

Femke SPORN, Kiel, Daniel SOMMERHOFF, Kiel & Aiso HEINZE, Kiel

## **Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen von Lernenden der Klassenstufen 8 bis 11**

Beweise sind zentrales Element der Mathematik als Wissenschaft. Entsprechend stellen sie in der mathematischen Ausbildung ein wichtiges Lernziel dar (Reiss & Ufer, 2009), was bspw. durch die Einbettung in die Bildungsstandards deutlich wird (vgl. KMK, 2003). Empirische Untersuchungen haben jedoch wiederholt in verschiedenen Jahrgängen und Kontexten gezeigt, dass Lernende Schwierigkeiten mit mathematischen Beweisen haben (Healy & Hoyles, 1998; Heinze, 2004). Diese Schwierigkeiten lassen sich u.a. durch unzureichendes Wissen über Beweise (aufgefasst als Objekte) und den Umgang mit Beweisen (aufgefasst als Prozesse wie bspw. das Konstruieren oder Validieren) erklären (Heinze & Reiss, 2003). Entsprechendes *Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen* kann wiederum als ein Aspekt individuellen *Beweisverständnisses* beschrieben werden (Sporn et al., 2021).

### **Theoretischer Hintergrund**

Das Wissen von Schüler\*innen über Beweise und den Umgang mit Beweisen stand bereits häufig im Fokus bisheriger Forschung (z.B. Heinze & Reiss, 2003). Im Rahmen einer solchen individuell-psychologischen Perspektive auf Beweise und den Umgang mit Beweisen wurden im Wesentlichen zwei verschiedene methodische Fokusse als Herangehensweisen gewählt (vgl. Sporn et al., 2021): Basierend auf einem konzeptorientierten (KO) Fokus auf Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen werden mathematische Beweise oder beweisbezogene Handlungssituationen im Allgemeinen, d.h. ohne Bezug auf eine konkrete Aufgabe oder Aussage, betrachtet (z.B. Andersen, 2018). Basierend auf einem handlungsorientierten (HO) Fokus wird wiederum stets eine konkrete mathematische Aufgabe oder Aussage, bspw. die Konstruktion oder Validierung eines spezifischen Beweises, betrachtet (z.B. Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2003). Dass die Unterscheidung beider Fokusse auf das Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen inhaltlich sinnvoll und empirisch nachweisbar ist, hat sich im Rahmen einer Untersuchung von Studienanfänger\*innen bereits gezeigt (Sporn et al., 2021).

In verschiedenen Studien wurde das Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen bereits untersucht (z.B. Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2003). Dabei wurde die Unterscheidung in KO und HO Wissen jedoch nicht systematisch verfolgt. Auch sind teilweise das theoretisch beschriebene Konstrukt und die Art der Erfassung nicht in Gänze zueinander passend. Gleichwohl machen Untersuchungen wie von Healy und Hoyles (1998) und

Reiss et al. (2001) deutlich, dass das HO Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen in der Ausprägung, in der es bei den Lernenden vorliegt, nicht ausreichend für einen erfolgreichen Umgang mit mathematischen Beweisen ist. Auch die Untersuchungen zum Methodenwissen von Heinze und Reiss (2003), welche dieses als Bedingungsfaktor der Beweiskompetenz beschreiben, legen nahe, dass unzureichendes HO Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen Schwierigkeiten im Umgang mit Beweisen erklären können. Entsprechend deutlich wird die Bedeutung eines solchen Wissens im Speziellen und damit auch die eines individuellen Beweisverständnisses im Allgemeinen für die Beweiskompetenz bzw. einen erfolgreichen Umgang mit mathematischen Beweisen.

Weiter wurden in der bisherigen Forschung zwar verschiedene Altersgruppen von Lernenden betrachtet, die entsprechenden Ansätze waren jedoch sehr unterschiedlich. Aktuell ist wenig darüber bekannt, wie das Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen über verschiedene Klassenstufen hinweg ausgeprägt ist. Es lässt sich vermuten, dass sich im Laufe der Schulzeit das Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen der Lernenden verändert. Da basierend auf den curricularen Vorgaben Beweise fortlaufend in den Mathematikunterricht integriert und im Allgemeinen im Anspruch steigend implementiert sind (bspw. zunehmende Allgemeinheit und formale Strenge), sollten aus normativer Perspektive Quantität und Qualität des Wissens sowohl KO als auch HO zunehmen.

### **Forschungsfragen**

Basierend auf dem dargestellten theoretischen Hintergrund und den aufgezeigten Forschungsdesiderata ergibt sich folgende Forschungsfrage: Wie lässt sich das KO und HO Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen von Schüler\*innen der Klassenstufen 8 bis 11 beschreiben und inwiefern zeigen sich Unterschiede zwischen beiden Fokussen?

### **Methode**

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurden insgesamt  $n = 456$  (183 M, 263 W, 10 D) Schüler\*innen der Klassen 8 bis 11 von sieben Gymnasien und einer Gemeinschaftsschule am Ende des Schuljahres 2020/2021 mithilfe eines Online-Fragebogens u.a. zu ihrem Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen befragt ( $n_{KL. 8} = 139$ ;  $n_{KL. 9} = 122$ ;  $n_{KL. 10} = 72$ ;  $n_{KL. 11} = 123$ ). Alle Lernenden bearbeiteten dieselben Aufgaben. 18 Aufgaben adressierten das KO Wissen (Bewertung von Aussagen zu mathematischen Beweisen und dem Umgang mit Beweisen; 6-stufige Likert-Skala;  $\alpha = .75$ ) und sechs Aufgaben das HO Wissen (Validierung von sechs konkreten, fehlerhaften Beweisversuchen; dichotomes Antwortformat;

$\alpha = .60$ ). Es wurden ausschließlich mathematische Inhalte genutzt, die zum Zeitpunkt der Befragung bereits allen Teilnehmenden bekannt waren.

Für die Analyse der Daten wurden die Angaben der Schüler\*innen unter Berücksichtigung fachmathematischer und sozio-mathematischer Normen bewertet. Sowohl für das KO als auch für das HO Wissen wurden die Aufgabenbewertungen zu Mittelwerten ( $M_{KO}$  und  $M_{HO}$ ) zusammengefasst und auf Werte von 1 (gering) bis 6 (hoch) skaliert. Neben der deskriptiven Analyse der Daten wurden zwei lineare Regressionen mit  $M_{KO}$  bzw.  $M_{HO}$  als abhängige Variable und der Klassenstufe als unabhängige Variable durchgeführt.

## **Ergebnisse**

Eine deskriptive Analyse der Daten zeigte zunächst einen Anstieg des KO Wissens von Klassenstufen 8 bis 11 auf insgesamt mittlerem Niveau. Im Gegensatz dazu stagnierte das HO Wissen im Vergleich der Klassenstufen auf mittlerem, jedoch numerisch etwas geringerem Niveau. Im Vergleich zeigten sich tendenziell größere Standardabweichungen in höheren Klassenstufen und beim HO Wissen größere Standardabweichungen als beim KO Wissen.

Zur Absicherung der deskriptiven Analysen wurden lineare Regressionen gerechnet. Für KO Wissen bestätigte sich der positive Trend bei zunehmender Klassenstufe. Das lineare Modell zeigte einen besseren Fit als das Nullmodell. Beim HO Wissen hingegen konnte kein signifikanter Effekt der Klassenstufe gefunden werden, was sich beim Vergleich zum Nullmodell bestätigte. Die Varianzaufklärung beider Modelle war eher gering.

## **Diskussion**

Die deskriptiven Ergebnisse des KO und HO Wissens über Beweise und den Umgang mit Beweisen zeigen zunächst einen mittleren Schwierigkeitsgrad der verwendeten Skalen, welches ein gewisses Wissen der Schüler\*innen vermuten lässt. Die in früheren Untersuchungen aufgezeigten Probleme von Lernenden (z.B. Healy & Hoyles, 1998) deuten jedoch darauf hin, dass Qualität und Quantität dieses Wissens vermutlich nicht ausreicht, um mit Beweisen erfolgreich umzugehen. Dass die Klassenstufe einen positiven Einfluss auf das KO Wissen hat, entspricht zunächst den normativen edukativen Erwartungen und lässt vermuten, dass die bestehenden Lernangebote in diesem Zeitraum einen positiven Effekt haben und von den Lernenden zumindest genutzt werden. Die Daten zeigen jedoch auch, dass der Effekt über alle vier betrachteten Klassenstufen hinweg nicht besonders groß zu sein scheint. Dies kann einerseits an der Quantität entsprechender Lerngelegenheiten liegen (vgl. Stylianou et al., 2015), ebenso jedoch auch an der Qualität der

Lerngelegenheiten. Der erwartete Anstieg des HO Wissens im Vergleich der Klassenstufen zeigte sich nicht. Ein Grund für dieses unerwartete Ergebnis – gerade auch in Anbetracht des steigenden KO Wissens – könnte darin liegen, dass die (wenigen) verfügbaren Lernangebote zum mathematischen Beweisen in der Sekundarstufe lehrkraftzentriert sind. Dies könnte sich darin erklären, dass Beweisen von Lehrkräften allgemein als schwierig wahrgenommen (Knuth, 2002) und entsprechender Unterricht dann eher lehrkraftzentriert gestaltet wird. Dadurch bieten sich jedoch nicht genügend bzw. noch weniger Gelegenheiten für die Schüler\*innen, um sich selbst aktiv mit Beweisen auseinanderzusetzen und fördern ggfs. einen eher imitierenden Denkstil (Lithner, 2008). Die Ergebnisse zeigen erneut Handlungsbedarf auf, sowohl die weitere Untersuchung des Wissenserwerbs im Längsschnitt betreffend als auch in Bezug auf effektive Fördermöglichkeiten für Wissen über Beweise und den Umgang mit Beweisen im schulischen Kontext.

## Literatur

- Andersen, L. E. (2018). Acceptable gaps in mathematical proofs. *Synthese*, 197(1), 233–247.
- Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey*. Institute of Education, University of London.
- Heinze, A. (2004). Schülerprobleme beim Lösen von geometrischen Beweisaufgaben – eine Interviewstudie. *ZDM*, 36(5), 150–161.
- Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy*.
- KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Wolters-Kluwer & Luchterland.
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379–405.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276.
- Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 97–104).
- Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, 111(4), 155–177.
- Sporn, F., Sommerhoff, D. & Heinze, A. (2021). Beginning university mathematics students' proof understanding. *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 102–110).
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91–134.