Andreas WAGENBLAST, Göttingen & Sebastian BAUER, Göttingen

Aspekte funktionalen Denkens beim graphischen Lösen von Differentialgleichungen

Ergänzend zur Behandlung expliziter Lösungen der Differentialgleichungen des exponentiellen, beschränkten und logistischen Wachstums werden immer wieder Ansätze vorgeschlagen, die das graphische Lösen von Differentialgleichungen in den Mittelpunkt rücken (z.B. Körner, 2006 sowie Bauer, 2017). Während international bezüglich der tertiären Ausbildung solche Ansätze intensiv beforscht werden (z.B. Rasmussen 2001, für einen aktuellen Überblick siehe Losada et al., 2021) existieren kaum empirische Befunde zum graphischen Lösen von Differential-gleichungen im sekundären Bildungsbereich. Diese Lücke wollen wir im Rahmen eines Design-Research Projekts adressieren. In einer ersten experimentellen Phase beobachten wir dazu Kleingruppen beim Lösen einer typischen Einstiegsaufgabe zum graphischen Lösen von autonomen Differentialgleichungen. In diesem Beitrag soll eine a-priori-Analyse der Aufgabe unter der Perspektive des funktionalen Denkens gegeben werden.

Die untersuchte Aufgabe

> Der belgische Mathematiker Pierre Verhulst hat die Theorie aufgestellt, dass sich Bevölkerungsgrößen von Ländern wie Frankreich oder den USA nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit entwickeln: Wenn $P(t)$ die Bevölkerungsgröße zur Zeit t ist, dann hat die Änderungsrate $P'(t)$ zur Zeit t die Größe $f\big(P(t)\big)$, wobei f eine Funktion ist, deren Graph in **Abb. 1a** dargestellt ist. Hat die Bevölkerungsgröße zur Zeit $t = 0$ z. B. den Wert P_1, also $P(0) = P_1$, kann man von dem Graphen die Größe der Ableitung ablesen (siehe **Abb. 1a**).
>
> Skizzieren Sie jeweils für die Startwerte $P(0) = 0, P(0) = P_1, P(0) = K$ und $P(0) = P_2$ (siehe **Abb. 1b)** den Graphen der Funktion P in ein $t - P$-Diagramm.

Funktionales Denken im Lösungsprozess

Beim Lösen von Differentialgleichungen sind die gesuchten Lösungen Funktionen. Nach Vollrath (1989) ist funktionales Denken „[…] eine Denkweise die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (S. 6). Vollrath unterscheidet den *Zuordnungsaspekt (ZA)*, den *Kovariationsaspekt (KA)* und den *Ganzheits*- bzw. den *Objektaspekt (OA)* (Vollrath, 1989, S. 6). Während des gesamten Bearbeitungs- und Lösungsprozesses des graphischen Lösens von zeitautonomen Differentialgleichungen treten diese verschiedenen Aspekte

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

des funktionalen Denkens in einer spezifisch vernetzten Weise auf, welche in diesem Beitrag am Beispiel des Startwerts P_1 der obigen Aufgabe analysiert wird.

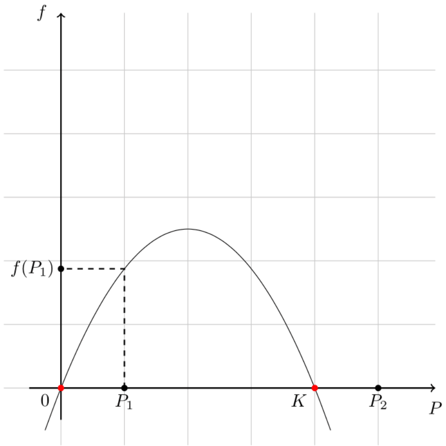

Abb. 1a: Der Graph der Funktion f.

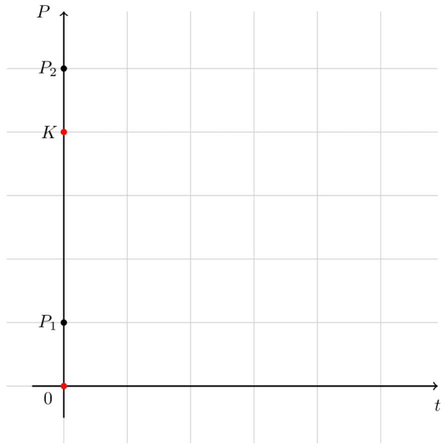

Abb. 1b: Das t-P-Diagramm.

Zu Konstruieren ist der Graph einer Funktion $P(t)$ welcher die Gesetz-mäßigkeit $P'(t) = f\big(P(t)\big)$ von Verhulst erfüllt, sowie den Anfangswert $P(0) = P_1$ annimmt. Es geht um zwei Funktionen, $P(t)$ und $f(P)$. Davon ist $f(P)$ graphisch gegeben. Prinzipiell wird durch die Komposition $f \circ P$ die abhängige Variable der Funktion $P(t)$ zur unabhängigen Variablen der Funktion $f(P)$. Die abhängige Variable der Funktion $f(P)$ geht andererseits über die Differentialgleichung als Änderungsrate in den *KA* von $P(t)$ ein. Das enge Geflecht zwischen dem funktionalen Denken bezogen auf $P(t)$ und bezogen auf $f(P)$ wird in **Abb. 2** dargestellt. Die im folgenden Text auftretenden Nummern beziehen sich auf diese Abbildung, während die konstruierte Lösung sich in **Abb. 3** findet.

Der Anfangswert $P(0) = P_1$ ist bekannt. Über den *ZA* bezogen auf $P(t)$ zur Zeit $t = 0$ erhalten wir den (in der Aufgabenstellung bereits eingezeichneten) Punkt $(0|P_1)$ auf der P-Achse des t-P-Diagramms (siehe **Abb. 1b**). Dieser Wert liefert über den *ZA* für $f(P)$ an der Stelle P_1 den Wert $f(P_1)$, der aus dem Graphen von f abgelesen werden muss (1). Die Differential-gleichung schreibt diesen Wert als Änderungsrate für $P(t)$ zur Zeit $t = 0$ vor – geometrisch die Steigung des Graphen. Sie bestimmt also über den *KA* von $P(t)$ die Richtung der Weiterentwicklung der gesuchten Funktion P (2). Die sich wachsend entwickelnde Funktion $P(t)$ bestimmt über den *ZA* für $f(P)$ zum einen immer neue f-Werte (3), die in diesem Fall positiv sind und über den *KA* für $f(P)$ den Sachverhalt, dass mit variierendem P die Kovariation von f zunächst monoton wachsend ist (4). Durch die Differentialgleichung wirken sich nun (3) und (4) wieder auf den *KA* von $f(P)$ aus: Solange die gemäß (3) bestimmten Werte von f positiv sind wächst $P(t)$ (5), und solange die gemäß (4) bestimmte Kovariation von $f(P)$ monoton wachsend ist, ist der zu konstruierende Graph von $P(t)$ links-gekrümmt (6). Die Aspekte (3) – (6) bestimmen nun in einem kontinuierlich zu durchlaufenden Kreis die Konstruktion der gesuchten Funktion $P(t)$. In diesem Prozess erwächst die Funktion $P(t)$ als Ganzes (*OA*).

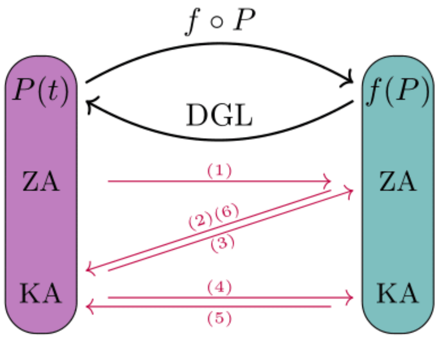

Abb. 2: Zusammenspiel *ZA* und *KA* der Funktionen $P(t)$ und $f(P)$.

Markant ist dabei das Durchlaufen des Werts $P = K/2$, *ZA* für $P(t)$. Beim Durchlaufen dieses Wertes hat die Funktion $f(P)$ ein lokales Maximum, ändert also ihr Kovariationsverhalten von monoton steigend zu monoton fallend. Über die Differentialgleichung bewirkt das die Änderung des Krümmungsverhaltens von $P(t)$ und führt zu dem Wendepunkt des Graphen von $P(t)$ in der Höhe $K/2$. (Extrem- und Wendepunkte werden in der Literatur zumeist dem *OA* zugeschrieben (z.B. Greefrath et al., 2016), wobei sie hier aber eher unter dem *KA* wirksam werden.)

Während des stetigen Durchlaufens des Kreislaufs (3) – (6) nähert sich $P(t)$ von unten dem Wert K und damit $f(P)$ von oben dem Wert Null an. Der Graph von $P(t)$ schmiegt sich damit für $t \to \infty$ von unten an die Kapazitätsgrenze K an. In dieser Betrachtung wirken *KA* und *ZA* für $f(P)$, nämlich $f(P)$ fällt monoton und $f(K) = 0$, zusammen auf den *KA* und den *OA* von $P(t)$ ein: $P(t)$ nähert sich monoton wachsend der Asymptote K.

Fazit

Das graphische Lösen zeitautonomer Differentialgleichungen erfordert funktionales Denken, welches die verschiedenen Aspekte des funktionalen Denkens, bezogen auf die beiden involvierten Funktionen $P(t)$ und $f(P)$, in einer hochvernetzten Weise koordinieren muss. Charakteristisch dabei sind der Wechsel der mit t kovariierenden Variablen P zur variierenden Variablen der Funktion $f(P)$ und der Einfluss des *ZA* und des *KA* der Funktion $f(P)$ – vermittelt über die Differentialgleichung in Form der Änderungsrate – auf den *KA* der Funktion $P(t)$. Beide schließen sich zu einem kontinuierlich zu durchlaufenden Kreis zusammen. Damit sind solche Aufgaben dazu geeignet, das funktionale Denken im Vergleich mit dem funktionalen Denken im Kontext von Funktion, Ableitung und Stammfunktion (Hahn & Prediger, 2008) auf eine neue Stufe zu heben.

In folgenden empirischen Studien muss nun untersucht werden, ob und unter welchen Bedingungen Lernende der Sekundarstufe II ein derartiges funktionales Denken entwickeln können.

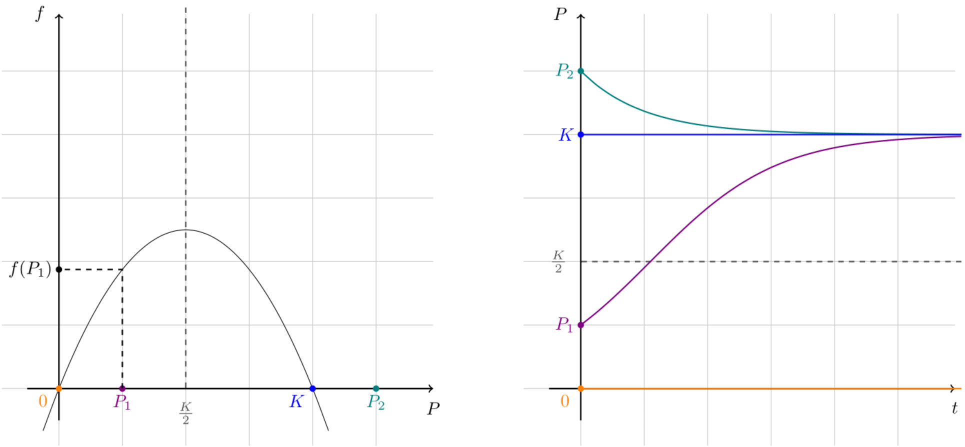

Abb. 3: Musterlösung: Die Lösungsgraphen der Startwerte $P(0) = 0, P_1, K$ und P_2.

Literatur

Bauer, S. (2017). Modellieren mit Differentialgleichungen über das logistische Wachstum hinaus. *Der Mathematikunterricht, 63*(1), 28–36.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5_2

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung—Ein Beitrag zur didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *29*(3), 163–198.

Körner, H. (2006). Mit Wachstum durch die Analysis. *Der Mathematikunterricht*, *51*(4), 4–18.

Lozada, E., Guerrero-Ortiz, C., Coronel, A. & Medina, R. (2021) Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. *Mathematics*, *9*(7), 745. https://doi.org/10.3390/math9070745

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understanding and difficulties. *Journal of Mathematical Behavoir, 20*(1), 55–87.

Verhulst, P. (1845). Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 18*, 1–38.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik, 10*(1), 3–37.