

Julia Marie STECHEMESSER, Essen

Geometrische Beweisprozesse von Lehramtsstudierenden bei der Arbeit mit interaktiven Büchern

Das formale Beweisen nimmt an der Hochschule einen besonders wichtigen Stellenwert ein und stellt gleichzeitig für Lehramtsstudierende häufig eine Herausforderung dar (Biehler & Kempen, 2015). Gerade mit Bezug auf fach-mathematische Studiengänge wird seit vielen Jahren über Konzepte zur Unterstützung von Studierenden beim Beweisen diskutiert (Grieser, 2017 u.v.m.). Ein mögliches Konzept ist der Einsatz digitaler Medien und im Zuge dessen die Entwicklung von Aufgaben, die Studierenden dabei helfen, Hürden im Beweisprozess zu überwinden (Zimmermann & Bescherer, 2013). Dieser Beitrag thematisiert eine Studie, die sich mit der Bearbeitung Moodle-basierter interaktiver Bücher befasst und bei der u. a. die Fragestellung *Welchen Einfluss haben interaktive Bücher auf Beweisprozesse Lehramtsstudierender?* adressiert wird. In diesem Beitrag liegt der inhaltliche Fokus auf dem Beweis des Innenwinkelsummensatzes im Dreieck.

Theoretischer Hintergrund

Mathematische Beweise lassen sich nach Wittmann und Müller (1988) in experimentelle, inhaltlich-anschauliche und formal-deduktive Beweise klassifizieren. Während bei experimentellen Beweisen ausgehend von einzelnen Beispielen ein Sachverhalt geprüft wird, kann beim inhaltlich-anschaulichen Beweisen auf der Grundlage von Operationen eine verallgemeinerbare Begründung intuitiv erkannt werden. Der formal-deduktive Beweis besteht aus einer logischen Beweiskette und der Verwendung formaler Sprache.

Für die Analyse von Beweisprozessen lassen sich mehrere Beweisprozessmodelle (z. B. Boero, 1999; Stein, 1988) unterscheiden. Darauf aufbauend hat Kirsten (2021) für die Zwecke der Hochschullehre ein Beweisprozessmodell entwickelt, welches in der zugrundeliegenden Studie als Rahmentheorie verwendet wird. Das Modell umfasst fünf verschiedene Phasen innerhalb von Beweisprozessen: *Verstehen*, *Argumente Identifizieren*, *Argumente Strukturieren*, *Formulieren* und *Validieren*. In der Phase des Verstehens setzen sich Studierende mit der Aufgabenstellung auseinander und stellen u. a. erste Zusammenhänge her, die in der Phase des Argumente Identifizierens zur Bildung von Argumenten verwendet werden. Die Argumente werden daraufhin beim Strukturieren in eine formal-logische Reihenfolge gebracht und in der Phase des Formulierens verschriftlicht. In der Phase des Validierens bewerten die Studierenden ihre Beweise und auch einzelne Zwischenschritte, weswegen diese Phase den Beweisprozess begleitet. Empirische Be-

funde (u. a. Kirsten, 2021) weisen darauf hin, dass der studentische Beweisprozess tendenziell linear verläuft und Phasenwechsel zwischen benachbarten Phasen ablaufen.

Interaktive Bücher

Interaktive Bücher sind digitale, aus mehreren Seiten bestehende Bücher, konzipiert mithilfe der Software H5P. An der Universität Duisburg-Essen (UDE) wurden u. a. für die Veranstaltung Elementare Geometrie für das Lehramt an Grundschulen interaktive Bücher als Vorlesungsinhalte entwickelt und eingesetzt. Die Entwicklung der interaktiven Bücher ist in das Projekt DigiMal.nrw eingebettet, gefördert vom Ministerium für Kultur und Wissenschaft des Landes NRW und der digitalen Hochschule NRW. Die Zielsetzung des Projekts besteht in der Entwicklung und Erforschung digitaler Lehr- und Lernmaterialien für die Hochschullehre. Im Folgenden soll der Aufbau einer interaktiven Buchseite, bei der es um den Beweis des Innenwinkelsummensatzes im Dreieck geht, erläutert werden. Der Aufbau zeichnet sich durch eine Entwicklung von offenen Hinweisen hin zu geschlossenen, auf die Beweisidee zugespitzten Tipps und Hilfestellungen aus. Zu Beginn und am Ende der Buchseite gibt es ein Einführungs- bzw. Auflösungs-video. Nach dem ersten Video werden die Studierenden aufgefordert, den Innenwinkelsummensatz zu begründen. Durch diese offene Aufgabenstellung wird – anknüpfend an Wittmann und Müller (1988) – Raum für erste experimentelle Beweise gegeben. Durch eine Abfolge von verschiedenen in das Buch integrierten GeoGebra-Fenstern, Tipps, Videos und weiteren Aufgabenstellungen werden die Studierenden zu einem inhaltlich-anschaulichen Beweis angeregt. In einer letzten Aufgabe wird durch Tipps im GeoGebra-Fenster auf Winkelbeziehungen hingewiesen, die für den Aufbau einer formal-deduktiven Beweiskette relevant sind (Abb. 1).

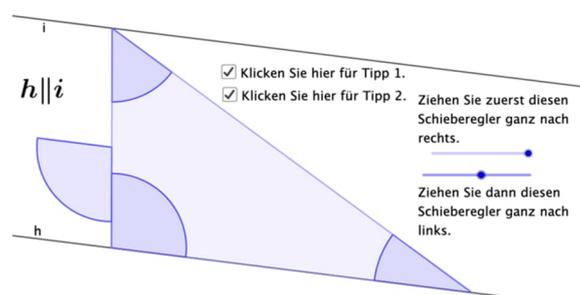


Abb. 1: GeoGebra-Fenster im interaktiven Buch

Methoden

Im Zuge der Studie wurden mit 14 Studierenden des Grundschullehramts der UDE u. a. im Rahmen der Veranstaltung Elementare Geometrie Einzelinterviews durchgeführt. Während der Interviews bearbeiteten die Studierenden

mehrere Buchseiten, die Begründungs- und Beweisanlässe boten und verbalisierten dabei ihre Gedankengänge. Für die Analyse dieser Beweisprozesse zum Innenwinkelsummensatz wurden die einzelnen Beweisphasen, die bei Kirsten (2021) identifiziert wurden, als deduktive Kategorien verwendet. Die Beweisphasen werden in einem Verlaufsmodell dargestellt, in dem zusätzlich die Nutzung der Buchelemente einbezogen wird. Dadurch kann der Beweisprozess mit den Buchelementen auf struktureller Ebene in Verbindung gebracht werden, sodass eine Aussage über den Einfluss der interaktiven Bücher auf die Beweise und Beweisprozesse getroffen werden kann.

Ergebnisse und Ausblick

Die folgende Abbildung stellt den Phasenverlauf einer Studierenden unter Einbezug der Nutzung der Buchelemente dar.

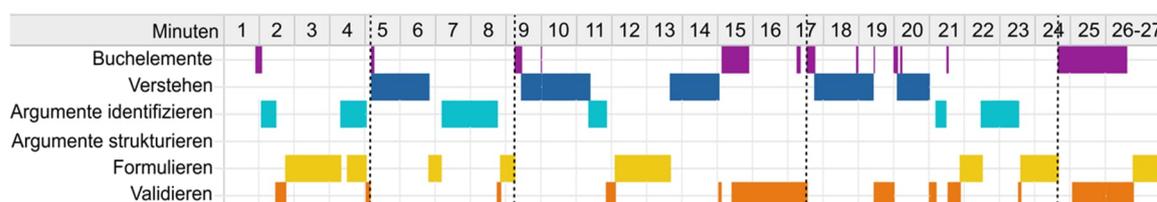


Abb. 2: Beweisprozess einer Studierenden

In der Analyse wird deutlich, dass die Studierende bei der Nutzung der Buchelemente mehrmals zu einem neuen Beweis ansetzt (in Abb. 2 durch gestrichelte, vertikale Linien dargestellt). Da zu Beginn eines neuen Ansatzes ein Buchelement steht, lässt sich erkennen, dass die Impulse des interaktiven Buchs die Studierende zu neuen Beweisansätzen motiviert. Diese Beweisansätze lassen sich gemäß Wittmann und Müller (1988) klassifizieren: Am Anfang des Beweisprozesses lässt sich ein experimenteller Beweis erkennen, da die Studierende zu Beginn aufgrund der Innenwinkelsumme im Quadrat einen Analogieschluss zur Innenwinkelsumme im Dreieck herstellt. Unter kontinuierlicher Hinzunahme der Buchelemente konnte sie inhaltlich anschaulich begründen, dass die Ecken eines Dreiecks aneinandergelegt 180° ergeben. Auf dieser Grundlage hat sie eine Beweisidee für einen formal-deduktiven Beweis entwickelt, in dem sie Entdeckungen im letzten GeoGebra-Fenster der Buchseite (Abb. 1) einbezieht. Im Verlauf der Bearbeitung der Buchseite gelingt es der Studierenden nicht, eine vollständige formal-deduktive Beweiskette aufzubauen. Die Beweisphasen verlaufen an mehreren Stellen im Beweisprozess linear, da die Reihenfolge der Phasen Verstehen, Argumente Identifizieren und Formulieren meist eingehalten wird (Abb. 2). Auffällig ist, dass die Studierende die Phase des Strukturierens überspringt. Zusätzlich lässt sich anhand des folgenden Transkriptausschnitts erkennen, dass die Nutzung der Buchelemente Verstehensphasen anstößt, in denen sie für den Beweis wichtige Zusammenhänge entdeckt.

- C [klickt auf Tipp 2] Ziehen Sie zuerst diesen Schieberegler ganz nach rechts. [zieht an dem Schieberegler] Oh! Ein Scheitelwinkel. [zieht an dem zweiten Schieberegler] Ah okay! Scheitelwinkel Stufenwinkel. [bewegt den zweiten Schieberegler mehrmals hin und her] Das heißt/ Das heißt der Winkel bei h in dem Dreieck ist genauso groß wie der Winkel ja von von i außerhalb des Dreiecks. Ok.

Im obigen Transkriptausschnitt wird deutlich, dass die Studierende Scheitelwinkel und Stufenwinkel erkennt und auf dieser Grundlage auf die Größen­gleichheit der Winkel schließt. Dieser Zusammenhang wurde in der Ver­stehensphase entdeckt und in der folgenden Phase des Argumente Identifizierens wieder aufgegriffen und zur Stützung ihres Arguments verwendet.

Die Analysen dieser und weiterer Bearbeitungen zeigen, dass die interaktiven Buchelemente Einfluss auf die Beweisverläufe der Studierenden nehmen, da sie bei der Bearbeitung der Buchseiten mehrere Beweisansätze, die experimentell, inhaltlich-anschaulich und formal-deduktiv sind, entwickeln. Darüber hinaus zeigen die ersten Ergebnisse, dass sich die Studierenden in Verstehensphasen tiefgreifend mit der dem Buch inhärenten Mathematik auseinandersetzen und mathematische Zusammenhänge herstellen.

Literatur

- Biehler, R. & Kempen, L. (2015). Entdecken und Beweisen als Teil der Einführung in die Kultur der Mathematik für Lehramtsstudierende. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch, & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten: Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 121–135). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-06727-4_8
- Boero, P. (1999). *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education*. <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html>
- Grieser, D. (2017). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-14765-5>
- Kirsten, K. (2021). *Beweisprozesse von Studierenden: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung zu Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-32242-7>
- Stein, M. (1988). Beweisfähigkeiten und Beweisvorstellungen von 11–13 jährigen Schülern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 9(1), 31–53.
<https://doi.org/10.1007/BF03339284>
- Wittmann, E. C. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (S. 237–257). Cornelsen.
- Zimmermann, M. & Bescherer, C. (2013). Repräsentationen „on demand“ bei mathematischen Beweisen in der Hochschule. In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen: Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule* (S. 241–252). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-01038-6_19