

## **Individuelle Vorstellungen in der Grundvorstellungstheorie**

Grundvorstellungen als normativ formulierte inhaltliche Deutungen mathematischer Begriffe sind in den letzten beiden Jahrzehnten zentral für die Unterrichtsplanung im Fach Mathematik geworden (Greefrath et al., 2016; Salle & Clüver, 2021; vom Hofe, 1995). Durch Lehr-Lern-Arrangements, in denen die inhaltlichen Deutungen zum Tragen kommen, soll den Lernenden neben einer Sinnkonstituierung der mathematischen Begriffe ermöglicht werden, mental mit diesen Begriffen zu operieren und sie flexibel anzuwenden (vom Hofe, 1995). Welche individuellen Vorstellungen Schüler\*innen in diesem Zuge aufbauen, wird unter dem sogenannten deskriptiven Aspekt der Grundvorstellungstheorie diskutiert (vom Hofe, 1995).

Anders als der normative Aspekt wird der deskriptive Aspekt bislang unterschiedlich konkretisiert, was sich insbesondere in empirischen Studien widerspiegelt, die sich auf das Grundvorstellungskonzept beziehen (Greefrath et al., 2021; Hafner, 2012; Schink, 2013; vom Hofe, 1995; Wartha, 2007; Wessel, 2015): In diesen empirischen Studien dient das Grundvorstellungskonzept in erster Linie zur stoffdidaktischen Erläuterung der betrachteten mathematischen Objekte und Operationen oder zur theoriegeleiteten Auswahl von Aufgaben, die Schüler\*innen im Rahmen der Studien bearbeiten (s. a. Prediger, 2010). Bei der Rekonstruktion individueller Vorstellungen, basierend auf den jeweils erhobenen Daten, werden in den empirischen Arbeiten deutlich verschiedene Vorgehensweisen gewählt; auch wenn dies zum Teil auf unterschiedliche Forschungsfragen zurückzuführen ist, zeigen sich in dieser Tatsache insbesondere verschiedene Auffassungen des deskriptiven Aspektes der Grundvorstellungstheorie. Dabei wird auch der Vorstellungsbegriff an sich unterschiedlich aufgefasst und in unterschiedlicher Weise mit dem Grundvorstellungsbegriff in Beziehung gesetzt. Folglich hat sich noch kein theoretisch fundiertes methodisches Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen im Rahmen der Forschung zu Grundvorstellungen etabliert, was unter anderem die Einordnung von Forschungsergebnissen erschwert. Zusammengefasst ergeben sich zu der geschilderten Thematik folgende zwei theoretische und methodologische Fragen:

- Wie kann der Begriff der „individuellen Vorstellung“ im Rahmen der Grundvorstellungstheorie aufgefasst werden?
- Wie können individuelle Vorstellungen systematisch empirisch rekonstruiert werden?

## **Wie kann der Begriff der „individuellen Vorstellung“ im Rahmen der Grundvorstellungstheorie aufgefasst werden?**

Individuelle Vorstellungen mathematischer Objekte und Operationen werden in Anlehnung an Bender (1991) und Griesel et al. (2019) als mentale Repräsentationen dieser Objekte und Operationen aufgefasst. Es wird angenommen, dass diese Repräsentationen situationsspezifisch konstruiert werden (Dannemann, 2015; diSessa, 1993). Bezüglich der Situationsspezifität wird in Arbeiten zum Grundvorstellungskonzept auch auf die Theorie der Subjektiven Erfahrungsbereiche nach Bauersfeld (1983) zurückgegriffen, nach der Erfahrungen „entsprechend der situativen Bindung“ (Bauersfeld, 1983, S. 1) in unterschiedlichen Bereichen gespeichert werden können

Zwar sind individuelle Vorstellungen „als mentale Entitäten prinzipiell nicht erfassbar“ (Hanke, 2017, S. 374), es kann jedoch angenommen werden, dass Lernende mathematische Objekte und Operationen auf ihre Weise deuten und diese Deutungen multimodal ausdrücken können. Individuelle Vorstellungen im Sinne individueller Deutungen können sich in unterschiedlichem Ausmaß mit den normativ formulierten Deutungen, also Grundvorstellungen, überschneiden, müssen dies aber nicht.

Basierend auf den Charakteristika eines herausgearbeiteten Vorstellungsbegriffs kann die Frage nach einem gegenstandsangemessenen empirischen Vorgehen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen thematisiert werden.

## **Wie können individuelle Vorstellungen systematisch empirisch rekonstruiert werden?**

Grundlegende Fragen zur Rekonstruktion individueller Vorstellungen im Rahmen der Grundvorstellungstheorie betreffen zunächst eine Haltung gegenüber individuellen Vorstellungen, die nicht ausschließlich defizitorientiert ist. Zwar entwirft vom Hofe (1995, S. 10) den Begriff der Grundvorstellungen, um zu vermeiden, dass mathematische Begriffe „vom Schüler mit einer völlig anderen Deutung gefüllt werden, als es im Sinne der Sache adäquat wäre“; Schüler\*innenvorstellung gleichzeitig als Fehlvorstellungen zu bezeichnen, wirft in der Diskussion des Grundvorstellungskonzeptes jedoch vermehrt den Kritikpunkt der Defizitorientierung auf (Schacht, 2012; Weber, 2007).

Ein methodologischer Rahmen sollte daher auch klären, auf welche Art und Weise die (normativ hergeleiteten) Grundvorstellungen bei der Datenerhebung und -auswertung in empirischen Studien einbezogen werden können und sollten – und wo explizit nicht. Dies stellt sich für die verschiedenen Etappen eines Forschungsprozesses unterschiedlich dar.

Normativ hergeleitete Grundvorstellungen zur Strukturierung und Gestaltung der Datenerhebung, wie beispielsweise zur Aufgabenkonstruktion und -auswahl, zur Formulierung eines Interviewfadens, etc., heranzuziehen, ermöglicht die Generierung einer ergiebigen Datenbasis für eine detaillierte Rekonstruktion individueller Vorstellungen (Hafner, 2012; Schink, 2013; Wartha, 2007; Wessel, 2015). Hingegen erweist sich ein zu früher bzw. unreflektierter Bezug zu normativ formulierten Grundvorstellungen bei der Auswertung zum einen als abträglich für einen potential- statt defizitorientierten Zugang zu den Daten; zum anderen birgt er die Gefahr, die Interpretation der höchst unterschiedlichen individuellen Vorstellungen, beispielsweise in Form von deduktiv erzeugten Kategoriensystemen, unnötig einzunengen. Darüber hinaus sollte auch bedacht werden, individuelle Deutungen, die bisher nicht durch eine normativ bestimmte Grundvorstellung erfasst wurden, aber dennoch tragfähig sind, einzubeziehen (Weber, 2007).

Ogleich grundlegende Linien des methodologischen Rahmens für ein möglichst großes Spektrum von Erhebungs- und Rekonstruktionsvorgehen gelten sollen, wird der erarbeitete methodologische Rahmen im Vortrag auf aufgabenbasierte Interviews spezifiziert, da diese Form der Datenerhebung im Vergleich zu anderen dokumentierten Formen der Vorstellungsrekonstruktion einige fundamentale Vorteile aufweist. Beispielsweise gelingt es durch gezielte (Nach-)Fragen in solchen Interviews oftmals, detailliertere Aussagen von Schüler\*innen zu garantieren, wodurch wiederum eine reichhaltige Grundlage für die Rekonstruktion individueller Vorstellungen geschaffen werden kann.

Der Vortrag im Minisymposium möchte die beiden hier aufgeworfenen Fragen nach der Auffassung des Vorstellungsbegriffs und nach der Rekonstruktion individueller Vorstellungen im Rahmen der Grundvorstellungstheorie aufgreifen und detailliert diskutieren.

## Literatur

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Aulis.
- Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48–60). Schroedel.

- Dannemann, S. (2015). *Schülervorstellungen zur visuellen Wahrnehmung – Entwicklung und Evaluation eines Diagnoseinstruments*. Didaktisches Zentrum der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg.
- diSessa, A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction*, 10(2/3), 105–225.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2021). Basic mental models of integrals: Theoretical conception, development of a test instrument, and first results. *ZDM*, 53, 649–661. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01207-0>
- Griesel, H., vom Hofe, R. & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 123–133. <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00140-4>
- Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I: Empirische Untersuchung und didaktische Analysen*. Vieweg & Teubner. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8668-2>
- Hanke, E. (2017). Empirie kommunikativer Abbilder am Beispiel von Vorstellungen von Mathematikstudierenden zur Stetigkeit. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 373–376). WTM-Verlag. <http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-18511>
- Prediger, S. (2010). „Aber wie sag ich es mathematisch?“ – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In D. Höttecke (Hrsg.), *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik in Dresden 2009* (S. 6–20). LIT.
- Salle, A. & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42, 553–580. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5>
- Schacht, F. (2012). *Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem: Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff*. Vieweg + Teubner. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8680-4>
- Schink, A. (2013). *Flexibler Umgang mit Brüchen*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-00921-2>
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum, Akad. Verlag.
- Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Franzbecker.
- Weber, C. (2007). *Mathematische Vorstellungen bilden: Praxis und Theorie von Vorstellungsübungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II*. hep Verl.
- Wessel, J. (2015). *Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion: Stoffdidaktische Analysen und empirische Befunde von Schülerinnen und Schülern des 1. Schuljahres*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-11386-5>