Kristin LITTECK, Kiel, Tobias ROLFES, Frankfurt & Aiso HEINZE, Kiel

Eine empirische Studie zum Erwerb des Ableitungsbegriffs auf Basis der Prozess-Objekt-Dualität

Einleitung und theoretischer Hintergrund

In der Forschung zum Erwerb mathematischen Begriffswissens wird sich häufig auf Prozess-Objekt-Ansätze berufen. Prominente Beispiele sind die APOS-Theorie (Dubinsky, 1991), der Procept-Ansatz (Gray & Tall, 1994) oder das Modell nach Sfard (1991, 1992). In diesen Theorien werden mathematische Begriffe als Prozess-Objekt-Dualitäten aufgefasst, sodass ein mathematischer Begriff als mentaler mathematischer Prozess oder als mentales mathematisches Objekt verstanden werden kann. Hierbei wird angenommen, dass in dem Erwerbsprozess eines Begriffs das Objekt aus dem jeweiligen Prozess hervorgeht, also für ein Begriffsverständnis insbesondere das Prozesswissen vor dem Objektwissen erworben werden sollte. Pantziara und Philippou (2012) lieferten bereits empirische Evidenz, die darauf hindeutet, dass sich bei dem Bruchzahlbegriff eine Progression vom Prozess- zum Objektwissen zeigt.

Aufbauend auf der Annahme einer Prozess-Objekt-Progression kann nach Sfard (1991, 1992) ein hierarchischer Begriffsaufbau in der Mathematik postuliert werden. Demnach werden im Lernprozess mathematische Operationen mit bereits bekannten Objekten durchgeführt, sodass eine Prozessvorstellung eines neuen Begriffs entsteht. Wird der Prozess nach einer Konsolidierungsphase mehr und mehr als Ganzes betrachtet, so wird das Begriffsverständnis des neuen Begriffs um eine Objektvorstellung erweitert. Mit dieser Objektvorstellung können dann weiterführende mathematische Operationen durchgeführt werden, sodass eine Prozessvorstellung eines aufbauenden mathematischen Begriffs erworben werden kann.

Sfard (1992) relativiert diese Idee der strengen Hierarchie zum Erwerb mathematischen Begriffswissens mit der Einführung des sogenannten pseudostrukturellen Wissens. Eine Person hat pseudostrukturelles Wissen zu einem mathematischen Begriff, wenn hierzu Objektwissen vorliegt und bis zu einem gewissen Grad mit diesem Objekt auch mathematische Operationen durchgeführt werden können, aber das diesem Objekt zugrundeliegende Prozesswissen nicht vorhanden ist. Personen mit pseudostrukturellem Wissen haben also aufgrund von fehlendem Prozesswissen ein eingeschränktes Begriffsverständnis und können diesen Begriff nur begrenzt nutzen.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Die vorliegende Studie beschäftigt sich mit dem Erwerb des Ableitungsbegriffs, der üblicherweise entlang dreier Unterbegriffe eingeführt wird, die jeweils mittels eigener Prozess-Objekt-Abfolgen beschrieben werden können: Differenzenquotient, Differentialquotient und Ableitungsfunktion (Zandieh, 1997). Basierend auf dem Prozess-Objekt-Ansatz und hierarchischem Begriffserwerb nach Sfard (1991, 1992), lässt sich ein Begriffserwerbsmodell zum Ableitungsbegriff wie in Abb. 1 dargestellt herleiten. Abb. 1 zeigt auch den eingeschränkten Begriffserwerbsprozess auf Basis von pseudostrukturellem Wissen.

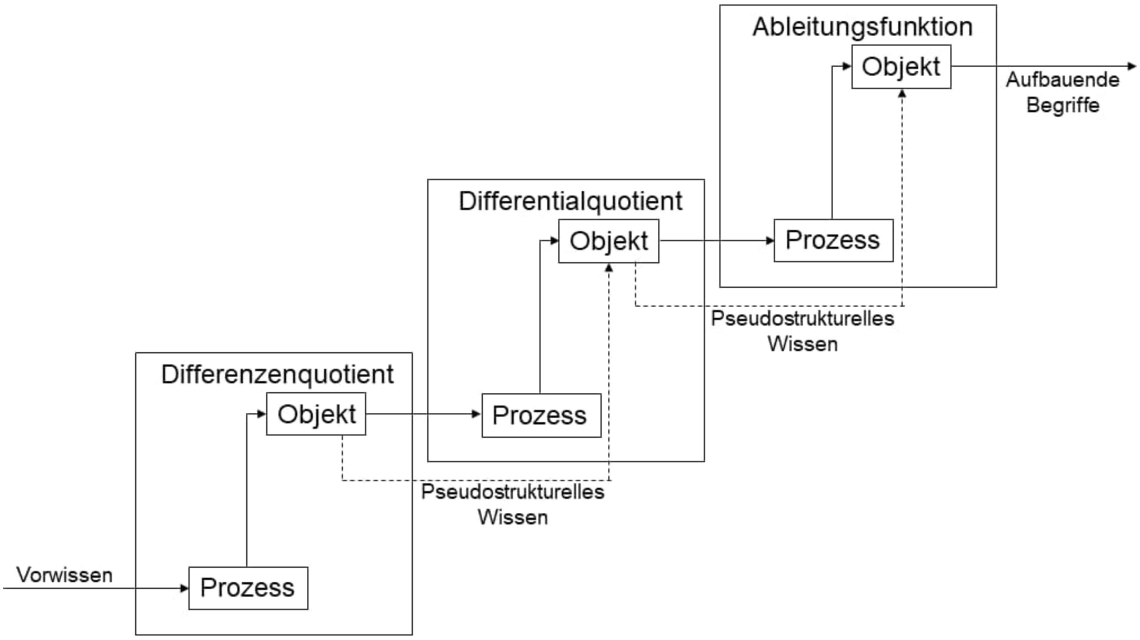

Abb. 14: Begriffserwerbsmodell zum Ableitungsbegriff

In der hier berichteten Studie wurde zum einen die Struktur des Begriffswissens zum Ableitungsbegriff und zum anderen die Passung des Begriffserwerbsmodells untersucht.

Methode

Für die empirische Überprüfung des in Abb. 1 dargestellten Begriffserwerbsmodells wurde ein Testinstrument zur Erhebung des Begriffswissens zur Ableitung entwickelt. Der Test umfasste 28 Items, die jeweils den drei Unterbegriffen (Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion) und Wissensarten (Prozess, Objekt) zugeordnet wurden. Um zu überprüfen, ob die schulrelevanten Grundvorstellungen (Tangentensteigung und lokale Änderungsrate, vgl. Greefrath et al., 2016) einen Einfluss auf den Begriffserwerb haben, basierten jeweils etwa die Hälfte der Items auf einer der beiden Grundvorstellungen. Den Schülerinnen und Schülern wurde mithilfe eines Multi-Matrix-Designs jeweils eine Teilmenge von 14 dieser Items in Form eines Paper-Pencil-Tests vorgelegt.

Der Test wurde zwischen November 2021 und Januar 2022 von 176 Schülerinnen und Schülern (davon 51% weiblich) der Einführungsphase zur Oberstufe aus 13 Klassen in Schleswig-Holstein bearbeitet. Alle Klassen hatten die Unterrichtseinheit zur Einführung des Ableitungsbegriffs kurz vor der Erhebung abgeschlossen.

Für die Auswertung wurde eine gemeinsame IRT-Skalierung aller Testitems durchgeführt. Aufgrund schlechter Itemfit-Werte wurden zwei Items von weiteren Analysen ausgeschlossen, weshalb sich sämtliche Analysen auf 26 Items beziehen. Es wurden mehrere mehrdimensionale Modelle getestet (nach den drei Unterbegriffen, nach Wissensart und nach Grundvorstellung) und anschließend ein Lineares Partial-Credit-Modell (LPCM) gerechnet.

Ergebnisse

Es zeigte sich, dass die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler insgesamt große Schwierigkeiten mit den Aufgaben zum Begriffswissen der Ableitung hatten. Dies schlug sich insbesondere darin nieder, dass der Mittelwert der Personenparameter der IRT-Skalierung 1.5 Logits unter dem Mittelwert der Itemparameter lag. Das Testinstrument zur Erhebung von Begriffswissen zur Ableitung zeigte eine akzeptable Reliabilität (EAP-PV Reliabilität: .62; Item Separation Reliabilität: .98).

Bei der Betrachtung mehrdimensionaler Modelle zeigte sich eine bessere Passung eindimensionaler Modelle im Vergleich zu Modellen, die nach den drei Unterbegriffen oder den beiden schulrelevanten Grundvorstellungen des Ableitungsbegriffs differenzieren. Das zweidimensionale Modell nach Prozess- und Objektwissen zum Ableitungsbegriff (AIC: 2270, BIC: 2381) hatte dagegen eine bessere empirischen Passung als ein eindimensionales Modell (AIC: 2277, BIC: 2391).

Mithilfe des LPCM wurden Schwierigkeitswerte für das Prozess- und Objektwissen für jeden der drei Unterbegriffe des Ableitungsbegriffs geschätzt. Für jeden der drei Unterbegriffe zeigte sich, dass die Items zum Prozesswissen eine deutlich höhere Schwierigkeit aufwiesen als die Items zum Objektwissen. Darüber hinaus war eine deutliche Schwierigkeitszunahme zwischen den Items zum Objektwissen zu beobachten, d.h. Items zum Differenzenquotienten waren deutlich leichter als Items zum Differentialquotienten, die wiederum deutlich leichter waren als Items zur Ableitungsfunktion. Bezüglich der Items zum Prozesswissen zeigten sich keine signifikanten Schwierigkeitsunterschiede zwischen den Items zum Differenzen- und dem Differentialquotienten jedoch eine große Schwierigkeitszunahme zwischen den Items zum Differentialquotienten und zur Ableitungsfunktion.

Fazit und Ausblick

Das in Abb. 1 dargestellte Begriffserwerbsmodell lässt sich nur in Teilen bestätigen. Es zeigt sich zwar zunächst, dass die Itemschwierigkeiten zum Objektwissen des Differenzenquotienten, Differentialquotienten und der Ableitungsfunktion zunehmen. Eine plausible Interpretation ist, dass dieses Wissen aufeinander aufbaut. Die Prozessaufgaben waren aber für jeden Unterbegriff jeweils deutlich schwieriger als die Objektaufgaben, was nicht auf eine Prozess-Objekt-Progression beim Erwerb der Unterbegriffe und somit des Ableitungsbegriffs hindeutet. Dieses Ergebnis weist auf einen möglichen Aufbau von pseudostrukturellem Wissen zum Ableitungsbegriff bei den teilnehmenden Schülerinnen und Schüler hin.

Warum die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler nur eingeschränktes Prozesswissen aufweisen, kann vielfältige Gründe haben. Ein möglicher Erklärungsansatz wäre, dass Lehrkräfte diese Prozesse nicht oder nicht ausreichend im Unterricht thematisiert haben und stattdessen die Objektvorstellung dieser Begriffe fokussierten. Darüber hinaus könnte die Hypothese aufgestellt werden, dass den Schülerinnen und Schülern für das Verständnis der Prozesse der drei Unterbegriffe notwendiges Vorwissen fehlte.

Literatur

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced Mathematical Thinking* (S. 95–126). Springer.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility. A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer.

Pantziara, M. & Philippou, G. (2012). Levels of Students' "Conception" of Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 79,* 61–83.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1–36.

Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification. The Case of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Hrsg.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (S. 59–84). Mathematical Association of America.

Zandieh, M. J. (1997). *The Evolution of Student Understanding of the Concept of Derivative* [Dissertation: Oregon State University].