

Monika POST, Dortmund

## **Wie etablieren Lehrkräfte Darstellungsvernetzung im Unterricht am Beispiel Bedingter Wahrscheinlichkeiten?**

Darstellungsvernetzung kann den Aufbau konzeptuellen Verständnisses unterstützen (Duval, 2006). Unterrichten mit Darstellungsvernetzung ist jedoch bisher relativ wenig untersucht worden (Stylianou, 2010). Das hier vorgestellte Projekt trägt dazu bei, genauer zu untersuchen, wie Lehrkräfte Darstellungsvernetzung im Unterrichtsgespräch etablieren. Im hier vorgestellten Projekt werden am Beispiel von bedingten Wahrscheinlichkeiten Praktiken von Lehrkräften rekonstruiert, um herauszufinden, welche Aktionen oder Impulse Darstellungsvernetzungsprozesse fördern.

### **Theoretische Einordnung**

Vielfältige Darstellungen zu nutzen ist ein bekanntes Prinzip in der Mathematikdidaktik. Als wichtige Aspekte wurde in der Literatur herausgestellt, dass einerseits, diese Darstellungen bewusst verknüpft werden (Duval, 2006) und andererseits, für welche Verstehenselemente des Konzepts die Darstellungen vernetzt werden (Renkl et al., 2013). Beispielsweise kann die kombinierte Wahrscheinlichkeit (1) und bedingte Wahrscheinlichkeit (2) in Abb. 1 aufgegriffen werden als:

(1) „Anteil der Hemd- und Taschenkäufer\*innen an allen“

(2) „Anteil der Taschenkäufer\*innen von den Hemdkäufer\*innen“

Diese Anteile können aufgefaltet werden in die *Verstehenselemente* Teil, Ganzes und Teil-Ganzes-Beziehung. Die unterschiedlichen Teil-Ganzes-Strukturen zu greifen (Leuders & Loibl, submitted) kann dabei unterstützen, konzeptuelles Verständnis für bedingte Wahrscheinlichkeiten aufzubauen. Daher fördern wir in unserer Lernumgebung, dass Lernende die Wahrscheinlichkeiten über die Reflektion der Anteilsstrukturen („Teil vom Gesamten“ vs „Teil vom Teil“) unterscheiden und so Verständnis aufbauen.

Um die Etablierung dieser Prozesse im Unterricht zu untersuchen, haben wir die Moderation der Lehrkräftepraktiken als Navigationspraktiken in einem Navigationsraum konzeptualisiert (Prediger et al., 2022). Dabei schauen wir genauer hin, welche Darstellungen und Verstehenselemente die Lehrkraft im Unterrichtsgespräch ansteuert und wie sie die Verknüpfung der Darstellungen sowie Verstehenselemente angeregt. Die Forschungsfrage ist somit:

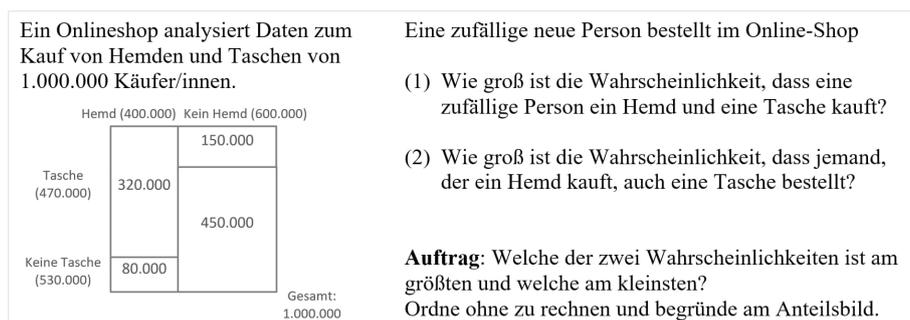
*Wie etablieren und unterstützen Lehrkräfte mögliche Darstellungsvernetzungsprozesse bei Lernenden im Unterrichtsgespräch?*

## Methoden der Datenerhebung und – analyse: Designexperimente

In 4 Design-Research-Zyklen (Gravemeijer & Cobb, 2006) ist eine Lernumgebung entwickelt und in 6 Klassen mit insgesamt 150 Lernenden erprobt worden. Die qualitative Analyse der Transkripte zu videographierten Plenumsszenen erfolgte durch Kodierung (1) der *adressierten Verstehenselemente* (Teil, Ganzes, Teil-Ganzes-Beziehung), (2) der *adressierten Darstellungen* (Anteilsbild, bedeutungsbezogene Sprache, Aussage) und (3) der Verknüpfungsprozesse. Durch Vergleich verschiedener Szenen wurden Praktiken als musterhafte Navigationen rekonstruiert (siehe Post & Prediger, submitted).

### Analyse-Einblick: Praktik „Erklären für Teil-Ganzes-Beziehung“

In der hier analysierten Szene aus Zyklus 4 soll die Klasse am Anteilsbild (in Abb. 1) begründen, welche Wahrscheinlichkeit größer bzw. kleiner ist. Die Lehrkraft fordert zunächst die Zuordnung ein, ob Ereignis (1) durch eine kombinierte Aussage oder Teil-von-Teil Aussage (kombinierte oder bedingte Wahrscheinlichkeit) beschrieben wird:



**Abb. 1:** Aufgabe im Unterrichtsausschnitt

- 19     Lehrer     Okay. Dann die nächste, was ist das erstmal für eine Aussage?  
                  [...]
- 20     Jesssica    Ich würde sagen, dass ist eine kombinierte Aussage, #
- 21     Lehrer     # Ja, sehr schön, wo haben Sie es erk#
- 22     Jesssica    Weil, weil da steht „und eine Tasche kauft“ #
- [...]
- 25     Lehrer     [...] Genau, an diesem „und“ erkennt man das [*unterstreicht*  
                  „und“ in der zweiten Aussage]. Was ist bei der kombinierten Aus-  
                  sage, was ist da die ganze Gruppe? Immer? Samira.
- [...]
- 28     Petra        Ja, alle.
- 29     Lehrer     Alle [*kreist gestisch gesamtes Anteilsbild ein*]. Was wäre hiervon  
                  jetzt die Teilgruppe [*zeigt auf die zweite Aussage*]? Petra.
- 30     Petra        Also(?) die „ein Hemd und eine Tasche“ kaufen.

- 31a     Lehrer     Also dieses Stück, ne? Dieses [*kreist gestisch das obere linke Rechteck ein*] würde jetzt in Verhältnis gesetzt werden zur Ganzen [*kreist gestisch gesamtes Anteilsbild ein*]. [...]

In Turn 20 ordnet Jessica den richtigen Fall „kombinierte Aussage“ zu. Sie begründet, in dem sie „und eine Tasche kauft“ aus Aussage (1) aufgreift und somit auf das Verstehenselement Teil ohne weitere Vernetzung zurückgreift. Der Lehrer steuert in Turn 25 daraufhin eine Übersetzung für das Ganze an und greift dazu die bedeutungsbezogene Sprache („ganze Gruppe“) auf. Petra antwortet in kontextueller Sprache „alle“, worauf der Lehrer das gesamte Anteilsbild gestisch einkreist (Turn 28-29). Für das Ganze wird somit gemeinsam zwischen der bedeutungsbezogenen Sprache, dem Kontext und dem Anteilsbild übersetzt. In Turn 29 fragt der Lehrer nach der entsprechenden Übersetzung für den Teil. Über das Wort „hiervon“ bettet er dabei die Turns 25-29 zum Ganzen sowie nachfolgenden Turns 29-31a zum Teil in die Frage nach der Teil-Ganzes-Beziehung ein. In Turn 30 übersetzt Petra dann, indem sie die entsprechende Phrase „ein Hemd und eine Tasche“ aus der vorgegebenen Aussage (1) aufgreift. Der Lehrer übersetzt anschließend den Teil in das Anteilsbild, indem er das Rechteck einkreist. Zusätzlich artikuliert er die gesuchte Beziehung im Anteilsbild. Insgesamt wird hier in den Turns 25-31a für die gesamte Teil-Ganzes-Beziehung die Verknüpfung zwischen bedeutungsbezogener Sprache, Anteilsbild und der Wahrscheinlichkeitsaussage bzw. dem Kontext gemeinsam erklärt. In ähnlicher Weise erklärt Miriam einige Turns später die Verknüpfung zwischen bedeutungsbezogener Sprache und vorgegebener Aussage für die Teil-von-Teil Aussage (2): „weil diese größere Gruppe sozusagen ist ja dann „Hemd kauft“. Und dann der Teil von dem Teil ist ja dann die „Tasche“.“

### **Diskussion und Ausblick**

Um ihre Zuordnung zu erklären, versucht die Schülerin hier die Darstellungsvernetzung zur Aussage und greift auf das Verstehenselement „Teil“ in einer Darstellung zurück. Der Lehrer steuert daraufhin eine bestimmte Darstellungsvernetzung an: Er gibt mehrere kleinere Übersetzungsaufträge für das Ganze und den Teil und verknüpft über „hiervon“ zur Reflektion der Teil-Ganzes-Beziehung, sodass gemeinsam die Verknüpfung zwischen den Darstellungen für die Teil-Ganzes-Beziehung erklärt wird. Der Lehrer geht also über das reine Zurückgreifen auf das oberflächliche Merkmal „und“ zum Erkennen kombinierter Wahrscheinlichkeiten hinaus und versucht, durch die Darstellungsvernetzung die zugrundeliegende Teil-Ganzes-Struktur zu greifen. Dies gelingt ihm, indem er nicht nur für Teil oder Ganzes, sondern für strukturell bedeutsame Teil-Ganzes-Beziehung die Darstellungen explizit vernetzt.

Dieser kleine Ausschnitt deutet darauf hin, wie unterschiedlich Darstellungen vernetzt werden können. Er illustriert auch den Bedarf, genauer ausdifferenzieren, welche Impulse und Aktionen Lehrkräfte zur Unterstützung der Prozesse setzen müssen, um konzeptuelles Verständnis aufzubauen.

Ein wichtiger Aspekt scheint zu sein, für welche Verstehenselemente Darstellungsvernetzung angesteuert wird. Daher haben wir weitere Szenen aus insgesamt 6 Klassen analysiert und weitere Lehrkräftepraktiken im Sinne von Steuerungen von Lehrkräften rekonstruiert (Post & Prediger, submitted). Beispielweise sind uns Lehrkräfte aufgefallen, die im Gegensatz zu dem hier analysierten Beispiel lediglich die Übersetzung für Teil und Ganzes einfordern, ohne die Beziehung zu adressieren. Lehrkräfte adressieren die relevanten Verstehenselemente und die Vernetzung der Darstellungen dafür in unterschiedlicher Intensität. Es bleibt weiterhin genauer zu untersuchen, welche dieser Praktiken besonders hilfreich sind, um Darstellungsvernetzungsprozesse und somit Verständnisaufbau bei Lernenden zu unterstützen und wie Lehrkräfte hierfür sensibilisiert werden können.

**Dank.** Das Projekt MuM-Stochastik wird in der MuM-Forschungsgruppe unter Leitung von Susanne Prediger durchgeführt und durch das BMBF gefördert (Nr. 03VP02270).

## Literatur

- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1/2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational design research* (S. 17–51). Routledge.
- Leuders, T. & Loibl, K. (submitted). *Parts-of-parts thinking in Bayesian reasoning: Proportions instead of probabilities prevent averaging heuristics*. Submitted manuscript.
- Post, M. & Prediger, S. (submitted). *Teaching practices for unfolding information and connecting multiple representations: The case of conditional probability information*. Submitted manuscript.
- Prediger, S., Quabeck, K. & Erath, K. (2022). Conceptualizing micro-adaptive teaching practices in content-specific ways: A case study on comparing fractions. *Journal on Mathematics Education*, 13(1), 1–30. <https://doi.org/10.22342/jme.v13i1.pp1-30>
- Renkl, A., Berthold, K., Große, C. S. & Schwonke, R. (2013). Making better use of multiple representations: How fostering metacognition can help. In R. Azevedo & V. Aleven (Hrsg.), *International Handbook of Metacognition and Learning Technologies* (S. 397–408). Springer.
- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325–343. <https://doi.org/10.1007/s10857-010-9143-y>