

Amelie VOGLER, Siegen & Ingo WITZKE, Siegen

Eine Fallstudie zur Erkundung von Kongruenzabbildungen im Kontext digitaler und analoger Lernsettings

Die aktuelle Konzeption des (Grundschul-)Unterrichts fordert den Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht (KMK, 2021). Laut des erweiterten Strategiepapier zur Bildung in der digitalen Welt bergen Experimentieren und Entdeckendes Lernen in digitalen Lernumgebungen ein hohes Aktivierungs- und Motivationspotenzial. Lehr-Lern-Prozesse sollen situativ um digitale Lernumgebungen und damit in Kombination zu analogen Lernumgebungen um zusätzliche Erfahrungswelten erweitert werden (KMK, 2021). Anliegen der in diesem Beitrag vorgestellten Fallstudie ist es, die Auswirkungen analoger und digitaler Lernsettings im Mathematikunterricht auf die Wissensaktivierungs- und Wissensentwicklungsprozesse von Lernenden erkenntnistheoretisch zu beleuchten.

Analoge und digitale Lernsettings als Forschungsanlass

In einem empirisch-orientierten Mathematikunterricht (Pielsticker, 2020) werden mathematische Lerninhalte bewusst als Phänomene der Realität präsentiert. Die dabei verwendeten Arbeits- und Anschauungsmittel lassen sich nach dem Konzept der empirischen Theorien (u. a. Burscheid & Struve, 2018; Struve, 1990; Pielsticker, 2020) als empirische Objekte bezeichnen, welche für die in Auseinandersetzung mit den Phänomenen entstehenden empirischen Schülertheorien als Referenzobjekte dienen können.

Mit dem Einbezug digitaler Medien und Werkzeuge, wie der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra, in den Mathematikunterricht rücken Fragestellungen hinsichtlich der gelingenden Kombination analoger und digitaler Lernsettings sowie der Spezifika der damit einhergehenden mathematischen Wissensaktivierungs- und Wissensentwicklungsprozesse seitens der Lernenden in den Blick der mathematikdidaktischen Forschung. In Anlehnung an Dilling (2022) sind *analoge* und *digitale Lernsettings* Lernumgebungen, in denen empirische Objekte eine tragende Rolle spielen. Diese empirischen Objekte können die Referenzobjekte der empirischen Theorien der Lernenden, die mit dem Setting arbeiten, bilden. Lernende können solche Settings somit zur Wissensaktivierung, Weiterentwicklung ihrer empirischen Theorien oder Erklärung ihres Wissens verwenden. Ein *analoges* Lernsetting ist dabei ein empirisches Setting, in welchem analoge empirische Objekte (z.B. Zeichenblatt- oder Holzfiguren) eine wichtige Rolle spielen, und ein *digitales* Lernsetting ist dementsprechend ein empirisches Setting, in welchem digitale empirische Objekte (z.B. virtuelle Objekte wie Punkte, Strecken oder geometrische Figuren in GeoGebra) eine wichtige Rolle spielen.

In einem analogen Lernsetting könnten Lernende bspw. durch den Einsatz eines Spiegels und Holzfiguren oder auch über Zeichenblatt- und Faltfiguren das Phänomen der Geradenspiegelung erkunden. In einem (vergleichbaren) digitalen Lernsetting könnten Lernende dieses Phänomen bspw. in der Software GeoGebra untersuchen. Dabei können sie einerseits mit der Stiftfunktion Figuren in ein Koordinatengitter zeichnen. Andererseits bietet die Software auch die Möglichkeit, Punkte, Strecken, Geraden und ebene Figuren mittels sog. Konstruktionswerkzeuge zu erzeugen. Mit der Funktion „Spiegel an Gerade“ können diese virtuellen Objekte an einer beliebigen Geraden, die dann als Spiegelachse fungiert, gespiegelt werden. Aus erkenntnistheoretischer Perspektive stellen sich nun folgende Fragen: *Wie unterscheiden sich die Handlungen der Lernenden in solchen analogen und digitalen Lernsettings? Inwiefern beeinflussen die Settings die Handlungen der Lernenden? Inwiefern aktivieren digitale Lernsettings das in analogen Lernsettings erworbene Wissen der Lernenden? Inwiefern ist das in digitalen Lernsettings entwickelte Wissen tragfähig für die Erschließung von Phänomenen in analogen Lernsettings (und umgekehrt)?* Diese Fragestellungen bilden den Ausgangspunkt der nachfolgend skizzierten Fallstudie zur Untersuchung der Erkundung von Kongruenzabbildung in GeoGebra durch zwei Viertklässler.

Fallstudie zur Erkundung von Kongruenzabbildungen in GeoGebra

In dieser Fallstudie werden die Handlungen und Aushandlungsprozesse von den Viertklässlern Max und Jaron (Namen geändert) in analogen und digitalen Lernsettings zur Erkundung des Phänomens der Geradenspiegelung untersucht. In einer klinischen Interviewsituation wurden die beiden Schüler zunächst aufgefordert in einem analogen Lernsetting Fragestellungen zum Thema Symmetrie zu bearbeiten. Anschließend konnten die Lernenden in einem ebenfalls durch die Forschenden konzipierten digitalen Lernsetting die Stift-, Spiegel- und Ziehfunktion in GeoGebra erkunden und weiterführende Applets zu Geradenspiegelungen (Link) bearbeiten. Beide Schüler hatten keine Vorerfahrung im Umgang mit GeoGebra. Einzelne Szenen des Datenmaterials wurden dann zur Beantwortung der nachfolgend aufgelisteten Forschungsfragen ausgewählt und mit dem Begriffsrahmen der empirischen Theorien sowie der Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche (im Folg. SEB) (Bauersfeld, 1983; Stoffels, 2020) analysiert:

- *Wie handeln die Schüler in diesen analogen und digitalen Lernsettings?*
- *Welche SEB lassen sich in diesen Lernsettings rekonstruieren?*
- *Inwiefern regen die Lernsettings die Bildung übergeordneter SEB an?*

Einblick in Daten und erste Ergebnisse der Fallstudie

Im Folgenden sollen erste Ergebnisse zur Beantwortung der drei zuvor aufgeführten Forschungsfragen exemplarisch an zwei Transkriptausschnitten (aus zwei verschiedenen Interviewszenen) vorgestellt werden.

Tab. 1: Transkriptausschnitt 1

1	J	Die so zueinanderstehen (fährt Umrisse der Figuren synchron mit Fingerspitzen seiner linken und rechten Hand in der Luft nach, siehe Foto).	
2	I	Okay, ihr könnt auch nochmal die anderen blauen Punkte bewegen. An was, mit was berühren die sich denn jetzt? An der Spiegelachse.	
3	J	Die berühren sich, mit den Ecken.	
4	I	Und was war vorher?	
5	J	Vorher haben die sich mit der Fläche berührt. Ne mit den Seiten (nickt und blickt zur Zimmerdecke).	
6	I	Mit den Seiten'	
7	J	'Oder der Kanten (blickt zur Zimmerdecke). [...]	
8	J	'Beides eigentlich (blickt zur Interviewerin), ja eigentlich mit beiden, weil wenn das (beginnt Handbewegung), wenn das jetzt 3D wäre, wär' das hier so eine Fläche, die Flächen würden sich berühren und die Kanten auch (begleitende Handbewegungen, siehe Fotos rechts).	

Tab. 2: Transkriptausschnitt 2

1	J	Ist es nicht, weil (nimmt Stift in die Hand) dann wär's ja <u>so</u> gespiegelt (Handbewegung, siehe oberes Foto), aber das muss ja <u>so</u> gespiegelt werden (dreht Tablet, tippt dann auf Spiegelgerade, siehe unteres Foto)'	 
2	M	Achso, stimmt.	
3	J	Das wollte ich dir als Tipp geben.	

Eine erste Analyse der ausgewählten Szenen zeigt, dass die beiden Schüler Max und Jaron im digitalen Lernsetting zur Erkundung des Phänomens der Geradenspiegelung die (speziellen) Eigenschaften einer solchen, im Programm GeoGebra erzeugten, Abbildung durch ein eher exploratives Vorgehen (Was passiert, wenn wir die Eckpunkte der Ausgangsfigur im Programm bewegen?) erkunden. Außerdem nutzen die Schüler die Spiegelfunktion, um ihre mit der Stiftfunktion erzeugten Abbilder zu überprüfen. Jaron verwendet in der ersten Szene (vgl. Tab. 1) zur Beschreibung seiner Beobachtungen die Begriffe *Ecken*, *Kanten* und *Flächen*. Zudem fällt auf, dass er diese Beschreibungen mit Gesten unterstützt (vgl. Tab. 1, Term 1, 8), die einen deutlichen Bezug zu dreidimensionalen, greifbaren Objekten aufzeigen. Es ist somit an-

zunehmen, dass Jaron hier einen SEB über geometrische Holzfiguren aktiviert. In der zweiten Szene (vgl. Tab. 2) wurde Max zuvor aufgefordert, unter Verwendung der Stiftfunktion ein Dreieck an einer diagonal zum Gitternetz liegenden Geraden zu spiegeln. Max zeichnet ein Dreieck, welches als Abbild des vorgegebenen Dreiecks an einer nicht vorhandenen bzw. nicht sichtbaren senkrecht zum unteren Bildschirmrand liegenden Geraden angesehen werden kann. Jaron scheint seiner Reaktion zufolge (vgl. Tab. 2, Term 1, 3) in dieser Situation einen übergeordneten SEB zur Entwicklung achsensymmetrischer Figuren in einem Gitternetz zu aktivieren. Denn er weist Max darauf hin, dass seine Zeichnung nicht korrekt sei. Diesen Hinweis unterstützt er durch eine Handbewegung, welche andeutet, wie die für Max Zeichnung gültige Spiegelgerade im Gitternetz liegen würde. Dann dreht er das Tablet so, dass die vorgegebene Spiegelgerade senkrecht zur Tischkante liegt und sagt dabei: „[...] aber das muss ja so gespiegelt werden“ (Tab. 2, Term 1). Es ist anzunehmen, dass die beiden Schüler im Mathematikunterricht (häufig) Figuren an senkrecht zur Tischkante/unteren Kante des Zeichenblattes verlaufenden Achsen zeichnen. Demnach nutzt Jaron hier gezielt sein in analogen Settings entwickeltes Wissen über Geradenspiegelungen, um Max darauf aufmerksam zu machen, dass und warum dessen Zeichnung nicht passend ist. Außerdem zeigt diese Situation, dass die Schüler den Begriff der Geradenspiegelung hier ostensiv „durch Aufzeigen von Beispielen und Gegenbeispielen“ (Struve, 1990, S. 40) definieren.

Literatur

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–57). Aulis.
- Burscheid, H. J. & Struve, H. (2018). *Empirische Theorien im Kontext der Mathematikdidaktik*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Dilling, F. (2022). *Begründungsprozesse im Kontext von (digitalen) Medien im Mathematikunterricht*. Springer Spektrum.
- Kultusministerkonferenz (2021). *Lehren und Lernen in der digitalen Welt. Die ergänzende Empfehlung zur Strategie „Bildung in der digitalen Welt“*. Beschluss zur Strategie der Kultusministerkonferenz vom 09.12.2021.
- Pielsticker, F. (2020). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht am Beispiel der 3D-Druck-Technologie*. Springer Spektrum.
- Stoffels, G. (2020). *(Re-)Konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu formal-abstrakten Auffassungen: Eine theoretische Grundlegung sowie Fallstudien zur historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und individueller Entwicklungen mathematischer Auffassungen von Lehramtsstudierenden beim Übergang Schule-Hochschule*. universi.
- Struve, H. (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. BI-Wiss.-Verlag.