Katja LENZ, Freiburg & Gerald WITTMANN, Freiburg

Lerngelegenheiten zum Teile-Ganzes-Konzept in Mathematikschulbüchern der ersten Jahrgangsstufe

Die Entwicklung des Teile-Ganzes-Konzepts ist von grundlegender Bedeutung für die Entwicklung des Zahlbegriffs und das Rechnenlernen und deshalb eine zentrale Aufgabe des arithmetischen Anfangsunterrichts. Gleichwohl besteht bislang wenig Erkenntnis darüber, welche Lerngelegenheiten Schulbücher für die 1. Klasse bezüglich des Teile-Ganzes-Konzepts bieten.

Theoretischer Hintergrund und Stand der Forschung

Das *Teile-Ganzes-Konzept* bezeichnet das Verständnis, dass jede Menge bzw. Zahl auf verschiedene Arten in Teile zerlegt werden kann und dass die Summe dieser Teile wiederum der Ausgangsmenge bzw. Zahl entspricht (Resnick, 1983, S. 114), sowie das Verständnis, dass sich der Unterschied zwischen Mengen bzw. Zahlen mit Zahlen beschreiben lässt (Tubach, 2019, S. 8). Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung heben die Ausbildung des Teile-Ganzes-Konzepts als ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts im 1. Schuljahr hervor. Dabei nimmt insbesondere das Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen eine zentrale Rolle ein. Die Entwicklung des Teile-Ganzes-Konzepts beginnt bereits im Alter von vier oder fünf Jahren, also im Vorschulalter, und erweitert und festigt sich in der Regel im Verlauf der ersten Klasse.

Im Hinblick auf die Entwicklung kann ein protoquantitatives von einem numerischen Verständnis unterschieden werden (Resnick, 1989). Das protoquantitative Teile-Ganzes-Konzept umfasst das Verständnis von nicht-quantifizierten Zusammenhängen zwischen Mengen. Es ermöglicht z. B. die Einsicht, dass ein Ganzes durch das Zerlegen in zwei Teile und das Zusammenführen dieser Teile nicht mehr oder weniger geworden ist und dass sich das Ganze verändert, wenn ein Teil verändert wird. Das numerische Teile-Ganzes-Konzept entwickelt sich aufbauend auf dem kardinalen Zahlkonzept und erlaubt das flexible Deuten von Zahlen in Form additiver Zerlegungen. Weiter können auf Basis des Teile-Ganzes-Konzepts die Grundvorstellungen zur Addition (Hinzufügen, Zusammenfügen) und Subtraktion (Wegnehmen, Vergleichen, Ergänzen) ausgebildet werden und es kann Einsicht in operative Zusammenhänge von Aufgaben (z. B. Kommutativität, Kompensation, Kovarianz) erlangt werden. Diese operativen Zusammenhänge sind wesentlich, um nicht-zählende Rechenstrategien ausbilden, da die bekannten Ableitungsstrategien auf diesen operativen Zusammenhängen basieren (Gerster & Schultz, 2004, S. 341; Tubach, 2019, S. 9).

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Allerdings scheint die Ausbildung von Rechenstrategien auf Basis des Teile-Ganzes-Konzepts kaum spontan zu erfolgen, sondern überwiegend durch gezielte Instruktion im schulischen Mathematikunterricht (Gaidoschik, 2010, S. 218). Dies unterstreichen auch die Befunde der wenigen Interventionsstudien, die es hierzu gibt (z. B. Cheng, 2012; Kullberg et al., 2020). Die Lerngelegenheiten bezüglich des Teile-Ganzes-Konzepts im 1. Schuljahr sind deshalb von hoher Bedeutung.

Ziel und Forschungsfragen

Im Rahmen der vorliegenden Studie werden Lerngelegenheiten zum Teile-Ganzes-Konzept in Schulbüchern für Klasse 1 analysiert.

Hierfür sind die folgenden Forschungsfragen leitend:

- Welche Lerngelegenheiten bieten Schulbücher für Klasse 1 bezüglich des Teile-Ganzes-Konzepts?
- Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede zeigen sich zwischen verschiedenen Schulbüchern?

Methodisches Vorgehen

Die Untersuchung der Schulbücher wurde in Anlehnung an Kuckartz (2018, S. 141 ff.) als qualitative Inhaltsanalyse durchgeführt. Die Datenbasis umfasste zwölf Schulbücher für die erste Klasse, die in Baden-Württemberg und weiteren Ländern zugelassen sind. Im Sinne eines selektiven Sampling wurde die Stichprobe bereits vor der Datenerhebung festgelegt und auf ein breites Spektrum von Eingangsmerkmalen geachtet. Die Analyse umfasst jeweils die Lerngelegenheiten, die gemäß der Explikation des Teile-Ganzes-Konzepts unmittelbar auf Zahlzerlegungen und -zusammensetzungen zielen. Diese Lerngelegenheiten wurden anhand eines eigens entwickelten Kategoriensystem umfassend kodiert. Die Kategorien wurden in einem Wechselspiel aus Deduktion und Induktion gewonnen.

Ergebnisse

Die analysierten Schulbücher für die 1. Klasse sind sich bezüglich der Lerngelegenheiten zu Zahlzerlegungen auf den ersten Blick sehr ähnlich, da sie zunächst keine salienten Merkmale zur Unterscheidung zeigen. So werden zur Veranschaulichung der Zahlzerlegungen meist ikonische und symbolische Darstellungen miteinander kombiniert: Häufig vorkommende bildliche Darstellungen sind Abbildungen von Schüttelboxen, Punktebilder und Zerlegungshäuser; die symbolische Notation der Zahlzerlegungen erfolgt meist als Additionsterm und es überwiegen Zerlegungsaufgaben, bei denen alle

Teilkomponenten bekannt sind. Damit zeigt sich ein hoher Konsens in den Schulbüchern, was die einzelnen Aufgaben angeht.

Jedoch treten bei Betrachtung der Gesamtheit der Aufgaben Unterschiede in der Behandlung von Zahlzerlegungen zwischen den Schulbüchern zu Tage, welche die Art und Reihung der Lerngelegenheiten betreffen. Insbesondere differieren die Schulbücher hinsichtlich der Systematik der Zahlzerlegungen und dem mathematischen Potenzial für das Rechnenlernen, das mit dieser einhergeht. Zum einen finden sich Schulbücher, die kaum systematisch angeordnete Zahlzerlegungen enthalten. Dementsprechend gibt es auch kaum Möglichkeiten, Beziehungen zwischen Zahlzerlegungen zu entdecken. Zum anderen gibt es Schulbücher, in denen systematisch angeordnete Zahlzerlegungen angeboten werden, dies mit unterschiedlicher Ausrichtung: es gibt (1) Schulbücher, die von Beginn an auf eine vollständige und systematische Zahlzerlegungen fokussieren, (2) Schulbücher in denen unsystematische Zahlzerlegungen in systematische und vollständige Zahlzerlegung überführt werden und (3) Schulbücher, die fast ausschließlich systematische Zahlzerlegungen anbieten, bei denen vielfältige Beziehungen entdeckt werden können.

In Bezug auf das mathematische Potenzial für das Rechnenlernen zeigt sich, dass die Schulbücher vorwiegend auf eine vollständige und systematische Zahlzerlegung zielen und damit die Kompensation (gegensinniges Verändern) adressieren. Nur in wenigen Schulbüchern wird die Chance genutzt, anhand von Zahlzerlegungen das Verständnis weiterer operativer Zusammenhänge anzuregen.

Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der vergleichenden Schulbuchanalyse deuten darauf hin, dass es unterschiedliche Konzepte der Erarbeitung von Zahlzerlegungen gibt, die ein unterschiedliches Potenzial im Hinblick auf das Rechnenlernen nahelegen. So bieten manche Schulbücher deutlich mehr Möglichkeiten, um Zahl- und Aufgabenbeziehungen aktiv zu entdecken als andere. Dieser identifizierte Unterschied zwischen den Schulbüchern spiegelt konkret die allgemeinere Erfahrung wider, dass mathematische Inhalte schematisch und regelbasiert, aber auch beziehungshaltig und verständnisbasiert erarbeitet werden können (Gerster & Schultz, 2004, S. 38 ff.). Dieser Unterschied scheint bedeutsam zu sein, denn Lösungsprozesse beim Rechnen stützen sich auf sogenannte Referenzen, d. h. auf bestimmte Erfahrungen, die Lernende beim Rechnenlernen gemacht haben. Welche Referenzen herangezogen werden, hängt maßgeblich von den Lerngelegenheiten im vorausgegangenen Mathematikunterricht ab. Fokussiert dieser auf das Nachahmen von Musterlösungen, ist anzunehmen, dass Kinder beim Rechnen eher verfahrensorientiert vorgehen. Stehen in den Lerngelegenheiten hingegen Zahl- und Aufgabenbeziehungen im Mittelpunkt, können diese den Referenzkontext bilden (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2018). Es besteht nun die Vermutung, dass ein Unterricht, der sich eng an einem Schulbuch orientiert, das darauf zielt, vielfältige Beziehungen zwischen Zahlzerlegungen zu entdecken, das Rechnenlernen stärker unterstützt als ein Unterricht, in welchem Zahlzerlegungen vorwiegend als „Zerlegungspäckchen" angeordnet sind, die ein schematisches Abarbeiten zulassen.

Da die Unterschiede in der Behandlung von Zahlzerlegungen in den analysierten Schulbüchern auf den ersten Blick nicht erkenntlich sind, sondern nur mittels einer tiefergehenden Analyse identifiziert werden konnte, stellt sich die Frage, inwieweit Lehrkräfte derartige Unterschiede wahrnehmen bzw. wie die geforderten Kompetenzen zur Analyse von Schulbüchern entwickelt werden können.

Literatur

Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 29–47. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.09.002

Gaidoschik, M. (2010). *Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres.* [Dissertation, Universität Wien]. https://doi.org/10.25365/thesis.9155

Gerster, H. D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen.* https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Beltz.

Kullberg, A., Björklund, C., Brkovic, I. & Runesson Kempe, U. (2020). Effects of learning addition and subtraction in preschool by making the first ten numbers and their relations visible with finger patterns. *Educational Studies in Mathematics, 103,* 157–172. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09927-1

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen - Förderung - Beispiele*. Springer Spektrum.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 109–151). Academic Press.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*(2), 162–169. https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.2.162

Tubach, D. (2019). *Relationales Zahlverständnis im Übergang von der Kita zur Grundschule. Entwicklung und Erforschung komplementärer Spiel- und Lernumgebungen.* Springer Spektrum.