglichst kurze Verbindungsbahnen zu generieren. Im Beispiel von [Abbildung 6.11b](#) lassen sich durch die gegebene Bearbeitungsreihenfolge der Bevorzugung von Wechseln von einem Bahnabschnitt zu einem unmittelbar umschließenden Bahnabschnitt viele Verbindungsbahnabschnitte kurz halten.

6.4.6 Berechnung von günstigen Anordnungen

Das Auffinden einer optimalen Bahnverkettung kann als eine Abwandlung des Problems des Handlungsreisenden aufgefasst werden. Eine Möglichkeit für geschlossene Bahnabschnitte wird im Folgenden skizziert. Sie wird jedoch nicht weiter vertieft, da die kombinatorische Bahnplanung außerhalb des Schwerpunkts des Themas der Dissertation liegt.

Die zu besuchenden Orte sind die gegebenen Bahnabschnitte. Die möglichen Verbindungsbahnabschnitte zwischen den Orten sind durch die Menge aller kürzesten zulässigen Kurven zwischen zwei Bahnabschnitten festgelegt. Eine Kurve ist zulässig, wenn sie eine kollisionsfreie Bahn induziert.

Eine Bahnverkettung ergibt sich durch eine Folge von Verbindungsbahnen mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Endpunkt einer Verbindungsbahn ist der Anfangspunkt der nächsten Verbindungsbahn.
2. Jeder Ort tritt genau einmal auf.
3. Die Randbedingungen aus [Unterabschnitt 6.4.3](#) werden beachtet.

Die Reihenfolge der Bahnabschnitte ist die Reihenfolge, in der die Verbindungsbahnsegmente die Bahnabschnitte verbinden. Die resultierende Fräsbahn setzt sich alternierend aus Durchläufen von Verbindungsbahnabschnitten und vollständigen Umläufen der Bahnabschnitte zusammen.

Eine diskrete Version ergibt sich durch die Repräsentation der Bahnabschnitte durch Polygonzüge. Die möglichen Verbindungsbahnabschnitte bestehen aus der Menge der kürzesten zulässigen Kurven zwischen den Polygoneckpunkten von zwei Bahnabschnitten.

Aufgrund der Problemgröße kommen unter realistischen Bedingungen nur Approximationsansätze in Frage. In [[Sch17](#)] wurde die Möglichkeit der Lösung des Problems der Bahnverkettung mittels generischer Verfahren für das Problem des Handlungsreisenden untersucht. Im Ergebnis ließ sich feststellen, dass die Approximationslösung in der Lage war, im Vergleich zu einem spezialisierten heuristischen Ansatz gleichwertige bis geringfügig kürzere Gesamtbahnen zu konstruieren, jedoch

bei einem Vielfachen der Berechnungszeit. Aus Anwendungsperspektive steht die resultierende Reduktion der Verfahrszeit aufgrund einer kürzeren Werkzeugbahn in keinem brauchbaren Verhältnis zur Erhöhung der Berechnungsdauer mittels eines generischen Ansatzes, sodass sich letzterer als ungeeignet im Vergleich zu einem spezialisierten heuristischen Vorgehen erwies.

6.5 Stand der Wissenschaft

Die allgemeine Herangehensweise zur Bahnplanung im Raum ist die Generierung raumfüllender Kurven oder flächenfüllender Kurven auf einer raumfüllenden Sequenz von Flächen. Eine Übersicht über diverse Bahnplanungsstrategien liefert [MA07]. Raumfüllende Kurven im Speziellen werden bspw. in [AM05] thematisiert. Da beliebige raumfüllende Kurven zu inhomogenen Schnittvolumen führen können, findet in der spanenden Fertigung vorrangig die zweite Kategorie Anwendung. In dieser wird der Bahnverlauf eingeschränkt zugunsten homogener Prozesseigenschaften. Insbesondere Werkzeugbahnen für das *High-Speed-Machining* sollten möglichst glatt, homogen und unterbrechungsfrei ausgelegt werden [SXJ+16]. Diese Anforderungen wurden im Rahmen der Dissertation in [Abschnitt 6.1](#) thematisiert.

Zur Kategorie der flächenfüllenden Kurven zählt insbesondere das weit verbreitete Taschenfräsen („pocket milling“), sowie das in dieser Dissertation vorgestellte schalenbasierte Vorgehen. Einen distanzfeldbasierten Ansatz zur ebenenfüllenden Auslegung parallel verlaufender Konturen mit vorgegebenem Rand des Bearbeitungsbereichs zeigt [DX10]. Darin dient die Fast-Marching-Methode zur Berechnung eines statischen Distanzfelds auf einem uniformen Gitter, aus welchem mittels einer Marching-Squares-Methode die Offset-Konturen extrahiert werden. Einen alternativen Ansatz zeigt [ZXD10], welcher die Level-Set-Methode zur Berechnung eines dynamischen Distanzfelds verwendet und einen Diffusionsterm zur Glättung der Konturen beinhaltet.

Einen alternativen nicht-impliziten Ansatz zur Konstruktion konturparalleler Bahnabschnitte zeigt [LFS+15]. Der besondere Fokus liegt dabei auf der Vermeidung eines eckigen Bahnverlaufs durch Verwendung komplementärer Offset-Operationen.

In [Abschnitt 6.3](#) wird durch Steuerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit ein Zerfall der Bahn in Bahnabschnitte vermieden, und damit auch die Notwendigkeit von Verbindungsfahrten zwischen isolierten Bahnabschnitten. Ein vergleichbares Ziel verfolgt [SXJ+16], indem eine gegebene Oberfläche mit Genus > 0 in eine Oberfläche mit Genus 0 überführt wird durch Verbindung der äußeren und aller inneren Randkurven zu einer zusammenhängenden Randkurve. Auf der auf diese Weise konstruierten Fläche werden daraufhin mittels Parameterraum-Einbettung der Randkurve interpolierende Konturkurven erzeugt.

Die in diesem Kapitel beschriebene Methodik verfolgt als Ziel die homogene Überdeckung der gesamten Bearbeitungsregion, und erlaubt dafür die lokale Unterschreitung eines vorgegebenen Bahnabstands bzw. das wiederholte Befahren

desselben Bahnabschnitts, um eine unterbrechungsfreie Fahrt zu gewährleisten. Als alternatives Vorgehen ohne redundante Bahnabschnitte schlagen [LFS+16; ZLF18] eine Segmentierung der Bearbeitungsregion in zwei Bereichstypen vor. Ein Bereichstyp ermöglicht die Auslegung glatter bzw. homogener Bahnen, der andere Bereichstyp dient zum Auffüllen mittels nicht glatter bzw. inhomogener Bahnen.

An der Schnittstelle zwischen der Grobbearbeitung (Bahnplanung im Raum) und Feinbearbeitung (Bahnplanung auf einer Bezugsfläche) steht bei der spanenden Fertigung eine grobe Approximation des Werkstücks. Diese entspricht in dieser Dissertation einer expandierten Version der Zieloberfläche in Form der Offset-Fläche. Durch eine geeignete Wahl dieser „Schnittstellenfläche“ lässt sich laut [CHL+18] der gesamte Fertigungsprozess hinsichtlich Bearbeitungsdauer optimieren.

In [HLL+21] wird ein alternativer Ansatz zur Bahnplanung auf einer Sequenz implizit repräsentierter Flächen („machining layers“) dokumentiert, der aufgrund seiner thematischen Überschneidung genauer betrachtet wird. Der Ansatz verwendet zwei mittels Tetraedernetzen diskretisierte statische Distanzfelder für den geodätischen Abstand zur konvexen Hülle des Zielobjekts: ein äußeres für den Raum zwischen konvexer Hülle und einem vergrößerten Hüllquader des Zielobjekts, und ein inneres für den Raum zwischen konvexer Hülle und Zieloberfläche. Die Flächensequenz ergibt sich aus der Konturierung beider Distanzfelder. Die Verwendung der konvexen Hülle als Nullmenge verhindert Hinterschnitte in den Konturen des äußeren Distanzfelds und damit Kollisionen zwischen Fräsertschaft und Kontur, ähnlich zur Verwendung der Sichtbarkeitshülle in der Dissertation. Die Verwendung des geodätischen Abstands erlaubt eine gewisse Formanpassung der Konturen des inneren Distanzfelds an die Zieloberfläche, ähnlich zur Projektion der Konturen des statischen Distanzfelds auf den zulässigen Bereich oder der forminterpolierenden Nullmenge des dynamischen Distanzfelds in der Dissertation. Der wesentliche Unterschied liegt im Verzicht auf Schnittebenen zur Erzeugung von Bahnabschnitten mit konstanter Fräserzustellung. Der Vorteil dieses Vorgehens liegt in der Möglichkeit zur simultanen Verwendung aller Achsen bereits bei der Grobbearbeitung, während in der Dissertation jede Zustellebene einer zugeordneten konstanten Eingriffsrichtung und Zustellung bedarf, und die simultane Verwendung aller Achsen der Feinbearbeitung vorbehalten ist. Der Nachteil liegt in der Verletzung der in Abschnitt 6.1 identifizierten fertigungstechnischen Rahmenbedingungen, was sich im Kontext der Dissertation negativ auf die Standzeit und Bearbeitungsgeschwindigkeit auswirken kann. Insbesondere werden durch die Begrenzung des freizulegenden Bereichs durch eine äußere Hülle auch die zulässigen Eingriffsrichtungen beschränkt. Dies wird in der Dissertation berücksichtigt, und muss mit dem alternativen Ansatz durch wiederholtes Ändern der Zustellung, und damit Eintauchen in Rohmaterial, kompensiert werden, was zu erhöhtem Verschleiß führt.

Simulation des Materialabtrags

Inhalt

7.1	Problemstellung und Lösungsansatz	149
7.2	Implizite Modellierung des Fräswerkzeugs und des Schnittvolumens	152
7.3	Implizite Berechnung des Schnittvolumens	153
7.3.1	Phase 1: Korrektur in Abhängigkeit des Neigungswinkels .	154
7.3.2	Phase 2: Korrektur unter Berücksichtigung des Rollwinkels	160
7.4	Evaluation und Diskussion	163
7.5	Stand der Wissenschaft	166

Das Kapitel präsentiert ein Verfahren, das für ein gegebenes volumetrisches Werkstück und eine gegebene Positionsbahn eines Fräswerkzeugs den Abtrag sowie die resultierende Form des Werkstücks berechnet, die sich durch Abfahren der Bahn mit dem Werkzeug am Werkstück ergeben. Werkstück und Werkzeug werden dabei implizit repräsentiert. Die Bahn ist durch eine Folge von Stützstellen gegeben, zwischen denen interpoliert wird. Der Kern des Verfahrens ist die Ermittlung einer Werkzeugpose auf der Bahn, zu der ein gegebener Raumpunkt den kleinsten Abstand hat, wofür (näherungsweise) Lösungen angegeben werden. Die Oberflächen des abgetragenen Volumens und der neuen Form des Werkstücks ergeben sich als Nullmengen der Skalarfeldrepräsentation. Aus der Verwendung vorzeichenbehafteter Distanzen resultiert eine im Vergleich zu booleschen Voxeln überlegene Approximationsqualität der Materialoberfläche, da Konturen stetig interpoliert anstatt stückweise konstant sind. Ferner ergibt sich eine überlegene Approximationsqualität und Effizienz im Vergleich zu dessen Abtastung mittels diskreter Fräserposen bei üblichen Verfahren.

7.1 Problemstellung und Lösungsansatz

Das Problem der Simulation des Materialabtrags von einem Werkstück durch ein spanendes Werkzeug in der hier behandelten Form ist wie folgt definiert. Gegeben sind ein Werkstückmodell, ein Fräswerkzeugmodell und eine Bahn, längs der das Werkzeug verfahren wird. Gesucht ist das Werkstückmodell, das sich ergibt, wenn sich das Werkzeug längs der Bahn bewegt und alle Punkte des gegebenen Werkstückmodells entfernt werden, die sich bei irgendeiner Werkzeugpose irgendwann im Inneren des

Werkzeugmodells befunden haben. Die Menge aller Punkte des Werkstücks, die sich bei irgendeiner Pose im Inneren des Werkstücks befunden haben, wird als *Schnittvolumen* bezeichnet.

Die Simulation erfolgt also rein geometrisch, d.h. unter Abstraktion vom physikalischen Prozess, der bspw. aufgrund von wirkenden Kräften und Wärme zu einer Deformation des Fräswerkzeugs oder Werkstücks führen kann. Die Wirkung des Werkzeugs an einem Punkt ist dabei nur von der Lage des Punktes relativ zur Fräseroberfläche abhängig, an dem sich beim realen Werkzeug die Schneidkanten zur Spanabhebung befinden. Anwendungen für die geometrische Simulation sind etwa die Verwendung des Schnittvolumens zur Bestimmung der Abtragungsgeschwindigkeit (*Material Removal Rate*) und mittleren Zerspankraft – und damit zur Vorschubsteuerung, die Validierung der Werkzeugbahn, die Kollisionsberechnung sowie die Vorbereitung der Restmaterialbearbeitung. Hervorgehoben sei hierbei der letzte Punkt aufgrund seiner Relevanz für das Anwendungsszenario der Dissertation. Die Restmaterialbearbeitung bezeichnet einen zusätzlichen lokalen Feinbearbeitungsschritt zur Formgebung in denjenigen Regionen der Zieloberfläche, deren Abweichung zur resultierenden Werkstückoberfläche nach Fertigstellung der globalen Bearbeitungsschritte intolerabel ist. Im Rahmen der spanenden Fertigung von Zahnersatz dient dieser Schritt bspw. zur Formgebung von Fissuren auf Seitenzähnen oder Spalten zwischen den Gliedern von Zahnbrücken mittels eines zusätzlichen besonders feinen Fräasers. Aufgrund der Abhängigkeit dieses Bearbeitungsschrittes vom Ergebnis der Simulation bisheriger Bearbeitungsschritte ist eine effiziente Berechnung essentiell für einen unterbrechungsfreien Fertigungsablauf.

Das Werkstück M wird implizit durch ein Volumen repräsentiert, dessen Rand durch die Nullmenge eines numerisch approximierten Skalarfelds ϕ_M definiert ist:

$$M = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \mid \phi_M(\mathbf{q}) \leq 0\}. \quad (7.1)$$

Das Fräswerkzeug wird durch eine analytisch gegebene Distanzfunktion beschrieben. Die Bestimmung des Abstands zur Fräseroberfläche erfolgt durch Komposition des Werkzeugs aus geometrischen Primitiven wie z.B. Zylinder, Kugel, Torus oder Kegel, und Bestimmung des Abstands zu deren Oberfläche. Die Details sind Gegenstand von [Abschnitt 7.2](#).

Die Werkzeugbahn spezifiziert die Bewegung des TCP und die Orientierungsänderung der Rotationsachse des Fräswerkzeugs. In der Dissertation besteht die Werkzeugbahn aus einer endlichen Anzahl von Bahnsegmenten, die durch eine endliche Folge von Stützstellen zur Angabe der TCP-Position und Orientierung der Rotationsachse definiert sind. Ein Segment ergibt sich durch lineare Interpolation der Werkzeugposition und -orientierung von zwei aufeinanderfolgenden Stützstellen. Das Schnittvolumen S_i des i -ten Segments, $i = 0, \dots, n - 1$, ist dann durch ein Skalarfeld ϕ_{S_i} definiert, das sich aus dem Distanzfeld des Werkzeugs ergibt:

$$S_i = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \mid \phi_{S_i}(\mathbf{q}) \leq 0\}. \quad (7.2)$$

Der Rand von S_i entspricht der Nullstellenmenge von ϕ_{S_i} .

Das Schnittvolumen S_* der gesamten Bahn setzt sich aus den Schnittvolumina aller Bahnsegmente zusammen:

$$S_* = S_0 \cup \dots \cup S_{n-1}. \quad (7.3)$$

Das Materialvolumen M_* des vollständig bearbeiteten Werkstücks resultiert aus der Subtraktion des gesamten Schnittvolumens S_* aller Bahnsegmente vom Materialvolumen M_0 des unbearbeiteten Werkstücks:

$$M_* = M_0 \setminus S_* = M_0 \cap S_*^C, \quad (7.4)$$

wobei S_*^C das Komplement des gesamten Schnittvolumens bezeichnet, d.h. die Menge aller Punkte, die zu keinem Zeitpunkt im Einflussbereich des Fräswerkzeugs liegen. Das Materialvolumen des finalen Werkstücks lässt sich iterativ in der Form

$$M_{i+1} = M_i \setminus S_i = M_i \cap S_i^C, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (7.5)$$

konstruieren, mit M_0 als unbearbeitetes (initiales) und $M_n = M_*$ als bearbeitetes (finales) Materialvolumen, sowie S_i^C als Menge aller Punkte außerhalb des Einflussbereichs des auf dem i -ten Bahnsegment verfahrenen Fräswerkzeugs.

Das Materialvolumen und die Schnittvolumen der Bahnsegmente werden in Gitterform gemäß [Unterabschnitt 2.1.1](#) repräsentiert. An den Gitterpunkten sind die dortigen Werte der Funktionen ϕ_{M_i} bzw. ϕ_{S_i} abgelegt. Durch die implizite Repräsentation reduziert sich [Gleichung \(7.5\)](#) auf eine iterative Aktualisierung der Werte von ϕ_M an den Gitterpunkten durch

$$\phi_{M_{i+1}}(\mathbf{q}) = \max(\phi_{M_i}(\mathbf{q}), -\phi_{S_i}(\mathbf{q})). \quad (7.6)$$

Das kann wie folgt eingesehen werden.

Für \mathbf{q} außerhalb von M_i ist der Wert $\phi_{M_i}(\mathbf{q})$ positiv. Damit ist auch $\phi_{M_{i+1}}(\mathbf{q})$ positiv, d.h. \mathbf{q} liegt auch außerhalb von M_{i+1} . Für \mathbf{q} innerhalb von M_i ist der Wert $\phi_{M_i}(\mathbf{q})$ negativ. Liegt \mathbf{q} innerhalb bzw. außerhalb des Schnittvolumens, ist $-\phi_{S_i}(\mathbf{q})$ positiv bzw. negativ. Im ersten Fall ist das Maximum positiv, so dass \mathbf{q} außerhalb von M_{i+1} liegt. Im zweiten Fall ist das Maximum negativ, so dass \mathbf{q} innerhalb von M_{i+1} liegt.

Aus der gewählten Repräsentationsform kann dann der Rand als 0-Niveafläche aufgrund der vorzeichenbehafteten Variante von ϕ_{M_i} und ϕ_{S_i} mit dem Marching-Cubes-Algorithmus oder einem verwandten Verfahren explizit bestimmt werden. Da die Niveaumenge hierbei stetig interpoliert wird, resultiert eine im Vergleich zur stückweise konstanten Randfläche bei Verfahren, die mit booleschen Voxeln als Repräsentationsform arbeiten, überlegene Approximationsqualität der Materialvolumen bzw. Schnittvolumenoberfläche.

Die wesentliche zu lösende Aufgabe zur Realisierung dieses Konzepts ist die Definition und Bereitstellung eines Verfahrens zur Auswertung der Skalarfunktion $\phi_{S_i} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ an einem beliebigen (Gitter-)Punkt $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$. Dazu wird auf die Diestanzfeldrepräsentation des Werkzeugs und die Definition der Werkzeugbewegung

längs des Bahnsegments zurückgegriffen. [Abschnitt 7.2](#) präsentiert die Definitionen und [Abschnitt 7.3](#) ein entsprechendes Verfahren. [Abschnitt 7.4](#) ist der Evaluation und Diskussion gewidmet. Durch die analytische und stetige Repräsentation des Schnittvolumens S_i gemäß [Abschnitt 7.3](#) ergeben sich eine deutlich bessere Approximationsqualität und Effizienz des Verfahrens im Vergleich zu dessen Abtastung mittels diskreter Fräserposen.

7.2 Implizite Modellierung des Fräswerkzeugs und des Schnittvolumens

Das Fräswerkzeug ist durch einen rotationssymmetrischen Körper gegeben. Seine Pose, d.h. seine Lage im Raum, wird durch die TCP-Position \mathbf{u} und Richtungsvektor \mathbf{v} der Rotationsachse festgelegt. Die Rotationsachse geht durch \mathbf{u} und verläuft in Richtung \mathbf{v} . Das Fräswerkzeug ist die Vereinigung von zwei Rotationskörpern, der Schneide und dem Schaft. Der gemeinsame Rand ist eine Kreisscheibe senkrecht zur Rotationsachse.

Die implizite Modellierung des Fräasers erfolgt durch die vorzeichenbehaftete Distanzfunktion, welche jedem Punkt $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ seinen vorzeichenbehafteten Abstand $d_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ zur Oberfläche des Fräasers zuweist. Für \mathbf{q} außerhalb des Fräasers ist der Abstand positiv und für \mathbf{q} innerhalb negativ.

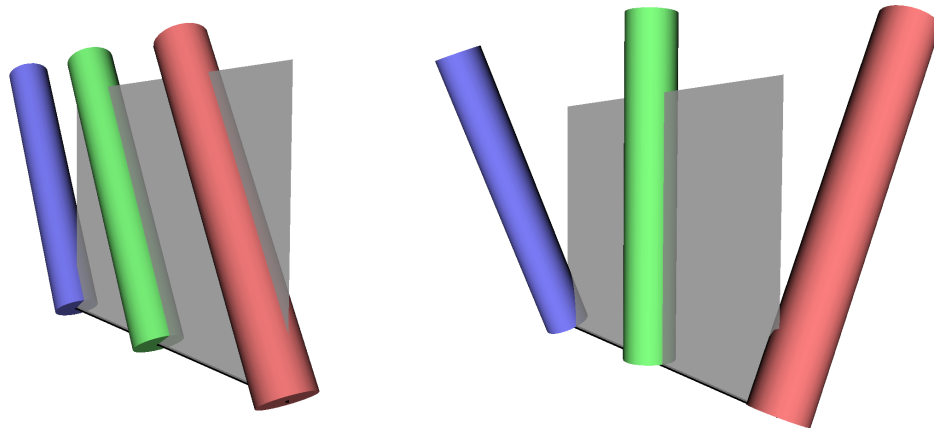
Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass sich das Fräswerkzeug entlang der Fräsbahnsegmente linear bewegt. Ein Fräsbahnsegment ist zulässig, wenn es für jeden Materialpunkt \mathbf{q} , zu dem es eine Pose des Fräasers längs des Bahnsegments gibt, die \mathbf{q} enthält, eine frühere Pose gibt, auf deren Schneidenoberfläche \mathbf{q} liegt. In der letztgenannten Pose findet der Materialabtrag statt, von dem \mathbf{q} betroffen ist. Die Nichtexistenz einer derartigen früheren Pose würde etwa der Existenz einer Kollision des Materialvolumens mit dem Schaft des Fräasers im Verlauf des Bahnsegments entsprechen.

Die Pose des Werkzeugs wird durch einen Interpolationsparameter λ parametrisiert, d.h. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda)$ und $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\lambda)$. Zur vereinfachten Darstellung wird eine Parametrierung der TCP-Position \mathbf{u} nach Kurvenlänge vorausgesetzt, d.h. λ entspricht der Länge des Bahnsegments vom Startpunkt bis zum Punkt $\mathbf{u}(\lambda)$. Die Distanz $d_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ eines beliebigen Punktes \mathbf{q} zur Oberfläche des Fräswerkzeugs mit Position \mathbf{u} und Rotationsachse \mathbf{v} wird somit zu einer Funktion des Interpolationsparameters λ :

$$d_\lambda(\mathbf{q}) = d_{\mathbf{u}(\lambda),\mathbf{v}(\lambda)}(\mathbf{q}). \quad (7.7)$$

Das Skalarfeld zur impliziten Repräsentation des Schnittvolumens S_i des Fräswerkzeugs längs seiner Bewegung entlang des i -ten Fräsbahnsegments wird definiert durch

$$\phi_{S_i}(\mathbf{q}) = d_{\lambda^*}(\mathbf{q}) \quad \text{mit } \lambda^* = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} d_\lambda(\mathbf{q}), \quad (7.8)$$



(a) (Konstante) Neigung in Bewegungsrichtung (b) Rollen orthogonal zur Bewegungsrichtung

Abbildung 7.1: Situationen, in denen die initiale Fräserpose nicht zum kleinsten Abstand führt und somit einer Korrekturphase bedarf.

d.h. $\phi_{S_i}(\mathbf{q})$ ist der Abstand $d_{\lambda^*}(\mathbf{q})$ zur Oberfläche eines (statischen) Fräfers, dessen Position λ^* auf dem Bahnsegment den (vorzeichenbehafteten) Abstand zwischen \mathbf{q} und der Fräsoberfläche minimiert. Die Zurückführung des Abstands zur Hüllfläche eines bewegten Objektes auf den Abstand zur Oberfläche eines starren Objektes geht zurück auf [MS90].

7.3 Implizite Berechnung des Schnittvolumens

Die Bestimmung einer zum Punkt \mathbf{q} korrespondierenden optimalen Lage λ^* des Werkzeugs entlang des Bahnsegments erfolgt iterativ, d.h. durch Bestimmung einer initialen Lage λ_0 und iterativer Korrektur derselben bis zur Konvergenz der Lageänderung oder Erreichen einer vorgegebenen Iterationsanzahl.

Grundlage des Iterationsverfahrens ist die Spezifikation der Orientierung der Rotationsachse durch einen Neigungswinkel in Bewegungsrichtung des TCP und einen Neigungswinkel orthogonal zur Bewegungsrichtung („Rollwinkel“). Die Neigung findet in der Ebene statt, die durch die Richtungsvektoren der Rotationsachse und der Bewegungsrichtung an der Startstützstelle des Bahnsegments aufgespannt wird. Der Rollwinkel einer beliebigen Pose des Fräsers auf der Bahn ist der Winkel derjenigen Drehung um Bewegungsrichtung des TCP, die die Rotationsachse in diese Ebene rotiert. Der Neigungswinkel der Pose längs der Bewegungsrichtung ist der Winkel zwischen der gedrehten Rotationsachse und der Bewegungsrichtung des TCP. [Abbildung 7.1a](#) illustriert eine konstante Neigung in Bewegungsrichtung und [Abbildung 7.1b](#) eine variierende Neigung orthogonal zur Bewegungsrichtung.

Der Initialwert λ_0 des Iterationsverfahrens ist der Parameter der TCP-Position auf dem Bahnsegment mit dem geringsten Abstand zu \mathbf{q} . Dies ist der Lotfußpunkt,

welcher aus der orthogonalen Projektion von \mathbf{q} auf das Bahnsegment resultiert. Wenn die Rotationsachse des Fräswerkzeugs längs des Bahnsegments stets senkrecht zur Bewegungsrichtung ist und kein Rollen stattfindet, liefert λ_0 eine optimale Pose gemäß Gleichung (7.8). Andernfalls startet die Iteration mit dem Ziel der sukzessiven Korrektur der Posenwahl.

Die Iteration besteht aus zwei Phasen. Eine erste, globale Phase führt die Korrektur des Parameterwerts in Abhängigkeit des Neigungswinkels der Rotationsachse aus. Dabei wird abhängig von der Orientierung der Rotationsachse an Position λ_0 eine Positionskorrektur $\Delta\lambda$ vorgenommen, um den (vorzeichenbehafteten) Abstand zwischen \mathbf{q} und der Fräseroberfläche zu minimieren. Sei λ_n die Position am Ende der ersten Phase. Die zweite, lokale Phase führt eine Korrektur ausgehend von der Pose des Fräswerkzeugs für λ_n , unter zusätzlicher Berücksichtigung des Rollwinkels der Rotationsachse, aus. Der näherungsweise am besten passende Parameterwert wird durch Berechnung der Abstände von \mathbf{q} zu den resultierenden Posen an äquidistanten diskreten Stützstellen im Intervall $[\lambda_n - r, \lambda_n + r]$, r der maximale Fräseradius, ermittelt. Dieses Vorgehen steigert die Berechnungseffizienz durch Vermeidung einer stützstellenbasierten Suche auf dem gesamten Bahnsegment.

Abbildung 7.2 zeigt die durch die Iteration zu leistende Korrektur an zwei Beispielen. Beim ersten Beispiel weist das Fräswerkzeug einen konstanten Neigungswinkel auf, während der Rollwinkel unverändert bleibt; beim zweiten Beispiel ist das Fräswerkzeug nicht geneigt, stattdessen ändert sich der Rollwinkel. Der grüne Zylinder zeigt das Fräswerkzeug an der initialen TCP-Position $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\lambda_0)$ mit der initialen Orientierung der Rotationsachse $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\lambda_0)$. Die initiale TCP-Position wird durch den roten Punkt, der \mathbf{q} repräsentiert, durch Projektion auf das Bahnsegment (schwarze Linie) induziert. Der rote Punkt scheint dabei außerhalb des Wirkungsbereichs zu liegen. Der blaue Zylinder visualisiert das Fräswerkzeug an einer entlang des Bahnsegments verschobenen Position $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$ mit Rotationsachse $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\lambda_0 + \Delta\lambda_0)$. Der Punkt liegt hierbei tatsächlich innerhalb des Wirkungsbereichs. In beiden Fällen existiert also eine Lage $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ vor ($\Delta\lambda < 0$) oder hinter ($\Delta\lambda > 0$) λ_0 mit geringerem resultierenden Abstand zwischen \mathbf{q} und der Oberfläche des Werkzeugs mit Position $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\lambda_1)$ und Rotationsachse $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\lambda_1)$. Die Auswirkung der beiden Fälle ist identisch, jedoch unterscheiden sie sich hinsichtlich der Bestimmung der notwendigen Lageänderung $\Delta\lambda$.

Im folgenden Unterabschnitt 7.3.1 und 7.3.2 wird die Funktionsweise der beiden Phasen beschrieben.

7.3.1 Phase 1: Korrektur in Abhängigkeit des Neigungswinkels

Es werden zwei Fälle der Neigung des Fräswerkzeugs in Bewegungsrichtung unterschieden: eine über das Bahnsegment hinweg konstante Neigung und eine nicht-konstante Neigung. Der zweite Fall wird näherungsweise durch stückweise Approximationen vom Typ des ersten Falls gelöst.

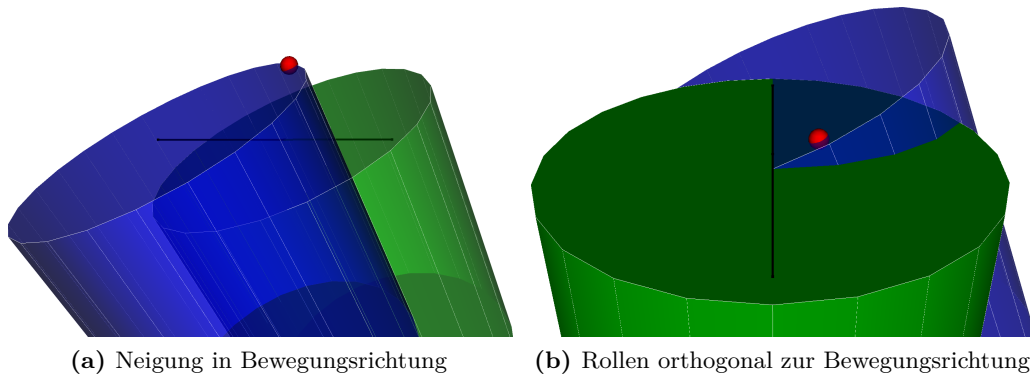


Abbildung 7.2: Abstandsminimierender Versatz des Fräswerkzeugs entlang eines linearen Bahnsegments.

Konstante Neigung in Bewegungsrichtung

Die Positionskorrektur für eine konstante Neigung des Fräswerkzeugs besteht in einer Verschiebung des Fräswerkzeugs in oder entgegen der Bewegungsrichtung des Fräswerkzeugs um eine Korrekturschrittweite, mit dem Ziel, den (vorzeichenbehafteten) Abstand zwischen Fräserrand und dem gegebenen Punkt \mathbf{q} zu verkleinern. Die konzeptionelle Idee der Positionskorrektur zeigt [Abbildung 7.3](#) am zweidimensionalen Beispiel. Der Fräser (rot umrandet) verfährt von Punkt \mathbf{a} nach \mathbf{b} (bzw. \mathbf{b} nach \mathbf{a}) mit konstanter Neigung von 45° ([Abbildung 7.3a](#)) oder 0° ([Abbildung 7.3b](#)) in (bzw. entgegen der) Fahrtrichtung. Die gezeigte Position \mathbf{u} des Fräasers ist die den markierten Anfragepunkten $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_4$ nächstgelegene Fräserposition. In der Situation gemäß [Abbildung 7.3a](#) lässt sich durch Verschieben des Fräasers entlang seines Pfades der (vorzeichenbehaftete) Abstand zwischen Fräserrand und jedem Punkt \mathbf{q}_i verringern, während dies in [Abbildung 7.3b](#) nicht der Fall ist.

Die Bestimmung der Länge des erforderlichen Korrekturschritts für einen Punkt \mathbf{q} erfolgt durch Bestimmung eines ausgezeichneten Punkts \mathbf{p} auf der Geraden $\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, die parallel zum Vektor $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ durch \mathbf{q} verläuft. Diese Gerade ist die Trajektorie des Punktes \mathbf{q} bei Beobachtung der Fräserfahrt vom Ursprung des Fräserkoordinatensystems aus, d.h. unter Annahme eines ruhenden Fräser- und verfahrenen Weltkoordinatensystems. \mathbf{p} ist ein Punkt mit minimalem (vorzeichenbehafteten) Abstand zum Fräserrand. Der Positionskorrekturvektor ergibt sich als Differenz aus \mathbf{q} und dem Punkt \mathbf{p} . Die Projektion des Vektors $(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ auf $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ führt zu $\Delta\lambda$.

[Abbildung 7.4](#) zeigt für das Bahnsegment aus [Abbildung 7.1a](#) für vier beispielhafte Anfragepunkte die resultierenden Positionskorrekturvektoren. Zur Minimierung des Abstands zu einem der Punkte muss die initiale Fräserposition \mathbf{u}_0 um die Länge der jeweiligen rosa Linie entlang des Bahnsegments auf den Punkt zu bewegt werden.

Die Berechnung des ausgezeichneten Punkts hängt von der Repräsentation des Fräswerkzeugs ab. [Abbildung 7.5](#) zeigt recht allgemeine Repräsentationen, die das

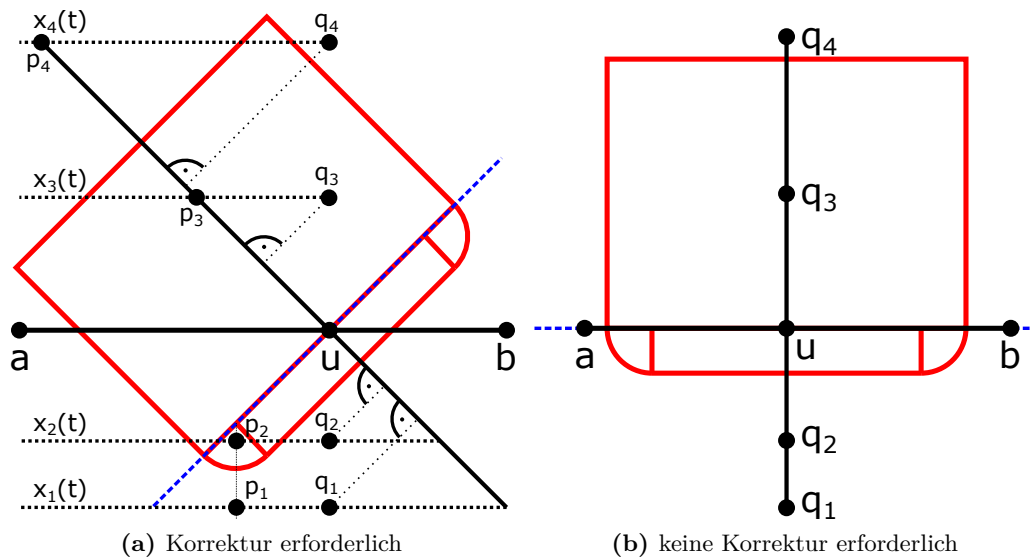


Abbildung 7.3: Positionskorrektur in Abhängigkeit von der Werkzeugorientierung.

Fräserswerkzeug in einfache geometrische Primitive, wie Zylinder, Kugel, Torus oder Kegel, zerlegen. Die Zerlegung ergibt sich durch Unterteilung des Fräserswerkzeugs längs der Rotationsachse in *Scheiben* und senkrecht zur Rotationsachse in *Schalen*. Die Trennflächen sind Kreisscheiben bzw. Zylinderflächen, die durch einen Abstand d_{\parallel} vom TCP längs der Achse bzw. einen Radius d_{\perp} senkrecht zur Fräserachse definiert sind. In [Abbildung 7.5](#) sind die Trennflächen als blaue, gestrichelte Linien angedeutet. Die Werte d_{\parallel} und d_{\perp} induzieren somit eine Raumunterteilung, deren Zellen ein Primitiv zugeordnet ist.

Berechnung der Korrekturschrittweite

Aus Effizienzgründen wird der Punkt \mathbf{p} nicht als Lösung eines Optimierungsproblems berechnet sondern näherungsweise geometrisch konstruiert. Die Suche nach einem ausgezeichneten Punkt \mathbf{p} auf der Bewegungsgeraden $\mathbf{x}(t)$ durch \mathbf{q} beginnt mit der Identifikation derjenigen Scheibe des Fräsermodells, welche \mathbf{q} bei Bewegung des Fräsers entlang des Bahnsegments am nächsten kommt. Dies erfolgt durch Berechnung des Punktes größter Annäherung zwischen der Bewegungsgeraden und der Fräserachse. Der Abstand d_{\parallel} dieses Punktes vom TCP determiniert die relevante Fräuserscheibe. Im Folgenden wird eine Partition des Fräsers in einen zylindrischen (Schaft) und einen nicht-zylindrischen (Spitze) Teil angenommen und unterschieden, in welchem dieser beiden Teile die relevante Scheibe liegt. In [Abbildung 7.3](#) gehören die Punkte $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ zum nicht-zylindrischen und $\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4$ zum zylindrischen Teil des Fräsers, wobei eine blaue gestrichelte Linie die Trennebene der Partition andeutet.

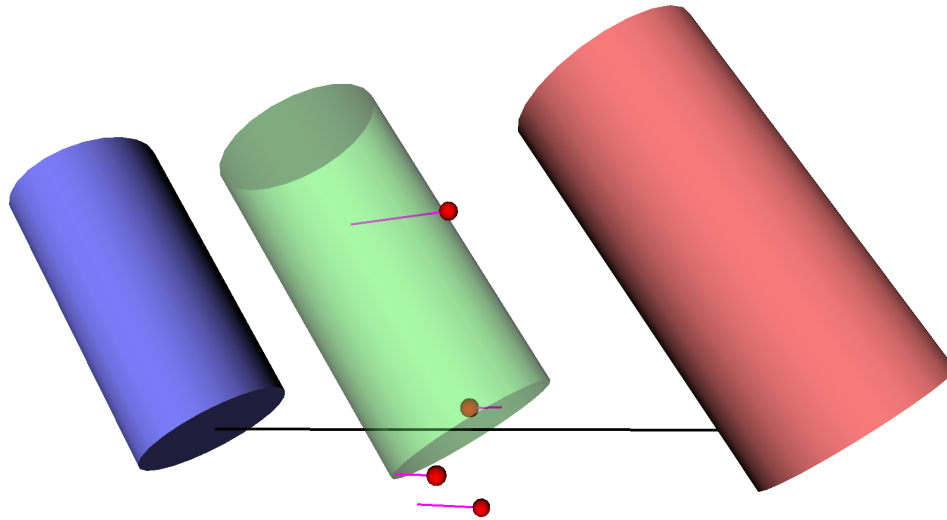


Abbildung 7.4: Positionskorrekturvektoren (rosa Linien) für vier Anfragepunkte (rote Kugeln) für das Bahnsegment aus [Abbildung 7.1a](#). Der grüne Zylinder zeigt die den Punkten nächstgelegene Fräserposition \mathbf{u}_0 .

Liegt \mathbf{q} im zylindrischen Teil des Fräasers, so entspricht \mathbf{p} dem Punkt größter Annäherung zwischen der Bewegungsgeraden und Fräserachse, welcher bereits zur Identifikation der relevanten Scheibe berechnet wurde.

Liegt \mathbf{q} im nicht-zylindrischen Teil des Fräasers, so wird \mathbf{p} folgendermaßen geometrisch konstruiert, siehe auch [Abbildung 7.6](#). Zunächst wird der Schnittpunkt \mathbf{b}_0 zwischen $\mathbf{x}(t)$ und der Partitions-Trennebene bestimmt und damit eine Schnittebene aufgespannt, welche die Fräserachse sowie das Lot von \mathbf{b}_0 auf ebendiese enthält, siehe auch [Abbildung 7.6a](#). Die Länge d_\perp des Lotes determiniert die zu \mathbf{b}_0 gehörige Schale. Liegt \mathbf{b}_0 innerhalb einer zylindrischen Schale ([Abbildung 7.6a](#) oben) gilt $\mathbf{p} = \mathbf{b}_0$. Andernfalls liegt \mathbf{p} auf dem Geradenabschnitt zwischen \mathbf{q} und \mathbf{b}_0 ([Abbildung 7.6a](#) mittig und unten). In diesem Fall wird auf dem Lot von \mathbf{b}_0 auf die Fräserachse ein Punkt \mathbf{b}_2 identifiziert, dessen Projektion auf $\mathbf{x}(t)$ den Punkt \mathbf{p} ergibt, unter Berücksichtigung des Fräserprofils innerhalb der vom Lot und der Fräserachse aufgespannten Schnittebene. Liegt \mathbf{b}_0 außerhalb der äußeren Mantelfläche ([Abbildung 7.6a](#) unten), lässt sich das Suchintervall zunächst mittels des Schnittpunkts \mathbf{b}_1 des Lotes mit der äußeren Mantelfläche eingrenzen (grüner Doppelpfeil). Für den dargestellten Fall einer zylindrischen Fräterspitze mit abgerundeter Ecke entspricht der gesuchte Punkt \mathbf{b}_2 dem Mittelpunkt des Kreisabschnitts in der Schnittebene. [Abbildung 7.6b](#) visualisiert die zur geometrischen Konstruktion von \mathbf{p} verwendeten Komponenten an einem 3D-Modell.

Nicht-konstante Neigung in Bewegungsrichtung

Bei einer nicht-konstanten Neigung des Fräsers in Bewegungsrichtung unterscheiden sich die Orientierungen des Fräsers an den Endpunkten \mathbf{a} und \mathbf{b} eines

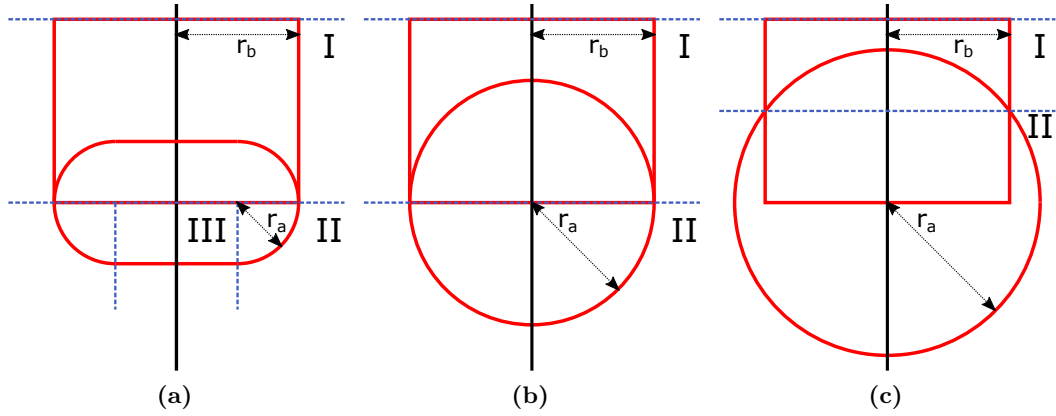


Abbildung 7.5: Unterteilung des Werkzeugs in Scheiben längs und Schalen senkrecht zur Rotationsachse zur Bestimmung relevanter Primitive (I: Zylinder, II: Kugel, III: Ebene).

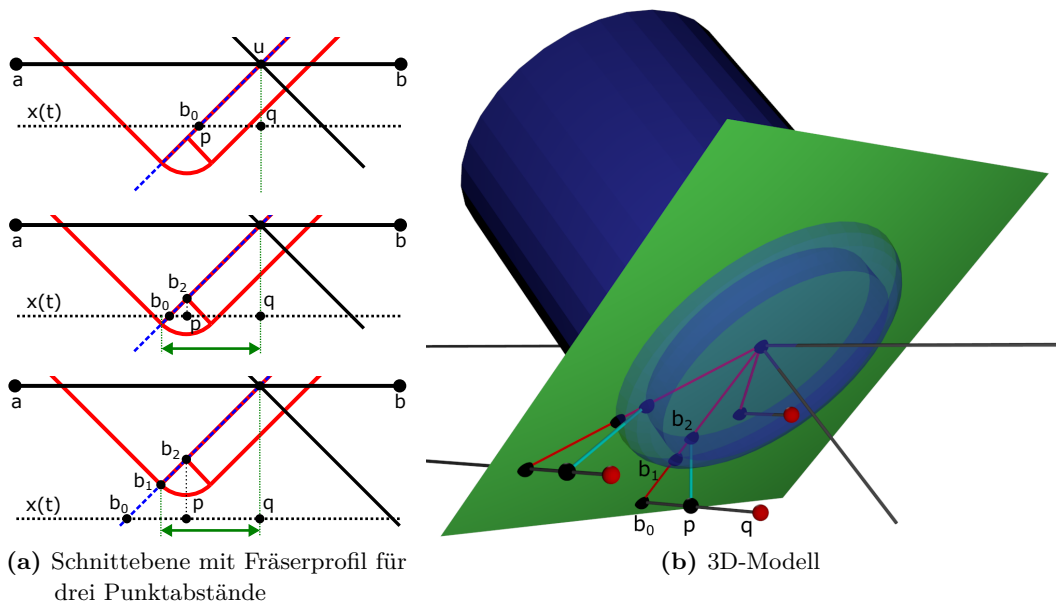


Abbildung 7.6: Schrittweitenbestimmung durch geometrische Konstruktion eines ausgezeichneten Punktes \mathbf{p} auf der Bewegungsgeraden von \mathbf{q} .

Bahnsegments. Der Richtungsvektor der Achse des Fräsers am Endpunkt \mathbf{b} liegt jedoch im Vektorraum, der von der Bewegungsrichtung und der Achse des Fräsers am Endpunkt \mathbf{a} aufgespannt wird. Die Bahn ergibt sich durch lineare Interpolation der Posen an den Endpunkten mittels einer Funktion $\mathbf{v}(\lambda)$. Das Ziel ist wiederum, den (vorzeichenbehafteten) Abstand zwischen dem Fräserrand und dem gegebenen Punkt \mathbf{q} zu verkleinern.

In diesem Fall führt eine (infinitesimale) Bewegung des Fräsers um $\delta\lambda$ zur Position $\mathbf{u}(\lambda_0 + \delta\lambda)$ zu einer unterschiedlichen Fräserorientierung $\mathbf{v}(\lambda_0 + \delta\lambda) \neq \mathbf{v}(\lambda_0)$, $\mathbf{u}(\lambda_0)$ der Lotfußpunkt von \mathbf{q} auf dem Bahnsegment. Der Korrekturterm $\Delta\lambda$ ist also nicht nur eine Funktion der Neigung, sondern auch der Neigungsänderung am Punkt \mathbf{u}_0 .

Um die Unabhängigkeit von einer konkreten Interpolationsfunktion für die Orientierung zu gewährleisten, wird an dieser Stelle ein ableitungsfreier iterativer Ansatz bevorzugt. Der i -te Iterationsschritt, $i \geq 0$, führt eine Verschiebung des Werkzeugs in der aktuellen Position \mathbf{u}_i und Orientierung \mathbf{v}_i nach der oben geschilderten Methode der konstanten Verschiebung gemäß

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + (\mathbf{q} - \mathbf{p}_i) \quad (7.9)$$

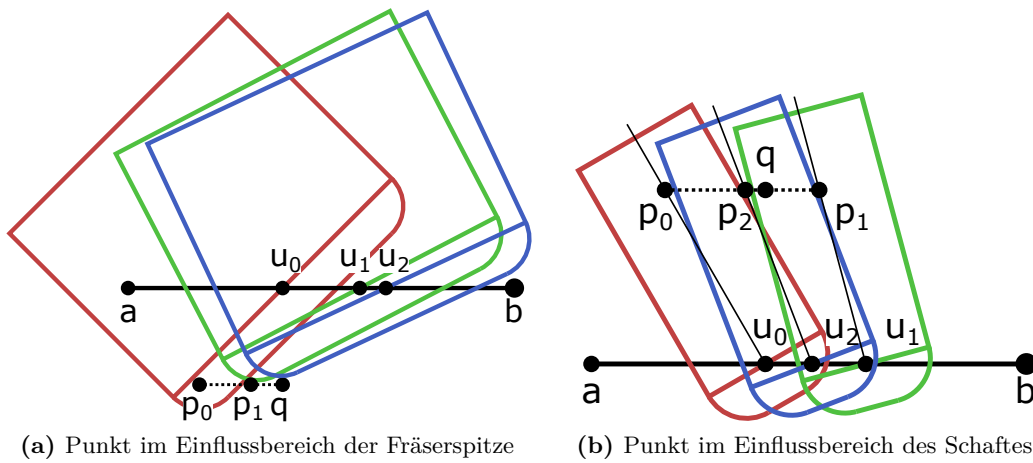
aus, mit \mathbf{p}_i derjenige Punkt auf der Trajektorie $\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ von \mathbf{q} mit minimalem (vorzeichenbehafteten) Abstand zum Fräserrand in der aktuellen Iteration. Die Notwendigkeit der Iteration ergibt sich durch Ersetzen der Werkzeugpose, die sich durch Verschiebung ergibt, durch die korrekte Werkzeugpose des gegebenen Bahnsegments mit dem Parameter λ_{i+1} von \mathbf{u}_{i+1} als Startpose des nächsten Iterationsschritts. Durch diese Ersetzung kann die ermittelte Distanz von \mathbf{q} zur Oberfläche des Fräsers ihre Optimalitätseigenschaft verlieren.

Abbildung 7.7 zeigt die Situation: der rote Rand markiert den Fräser an der dem Anfragepunkt \mathbf{q} nächstgelegenen Position $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\lambda_0)$. Bedingt durch die Orientierung $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\lambda_0)$ des Fräsers ergibt sich ein Positionskorrekturvektor $(\mathbf{q} - \mathbf{p}_0)$, welcher zur neuen Position \mathbf{u}_1 führt. Bedingt durch die Ersetzung der verschobenen Pose durch die korrekte Pose an \mathbf{u}_1 , markiert durch den grünen Rand, ergibt sich eine Orientierungsänderung ($\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_0$), sodass die neue Position \mathbf{u}_1 nicht mehr optimal ist. Eine weitere Iteration korrigiert \mathbf{u}_1 um den Vektor $(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1)$ und führt zur Position \mathbf{u}_2 und Orientierung $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_1$, markiert durch den blauen Rand. Die Abbildung zeigt nur die jeweils korrekten Posen an \mathbf{u}_{i+1} , die sich aus einem Iterationsschritt ergeben, $i \geq 0$. Die aus der Verschiebung resultierenden Posen an \mathbf{u}_{i+1} ergeben sich durch Verschiebung so, dass die relative Lage von \mathbf{q} bezüglich der nach \mathbf{u}_{i+1} verschobenen Pose mit der Lage von \mathbf{p}_i relativ zur Ausgangspose an \mathbf{u}_i übereinstimmt.

Die Iteration (7.9) konvergiert (noch) nicht zwangsläufig, wie Abbildung 7.8 anhand einer Situation zeigt, die zu oszillierend anwachsenden Schrittweiten $(\mathbf{q} - \mathbf{p}_i)$ führt. Generell führt Oszillation zu einer schlechten Konvergenzgeschwindigkeit.

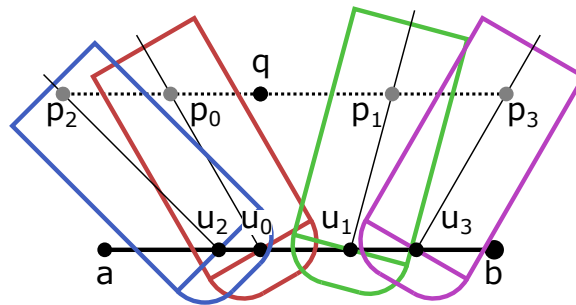
Im Rahmen dieser Arbeit wird das Konvergenzverhalten durch Beschränkung der Schrittweite verbessert. Dies geschieht durch die Erweiterung

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + s_i (\mathbf{q} - \mathbf{p}_i) \quad (7.10)$$



(a) Punkt im Einflussbereich der Fräterspitze

(b) Punkt im Einflussbereich des Schaftes

Abbildung 7.7: Positionskorrektur bei veränderlicher Werkzeugorientierung.**Abbildung 7.8:** Divergenz bei großer Orientierungsänderung ohne Schrittweitenbeschränkung.

von Gleichung (7.9) mit $0 < s_i \leq 1$ als relative Schrittweite, wobei

$$s_i = \frac{1}{I - i}, \quad (7.11)$$

mit I als vorgegebene Anzahl an Korrekturiterationen und $i = 0, \dots, I - 1$. Für steigendes i strebt s_i gegen 1, was zur Folge hat, dass frühe (große) Korrekturen zu einem kleinen Anteil und späte (kleine) Korrekturen zu einem großen Anteil vollzogen werden. [Abbildung 7.9](#) zeigt die Situation aus [Abbildung 7.8](#) mit Beschränkung der Schrittweite gemäß Gleichung (7.11) mit $I = 3$. Demnach wird in der ersten Iteration ein Anteil von $s_0 = 1/3$, in der zweiten Iteration $s_1 = 1/2$ und in der dritten $s_2 = 1$ des Korrekturweges zurückgelegt.

7.3.2 Phase 2: Korrektur unter Berücksichtigung des Rollwinkels

Bei der Neigungsänderung des Fräswerkzeugs orthogonal zur Bewegungsrichtung können sich die Orientierungen des Fräswerkzeugs an den Endpunkten **a** und **b** eines Bahnsegments wiederum unterscheiden. Zur Herleitung wird die Neigung in

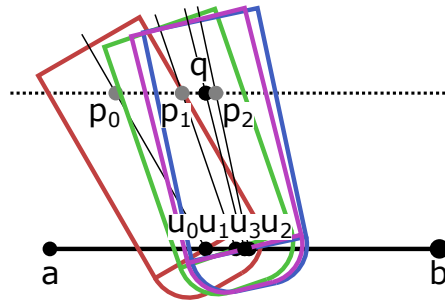


Abbildung 7.9: Konvergenz bei großer Orientierungsänderung mit Schrittweitenbeschränkung.

Bewegungsrichtung jedoch als konstant angenommen, so dass die Neigungsänderung nur orthogonal zur Bewegungsrichtung erfolgt. Die Bahn ergibt sich durch lineare Interpolation der Posen an den Endpunkten.

Dieser Fall unterscheidet sich dahingehend vom Fall der Neigung in Bewegungsrichtung, dass anhand der Orientierung \mathbf{v}_0 an der initialen Position \mathbf{u}_0 keine Korrekturposition zur Verminderung des (vorzeichenbehafteten) Abstands zwischen dem Fräserrand und dem gegebenen Punkt \mathbf{q} mit dem Vorgehen aus [Unterabschnitt 7.3.1](#) ermittelt werden kann. Die vorgestellte Berechnung der Korrekturschrittweite $\Delta\lambda$ berücksichtigt nur ein Vorauseilen oder Hinterherlaufen des relevanten Teils der Fräsergeometrie, jedoch keinen seitlichen Schwenk auf \mathbf{q} zu.

Um dennoch, wie im letzten Abschnitt, unabhängig von einer konkreten Orientierungsinterpolationsfunktion und deren Ableitungen zu bleiben, hilft folgende Beobachtung. Die Nullstellenmenge beim hier betrachteten Fall kann nur von denjenigen Fräserpositionen beeinflusst werden, deren Versatz $\Delta\lambda = \pm\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\|$ zur initialen Position $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\lambda_0)$ den Fräserradius r nicht überschreitet, d.h. für die

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\| \leq r \quad (7.12)$$

gilt. In diesem Sinn ist der Einfluss auf die Nullstellenmenge, und damit die maximal erforderliche Korrekturspannweite für die Neigungsänderung orthogonal zur Bewegungsrichtung, nur lokal und durch den Fräserradius beschränkt.

[Abbildung 7.10b](#) zeigt diesen Sachverhalt anhand dreier Fräserpositionen: für die initiale Fräserposition \mathbf{u}_0 (blauer Zylinder) liegen die beiden roten Punkte außerhalb des Wirkungsbereichs (Fräsoberfläche), ebenso für jede Fräserposition \mathbf{u}_1 , deren Versatz gegenüber \mathbf{u}_0 den Fräserradius r überschreitet (roter Zylinder). Ein Versatz $\Delta\lambda < r$ kann jedoch dazu führen, dass die Punkte innerhalb des Wirkungsbereichs liegen (grüner transparenter Zylinder).

Demgegenüber ist bei Neigung in Bewegungsrichtung die maximal erforderliche Korrekturspannweite global und nur durch die Länge des Bahnsegments beschränkbar. [Abbildung 7.10a](#) zeigt diesen Sachverhalt anhand einer initialen Fräserposition (blauer Zylinder), deren Korrektur aufgrund des hohen Neigungswinkels das gesamte Bahnsegment umfassen kann.

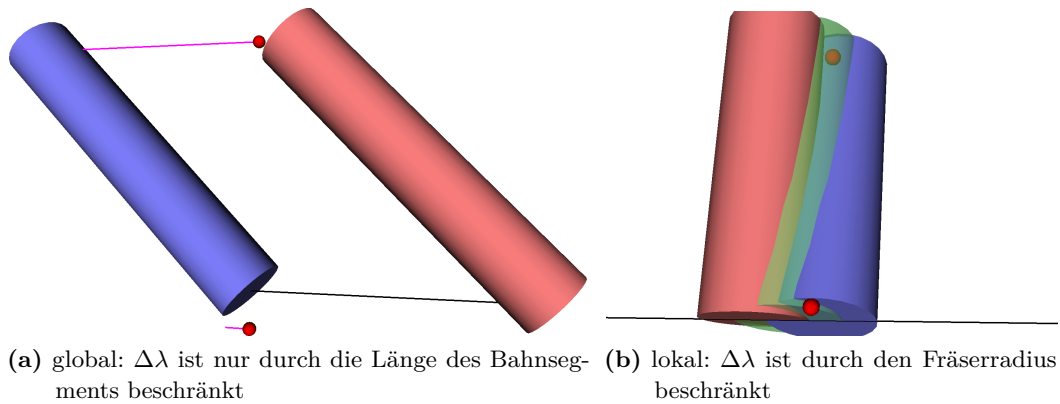


Abbildung 7.10: Globale vs. lokale Korrekturspannweite. Der blaue Zylinder zeigt die den beiden roten Punkten nächstgelegene Fräserposition \mathbf{u}_0 .

Ausgehend von der beschriebenen Lokalität des Einflusses auf die Nullstellenmenge besteht das Verfahren der Positionskorrektur nun darin, die optimale Fräserpose innerhalb des Intervalls $[\lambda_0 - r, \lambda_0 + r]$ mittels linearer Suche zu identifizieren.

Unabhängig von der geometrisch motivierten konzeptionellen Trennung der Neigung in bzw. orthogonal zur Bewegungsrichtung ist die damit verbundene zunächst grobe Approximation durch die globale Lokalisation des Fräasers auf dem Bahnsegment gemäß [Unterabschnitt 7.3.1](#) mit anschließender Korrektur durch die lokale Suche aus Sicht des Berechnungsaufwandes effizient.

Zu erwähnen bleibt, dass die beschriebene Beschränkung der Korrekturspannweite dazu führt, dass der resultierende Wert $\phi_{S_i}(\mathbf{q})$ für Punkte \mathbf{q} jenseits der Nullstellenmenge im Allgemeinen die tatsächliche Distanz zur Fräseroberfläche überschätzt. [Abbildung 7.11](#) zeigt dazu eine beispielhafte Situation. Für die beiden Anfragepunkte $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ markiere der grüne Zylinder einen im nächstgelegenen TCP \mathbf{u}_0 positionierten Fräser, und der blaue Zylinder einen Fräser mit lokal minimalem Abstand zwischen Fräseroberfläche und den Anfragepunkten, für dessen TCP \mathbf{u}_1 gilt $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\| \leq r$. Für \mathbf{q}_2 ist der Abstand auch global minimal und gleich Null. Für \mathbf{q}_1 führt eine Erhöhung des Versatzes zwischen \mathbf{u}_0 und \mathbf{u}_1 über r hinaus dagegen zu einer weiteren Verringerung des Abstands zwischen Fräseroberfläche und Anfragepunkt. Der rote Zylinder zeigt den Fräser mit global minimalem Abstand zwischen Fräseroberfläche und \mathbf{q}_1 . Unter der Annahme, dass eine Neigung des Fräasers nur orthogonal zur Bewegungsrichtung erfolgt, kann für $\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\| > r$ der Punkt \mathbf{q}_1 für keine Pose mehr auf der Fräseroberfläche liegen, da der Abstand zu dieser allein aufgrund des Versatzes stets größer Null ist. Die Tatsache, dass im Rahmen der Simulation ausschließlich die Nullstellenmenge von ϕ_{S_i} von Bedeutung ist, führt zur Zulässigkeit der beschriebenen Beschränkung des Suchraums.

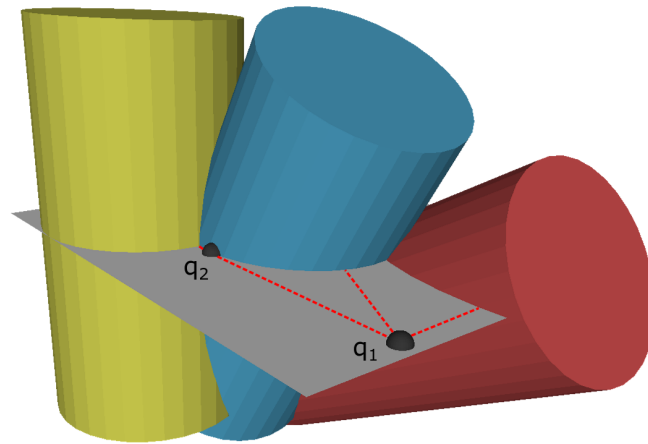


Abbildung 7.11: Überschätzung des Abstands aufgrund Beschränkung der Korrekturspannweite.

7.4 Evaluation und Diskussion

Abbildung 7.12 zeigt ein beispielhaftes Schnittvolumen bei linearer sphärischer Interpolation der Neigung in Bewegungsrichtung von 45° am Startpunkt (blauer Zylinder) bis -45° am Endpunkt (roter Zylinder) und mit steigender Anzahl I an Korrekturiterationen gemäß Gleichung (7.11). Zur Berechnung des Schnittvolumens werden ausschließlich die Start- und Endpose verwendet, die drei übrigen interpolierten Posen dienen nur der Visualisierung. Für $I = 1$ und $I = 2$ sind fehlerhafte Einbuchtungen des Schnittvolumens und Überschneidungen mit der Fräseroberfläche an interpolierten Posen zu erkennen. Diese resultieren aus einer zu großen Abweichung zwischen der nach ein bzw. zwei Korrekturiterationen ermittelten Fräserpose und der optimalen Fräserpose. Insbesondere ist das für $I = 1$ (Abbildung 7.12b) erwartete Überspringen der optimalen Fräserposition in Abbildung 7.8 ersichtlich, in welcher der Punkt \mathbf{q} zu keinem Zeitpunkt innerhalb des Fräasers zu liegen scheint. Für $I \geq 3$ sind keine Beeinträchtigungen des Schnittvolumens mehr erkennbar.

Abbildung 7.13 zeigt ein beispielhaftes Schnittvolumen bei linearer sphärischer Interpolation der Neigung orthogonal zur Bewegungsrichtung von 45° am Startpunkt (blauer Zylinder) bis -45° am Endpunkt (roter Zylinder) ohne und mit lokaler linearer Suche mittels maximal 4 abstandsverringender Testpositionen. Zu erkennen sind erwartungsgemäße Überschneidungen mit der Fräseroberfläche an interpolierten Posen im Fall ohne lokale Suche, welche im Fall mit lokaler Suche entfallen.

Abbildung 7.14 zeigt eine komplexere Situation bestehend aus drei Bahnsegmenten, in denen die beiden thematisierten Neigungsrichtungen auf unterschiedliche Weise kombiniert sind. Farbige Zylinder markieren Endpunkte von Bahnsegmenten und graue Zylinder interpolierte Posen in der Mitte jedes Bahnsegments, die wieder nur zum Zweck der Visualisierung dienen.

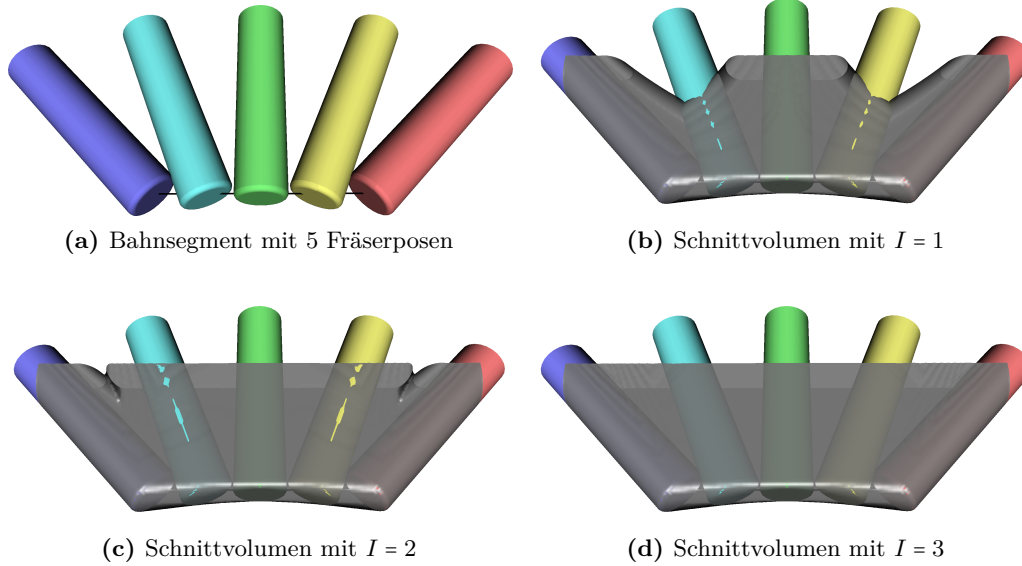


Abbildung 7.12: Schnittvolumen bei Neigungsänderung in Bewegungsrichtung

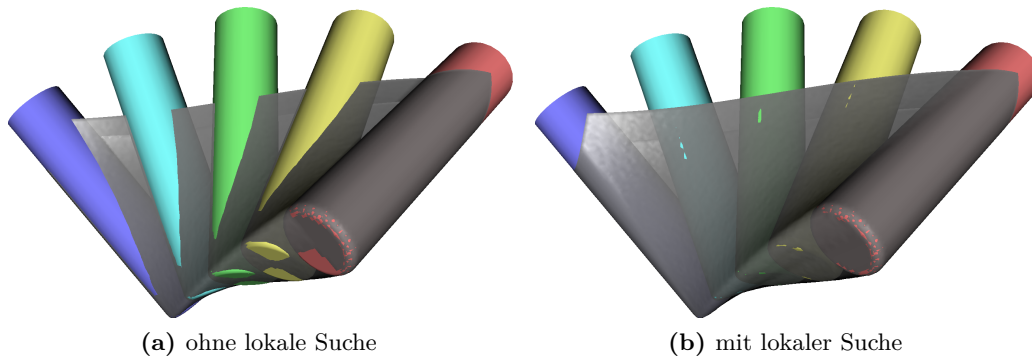


Abbildung 7.13: Schnittvolumen bei Neigungsänderung orthogonal zur Bewegungsrichtung

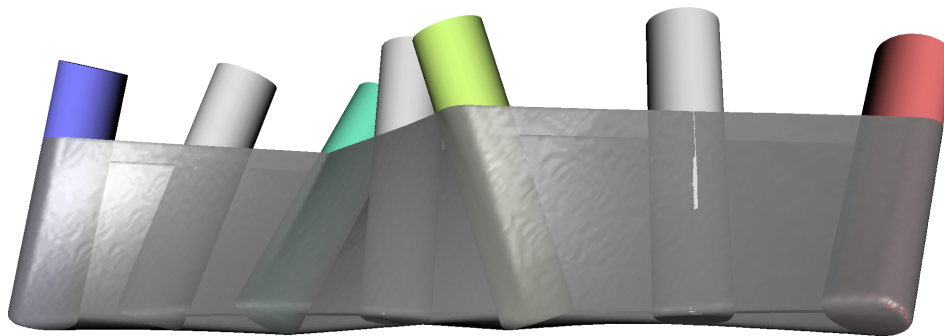


Abbildung 7.14: Schnittvolumen bei beliebiger Neigungsänderung

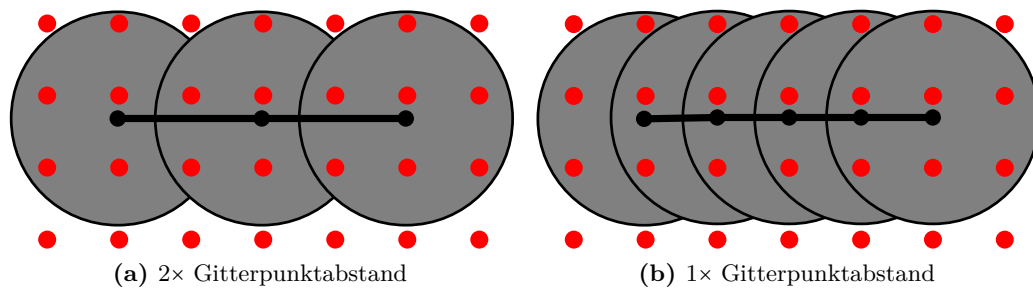


Abbildung 7.15: Abtastschrittweite des Fräserwerkzeugs im Vergleich zum Gitterpunktabstand

Die in [Abschnitt 7.3](#) vorgestellte implizite Repräsentation des Schnittvolumens zeichnet sich durch ihre fehlende Abtastung der Fräserpose entlang eines Bahnsegments und der daraus resultierenden Glattheit des Schnittvolumenrandes aus. Anstatt eine vordefinierte Anzahl isolierter Posen zu berücksichtigen, zu denen der kleinste Abstand bestimmt wird, kann sich jede beliebige Pose gleichermaßen auf des Schnittvolumen auswirken. Die berücksichtigten Posen hängen nicht von einer Abtastung des Bahnsegments ab, sondern von den Stützstellen des den Schnittvolumenrand repräsentierenden Distanzfelds.

Im Folgenden wird die Laufzeiteffizienz des vorgeschlagenen kontinuierlichen Ansatzes im Vergleich mit der des naiven diskreten Ansatzes analysiert, welcher besagte Glattheit der Schnittvolumenoberfläche durch Abtastung des Bahnsegments mit hinreichend kleiner Abtastschrittweite der Fräserposen erreicht. In Anlehnung an das Abtasttheorem und den in [Abbildung 7.15](#) schematisierten Vergleich zwischen Werkzeug- und Gitterpunktabstand sei als obere Schranke für eine hinreichende Abtastschrittweite zunächst der doppelte Gitterpunktabstand angenommen. Liegt die Schrittweite auf oder über der Schranke, so ist der unerwünschte talförmige Übergang zwischen benachbarten Fräserposen stets rekonstruierbar.

In der Realität erweist sich diese Schranke als zu optimistisch, da sie auch von der Divergenz der Fräserposen abhängt, wie [Abbildung 7.16](#) zeigt. Darin wurde das Schnittvolumen nicht mittels des kontinuierlichen Ansatzes aus [Abschnitt 7.3](#) berechnet, sondern mittels der naiven diskreten Vorgehensweise mit vorgegebener Abtastschrittweite in Abhängigkeit vom Gitterpunktabstand. Aufgrund divergierender Fräserposen sind beim 2- und 1.5-fachen des Gitterpunktabstands noch Übergänge zwischen benachbarten Fräserposen erkennbar. Als realistischere obere Schranke für die Abtastschrittweite des diskreten Ansatzes sei im Folgenden der einfache Gitterpunktabstand angenommen.

[Abbildung 7.17](#) zeigt einen Vergleich der Berechnungsdauer des kontinuierlichen und des naiven diskreten Ansatzes (Testsystem CPU: Intel Core i7-4790K, RAM: 16GB). Aufgrund eines geringen Quellcode-Optimierungsgrades und der Ausführung auf der CPU anstelle GPU ist weniger die absolute Berechnungsdauer relevant,

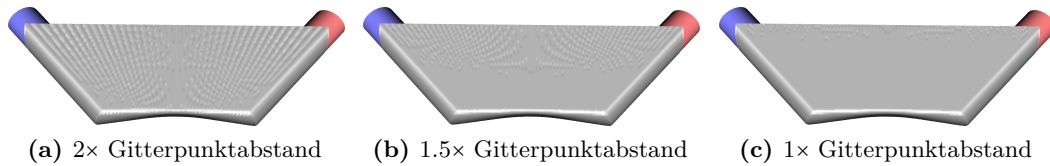


Abbildung 7.16: Schnittvolumen bei Berechnung des kleinsten Abstands zu einer diskreten Menge an Fräserposen mit vorgegebener Schrittweite.

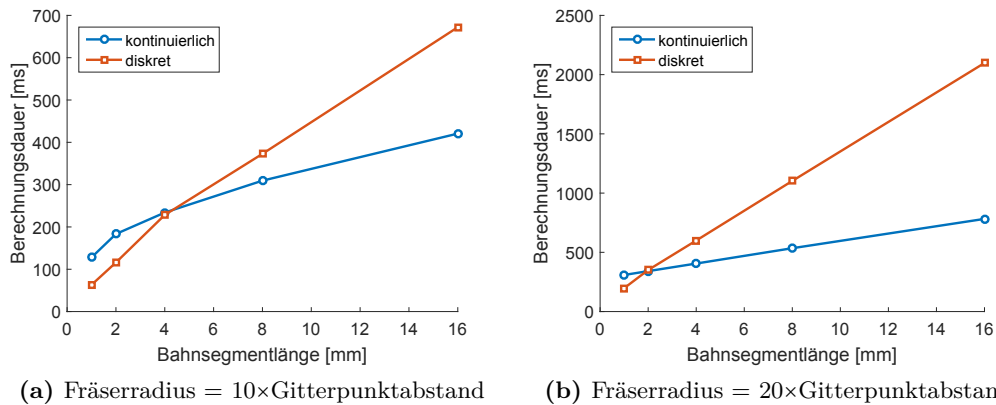


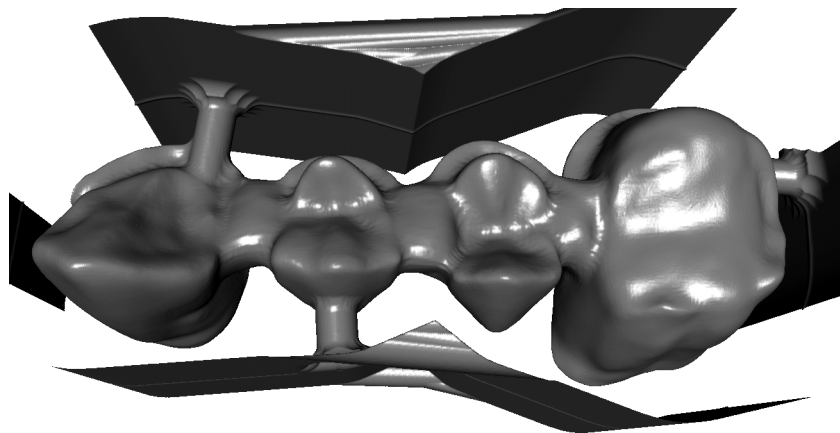
Abbildung 7.17: Berechnungsdauer des Schnittvolumens für ein Bahnsegment (mit Neigungsänderung in und orthogonal zur Bewegungsrichtung) in Abhängigkeit von der Bahnsegmentlänge.

sondern vielmehr der relative Vergleich. Es zeigt sich, dass mit wachsender Bahnsegmentlänge und wachsendem Fräserradius – jeweils relativ zum Gitterpunktabstand – der kontinuierliche Ansatz zunehmend effizienter wird. Beides ist wiederum auf die wachsende Anzahl an auszuwertenden Gitterpunkten zurückzuführen, sodass festzuhalten bleibt, dass der kontinuierliche Ansatz besser mit der Gitterpunktanzahl zu skalieren scheint als eine diskrete Abtastung des Bahnsegments mittels Fräserposen.

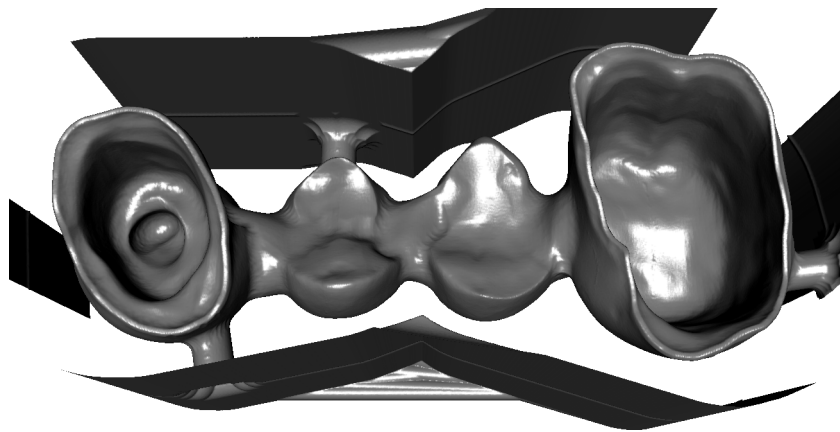
Abbildung 7.18 zeigt ein beispielhaftes Ergebnis nach Simulation des Materialabtrags von Werkzeugbahnen zur spanenden Fertigung einer viergliedrigen Zahnbrücke. Ein Materialabtrag findet dabei nur innerhalb einer das Zielobjekt umgebenden äußeren Hülle statt, und Haltestege dienen zur Fixierung des Werkstücks bis zur Beendigung der Fertigung, siehe Abbildung 1.6b.

7.5 Stand der Wissenschaft

Gemäß [BB15] dient die Fertigungssimulation zur Überprüfung der Werkzeugbahn, Erkennung von Kollisionen, Vorhersage der Oberflächenrauheit, Vorhersage der Schneidkraft, Optimierung von Schneidparametern. Die Arbeiten [BB15; Joy17] ge-



(a) Oberseite



(b) Unterseite

Abbildung 7.18: Viergliedrige Zahnbrücke nach Simulation des Materialabtrags.

ben einen Überblick über aktuelle Ansätze zur Fertigungssimulation. Diese unterscheiden sich hinsichtlich der Modellierung des bearbeiteten Werkstücks, Modellierung des Fräseingriffsvolumens (*Swept Volume*) sowie Manipulation des Werkstückmodells in Abhängigkeit vom Fräseingriff.

Für einen umfassenden Überblick über die virtuelle Fertigung, welche die Modellierung der Werkstückoberfläche und des Fräseingriffs als Teilaspekte beinhaltet, sei [AKB+14] hervorgehoben. Als Repräsentationsformen für die Werkstück- sowie Werkzeugoberfläche treten Dreiecksnetze, Punktwolken, Begrenzungsflächenmodelle (*B-Rep*), flächige Gitter (Höhenkarten, Multi-Dexel) und räumliche Gitter (Voxel) auf. Die Dissertation dokumentiert eine neuartige Distanzfunktion zur impliziten Modellierung des Swept Volume, welche zunächst unabhängig von der Diskretisierung des Definitionsbereichs mittels flächiger oder räumlicher Gitter ist. Die erfolgte Fokussierung auf ein adaptives räumliches Gitter gemäß [Unterabschnitt 2.1.2](#) ermög-

licht jedoch einen orts- und zeitabhängigen Gitterpunktabstand, und damit auch eine effiziente Darstellung von Werkstückoberflächen mit variierendem Detailgrad.

Ansätze zur expliziten Modellierung des Fräswerkzeugeingriffs finden sich [LN11a; LN11b; AA00], welche die Oberfläche des Fräseingriffsvolumens durch ein Dreiecksnetz repräsentieren. Die Manipulation des Werkstückmodells erfolgt durch Beschneidung der Werkstückoberfläche mit dem Dreiecksnetz. In [ZCY15] wird eine geschlossene Darstellungsform für die einhüllende Oberfläche einer Schar von Fräseroberflächen für eine spezialisierte Fräsergeometrie konstruiert.

Das Vorgehen in der Dissertation unterscheidet sich dahingehend grundlegend, dass der Rand des Fräseingriffsvolumens implizit repräsentiert wird. Hervorgehoben seien in diesem Zusammenhang die Arbeiten [Dzi12; KVL+04], welche ebenfalls distanzfeldbasierte Ansätze dokumentieren, um das Swept Volume eines nahezu beliebigen geometrischen Objekts zu approximieren, welches entlang einer vorgegebenen Kurve verschoben wird. Die Allgemeingültigkeit und hohe Komplexität der dokumentierten Ansätze zieht jedoch den Nachteil einer um einige Größenordnungen gesteigerten Berechnungsdauer nach sich.

Durch die Verwendung einer Kombination aus analytischen und numerischen impliziten Darstellungen der relevanten Oberflächen ist der Fokus der vorgestellten Simulation vergleichbar mit der Arbeit aus [SEP+12], wobei letztere einen grundlegend anderen Ansatz zur Berechnung des vorzeichenbehafteten Abstandes zum Fräseingriffsvolumen (*Swept Volume*) verwendet. Darauf aufbauend dokumentieren [ES12; ES13] einen Ansatz zur näherungsweise Berechnung der momentanen Kontaktfläche als eine momentan wirksame Region der Fräseroberfläche (*Cutter Workpiece Engagement surface*) sowie des abgetragenen Volumens, welche den Ausgangspunkt für eine weitergehende physikalische Modellierung des Fertigungsprozesses darstellen, wie die Berechnung einer mittleren Zerspankraft mittels der Abtragungsgeschwindigkeit (*Material Removal Rate*). Aufgrund einer ähnlichen impliziten Repräsentation des Fräseingriffs ließe sich das Verfahren aus der Dissertation ebenso durch diesen Ansatz erweitern.

Eine alternative Herangehensweise zur Modellierung des bearbeiteten Werkstücks mittels *Displacement Fields* zeigt bspw. [Aya03]. Darin wird die Deformation bzw. Formgebung der Werkstückoberfläche dargestellt, indem jedem Punkt einer Ziel- bzw. Referenzoberfläche ein Versatz in Richtung der Oberflächennormale zugeordnet wird, welcher den Punkt auf die gegenwärtige Werkstückoberfläche abbildet.

Die bisher thematisierten Herangehensweisen beschränken sich auf eine makroskopische Simulation des Fertigungsprozesses. Vom physikalischen Prozess der Abhebung eines Spans durch die Schneidkante des Werkzeugs wird dabei abstrahiert, indem dieser Prozess durch ein vereinfachendes geometrisches Modell zur Deformation der Werkstückoberfläche in Abhängigkeit von der Lage und Geometrie des Werkzeugs ersetzt wird. Einen Überblick über Ansätze zur physikalischen Modellierung der Spanabhebung im Rahmen einer mikroskopischen Simulation liefert [RCJ18].

Zusammenfassung und Ausblick

Die Motivation der Dissertation lag in der Entwicklung einer auf Level-Sets basierenden Bahnplanungsmethodik. Zu diesem Zweck wurden unterschiedliche Ansätze zur impliziten Definition, Repräsentation und Manipulation von für die Planung von Werkzeugbahnen relevanten Flächen und Kurven erprobt. Die entwickelten Methoden dienten zur Planung von Werkzeugbahnen in zwei unterschiedlichen Anwendungsszenarien, der spanenden Fertigung dentaler Werkstücke wie Zahnkronen, Brücken oder Inlays mittels einer 5-achsigen Tischfräsmaschine, und zur thermischen Beschichtung von Oberflächen mittels einer am Roboterarm geführten Spritzpistole. Als wesentliche Rahmenbedingung galt dabei die unmittelbare praktische Anwendbarkeit und größtmögliche Robustheit der verwendeten Methoden, da insbesondere die Fräsbahnplanung für den unmittelbaren Einsatz in zahntechnischen Laboren und Zahnarztpraxen im Rahmen der Software AnyCAM entwickelt wurde.

Die Verwendung impliziter Methoden führt einerseits zu bedeutsamen Vorteilen gegenüber expliziten Methoden, andererseits jedoch auch zu neuen Herausforderungen, welche in den vorangehenden Kapiteln thematisiert wurden.

Hervorgehoben sei hier der Ansatz zur impliziten Repräsentation von Kammlinien als Projektion des Medialachsenrandes auf eine explizite Oberfläche, sowie die damit verbundene Identifikation von für die Bahnplanung kritischen Bereichen auf der Zieloberfläche. Ebenso wurden die den Werkzeugbahnen zugrunde liegenden Kurven auf Oberflächen und im Raum implizit definiert, sowie Ansätze zur Überführung explizit bzw. implizit definierter Kontaktpunktkurven auf Oberflächen in explizit bzw. implizit definierte Werkzeugpositionskurven im Raum vorgestellt. Die Überführung von Kontaktpunktkurven auf Oberflächen in Werkzeugpositionskurven im Raum wurde weitergehend vertieft, indem die Bestimmung einer Positionskurve als Lösung eines Optimierungsproblems aufgefasst wurde, welche zwischen einer aus prozesstechnischer, geometrischer und dynamischer Perspektive günstigen Positionierung des Werkzeugs abzuwägen vermag. Abschließend wurde eine auf ausschließlich impliziten Repräsentationen beruhende Methodik zur Simulation des Materialabtrags bei der spanenden Fertigung vorgestellt.

Es stellte sich heraus, dass der anvisierten Verwendung ausschließlich impliziter Repräsentationen jedoch noch gewisse Herausforderungen im Wege stehen, die zugunsten einer praktischen Anwendbarkeit der entwickelten Methodik nicht mehr im Rahmen der Dissertation gelöst wurden. Deshalb sind neben den bevorzugten impliziten Repräsentationen stellenweise weiterhin explizite Repräsentationen vonnöten.

In diesem Zusammenhang sei die Notwendigkeit zur expliziten Repräsentation der Offset-Fläche erwähnt, sofern auf dieser Kamm- und Iso-Konturlinien berechnet werden sollen, siehe [Abschnitt 3.3](#) und [Unterabschnitt 5.1.2](#). Zur Vermeidung unnötiger Konvertierungen ist dagegen die Berechnung von Kammlinien und Distanzfeldern auf der impliziten Flächenrepräsentation erstrebenswert. Ansätze hierzu, welche zukünftig berücksichtigt werden könnten, sind in [\[WL16\]](#) (Distanzfelder auf impliziten Flächen) und [\[ZCP09; Gol05\]](#) (Krümmungen auf impliziten Flächen) dokumentiert.

[Abschnitt 3.3](#) thematisierte eine neuartige Form der Kammlinien-detektion durch Projektion des Medialachsenrandes auf die Zieloberfläche. Wie dort bereits erwähnt wurde liegt die Annahme nahe, dass dieser Ansatz aufgrund seiner Globalität robuster sein kann als die lokale Suche nach relevanten Extremstellen der Hauptkrümmung. Die Suche relevanter Extremstellen erfordert zunächst die Schätzung der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen basierend auf der Punktnachbarschaft. Letzterer Ansatz wird in der Software AnyCAM verwendet, erweist sich jedoch als äußerst sensitiv gegenüber der Auswahl der zu berücksichtigten Nachbarschaft eines jeden Oberflächenpunktes. Resultierende Kammlinien bedürfen für gewöhnlich einer Selektion und Glättung. Aus diesem Grund kann die medialachsenbasierte Kammlinien-detektion als vielversprechende Alternative angesehen werden.

[Abschnitt 5.4.2](#) thematisierte anwendungsspezifische Einschränkungen der implizit konstruierten Normalfläche sowie Unterschiede zur explizit konstruierten Normalfläche. Aus praktischer Sicht problematisch erwiesen sich die Verstärkung von Gradienten entlang der Medialachse sowie das Konvergenzverhalten von Niveaumengen gegen die Medialachse. Ersteres beeinträchtigt die Kondition des Skalarfelds und führt somit zu einem gezackten Verlauf der Niveaumengen, und damit auch der Offset-Bahnen, nahe der Medialachse, siehe [Abbildung 5.15b](#). Letzteres führt dazu, dass unterschiedliche Kontaktpunkte aus dem Medialachsen-Einflussbereich, deren nächstgelegene Punkte auf der Offset-Fläche identisch sind, dennoch auf unterschiedliche Offset-Punkte abgebildet werden, siehe [Abbildung 5.21a](#). Im Rahmen der Dissertation werden diese Einschränkungen durch nachträgliche Glättung resultierender Bahnen gemäß [Unterabschnitt 5.7.3](#) näherungsweise kompensiert. Erstrebenswert wäre dagegen eine konzeptionelle Berücksichtigung der Einschränkungen. Naheliegend erscheint hierbei zunächst die Verfeinerung des Gitters entlang der Medialachse. Des weiteren erscheint der verwendete suchebasierte Ansatz zur Berechnung des Gitters zur Approximation des Tupels (ϕ, ω) aus Distanzfeld und extrudiertem Skalarfeld nicht optimal, da die Suche eines nächstgelegenen Oberflächenpunktes für jeden Gitterpunkt isoliert stattfindet und somit keine Berücksichtigung von Stetigkeitsanforderungen erlaubt. Dagegen lassen sich im Rahmen eines ausbreitungsbasierten Verfahrens auch Stetigkeitsanforderungen formulieren. Ein ausbreitungsbasiertes Verfahren zur Berechnung des Distanzfelds ϕ , z.B. Fast Marching, müsste zur Berechnung des Skalarfelds ω dahingehend erweitert werden, dass das Oberflächendistanzfeld entlang der Charakteristiken der Eikonalgleichung propagiert wird.

In [Abschnitt 5.5](#) wurde die Relaxation einer wirkungsgünstigen Werkzeugbahn zugunsten verbesserter geometrischer, kinematischer oder dynamischer Bahneigenschaften eingeführt. Die vorgestellte Herangehensweise bestand im Wesentlichen aus der Interpolation einer Werkzeugkompromissbahn aus zwei extremalen Werkzeugbahnen, der wirkungsgünstig ausgelegten und der dynamikgünstig ausgelegten Werkzeugbahn. Durch unterschiedliche Arten der Interpolationsgewichtung lassen sich unterschiedliche Relaxationsansätze konstruieren. In [Abschnitt 5.6](#) wurde daraufhin gezeigt, wie die Wahl des Offsets der dynamikgünstig ausgelegten Werkzeugbahn zur Verallgemeinerung des Vorgehens zur Relaxation von Werkzeugbahnen dienen kann. Die Darstellung erfolgte dabei geometrisch und eher konzeptionell, unter Delegation der Entscheidung über die kinematische oder dynamische Zulässigkeit der interpolierten Werkzeugbahn an eine Black-Box. Im Rahmen einer praktischen Nutzung der vorgestellten Herangehensweise ist jedoch eine stärkere Berücksichtigung der kinematischen und dynamischen Eigenschaften des verwendeten Werkzeugs innerhalb der Gewichtungs-Optimierungsschleife anstatt der Befragung einer Black-Box erstrebenswert.

In [Abschnitt 6.3.3](#) wurde die Forminterpolation mittels einer ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit erwähnt, jedoch im Rahmen der Dissertation eine alternative Methodik bevorzugt, bestehend aus der Konturausbreitung mit konstanter Geschwindigkeit mitsamt Projektion unzulässiger Konturabschnitte auf den Rand des zulässigen Bereichs (ebenfalls [Abschnitt 6.3.3](#)). Letztere hat den Vorteil einer tendenziell kürzeren resultierenden Kurvenlänge, da alle zulässigen Konturabschnitte einen vorgegebenen Abstand zueinander bewahren und somit die Überdeckung der Positionierungsregion eine geringstmögliche Anzahl an Kurvenabschnitten erfordert. Der Nachteil aus fertigungstechnischer Sicht liegt im wiederholten Befahren desselben (rückprojizierten) Bahnabschnitts. Dies kann nicht nur für Prozesse mit zeitabhängiger Wirkung problematisch sein, sondern auch bei der spanenden Fertigung negative Auswirkungen auf die Standzeit des Fräasers aufweisen, wenn der Schaft des Fräasers wiederholt den Rand des Bearbeitungsbereichs tangieren muss.

In [Abschnitt 7.3](#) wurde die Bestimmung der zu einem Anfragepunkt \mathbf{q} nächstgelegenen Fräserpose auf einem Bahnsegment, im Sinne des vorzeichenbehafteten Abstands, durch Bestimmung einer initialen Fräserpose und Korrektur derselben im Rahmen von zwei Korrekturphasen vorgestellt. Die erste (globale) Phase bestand aus der Verschiebung des Fräasers entlang des Bahnsegments in Abhängigkeit von dessen Neigungswinkel in Bewegungsrichtung. Die zweite (lokale) Phase bestand aus der linearen Suche einer verbessernden Fräserpose innerhalb eines fixen Intervalls um die Interimspose aus Phase 1, das nur vom Fräserradius abhängt, zur Berücksichtigung eines variierenden Rollwinkels des Fräasers orthogonal zur Bewegungsrichtung. Die Notwendigkeit dieser zweiten Phase ergab sich aus der Unabhängigkeit der in [Unterabschnitt 7.3.1](#) vorgestellten geometrischen Schrittweitenberechnung vom Rollwinkel des Fräasers. Erstrebenswert wäre in diesem Zusammenhang eine Herangehensweise zur Berechnung der finalen Korrekturschrittweite, die sowohl den Neigungs- als auch Rollwinkel des Fräasers berücksichtigt, innerhalb einer einzigen Phase, um die

nachträgliche lokale Suche zur weitergehenden Verbesserung zu vermeiden. In einer derart verallgemeinerten Schrittweitenberechnung ist die Trajektorie des Punktes \mathbf{q} nicht mehr notwendigerweise ein Geradenabschnitt sondern eine gekrümmte Kurve, wenn der Fräser durch Änderung des Rollwinkels entlang des Bahnsegments seitlich auf \mathbf{q} zu schwenkt. Gesucht ist wiederum ein Punkt auf dieser Kurve, welcher den (vorzeichenbehafteten) Abstand zum Fräserrand minimiert.

Literatur

- [AA00] S. Abrams und P. K. Allen. „Computing swept volumes“. In: *Journal of Visualization and Computer Animation* 11 (2000), S. 69–82 (siehe S. 168).
- [ABE09] D. Attali, J.-D. Boissonnat und H. Edelsbrunner. „Stability and Computation of Medial Axes - a State-of-the-Art Report“. In: *Mathematical Foundations of Scientific Visualization, Computer Graphics, and Massive Data Exploration*. Hrsg. von T. Möller, B. Hamann und R. D. Russell. Mathematics and Visualization. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, S. 109–125. ISBN: 978-3-540-49926-8. DOI: [10.1007/b106657_6](https://doi.org/10.1007/b106657_6). URL: https://doi.org/10.1007/b106657_6 (siehe S. 36).
- [AKB+14] Y. Altintas, P. Kersting, D. Biermann, E. Budak, B. Denkena und I. Lazoglu. „Virtual process systems for part machining operations“. In: *CIRP Annals* 63.2 (2014), S. 585–605. ISSN: 0007-8506. DOI: [10.1016/j.cirp.2014.05.007](https://doi.org/10.1016/j.cirp.2014.05.007). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850614001899> (siehe S. 167).
- [AM05] W. Anotaiapaiboon und S. S. Makhanov. „Tool path generation for five-axis NC machining using adaptive space-filling curves“. In: *International Journal of Production Research* 43.8 (2005), S. 1643–1665. ISSN: 0020-7543. DOI: [10.1080/00207540412331322948](https://doi.org/10.1080/00207540412331322948) (siehe S. 147).
- [AM11] W. Anotaiapaiboon und S. S. Makhanov. „Minimization of the kinematics error for five-axis machining“. In: *Computer-Aided Design* 43.12 (2011), S. 1740–1757. ISSN: 0010-4485. DOI: [10.1016/j.cad.2011.08.032](https://doi.org/10.1016/j.cad.2011.08.032). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448511002314> (siehe S. 73).
- [Aya03] J. Ayasse. „Discrete displacement fields: A Versatile Representation of Geometry for Simulation in Computer-Aided Manufacturing“. Dissertation. Dortmund: Universität Dortmund, 2003. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/2572/1/ayasse.ps> (siehe S. 168).
- [BB15] K. Bouhadja und M. Bey. „Survey on Simulation Methods in Multi-axis Machining“. In: *Transactions on Engineering Technologies*. Hrsg. von G.-C. Yang, S.-I. Ao und L. Gelman. Bd. 24. Dordrecht und s.l.: Springer Netherlands, 2015, S. 367–382. ISBN: 978-94-017-9803-7. DOI: [10.1007/978-94-017-9804-4_25](https://doi.org/10.1007/978-94-017-9804-4_25) (siehe S. 166).
- [BCS14] O. Bokanowski, Y. Cheng und C.-W. Shu. „A discontinuous Galerkin scheme for front propagation with obstacles“. In: *Numerische Mathematik* 126.1 (2014), S. 1–31. ISSN: 0945-3245. DOI: [10.1007/s00211-013-0555-3](https://doi.org/10.1007/s00211-013-0555-3) (siehe S. 135).
- [BK07] D. Bommers und L. Kobbelt. „Accurate Computation of Geodesic Distance Fields for Polygonal Curves on Triangle Meshes“. In: *undefined* (2007). URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/1e92/07daa02a87dc91996ad1f5bf7e94ba1197cf.pdf> (siehe S. 37 f., 76).

- [BMS+11] P. Bose, A. Maheshwari, C. Shu und S. Wuhler. „A survey of geodesic paths on 3D surfaces“. In: *Computational Geometry* 44.9 (2011), S. 486–498. ISSN: 0925-7721. DOI: 10.1016/j.comgeo.2011.05.006. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772111000459> (siehe S. 37).
- [BS04] A. Biswas und V. Shapiro. „Approximate distance fields with non-vanishing gradients“. In: *Graphical Models* 66.3 (2004), S. 133–159. ISSN: 1524-0703. DOI: 10.1016/j.gmod.2004.01.003. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1524070304000049> (siehe S. 52).
- [BW01] D. E. Breen und R. T. Whitaker. „A level-set approach for the metamorphosis of solid models“. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 7.2 (2001), S. 173–192. DOI: 10.1109/2945.928169 (siehe S. 32, 140).
- [BWK06] S. Bischoff, T. Weyand und L. Kobbelt. „Snakes on Triangle Meshes“. In: *Bildverarbeitung für die Medizin 2005*. Hrsg. von H.-P. Meinzer, H. Handels, A. Horsch und T. Tolxdoff. Bd. 29. Informatik aktuell. Dordrecht: Springer, 2006, S. 208–212. ISBN: 3-540-25052-2. DOI: 10.1007/3-540-26431-0{\textunderscore}43 (siehe S. 64).
- [CCL+14] A. Capozzoli, C. Curcio, A. Liseno und S. Savarese. „A comparison of fast marching, fast sweeping and fast iterative methods for the solution of the eikonal equation“. In: *Telfor Journal* 6.2 (2014), S. 142–147. ISSN: 1821-3251. DOI: 10.5937/telfor1402142C. URL: <https://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/1821-3251/2014/1821-32511402142C.pdf> (siehe S. 31).
- [CCL09] F. Chazal, D. Cohen-Steiner und A. Lieutier. „Normal cone approximation and offset shape isotopy“. In: *Computational Geometry* 42.6 (2009), S. 566–581. ISSN: 0925-7721. DOI: 10.1016/j.comgeo.2008.12.002. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772108001181> (siehe S. 44 f.).
- [CEL84] M. G. Crandall, L. C. Evans und P.-L. Lions. „Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 282.2 (1984), S. 487. ISSN: 00029947. DOI: 10.1090/S0002-9947-1984-0732102-X (siehe S. 45, 53).
- [CGH18] R. Chen, C. Gotsman und K. Hormann. „Path planning with divergence-based distance functions“. In: *Computer Aided Geometric Design* 66 (2018), S. 52–74. ISSN: 0167-8396. DOI: 10.1016/j.cagd.2018.09.002 (siehe S. 72).
- [CHL+18] L. Chen, P. Hu, M. Luo und K. Tang. „Optimal interface surface determination for multi-axis freeform surface machining with both roughing and finishing“. In: *Chinese Journal of Aeronautics* 31.2 (2018), S. 370–384. ISSN: 1000-9361. DOI: 10.1016/j.cja.2017.07.004. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1000936117301589> (siehe S. 148).
- [CL83] M. G. Crandall und P.-L. Lions. „Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 277.1 (1983), S. 1. ISSN: 00029947. DOI: 10.2307/1999343 (siehe S. 45, 53).

- [CML+16] P. Cheng, C. Miao, Y.-J. Liu, C. Tu und Y. He. „Solving the initial value problem of discrete geodesics“. In: *Computer-Aided Design* 70 (2016), S. 144–152. ISSN: 0010-4485. DOI: [10.1016/j.cad.2015.07.012](https://doi.org/10.1016/j.cad.2015.07.012). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448515001128> (siehe S. 37).
- [CRE01] E. Cohen, R. F. Riesenfeld und G. Elber. *Geometric Modeling with Splines: An Introduction*. Natick, MA: A K Peters, 2001 (siehe S. 102).
- [Cri09] E. Cristiani. „A Fast Marching Method for Hamilton-Jacobi Equations Modeling Monotone Front Propagations“. In: *Journal of Scientific Computing* 39.2 (2009), S. 189–205. DOI: [10.1007/s10915-008-9257-x](https://doi.org/10.1007/s10915-008-9257-x). URL: <https://doi.org/10.1007/s10915-008-9257-x> (siehe S. 31).
- [CXT09] B. W. Clark, H. Xia und P. G. Tucker, Hrsg. *Distance Solutions for Medial Axis Transform: Proceedings of the 18th International Meshing Roundtable*. Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN: 978-3-642-04319-2 (siehe S. 36).
- [CXT15] L. Chen, K. Xu und K. Tang. „Collision-free tool orientation optimization in five-axis machining of bladed disk“. In: *Journal of Computational Design and Engineering* 2.4 (2015), S. 197–205. ISSN: 2288-4300. DOI: [10.1016/j.jcde.2015.06.001](https://doi.org/10.1016/j.jcde.2015.06.001). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2288430015000500> (siehe S. 123).
- [DX10] S. Dhanik und P. Xirouchakis. „Contour parallel milling tool path generation for arbitrary pocket shape using a fast marching method“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 50.9 (2010), S. 1101–1111. ISSN: 0268-3768. DOI: [10.1007/s00170-010-2580-z](https://doi.org/10.1007/s00170-010-2580-z). URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-010-2580-z> (siehe S. 147).
- [DYQ08] H. Du, T. Yoo und H. Qin. „PDE-Based Medial Axis Extraction and Shape Manipulation of Arbitrary Meshes“. In: *Journal of Systems Science and Complexity* 21.4 (2008), S. 609. ISSN: 1559-7067. DOI: [10.1007/s11424-008-9138-2](https://doi.org/10.1007/s11424-008-9138-2). URL: <https://doi.org/10.1007/s11424-008-9138-2> (siehe S. 36).
- [Dzi12] A. v. Dziegielewski. „High precision swept volume approximation with conservative error bounds“. Dissertation. Mainz: Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2012. URL: http://unibibliografie.ub.uni-mainz.de/theses/frontdoor.php?source_opus=3267 (siehe S. 168).
- [EGK17] C. Eck, H. Garcke und P. Knabner. *Mathematische Modellierung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. ISBN: 978-3-662-54334-4. DOI: [10.1007/978-3-662-54335-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-54335-1) (siehe S. 44, 53).
- [ES12] H. Erdim und A. Sullivan. „High Accuracy Computation of Geometric Properties of Cutter Workpiece Intersection using Distance Fields for NC Milling“. In: *Procedia CIRP* 4 (12/2012). DOI: [10.1016/j.procir.2012.10.016](https://doi.org/10.1016/j.procir.2012.10.016) (siehe S. 168).
- [ES13] H. Erdim und A. Sullivan. „Cutter Workpiece Engagement Calculations for Five-axis Milling Using Composite Adaptively Sampled Distance Fields“. In: *Procedia CIRP* 8 (12/2013). DOI: [10.1016/j.procir.2013.06.130](https://doi.org/10.1016/j.procir.2013.06.130) (siehe S. 168).

- [Eva15] L. C. Evans. *Partial differential equations*. Second edition, reprinted with corrections. Bd. Volume 19. Graduate studies in mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2015. ISBN: 9780821849743 (siehe S. 43 f., 51, 53 f.).
- [FB14] J. Fan und A. Ball. „Flat-end cutter orientation on a quadric in five-axis machining“. In: *Computer-Aided Design* 53 (2014), S. 126–138. ISSN: 0010-4485. DOI: 10.1016/j.cad.2014.04.005. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448514000694> (siehe S. 123).
- [FJP+11] Z. Fu, W.-K. Jeong, Y. Pan, R. M. Kirby und R. T. Whitaker. „A Fast Iterative Method for Solving the Eikonal Equation on Triangulated Surfaces“. In: *undefined* (2011) (siehe S. 77).
- [FVV+04] P. Fauchais, A. Vardelle, M. Vardelle und M. Fukumoto. „Knowledge concerning splat formation: An invited review“. In: *Journal of Thermal Spray Technology* 13.3 (2004), S. 337–360. ISSN: 1544-1016. DOI: 10.1361/10599630419670. URL: <https://doi.org/10.1361/10599630419670> (siehe S. 2).
- [GFO18] F. Gibou, R. Fedkiw und S. Osher. „A review of level-set methods and some recent applications“. In: *Journal of Computational Physics* 353 (2018), S. 82–109. ISSN: 0021-9991. DOI: 10.1016/j.jcp.2017.10.006 (siehe S. 33).
- [GI04] J. Goldfeather und V. Interrante. „A Novel Cubic-order Algorithm for Approximating Principal Direction Vectors“. In: *ACM Trans. Graph.* 23.1 (2004), S. 45–63. ISSN: 0730-0301. DOI: 10.1145/966131.966134. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/966131.966134> (siehe S. 61).
- [GK04] P. Giblin und B. B. Kimia. „A Formal Classification of 3D Medial Axis Points and Their Local Geometry“. In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 26.2 (2004), S. 238–251. ISSN: 0162-8828. DOI: 10.1109/TPAMI.2004.1262192 (siehe S. 35).
- [Gol05] R. Goldman. „Curvature formulas for implicit curves and surfaces“. In: *Computer Aided Geometric Design* 22.7 (2005), S. 632–658. ISSN: 0167-8396. DOI: 10.1016/j.cagd.2005.06.005. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839605000737> (siehe S. 170).
- [GVJ+09] A. Gomes, I. Voiculescu, J. Jorge, B. Wyvill und C. Galbraith. *Implicit Curves and Surfaces: Mathematics, Data Structures and Algorithms*. 2009 (siehe S. 62, 98).
- [GW13] M. Gaspar und F. Weichert. „Integrated construction and simulation of tool paths for milling dental crowns and bridges“. In: *Computer-Aided Design* 45.10 (2013), S. 1170–1181. ISSN: 0010-4485. DOI: 10.1016/j.cad.2013.04.007. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448513000675> (siehe S. 17, 123).
- [GWM+10] M. Gaspar, F. Weichert, E. Musemic, H. Müller und P. Walzel. „Two dimensional invasive Analysis of Spraying Processes at Hollow Cone Nozzles“. In: *Transactions on Mass-Data Analysis of Images and Signals with Applications in Medicine, Biotechnology, Chemistry and Food Industry* 2.1 (2010), S. 83–95 (siehe S. 20).

- [GWM09] M. Gaspar, F. Weichert und E. Musemic. „High Resolution Invasive Analysis of Spraying Processes at Hollow Cone Nozzles Using Fiber Sensors“. In: *Transactions on Mass-Data Analysis of Images and Signals with Applications in Medicine, Biotechnology, Chemistry and Food Industry* 1.1 (2009), S. 62–75 (siehe S. 20).
- [GWR12a] M. Gaspar, F. Weichert und D. Reitel. „Die CAM-Herstellung prothetischer Restaurationen: Teil 1“. In: *Internationales Zahntechnik Magazin* 16.9 (2012), S. 493–500 (siehe S. 17).
- [GWR12b] M. Gaspar, F. Weichert und D. Reitel. „Die CAM-Herstellung prothetischer Restaurationen: Teil 2“. In: *Internationales Zahntechnik Magazin* 16.10 (2012), S. 590–599 (siehe S. 17).
- [Heg17] D. Hegels. „Optimierung thermischer Verhältnisse bei der Bahnplanung für das thermische Spritzen mit Industrierobotern“. Dissertation. Dortmund: TU Dortmund, 2017. URL: https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/36053/1/Dissertation_Hegels.pdf (siehe S. 5, 8, 20, 70, 72).
- [HLL+21] D. He, Y. Li, Z. Li und K. Tang. „Geodesic Distance Field-Based Process Planning for Five-Axis Machining of Complicated Parts“. In: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 143.6 (01/2021). ISSN: 1087-1357. DOI: [10.1115/1.4048956](https://doi.org/10.1115/1.4048956). URL: <https://doi.org/10.1115/1.4048956> (siehe S. 148).
- [HNB+06] B. Houston, M. B. Nielson, C. Batty, O. Nilsson und K. Museth. „Hierarchical RLE level set : A compact and versatile deformable surface representation“. In: *ACM Transactions on Graphics* 25.1 (2006), S. 151–175 (siehe S. 33).
- [HT05] S.-R. Hysing und S. Turek. „The Eikonal equation: Numerical efficiency vs. algorithmic complexity on quadrilateral grids“. In: *Proceedings of Algorithm* 35 (2005), S. 22–31 (siehe S. 31).
- [JBS06] M. W. Jones, J. A. Baerentzen und M. Sramek. „3D Distance Fields: A Survey of Techniques and Applications: Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on“. In: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 12.4 (2006), S. 581–599 (siehe S. 37).
- [Joy17] J. Joy. „Efficient and accurate geometric simulation of multi-axis milling operations“. Dissertation. Vancouver: University of British Columbia, 2017. DOI: [10.14288/1.0355696](https://open.library.ubc.ca/media/download/pdf/24/1.0355696/4). URL: <https://open.library.ubc.ca/media/download/pdf/24/1.0355696/4> (siehe S. 166).
- [JW08] W.-K. Jeong und R. T. Whitaker. „A Fast Iterative Method for Eikonal Equations“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 30.5 (2008), S. 2512–2534. DOI: [10.1137/060670298](https://doi.org/10.1137/060670298) (siehe S. 31).
- [Kim07] T. Kim. „Constant cusp height tool paths as geodesic parallels on an abstract Riemannian manifold“. In: *Computer-Aided Design* 39.6 (2007), S. 477–489. ISSN: 0010-4485. URL: [citeulike-article-id:1309313](https://doi.org/10.1016/j.cad.2007.05.009) (siehe S. 77).
- [KM14] A. Kout und H. Müller. „Tool-adaptive offset paths on triangular mesh workpiece surfaces“. In: *Computer-Aided Design* 50 (2014), S. 61–73. ISSN: 0010-4485. DOI: [10.1016/j.cad.2014.01.009](https://doi.org/10.1016/j.cad.2014.01.009). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448514000104> (siehe S. 122).

- [Kou15] A. Kout. „Geometric and algorithmic aspects of automatic path planning with relation to spray deposition processes“. Dissertation. Dortmund: TU Dortmund, 2015. URL: <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34177/1/Dissertation.pdf> (siehe S. 2 f., 5, 11, 70, 72, 77).
- [KS98] R. Kimmel und J. A. Sethian. „Computing geodesic paths on manifolds“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 95.15 (1998), S. 8431–8435. URL: [citeulike-article-id:7349507](https://doi.org/10.1073/pnas.95.15.8431) (siehe S. 38, 77).
- [KVL+04] Y. J. Kim, G. Varadhan, M. C. Lin und D. Manocha. „Fast swept volume approximation of complex polyhedral models“. In: *Computer-Aided Design* 36.11 (2004), S. 1013–1027. ISSN: 0010-4485. DOI: [10.1016/j.cad.2004.01.004](https://doi.org/10.1016/j.cad.2004.01.004). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448504000053> (siehe S. 168).
- [KWT88] M. Kass, A. Witkin und D. Terzopoulos. „Snakes: Active Contour Models“. In: *International Journal of Computer Vision* 1.4 (1988), S. 321–331. ISSN: 09205691. URL: <http://citeseer.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.124.5318> (siehe S. 63, 117).
- [Lan09] S. Lankton. „Localized Statistical Models in Computer Vision“. Diss. Georgia Institute of Technology, 2009 (siehe S. 32).
- [Ley87] M. Leyton. „Symmetry-curvature duality“. In: *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 38.3 (1987), S. 327–341. ISSN: 0734-189X. DOI: [10.1016/0734-189X\(87\)90117-4](https://doi.org/10.1016/0734-189X(87)90117-4). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734189X87901174> (siehe S. 35).
- [LFS+15] Z. Lin, J. Fu, H. Shen und X. Yao. „Smooth contour-parallel tool path generation for high-speed machining through a dual offset procedure“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 81.5 (2015), S. 1233–1245. ISSN: 0268-3768. DOI: [10.1007/s00170-015-7275-z](https://doi.org/10.1007/s00170-015-7275-z). URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-015-7275-z> (siehe S. 147).
- [LFS+16] Z. Lin, J. Fu, H. Shen, X. Yao und G. Xu. „Generating HSM-adapted pocketing tool path by region subdivision“. In: *International Journal of Computer Integrated Manufacturing* 29.5 (2016), S. 581–590. ISSN: 0951-192X. DOI: [10.1080/0951192X.2015.1067923](https://doi.org/10.1080/0951192X.2015.1067923) (siehe S. 148).
- [LGR+14] K. Lawonn, R. Gasteiger, C. Rössl und B. Preim. „Adaptive and robust curve smoothing on surface meshes“. In: *Computers & Graphics* 40 (2014), S. 22–35. ISSN: 0097-8493. DOI: [10.1016/j.cag.2014.01.004](https://doi.org/10.1016/j.cag.2014.01.004) (siehe S. 64).
- [LLG15] Y. Li, C.-H. Lee und J. Gao. „From computer-aided to intelligent machining: Recent advances in computer numerical control machining research“. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture* 229.7 (2015), S. 1087–1103. ISSN: 0954-4054. DOI: [10.1177/09544405414560622](https://doi.org/10.1177/09544405414560622) (siehe S. 71).
- [LN11a] S. W. Lee und A. Nestler. „Complete swept volume generation — Part II: NC simulation of self-penetration via comprehensive analysis of envelope profiles“. In: *Computer-Aided Design* 43.4 (2011), S. 442–456. ISSN: 0010-4485. DOI: [10.1016/j.cad.2010.12.012](https://doi.org/10.1016/j.cad.2010.12.012). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448510002459> (siehe S. 168).

- [LN11b] S. W. Lee und A. Nestler. „Complete swept volume generation, Part I: Swept volume of a piecewise C1-continuous cutter at five-axis milling via Gauss map“. In: *Computer-Aided Design* 43.4 (2011), S. 427–441. ISSN: 0010-4485. DOI: 10.1016/j.cad.2010.12.010. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448510002435> (siehe S. 168).
- [LXG10] A. Lasemi, D. Xue und P. Gu. „Recent development in CNC machining of freeform surfaces: A state-of-the-art review“. In: *Computer-Aided Design* 42.7 (2010), S. 641–654. ISSN: 0010-4485. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448510000631> (siehe S. 71).
- [LYL15] S. E. Layegh K., I. E. Yigit und I. Lazoglu. „Analysis of tool orientation for 5-axis ball-end milling of flexible parts“. In: *CIRP Annals* 64.1 (2015), S. 97–100. ISSN: 0007-8506. DOI: 10.1016/j.cirp.2015.04.067. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000785061500075X> (siehe S. 72).
- [LZL+11] L. L. Li, Y. F. Zhang, H. Y. Li und L. Geng. „Generating tool-path with smooth posture change for five-axis sculptured surface machining based on cutter’s accessibility map“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 53.5 (2011), S. 699–709. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-010-2849-2. URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-010-2849-2> (siehe S. 123).
- [LZL+18] X. Luan, S. Zhang, J. Li, G. Li, J. Chen und G. Mendis. „Comprehensive effects of tool paths on energy consumption, machining efficiency, and surface integrity in the milling of alloy cast Iron“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 98.5 (2018), S. 1847–1860. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-018-2269-2. URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-018-2269-2> (siehe S. 73).
- [MA07] S. S. Makhanov und W. Anotaipaiboon. *Advanced Numerical Methods to Optimize Cutting Operations of Five-Axis Milling Machines*. Springer Series in Advanced Manufacturing. Berlin und Heidelberg: Springer, 2007. ISBN: 9783540711209. DOI: 10.1007/978-3-540-71121-6. URL: <http://deposit.d-nb.de/cgi-bin/dokserv?idn=985510838> (siehe S. 147).
- [MBI20] N. Morris, A. Butscher und F. Iorio. „A subtractive manufacturing constraint for level set topology optimization“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 61.4 (02/2020), S. 1573–1588. ISSN: 1615-1488. DOI: 10.1007/s00158-019-02436-y. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-019-02436-y> (siehe S. 72).
- [MBM16] S. Moodleah, E. J. Bohez und S. S. Makhanov. „Five-axis machining of STL surfaces by adaptive curvilinear toolpaths“. In: *International Journal of Production Research* 54.24 (2016), S. 7296–7329. ISSN: 0020-7543. DOI: 10.1080/00207543.2016.1176265 (siehe S. 122).
- [MG07] C. Min und F. Gibou. „A second order accurate level set method on non-graded adaptive cartesian grids“. In: *Journal of Computational Physics* 225.1 (2007), S. 300–321. ISSN: 0021-9991. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.11.034 (siehe S. 33).

- [MHK+09] T. Miyazaki, Y. Hotta, J. Kunii, S. Kuriyama und Y. Tamaki. „A review of dental CAD/CAM: current status and future perspectives from 20 years of experience“. In: *Dental materials journal* 28.1 (2009), S. 44–56. ISSN: 0287-4547. DOI: [10.4012/dmj.28.44](https://doi.org/10.4012/dmj.28.44) (siehe S. 72).
- [MS90] R. R. Martin und P. C. Stephenson. „Sweeping of three-dimensional objects“. In: *Computer-Aided Design* 22.4 (1990), S. 223–234. ISSN: 0010-4485. DOI: [10.1016/0010-4485\(90\)90051-D](https://doi.org/10.1016/0010-4485(90)90051-D). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001044859090051D> (siehe S. 153).
- [NM06] M. B. Nielsen und K. Museth. „Dynamic Tubular Grid: An Efficient Data Structure and Algorithms for High Resolution Level Sets“. In: *Journal of Scientific Computing* 26.3 (2006), S. 261–299. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1132033.1132035> (siehe S. 33).
- [OF02] S. Osher und R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 2002. ISBN: 9780387954820. URL: [citeulike-article-id:1576610](https://doi.org/10.1007/978-0-387-95482-0) (siehe S. 32, 54).
- [OS88] S. Osher und J. A. Sethian. „Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations“. In: *Journal of Computational Physics* 79.1 (1988), S. 12–49. ISSN: 0021-9991. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90002-2) (siehe S. 32).
- [OTB09] E. Ozturk, L. T. Tunc und E. Budak. „Investigation of lead and tilt angle effects in 5-axis ball-end milling processes“. In: *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 49.14 (2009), S. 1053–1062. ISSN: 0890-6955. DOI: [10.1016/j.ijmachtools.2009.07.013](https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2009.07.013). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0890695509001497> (siehe S. 72).
- [PS06] K. Polthier und M. Schmieß. „Straightest geodesics on polyhedral surfaces“. In: *ACM SIGGRAPH 2006 Educators program*. Hrsg. von J. Finnegan. New York, NY: ACM, 2006, S. 30. ISBN: 1595933646. DOI: [10.1145/1185657.1185664](https://doi.org/10.1145/1185657.1185664) (siehe S. 37).
- [QSS02] A. Quarteroni, R. Sacco und F. Saleri. *Numerische Mathematik 2*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 978-3-540-43616-4. DOI: [10.1007/978-3-642-56191-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-56191-7) (siehe S. 52).
- [QZZ07] J. Qian, Y.-T. Zhang und H.-K. Zhao. „Fast Sweeping Methods for Eikonal Equations on Triangular Meshes“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 45.1 (2007), S. 83–107. DOI: [10.1137/050627083](https://doi.org/10.1137/050627083) (siehe S. 77).
- [Rad06] S. P. Radzevich. „A closed-form solution to the problem of optimal tool-path generation for sculptured surface machining on multi-axis NC machine“. In: *Mathematical and Computer Modelling* 43.3 (2006), S. 222–243. ISSN: 0895-7177. DOI: [10.1016/j.mcm.2004.08.014](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2004.08.014). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0895717705004425> (siehe S. 72).
- [RCJ18] J. M. Rodríguez, J. M. Carbonell und P. Jonsén. „Numerical Methods for the Modelling of Chip Formation“. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* (2018). ISSN: 1886-1784. DOI: [10.1007/s11831-018-09313-9](https://doi.org/10.1007/s11831-018-09313-9). URL: <https://doi.org/10.1007/s11831-018-09313-9> (siehe S. 168).
- [Sam90] H. Samet. *The Design and Analysis of Spatial Data Structures*. USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1990. ISBN: 0-201-50255-8 (siehe S. 23).

- [Sch17] A. Schmulbach. „Constrained basierte kombinatorische Optimierung dentaler Fräsbahnen“. Bachelor-Arbeit. Magisterarb. 2017 (siehe S. 146).
- [SEP+12] A. Sullivan, H. Erdim, R. N. Perry und S. F. Frisken. „High accuracy NC milling simulation using composite adaptively sampled distance fields“. In: *Computer-Aided Design* 44.6 (2012), S. 522–536. ISSN: 0010-4485. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448512000255> (siehe S. 168).
- [Set85] J. A. Sethian. „Curvature and the evolution of fronts“. In: *Communications in Mathematical Physics* 101.4 (1985), S. 487–499. ISSN: 1432-0916. DOI: 10.1007/BF01210742. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01210742> (siehe S. 42).
- [Set96] J. A. Sethian. „A fast marching level set method for monotonically advancing fronts“. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 93 (1996), S. 1591–1595 (siehe S. 31).
- [Set99a] J. A. Sethian. „Fast Marching Methods“. In: *SIAM Review* 41.2 (1999), S. 199–235. ISSN: 0036-1445. DOI: 10.1137/S0036144598347059 (siehe S. 31).
- [Set99b] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, 1999. ISBN: 0521645573. URL: [citeulike-article-id:1576609](https://doi.org/10.1017/S0010448512000255) (siehe S. 37, 43, 45).
- [SFC+10] H. Shen, J. Fu, Z. Chen und Y. Fan. „Generation of offset surface for tool path in NC machining through level set methods“. In: *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 46.9 (2010), S. 1043–1047. DOI: 10.1007/s00170-009-2164-y (siehe S. 122).
- [SSK+05] V. Surazhsky, T. Surazhsky, D. Kirsanov, S. J. Gortler und H. Hoppe. „Fast exact and approximate geodesics on meshes“. In: *ACM Transactions on Graphics* 24.3 (2005), S. 553–560 (siehe S. 37, 76).
- [SV03] J. A. Sethian und A. Vladimirsky. „Ordered Upwind Methods for Static Hamilton–Jacobi Equations: Theory and Algorithms“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 41.1 (2003), S. 325–363. DOI: 10.1137/S0036142901392742 (siehe S. 31, 50).
- [SXJ+16] Y. Sun, J. Xu, C. Jin und D. Guo. „Smooth tool path generation for 5-axis machining of triangular mesh surface with nonzero genus“. In: *Computer-Aided Design* 79 (2016), S. 60–74. ISSN: 0010-4485. DOI: 10.1016/j.cad.2016.06.001. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448516300501> (siehe S. 147).
- [TDS+16] A. Tagliasacchi, T. Delame, M. Spagnuolo, N. Amenta und A. Telea. „3D Skeletons: A State-of-the-Art Report“. In: *Computer Graphics Forum* 35.2 (2016), S. 573–597. DOI: 10.1111/cgf.12865. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/cgf.12865> (siehe S. 36).
- [TSZ+18] W. Tillmann, C. Schaak, J. Zajackowski, H. Müller, D. Hegels, M. Gaspar, B. Kuhlenkötter und D. Störkle. „Investigation into the properties of HVOF-sprayed WC-Co coatings on plane and complex surfaces, manufactured with an evolution-based path planning method“. In: *Thermal Spray Bulletin* 70.2 (2018), S. 95–102 (siehe S. 20).

- [TSZ+19] W. Tillmann, C. Schaak, J. Zajaczkowski, H. Müller, D. Hegels, M. Gaspar, B. Kuhlenkötter und D. D. Störkle. „Investigation of a procedure for the simulation-based optimisation of robot paths for thermal spraying“. In: *Thermal Spray Bulletin* 12 (2019), S. 89–97 (siehe S. 20).
- [VSP08] M. Viergever, K. Siddiqi und S. M. Pizer. *Medial Representations*. Bd. 37. Dordrecht: Springer Netherlands, 2008. ISBN: 978-1-4020-8657-1. DOI: 10.1007/978-1-4020-8658-8 (siehe S. 36, 88).
- [WH16] J. Weinbub und A. Hössinger. „Comparison of the Parallel Fast Marching Method, the Fast Iterative Method, and the Parallel Semi-ordered Fast Iterative Method“. In: *Procedia Computer Science* 80 (2016), S. 2271–2275. ISSN: 1877-0509. DOI: 10.1016/j.procs.2016.05.408 (siehe S. 31).
- [Whi98] R. T. Whitaker. „A Level-Set Approach to 3D Reconstruction from Range Data“. In: *Int. J. Comput. Vision* 29.3 (1998), S. 203–231. ISSN: 0920-5691. URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=299660.299682> (siehe S. 32).
- [Wie15] T. Wiederkehr. „Effiziente, GPU-basierte Simulation thermischer Spritzprozesse“. Dissertation. Dortmund: TU Dortmund, 2015 (siehe S. 8).
- [WL16] T. Wong und S. Leung. „A Fast Sweeping Method for Eikonal Equations on Implicit Surfaces“. In: *Journal of Scientific Computing* 67.3 (2016), S. 837–859. DOI: 10.1007/s10915-015-0105-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s10915-015-0105-5> (siehe S. 38, 170).
- [XGS+19] J. Xu, Z. Geng, Y. Sun und L. Li. „Generating gouge-free tool paths for ball-end cutter CNC milling of cloud of point by projecting guide curves“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 102.5 (2019), S. 1193–1204. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-018-2973-y. URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-018-2973-y> (siehe S. 123).
- [XL19a] K. Xu und Y. Li. „Digital image approach to tool path generation for surface machining“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 101.9 (2019), S. 2547–2558. ISSN: 0268-3768. DOI: 10.1007/s00170-018-3118-z. URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-018-3118-z> (siehe S. 73).
- [XL19b] K. Xu und Y. Li. „Region based five-axis tool path generation for freeform surface machining via image representation“. In: *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 57 (2019), S. 230–240. ISSN: 0736-5845. DOI: 10.1016/j.rcim.2018.12.006 (siehe S. 73).
- [XSZ15] J. Xu, Y. Sun und L. Zhang. „A mapping-based approach to eliminating self-intersection of offset paths on mesh surfaces for CNC machining“. In: *Computer-Aided Design* 62 (2015), S. 131–142. ISSN: 0010-4485. DOI: 10.1016/j.cad.2014.11.010. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448514002814> (siehe S. 123).
- [XT11] H. Xia und P. G. Tucker. „Fast equal and biased distance fields for medial axis transform with meshing in mind“. In: *Applied Mathematical Modelling* 35.12 (2011), S. 5804–5819. ISSN: 0307-904X. DOI: 10.1016/j.apm.2011.05.001. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X11002952> (siehe S. 36).

- [YBS05] S. Yoshizawa, A. Belyaev und H.-P. Seidel. „Fast and Robust Detection of Crest Lines on Meshes“. In: *Proceedings of the 2005 ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*. SPM '05. New York, NY, USA: ACM, 2005, S. 227–232. ISBN: 1-59593-015-9. DOI: [10.1145/1060244.1060270](https://doi.org/10.1145/1060244.1060270). URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1060244.1060270> (siehe S. 61).
- [YL90] A. Yuille und M. Leyton. „3D symmetry-curvature duality theorems“. In: *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 52.1 (1990), S. 124–140. ISSN: 0734-189X. DOI: [10.1016/0734-189X\(90\)90126-G](https://doi.org/10.1016/0734-189X(90)90126-G). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0734189X9090126G> (siehe S. 35).
- [YLJ18] Y. Yan, D. Letscher und T. Ju. „Voxel cores: efficient, robust, and provably good approximation of 3D medial axes“. In: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 37.4 (2018), S. 44. ISSN: 0730-0301. DOI: [10.1145/3197517.3201396](https://doi.org/10.1145/3197517.3201396). URL: http://dl.acm.org/ft_gateway.cfm?id=3201396&type=pdf (siehe S. 36).
- [ZCP09] X. Zhang, W. Che und J.-C. Paul. „Computing lines of curvature for implicit surfaces“. In: *Computer Aided Geometric Design* 26.9 (2009), S. 923–940. ISSN: 0167-8396. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2009.07.004>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839609000752> (siehe S. 170).
- [ZCY15] Y. Zhou, Z. C. Chen und X. Yang. „An accurate, efficient envelope approach to modeling the geometric deviation of the machined surface for a specific five-axis CNC machine tool“. In: *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 95 (2015), S. 67–77. ISSN: 0890-6955. DOI: [10.1016/j.ijmachtools.2015.05.005](https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2015.05.005). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0890695515300432> (siehe S. 168).
- [Zha04] H. Zhao. „A fast sweeping method for Eikonal equations“. In: *Mathematics of Computation* 74.250 (2004), S. 603–628. ISSN: 0025-5718. DOI: [10.1090/S0025-5718-04-01678-3](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-04-01678-3) (siehe S. 31).
- [ZHT15] R. Zhang, P. HU und K. Tang. „Five-axis finishing tool path generation for a mesh blade based on linear morphing cone“. In: *Journal of Computational Design and Engineering* 2.4 (2015), S. 268–275. ISSN: 2288-4300. DOI: [10.1016/j.jcde.2015.06.013](https://doi.org/10.1016/j.jcde.2015.06.013). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2288430015000627> (siehe S. 122).
- [ZLF18] Z. Zhai, Z. Lin und J. Fu. „HSM toolpath generation with capsule-based region subdivision“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 97.1 (2018), S. 1407–1419. ISSN: 0268-3768. DOI: [10.1007/s00170-018-2035-5](https://doi.org/10.1007/s00170-018-2035-5). URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-018-2035-5> (siehe S. 148).
- [ZT16] K. Zhang und K. Tang. „Optimal five-axis tool path generation algorithm based on double scalar fields for freeform surfaces“. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 83.9 (2016), S. 1503–1514. ISSN: 0268-3768. DOI: [10.1007/s00170-015-7646-5](https://doi.org/10.1007/s00170-015-7646-5). URL: <https://doi.org/10.1007/s00170-015-7646-5> (siehe S. 122).

- [ZTX+19] X. Zou, H.-Y. Tam, H.-Y. Xu und K. Shi. „Flat-end tool orientation based on rotation-minimizing frame“. In: *Advances in Manufacturing* 7.3 (2019), S. 257–269. ISSN: 2195-3597. DOI: [10.1007/s40436-019-00271-4](https://doi.org/10.1007/s40436-019-00271-4). URL: <https://doi.org/10.1007/s40436-019-00271-4> (siehe S. 72).
- [ZXD10] C. Zhuang, Z. Xiong und H. Ding. „High speed machining tool path generation for pockets using level sets“. In: *International Journal of Production Research* 48.19 (2010), S. 5749–5766. ISSN: 0020-7543. DOI: [10.1080/00207540903232771](https://doi.org/10.1080/00207540903232771) (siehe S. 147).
- [ZZ13] Q. Zou und J. Zhao. „Iso-parametric tool-path planning for point clouds“. In: *Computer-Aided Design* 45.11 (2013), S. 1459–1468. ISSN: 0010-4485. DOI: [10.1016/j.cad.2013.07.001](https://doi.org/10.1016/j.cad.2013.07.001) (siehe S. 123).
- [ZZD+14] Q. Zou, J. Zhang, B. Deng und J. Zhao. „Iso-level tool path planning for free-form surfaces“. In: *Computer-Aided Design* 53 (2014), S. 117–125. ISSN: 0010-4485. DOI: [10.1016/j.cad.2014.04.006](https://doi.org/10.1016/j.cad.2014.04.006). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448514000700> (siehe S. 72, 121).

