

## **Diagnose von Verstehensgrundlagen zu linearen funktionalen Zusammenhängen**

Funktionale Zusammenhänge ziehen sich als eine der fundamentalen Ideen spiralcurricular durch die Jahrgangsstufen. Dabei bauen die Themen über die Jahre hinweg aufeinander auf, sodass unverstandene Aspekte des Funktionsbegriffs einer niedrigeren Jahrgangsstufe das weitere Lernen in einer höheren Jahrgangsstufe behindern könnten. Die inhaltlichen Vorstellungen einer niedrigeren Ebene innerhalb des Funktionsbegriffs, die zum Weiterlernen auf einer höheren Ebene benötigt werden, werden hier als Verstehensgrundlagen des Funktionsbegriffs bezeichnet (vgl. Prediger & Schink, 2014). Insbesondere infolge der Corona-Pandemie stellt sich die Frage, welche Verstehensgrundlagen des Funktionsbegriffs wichtig aufzuarbeiten wären und wie diagnostiziert werden kann, inwiefern die notwendigen Verstehensgrundlagen bereits vorhanden sind. Dies könnte es ermöglichen, fehlende Verstehensgrundlagen zu fördern, auch wenn der Unterricht bereits eine höhere Ebene des Funktionsbegriffs fokussiert. Im Folgenden werden zunächst im theoretischen Hintergrund relevante Verstehensgrundlagen des Funktionsbegriffs identifiziert. Im Anschluss wird ein Diagnosebaustein zum Diagnostizieren dieser Verstehensgrundlagen vorgestellt. Erste empirische Einblicke zeigen auf, wie unterschiedlich die rekonstruierten Ressourcen und Schwierigkeiten der Lernenden sind. Dies gibt Aufschluss darüber, an welchen Stellen eine diagnosegeleitete Förderung ansetzen könnte.

### **Theoretischer Hintergrund**

Es gibt in der Literatur unterschiedliche Konzeptualisierungen, was es heißt, funktionale Zusammenhänge zu verstehen (Niss, 2014; für Beispiele vgl. Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008; Leinhardt et al., 1990).

Um die hier fokussierten Verstehensgrundlagen näher zu spezifizieren, werden folgende Konzeptualisierungen des Verstehens funktionaler Zusammenhänge herangezogen, da sie im Sinne des spiralcurricularen Gedankens bei allen Funktionstypen als relevant erachtet werden können:

- Darstellungsvernetzungen *tabellarischer, graphischer, symbolischer* und *verbaler* Darstellungen (Leinhardt et al., 1990; Niss, 2014)
- Grundvorstellungen (Vollrath, 1989): *Zuordnung, Kovariation, Funktion als Ganzes*
- Verstehenselemente zum Kern des Funktionsbegriffs als die kleinsten Denkeinheiten, die zum Begriffsverständnis gehören (Zindel, 2019):

- *Funktionale Abhängigkeit*: Eine Funktion als Zusammenhang bzw. Abhängigkeit verstehen
- *Richtung der Abhängigkeit*: Identifizieren können, welche Größe in einer Situation abhängig ist von der anderen
- *Beteiligte Größen*: Identifizieren können der Bedeutung der Variablen

Um diese Verstehensgrundlagen diagnostizieren zu können, bedarf es Aufgaben, die die individuellen Vorstellungen von Lernenden sichtbar machen. Verbalisierungen bzw. Schreibaufträge könnten entsprechend diagnostisch aufschlussreich sein. Dabei ist es wichtig, zwischen den Sprachhandlungen ‚Beschreiben von Rechenwegen‘ und ‚Erklären von Bedeutungen‘ zu unterscheiden (Prediger, 2021). Das Beschreiben von Rechenwegen ist oftmals weniger anspruchsvoll als das Erklären von Bedeutungen, da beim Beschreiben nicht unbedingt inhaltliche Vorstellungen benötigt werden.

### **Design des Diagnosebausteins**

Im Rahmen des Projekts „MaCo – Mathematik aufholen nach Corona“ (maco.dzlm.de) wurden im Teilprojekt zu den funktionalen Zusammenhängen unter anderem ein Diagnose- und ein Förderbaustein zur Aufarbeitung der Verstehensgrundlagen zu linearen funktionalen Zusammenhängen entwickelt (Khazaei, Zindel, Kempen, & Niederquell, 2022), wobei in diesem Beitrag auf den Diagnosebaustein fokussiert wird. Dieser fordert Darstellungswechsel zu allen o.g. Darstellungen ein und enthält diverse Schreibaufträge, um die individuellen Vorstellungen rekonstruieren zu können. Erprobt wurde der Diagnosebaustein bislang in 8 Klassen der Jahrgangsstufe 8 einer Gesamtschule ( $n=147$ ). Ausgewertet wurden bislang die 6 Erweiterungskurse ( $n=127$ ). Dazu wurden die Bearbeitungen von jeweils zwei Kodierern entlang eines zuvor entwickelten Kodierleitfadens kodiert.

### **Empirische Einblicke**

Im Folgenden werden zunächst zwei Beispiele gezeigt, um zu illustrieren, wie unterschiedlich die identifizierten Ressourcen und Schwierigkeiten der Lernenden sein können. Die Bedeutung der Variablen  $x$  wird von Kenan (Abb. 1) korrekt beschrieben. Die Variable  $g(x)$  wird hingegen nicht mit Bedeutung gefüllt, sondern als Name der Gleichung angesehen. Die Bedeutung der Konstanten wird passend erklärt. Die Erklärung der Bedeutung von  $g(3)$  ist zwar noch nicht vollständig korrekt, bildet aber einen Anknüpfungspunkt, auf den man bei einer Förderung aufbauen könnte. Es fehlt noch die

Klärung der Bedeutung des  $g(x)$  und die Vorstellung, dass ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Variablen ausgedrückt wird.

a) Wofür stehen die Variablen  $x$  und  $g(x)$  im Kontext von HelloStream?  
Welche Bedeutung haben die 9 und die 28 im Kontext?

*X steht für die gekauften Filme.  $g(x)$  steht für die Gleichung. 3 steht für 9 € pro Film. 28 steht für die Grundgebühr*

b) Was bedeutet  $g(3)$ ? *Das Es bedeutet, dass 3 Filme gekauft werden.*

c) Wie könnte ein passender Angebotstext von HelloStream lauten?

HelloStream  
*Pro film nur 9 €, egal welcher*

Abb. 1: Bearbeitung von Kenan

In Lisanns Bearbeitung (Abb. 2) werden die beteiligten Größen mit den beteiligten Konstanten gleichgesetzt. In Aufgabenteil b) wird der Rechenweg beschrieben anstatt die Bedeutung erklärt. Dies könnte möglicherweise daran liegen, dass keine tragfähige Vorstellung zur Variablen  $g(x)$  vorhanden ist. In dem entworfenen Angebotstext werden zudem keine Variablen angesprochen, sondern nur ein konstanter Gesamtpreis. Möglicherweise fehlen hier auch Variablenvorstellungen.

a) Wofür stehen die Variablen  $x$  und  $g(x)$  im Kontext von HelloStream?  
Welche Bedeutung haben die 9 und die 28 im Kontext?

*Die 9 ist die Anzahl der gekauften Filme  
Die 28 ist der Preis*

b) Was bedeutet  $g(3)$ ? *Die 3 ist das  $x$ . Also 3 wird für  $x$  eingesetzt*

c) Wie könnte ein passender Angebotstext von HelloStream lauten?

HelloStream  
*Gesamtpreis 28 €*

Abb. 2: Bearbeitung von Lisann

Im Vergleich der Bearbeitungen fällt auf, dass das Erklären der Bedeutung und das Versprachlichen zu sehr unterschiedlichen Schriftprodukten führt. Teilweise werden die beteiligten Größen korrekt identifiziert, teilweise werden Bedeutungen unpassend erklärt und teilweise wird auf das  $g(x)$  überhaupt nicht eingegangen. In Kenans Bearbeitung wird im Ansatz auch das Verstehenselement der Richtung der Abhängigkeit adressiert, auch wenn die Bedeutung des  $g(x)$  implizit bleibt.

Lisann und Kenan zeigen damit nur in Teilen gesicherte Verstehensgrundlagen des Funktionsbegriffs. Dies zeigt sich auch in anderen Bearbeitungen.

Insgesamt gelingt es nur 3 % der Lernenden, die Bedeutung der Variablen vollständig zu erklären, wobei 14% in der Lage sind, passende Angebotstexte zu verfassen. Die Fragen nach der Bedeutung der Variablen bzw. von  $g(3)$  erweisen sich damit als informativ, um existierende und fehlende Verstehensgrundlagen zu diagnostizieren, da hier Unterschiede in den identifizierten Größen, der Formulierung eines Zusammenhangs der Größen und der Richtung der Abhängigkeit sichtbar werden.

## Fazit und Ausblick

Ziel war die Entwicklung eines Diagnosebausteins, der nicht nur erfasst, welche Darstellungswechsel funktionieren, sondern vor allem auch die dahinterliegenden individuellen Vorstellungen sichtbar macht, um davon ausgehend Anknüpfungspunkte für eine Förderung identifizieren zu können. Die ersten Einblicke in diesem Beitrag zeigen, dass diese individuellen Vorstellungen sich an den Schriftprodukten zur Erklären von Bedeutung gut rekonstruieren lassen. Im Vortrag werden detailliertere Einblicke in die rekonstruierten Ressourcen und Schwierigkeiten der Lernenden sowie die daraus abgeleiteten Förderbedarfe präsentiert.

## Literatur

- Khazaei, N., Zindel, C., Kempen, L. & Niederquell, J. (2022). *Lineare Funktionen verstehen - Diagnosebaustein*. Open Educational Ressource, zugänglich unter [maco.dzlm.de](http://maco.dzlm.de)
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64.
- Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 238–241). Springer.
- Oehrtman, M., Carlson, M. & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Hrsg.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (S. 27–42). Mathematical Association of America.
- Prediger, S. (2021). Von Unterrichtsforschung zu Design-Research auf Professionalisierungsebene: Diskurssensible Gesprächsführung lernen. In U. Quasthoff, M. Morek & V. Heller (Hrsg.), *Diskurserwerb in Familie, Peergroup und Unterricht: Passungen und Teilhabechancen* (S. 347–377). De Gruyter.
- Prediger, S. & Schink, A. (2014). Verstehensgrundlagen aufarbeiten im Mathematikunterricht – fokussierte Förderung statt rein methodischer Individualisierung. *Pädagogik*, 66(5), 21–25.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10(1), 3–37.
- Zindel, C. (2019). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen: Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung*. Springer.