Fiene BREDOW, Bremen & Christine KNIPPING, Bremen

Die Prozess-Produkt Dualität von mathematischen Objekten beim Argumentieren im Mathematikunterricht

Mathematische Objekte sind abstrakt und oftmals nicht sichtbar. Beispielsweise lassen sich Terme, Variablen und auch Gleichungen nur bedingt haptisch erfassen. Dennoch haben Schüler*innen individuelle Sichtweisen auf mathematische Objekte und ganz eigene Vorstellungen davon. Sfard (1987, S. 162) unterscheidet zwischen einer operationalen, prozessorientierten (‚operational conception') und einer strukturellen, produktorientierten Sichtweise (‚strutural conception') auf mathematische Objekte. Im Übergang von der Arithmetik zur Algebra ist diese Prozess-Produkt Dualität mathematischer Objekte eine besondere Herausforderung für Schüler*innen und ihre Lehrkräfte (vgl. Kieran, 2020). In mathematischen Argumenten bilden in der Regel mathematische Objekte und ihre Beziehungen den inhaltlichen Kern. Wie sich die Prozess-Produkt Dualität und damit eine prozess- oder produkthafte Deutung von mathematischen Objekten wiederum in mathematischen Argumentationen im Unterricht widerspiegelt und welche Bedeutung ihr dabei zukommt, wird in diesem Beitrag fokussiert. Herausforderungen, die sich für Lernende ergeben, werden benannt.

Brunner (2014) beschreibt, dass im Mathematikunterricht formal-deduktive Beweise und damit kalkülorientierte Argumentationen dominieren. In solchen Argumentationen wird häufig auf prozesshafte Umformungen von Symbolen fokussiert. Hierbei bleibt die algebraische Symbolsprache oft unverstanden und Lernende zeigen Probleme, die eigentlichen Strukturen der algebraischen Symbolsprache zu erfassen (Kieran, 2020; Pedemonte, 2008). Dabei ist es in mathematischen Argumentationen oft entscheidend mathematische Strukturen zu ‚be-greifen', also eine produktorientierte Sichtweise einzunehmen, und mit diesen Strukturen zu argumentieren, um allgemeingültige Argumente zu entwickeln (Bredow & Knipping, im Druck).

In diesem Artikel werden Argumentationen im Mathematikunterricht und die Deutung von mathematischen Objekten in ihnen fokussiert und ein Blick auf Argumente in verschiedenen Repräsentationen gerichtet. Dabei wird folgende Forschungsfrage thematisiert: Wie spiegelt sich eine prozessorientierte oder eine produktorientierte Interpretation von mathematischen Objekten in den mathematischen Argumenten in verschiedenen Repräsentationen wider? Exemplarisch wird anhand von zwei schulischen empirischen Beispielen im Übergang von der Arithmetik zur Algebra angedeutet, wie diese Dualität Schüler*innen herausfordert, insbesondere durch verschiedene Repräsentationen (hier: arithmetisch vs. algebraisch).

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Theoretischer Hintergrund und ausgewählter Forschungsstand

Mathematisches Argumentieren ist ein sozialer Prozess, in dem mathematische Geltungsansprüche ausgehandelt werden, mit dem Ziel, ein mathematisches Argument zu konstruieren (vgl. Krummheuer, 2015). Argumente können dabei in verschiedenen Repräsentationen gefasst werden. Beispielsweise können Argumente enaktiv, ikonisch oder symbolisch repräsentiert sein (vgl. Bruner, 1974). Symbolische Argumente lassen sich wiederum in symbolisch-arithmetische, symbolisch-narrative und symbolisch-algebraische Argumente ausdifferenzieren (Reid & Knipping, 2010). Darüber hinaus unterscheiden Argumente sich hinsichtlich ihrer Gültigkeit und Reichweite. Im Übergang von der Arithmetik zur Algebra sind nicht nur algebraische Argumente, mit den für die Schüler*innen neuen Variablen, herausfordernd. Auch Argumente in anderen Repräsentationen, wie etwa arithmetische Argumente, müssen erlernt werden, obwohl sie weniger abstrakt und formal sind als algebraische Argumente (Biehler & Kempen, 2016).

Alle diese Argumente in verschiedenen Repräsentationen können potenziell auf eine prozess- oder eine produktorientierte Weise gelesen und gedeutet werden. Bei der operationalen, prozessorientierten Sichtweise werden mathematische Objekte als Prozess, Algorithmus oder Handlung und damit dynamisch wahrgenommen (Sfard, 1987). Im Gegensatz dazu wird bei der strukturellen, produktorientierten Sichtweise ein mathematisches Objekt als statisches Konstrukt, als Objekt gefasst (Sfard, 1987). Beispielsweise kann man algebraische Notationen, wie z.B. Terme, operational interpretieren, indem man sie als Rechenvorschrift liest. Fasst man Terme als ganzes Objekt, als eine Art Bauplan auf, nimmt man eine strukturelle Sichtweise ein.

Methodisches Vorgehen

Das Datenmaterial stammt aus einem Projekt zur Rolle der Lehrkraft beim mathematischen Argumentieren im Übergang von der Arithmetik zur Algebra, in welchem die unterrichtliche Realisierung einer Lernumgebung in drei achten Klassen erhoben wurde (4 bzw. 5 Doppelstunden). Ausgehend von Transkripten der Unterrichtsgespräche wurden in den Analysen mathematische Argumentationen fokussiert. Die mathematischen Argumentationsprozesse wurden mittels Interaktionsanalysen (Krummheuer, 2015) untersucht und die hervorgebrachten Argumente rekonstruiert (Toulmin, 1958). In diesem Artikel werden die unterrichtlichen Argumentationsprozesse und rekonstruierten mathematischen Argumente (n=119) in Hinblick auf Argumentationslücken untersucht und die Herausforderungen in den Repräsentationen in Bezug auf die Prozess-Produkt Dualität herausgearbeitet.

Ergebnisse

Im Folgenden werden zwei Argumentationsprozesse zu der Aussage „Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer das Dreifache der mittleren Zahl." betrachtet und diskutiert, die typische Herausforderungen illustrieren. Die Lernenden haben zuvor einige Zahlenbeispiele berechnet, die obige Vermutung und einen Begründungsansatz erstellt.

Im ersten Beispiel stellt Jessica ihren arithmetischen Begründungsansatz vor. Sie beginnt mit der Gleichung „3+4+5=4+4+4" und begründet die Gleichheit, wie folgt: „Weil man von 5 einen abziehen kann und den zu 3 dazutun kann." Sie hat somit eine Beziehung zwischen den Zahlen erkannt und nutzt deren mathematische Strukturen. Dies erfordert eine produktorientierte Deutung des Terms. Jessica setzt fort die Gleichung fort „4+4+4=3·4=12" und sagt: „Und das ist dann halt genauso wie drei mal vier. Und das ist dann ja zwölf." Sie berechnet damit prozessorientiert das Ergebnis. In ihrer Argumentation fehlt ein (expliziter) Rückbezug zu der ursprünglichen Aussage und es findet keine Loslösung vom konkreten Zahlenbeispiel statt. Eine Generalisierung bleibt somit aus und es wird kein allgemeingültiges Argument konstruiert, sondern lediglich eine Umformung durchgeführt.

In einer anderen Klasse wird ein algebraisches Argument präsentiert. Dante hat die Gleichung „2·m+1+2·m+2+2·m+3=6·m+6=6·(m+1)= 3·2(m+1)" erarbeitet (zuvor wurde mit (un-)geraden Zahlen gearbeitet). Seine Termumformungen begründet er prozessorientiert. Der Ergebnisterm „3·2(m+1)" drückt laut Dante die Teilbarkeit durch drei aus, weil „am Ende steht drei mal zwei." Er bezieht sich also auf die Termstruktur (produktorientiert) und ein Rückbezug zu der ursprünglichen Aussage findet statt. Auf den ersten Blick erscheint dieses algebraische Argument weniger herausfordernd. Anders als bei dem arithmetischen Argument liegt eine Hürde bereits im Aufstellen des Terms, wie an Dantes Term erkennbar. Wenn ein algebraischer Term aufgestellt wird, muss eine mathematische Struktur generalisiert und mit Variablen ausgedrückt werden. Unabhängig von einem Zahlenbeispiel zu arbeiten, ist dabei eine Herausforderung für viele Lernende.

Zusammenfassung und Fazit

Insgesamt zeigen die Daten, dass beim mathematischen Argumentieren im Übergang von der Arithmetik zur Algebra die Erfassung von mathematischen Strukturen, also eine produktorientierte Deutung von Termen, wesentlich und zugleich herausfordernd für Lernende und ihre Lehrkräfte ist. Zusätzlich stellen Generalisierungen eine Herausforderung für Schüler*innen dar und ergeben sich nicht automatisch durch eine produktorientierte Interpretation der mathematischen Objekte. Dies unterrichtlich zu begleiten ist für Lehrkräfte komplex. Für die Konstruktion von allgemeingültigen Argumenten ist es notwendig zu generalisieren. Dabei sind Generalisierungen an verschiedenen Punkten der Argumentation möglich. Bei arithmetischen Argumenten findet eher gegen Ende eine Generalisierung statt, indem die allgemeine mathematische Struktur aus dem Beispiel abstrahiert wird. Bei algebraischen Argumenten ist dagegen bereits bei der Konstruktion von Anfangstermen eine generalisierte Darstellung und produktorientierte Erfassung der allgemeinen mathematischen Struktur notwendig.

Insgesamt zeigt sich auch empirisch, dass die Prozess-Produkt Dualität von mathematischen Objekten herausfordernd für Lernende ist (Sfard, 1987), gerade beim mathematischen Argumentieren. Für einen produktiven Umgang mit den Anforderungen in den verschiedenen Repräsentationen und für eine Initiierung eines Austausches über verschiedene Deutungen ist die Lehrkraft von besonderer Bedeutung. Wie Lehrkräfte Interaktions- und Argumentationsprozesse rahmen, ist ein weiterer Fokus unserer Forschung (vgl. Bredow & Knipping, im Druck), der hier nur angedeutet werden kann.

Literatur

Biehler, R. & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 141–179. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0097-1

Bredow, F. & Knipping, C. (im Druck). How teachers address process-product dualities in mathematical argumentation processes. In *Proceedings of the 12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12).*

Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin-Verlag.

Brunner, E. (2014). Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*(2), 229–249. https://doi.org/10.1007/s13138-014-0065-6

Kieran, C. (2020). Algebra Teaching and Learning. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2. Auflage, S. 36–44). Springer.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Hrsg.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (S. 51–74). Springer.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM*, *40*(3), 385–400. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0085-0

Reid, D., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. In J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, S. 162–169). PME.

Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge University Press.