

Kinga SZÚCS, Erfurt

Zur Beweisakzeptanz von Lehramtsstudierenden im schulmathematischen Kontext

Obwohl Beweisen in der Fachwissenschaft Mathematik ein hoher Stellenwert beigemessen wird, werden Beweise in der Schule aktuell kaum thematisiert (Brunner, 2014). Um dieser Diskrepanz langfristig entgegenzuwirken, braucht es Lehrkräfte, die selbst über ausreichendes fachliches und fachdidaktisches Wissen und Können mit Bezug zu Beweisen verfügen. In diesem Sinne wird in der vorliegenden Arbeit bei Lehramtsstudierenden gegen Ende ihrer Ausbildung untersucht, über welches schulrelevante Wissen sie mit Bezug zu Beweisen verfügen.

Theoretischer Hintergrund

Während in der Mathematik als Fachwissenschaft unter einem Beweis die deduktive und formale Herleitung einer Aussage verstanden wird, bei der einerseits die Regeln der Logik beachtet werden, andererseits nur auf Axiome, Definitionen sowie bereits bewiesene Sätze zurückgegriffen werden darf; kann und soll hiervon in der Schulmathematik unter anderem bei den formalen Ansprüchen an die Abfassung eines Beweises abgewichen werden (Ufer et al., 2009). Es ist auch bekannt, dass für das erfolgreiche selbstständige Führen von Beweisen sowie für die erfolgreiche Beurteilung der Gültigkeit von mathematischen Beweisprodukten drei Wissenskomponenten unerlässlich sind (Heinze & Reiss, 2003), und zwar Wissen darüber, dass:

- ein Beweis eine Kette deduktiver Schlüsse ist (*Beweisschema*). Vor allem bedeutet dies, dass empirisch-induktive Begründungen oder weitere Arten des Begründens nicht als Beweis gelten. Der Fokus liegt auf der Korrektheit der Schlüsse, nicht aber auf der formalen Abfassung derselben.
- ein Beweis von der Voraussetzung zur Behauptung führt (*Beweisstruktur*). Insbesondere ist nicht erlaubt, die Behauptung als Argument zu verwenden, Zirkelschlüsse sind somit unzulässig.
- in einem Beweis jede Aussage – eventuell unter Zuhilfenahme weiteren, bereits gesicherten Wissens – aus der vorherigen Aussage folgt (*Beweiskette*). Es entsteht eine lückenlose, logische Kette der Beweisschritte.

Bisherige Befunde zur Beweisakzeptanz bei Lehramtsstudierenden

In mehreren Studien (z. B. Kempen, 2016; Füllgrabe & Eichler, 2017; Reid & Knipping, 2010) wurde deutlich, dass Lehramtsstudierende formal verfasste Argumentationen eher als Beweise akzeptieren als korrekte, aber beispielgebundene, narrative Beweisprodukte. Zudem fanden Füllgrabe und

Eichler (2017) heraus, dass Lehramtsstudierende zwar über ein Wissen über die Beweisstruktur verfügen, die Erfüllung dieses Kriteriums aber nur auf einer oberflächlichen Ebene – z. B. durch die Nennung von „q.e.d.“ – einfordern. In einer Fallstudie von Szűcs (2021) mit kleiner Stichprobenzahl wurde dahingegen ermittelt, dass – bei einer expliziten Betonung des schulischen Kontextes – Lehramtsstudierende das Kriterium des Formalismus kaum anwenden. Die Daten legten überdies nahe, dass die Testpersonen nicht nur über die oben genannten Wissenskomponenten verfügten, sondern diese bei der Beurteilung von Beweisprodukten hierarchisch verwendeten.

Forschungsfragen

Die vorliegende Studie versteht sich als Wiederholung der Fallstudie von Szűcs (2021) mit einer größeren Stichprobe und fokussiert folgende Fragen: (1) Inwieweit akzeptieren Lehramtsstudierende die Abweichung von einem wissenschaftlichen Beweis bezüglich des Formalismus bei Beweisprodukten in einem explizit schulischen Kontext? (2) Beurteilen Lehramtsstudierende vorgelegte Beweisprodukte entlang den oben genannten Wissenskomponenten oder wenden sie oberflächliche Kriterien an? (3) Werden die Kriterien einander neben- oder übergeordnet angewandt?

Forschungsdesign

Die Studie wurde – ähnlich zur Fallstudie in Szűcs (2021) – in starker Anlehnung an die Arbeit von Ufer et al. (2009) konzipiert. Die in jener Arbeit veröffentlichten vier fiktiven Schülerlösungen wurden den Teilnehmenden vorgelegt und Letztere wurden aufgefordert, zu entscheiden, ob das jeweilige Beweisprodukt einen Beweis darstellt. Bei ablehnender Antwort wurde auch um eine Begründung gebeten. Die erste, narrativ verfasste Schülerlösung basiert auf empirischen Argumenten (Messen) und geht induktiv vor; sie ist somit fehlerhaft im Beweisschema. Die zweite Schülerlösung ist zwar formal verfasst, sie enthält aber einen Zirkelschluss und ist daher fehlerhaft in der Beweisstruktur. Die dritte und die vierte Schülerlösung sind korrekte Beweise, wobei Erstere eher formal, Letztere eher narrativ formuliert ist.

Durchführung und Kodierung

Die Studie wurde an der Universität Erfurt sowie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena im November 2021 und April 2022 in Präsenz durchgeführt. Insgesamt nahmen 25 Studierende freiwillig an der Studie teil, ihre Fragebögen wurden vor der Auswertung anonymisiert. Es liegen 45 textuelle Begründungen vor, die qualitativ ausgewertet wurden. Überdies wurde bei

jeder Schülerlösung die Anzahl der einzelnen Antworten je nach Kategorie (siehe unten) bestimmt.

Angesichts der ersten Forschungsfrage wurde einerseits die Anzahl der als Beweis akzeptierten narrativen und formalen Beweisprodukte miteinander verglichen, andererseits nach Textstellen Ausschau gehalten, die sich auf das Kriterium Formalismus beziehen. Bezüglich der zweiten Forschungsfrage wurden die Begründungen jeweils einer der Kategorien „Beweisstruktur“, „Beweisschema“, „Beweiskette“ bzw. „oberflächliches Kriterium“ zugeordnet und ebenfalls ausgezählt. In Bezug auf die dritte Forschungsfrage wurde der quantitative Umfang der einzelnen Kategorien miteinander und mit den Gegebenheiten der jeweiligen Schülerlösung verglichen.

Ergebnisse und Diskussion

Im Hinblick auf die erste Forschungsfrage kann konstatiert werden (Tab. 1), dass die Teilnehmenden korrekte Beweisprodukte unabhängig von dem Stil der Abfassung erfolgreich identifizieren konnten. Im Gegensatz hierzu haben sie die narrative fehlerhafte Schülerlösung zwar als fehlerhaft erkannt, die fehlerhafte formale Schülerlösung wurde aber von ca. zwei Drittel der Teilnehmenden als korrekt eingestuft. Da bei Letzterer der Fehler im Beweisschema, bei Ersterer aber in der Beweisstruktur lag, kann man den Unterschied im Erfolg der Identifizierung des Fehlers nicht ausschließlich auf den Stil der Abfassung zurückführen. Hinzu kommt, dass keiner der Teilnehmenden Formalismus als Grund für Beweisakzeptanz nannte. Insgesamt deuten die Befunde darauf, dass Lehramtsstudierende im schulischen Kontext die formale Verfassung nicht als Kriterium für einen Beweis anwenden.

| Stil | Fehlerhafte Schülerlösung | Korrekte Schülerlösung |
|----------|---------------------------|------------------------|
| narrativ | 5 | 22 |
| formal | 17 | 24 |

Tab. 1: Anzahl der als Beweis eingestuften Schülerlösungen ($n=25$)

Mit Bezug zu der zweiten Forschungsfrage zeigte sich, dass die Teilnehmenden keine oberflächlichen Kriterien bei der Beurteilung von Beweisprodukten anwandten (Tab. 2). Dieser Befund steht zwar zu dem von Füllgrabe und Eichler (2017) im Widerspruch, Letzterer wurde aber – im Gegensatz zu der vorliegenden Studie – in einem hochschulbezogenen Kontext ermittelt. Die Daten legen zudem bezogen auf die dritte Forschungsfrage nahe, dass die Lernenden das Kriterium Beweisschema überwiegend erfolgreich anwenden (1. Spalte). Fehler bezogen auf die Beweisstruktur zu identifizieren fällt ihnen allerdings schwer, da nur ein Viertel der Teilnehmenden einen Fehler dieser Art identifizierten und auch begründen konnte. Zudem suchten einige

Teilnehmende nach einem Fehler in der Beweiskette, obwohl ein Fehler in der Beweisstruktur vorlag (2. Spalte). Auch bei korrekten Beweisen (3. und 4. Spalte) begründeten einige Teilnehmende die Korrektheit (einige haben auch bei positiver Antwort eine Begründung formuliert) – bzw. fälschlicherweise die Inkorrektheit – durch Argumente eher bezogen auf die Beweiskette als auf die Beweisstruktur. Somit kann vermutet werden, dass Lehramtsstudierende diese Kriterien hierarchisch anwenden, und zwar in der Reihenfolge Beweisschema, Beweiskette, Beweisstruktur.

| Argument in der Begründung | Fehlerhafte Schülerlösung | | Korrekte Schülerlösung | |
|---------------------------------|---------------------------|--------|------------------------|--------|
| | narrativ | formal | narrativ | formal |
| Beweisschema | 19 | 0 | 0 | 0 |
| Beweisstruktur | 0 | 6 | 1 | 0 |
| Beweiskette | 1 | 4 | 3 | 4 |
| Oberflächliche Kriterien | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tab. 2: Anzahl der Argumente je nach Wissenskomponente ($n=25$)

Literatur

- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8>
- Füllgrabe, F. & Eichler, A. (2017). Beweisakzeptanz bei Studierenden des Lehramts. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 283–286). WTM-Verlag. <https://doi.org/10.17877/DE290R-18457>
- Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 4–6. <http://www.let-tredelapreuve.org/OldPreuve/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf>
- Kempen, L. (2016). Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 1111–1114). WTM-Verlag.
- Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.
- Szücs, K. (2021). Beweisakzeptanz von Lehramtsstudierenden der Mathematik. Generierung von neuen Hypothesen anhand einer Fallstudie. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 111, 50–56.
- Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematikdidaktik*, 30(1), 30–54.