Nicolas REGEL, Dresden

Auditive Erlebnisse als Ausgangspunkt für das Verketten und Verknüpfen von Funktionen

Das Verständnis von verketteten und verknüpften Funktionen stellt für Lernende oft eine große Herausforderung dar. Das überrascht nicht, denn das Operieren mit Funktionen als Ganzes im Sinne des Objektaspekts (Vollrath, 2014) setzt ein fortgeschrittenes Verständnis des Funktionsbegriffs voraus.

In diesem Artikel wird aufgezeigt, wie diese Operationen auf Funktionen hörbar gemacht werden können und durch auditive Erlebnisse die Entwicklung des Verständnisses um einen bisher wenig genutzten Zugang erweitert werden kann. Im Rahmen meiner Dissertation entwickle ich hierfür einen auf den Mathematikunterricht zugeschnittenen virtuellen Synthesizer, der einen explorativen Zugang zum Verketten und Verknüpfen von Funktionen mit direktem auditivem Feedback ermöglicht (siehe auch Regel 2020).

Zentrale Design-Elemente des Synthesizers

Die Klangerzeugung aller Synthesizer basiert auf der Erzeugung und Verknüpfung von mathematischen Funktionen. Der mathematische Hintergrund ist bei herkömmlichen Synthesizern aber nicht immer klar erkennbar und nicht auf eine Verwendung im Mathematikunterricht ausgerichtet.

Beim entwickelten Mathe-Synthesizer werden einzelne Funktionen durch Synthesizermodule (Bausteine des Synthesizers) repräsentiert, die untereinander mittels Kabelverbindungen verknüpft und verkettet werden können.

Um Funktionen zu verketten oder zu verknüpfen, werden die Kabel an den einzelnen Modulen in Buchsen gesteckt. Das Kabel stellt dabei eine Gleichung her oder definiert den Wert des Eingangs des nachfolgenden Moduls als den des Ausgangs des vorherigen Moduls.

Die Herstellung einer bestimmten Verkabelung der Module (auch „Patch“ genannt) geschieht sehr intuitiv. Aus einem Patch lässt sich die zugehörige Funktionsgleichung meist direkt ablesen (Regel, 2021). Der QR-Code in der Abbildung führt zur Website des Mathe-Synthesizers. Dort sind unter anderem eine ausführliche Anleitung und Videobeispiele zu finden.

Das Potential des Synthesizers anhand eines illustrierenden Beispiels

Beispielhaft wird die Funktion $k(\mathrm{t}) = e^{((1{,}5 \cdot sin(4 \cdot 2\,\pi \cdot t))^2 \cdot sin(600 \cdot 2\pi \cdot t))}$ betrachtet. Auch wenn die Funktion k auf den ersten Blick komplex aussieht, so könnte sie problemlos das Ergebnis eines explorativen Sounddesignprozesses mit dem Mathe-Synthesizer sein. Zwei Patches, die zur Funktion *k*

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

führen, sind in der Abbildung zu sehen. Im Folgenden wird erläutert, wie sich der Einfluss einzelner Funktionsteile analysieren, mit der Gesamtfunktion vergleichen und so eine komplexe Funktion Schritt für Schritt erschließen lässt.

Die Funktion k lässt sich entlang des Kabelverlaufs erschließen: Im Beispiel ist der Ausgangspunkt eine Sinusfunktion g mit $g(t) = sin(600 \cdot 2\pi \cdot t)$, die mit einer Frequenz von 600 Hz im hörbaren Frequenzbereich liegt. Damit multiplikativ verknüpft wird die Verkettung der zwei Funktionen f und h mit $f(t) = 1{,}5 \cdot sin(4 \cdot 2\pi \cdot t)$ und $h(a) = a^2$. Allein wäre die periodische Funktion f mit einer Frequenz von 8 Hz nicht als Ton wahrnehmbar, wohl aber durch die multiplikative Verknüpfung mit der hörbaren Funktion $i(t) = \left(1{,}5 \cdot sin(4 \cdot 2\pi \cdot t)\right)^2 \cdot sin(600 \cdot 2\pi \cdot t)$.

Dieser komplex wirkende Ausdruck kann nun aber auditiv so erschlossen werden, dass den einzelnen Elementen eine Bedeutung zukommt. Wird nämlich eine periodische Funktion mit niedriger Frequenz mit einer periodischen Funktion im hörbaren Spektrum multiplikativ verknüpft, kann in der resultierenden Funktion die Frequenz des einen Faktors als Tonhöhe und die des anderen als periodische Schwankung der Lautstärke, also der Amplitude der Funktion, wahrgenommen werden. Auch nicht periodische Funktionen können so als Lautstärke oder Frequenzverlauf hörbar gemacht werden. Reiter (2008) nutzt dies beispielsweise, um mit Graphen zu komponieren.

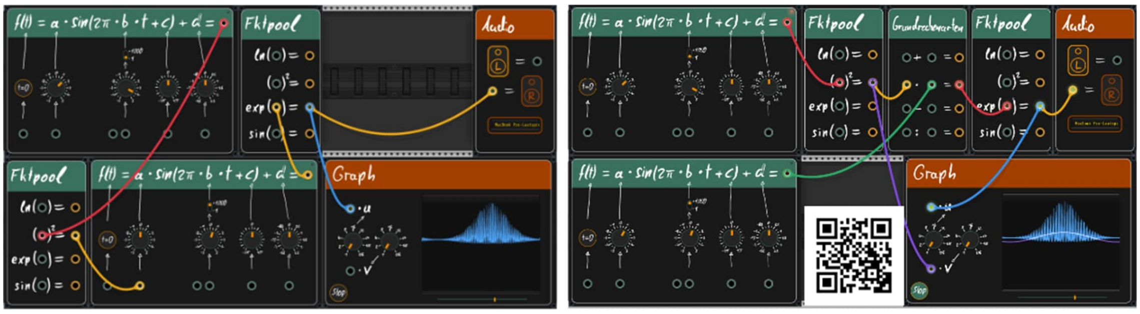

Abb. 1: Zwei Patches mit dem Mathe-Synthesizer zur Darstellung der Funktion k.

Selbst mehrfache Verkettungen wie im Beispiel, indem die Funktion i an eine Exponentialfunktion j mit $j(b) = e^b$ angeschlossen wird und so zu Funktion k führt, sind sinnvoll auditiv interpretierbar: Die Verkettung $j \circ i$ fügt dem Klangbild einige Obertöne hinzu, wodurch der Klang etwas „schärfer“ wird. Musikalisch würde man hier von einem Zerreffekt sprechen, mathematisch entsprechen die hörbaren Obertöne der Fourier-Transformierten der Funktion. Im Sounddesignprozess kann die Wirkung einzelner Verknüpfungen und Verkettungen leicht mithilfe einer zentralen Mechanik des Mathe-Synthesizers überprüft werden: Die orangen Feedback-Module können wie die anderen Module auch frei verkabelt und verschoben werden. So kann beispielsweise, wie in der Abbildung zu sehen, die Teilfunktion $h(f(t)) = (1{,}5 \cdot sin(4 \cdot 2\pi \cdot t))^2$ mit der Gesamtfunktion visuell (Graph-Modul) und auditiv (Audio-Modul) verglichen werden. Auch kleine Unterschiede in der Klangfarbe, wie sie oben durch die Verkettung mit der Exponentialfunktion beschrieben ist, können so leicht herausgehört werden und der Einfluss der Verkettung so leichter als in der symbolischen Darstellung erfasst werden.

Didaktische Analyse und didaktisches Potential

Zwei Aspekte sind bei diesem Ansatz neu, sowohl die haptische Darstellung von Verknüpfungen und Verkettungen als auch die auditive Komponente.

Zur Darstellung: Verknüpfungen zwischen zwei Funktionen können beim Mathe-Synthesizer auf zwei Arten erzeugt werden. Es kann das Grundrechenarten-Modul genutzt werden oder es können Funktionen an die Parameter anderer Funktionen angeschlossen werden. Darin unterscheiden sich die Patches in der Abbildung. Symbolisch entsprechen sich die Varianten, bzgl. der zugrundeliegenden Vorstellungen und Handlungen am Synthesizer gibt es aber wesentliche Unterschiede:

Wird eine Sinusfunktion an den Amplitudenparameter einer anderen angeschlossen, korrespondiert damit die Vorstellung, dass die eine Sinusunktion ein Phänomen als Objekt beschreibt, während eine andere dieses Phänomen periodisch skaliert, also das Objekt variiert. Eine Funktion moduliert also den Parameter einer anderen. Diese Modulationssicht oder Modulationsvorstellung ist sehr nützlich. Damit lässt sich das Wissen um Parametereinflüsse nutzen, um komplexere Funktionen zu erschließen. Der Mathe-Synthesizer unterstütz das visuell, indem sich die Drehknöpfe der angeschlossenen Parameter entsprechend der modulierenden Funktion mitbewegen.

Verwendet man das Grundrechenarten-Modul, ist zu vermuten, dass eher eine Gleichwertigkeit der Faktoren angenommen wird. Aus der Physikdidaktik gibt es vergleichbare empirische Untersuchungen zum symbolischen Formelverständnis zum Beispiel bei Sherin (2001).

Der zweite neue Aspekt ist die bisher kaum genutzte auditive Repräsentation der Funktionen. Hier ergeben sich neue authentische Modellierungsanlässe. So kann der Synthesizer genutzt werden, um den Klang von bestimmten Instrumenten nachzubilden. Dabei wird auch der Modellierungskreislauf, wie ihn z.B. Blum & Leiss (2005) beschreiben, immer wieder durchlaufen, indem ein Parameter des Synthesizers geändert und anschließend mit dem zu modellierenden Klang verglichen wird (Aufgabenbeispiel bei Regel 2021). Auditive Erlebnisse können darüber hinaus „authentische Kommunikationsanlässe“ sein und das Denken mit Prototypen nach Dörfler ergänzen (vgl.

Reiter 2013, S. 15ff und S. 143ff). Im oben beschriebenen Beispiel sind solche Kommunikationsanlässe beispielsweise verschiedene Hörphänomene, die sich abhängig von der Frequenz der Funktion f ergeben.

Diskussion und Ausblick

Der Mathe-Synthesizer als Lernumgebung kann sein Potential besonders in fächerverbindenden oder fachübergreifenden Unterrichtssequenzen entfalten. So können neben periodischen Funktionen im Mathematikunterricht auch Schwingungsphänomene der Physik, wie Schwebungen, leicht verdeutlicht werden und musikalische Fragestellungen als Ausgangspunkt für mathematische Untersuchungen dienen. Aber auch der Einsatz im Mathematikunterricht allein, bietet aufgrund der haptischen Verknüpfungs- und Verkettungsmechanik und dem auditiven Feedback eine neue Perspektive auf periodische und komplex verknüpfte und verkettete Funktionen.

Meine Arbeit mit dem Synthesizer fokussierte sich bisher auf stoffdidaktische Analysen und die konkrete Entwicklung des Synthesizers als Lernumgebung. Perspektivisch wird unter anderem folgenden Fragen nachgegangen, die im weiteren Verlauf noch ausgeschärft werden müssen:

Können auditive Erlebnisse als neuer angesprochener Sinneskanal einen Beitrag zu einem intuitiven Verständnis des Einflusses von Teilfunktionen liefern? Werden durch die Modulationssicht beim Verknüpfen von Funktionen neue Grundvorstellungen aufgebaut, die bei Funktionsuntersuchungen aktiviert werden? Inwiefern kann dieser Ansatz einen Beitrag zur Binnendifferenzierung leisten?

Literatur

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren, 128*, 18–21.

Regel, N. (2020). Mathematik hören – Analysis mit dem Synthesizer. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 749–752). Münster: WTM.

Regel, N. (2021). Funktionen mit dem Synthesizer fächerübergreifend darstellen und erkunden. In K. Hein, C Heil, S. Ruwisch. & S. Prediger (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021* (S. 169–172). WTM-.

Reiter, S. (2013). *Musikalische Graphen – Entwicklung eines Verständnisses graphischer Darstellungen im Fächerübergreifenden Mathematik- und Musikunterricht*. Waxmann.

Sherin, B. (2001). *How Students Understand Physics Equations*. Routledge.

Vollrath, H.-J. (2014). Funktionale Zusammenhänge. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik* (S. 112–126). Friedrich.