

Valentin KATTER, Bielefeld

## **Rekonstruktion von Denkprozessen zum Sinusbegriff in kooperativen Problemlösesituationen**

Das Lernen und Lehren der Trigonometrie beinhaltet einige aus didaktischer Sicht besondere Herausforderungen. Diese Herausforderungen sind zum einen darin begründet, dass Funktionswerte im Allgemeinen nicht mithilfe endlich vieler Rechenoperationen bestimmt werden können, zum anderen darin, dass der Sinusbegriff in verschiedenen Sachzusammenhängen genutzt werden kann und so unterschiedliche Bedeutungen bekommt. Erkennbar wird dieser Bedeutungswechsel beispielsweise bei der Anwendung am Einheitskreis und am rechtwinkligen Dreieck. Darüber hinaus wird der Sinus eingesetzt um periodische Prozesse zu modellieren und er ist ein wichtiges innermathematisches Werkzeug bei der Fourieranalyse. Diese und weitere Zusammenhänge bilden die Grundlage für eine Reihe funktionsklassenspezifischer Grundvorstellungen, die dem Sinus aus normativer Sicht zugeschrieben werden können (Frohn & Salle, 2017) und über die bekannten allgemeinen funktionalen Grundvorstellungen (Vollrath, 1989) hinaus gehen. In diesem Beitrag wird der Frage nachgegangen inwieweit diese neuen Grundvorstellungen geeignet sind um mathematische Arbeitsprozesse von Studierenden zu analysieren.

### **Funktionsklassenspezifische Grundvorstellungen zum Sinus**

Funktionales Denken spielt eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I & II. Ziel der Ausbildung funktionalen Denkens ist es unter anderem, dass Lernende funktionale Zusammenhänge in Sachkontexten erkennen und mathematisch formulieren können oder in der Lage sind, im Bereich der Geometrie, funktionale Abhängigkeiten zu ergründen (Greefrath et al., 2016). Schließlich ist es Ziel des Mathematikunterrichts, den Lernenden die Möglichkeit zu geben, tragfähige Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff aufzubauen. Zu den allgemeinen funktionalen Grundvorstellungen zählen die Zuordnungsvorstellung, die Kovariationsvorstellung und die Objektvorstellung. Diese Vorstellungen können zwar funktionsklassenübergreifend charakterisiert werden, zeigen sich allerdings in den jeweiligen Funktionsklassen durch charakteristische Denk- und Handlungsweisen, die als Grundlage für den Aufbau von funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen dienen können. Spezifische Grundvorstellungen zur Trigonometrie wurden zuerst von Frohn und Salle (2017) formuliert. Im Dissertationsprojekt, welches diesem Beitrag zu Grunde liegt, wurden trigonometrische Grundvorstellungen mithilfe einer didaktisch orientierten Sachanalyse hergeleitet und

vor dem Hintergrund einer hochschuldidaktischen Perspektive ausdifferenziert. Insgesamt ergeben sich sechs Grundvorstellungen, wobei die sinustypischen Darstellungsformen – Einheitskreis, rechtwinkliges Dreieck, Funktionsgraph und symbolische Darstellungen – als Träger dieser Grundvorstellungen dienen. In Hinblick auf die sechs Grundvorstellungen werden in diesem Beitrag Antworten auf die folgenden Forschungsfragen gesucht:

- Inwieweit lassen sich die funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen zum Sinus in den Denkprozessen von Lehramtsstudierenden wiederfinden?
- Können mit Hilfe dieser Grundvorstellungen Schwierigkeiten im Umgang mit dem Sinus bei Lehramtsstudierenden identifiziert und erklärt werden?

### **Konzeption der Studie**

Grundlage der Studie bilden drei analytische Aufgaben, die den Sinus in der Darstellung am Einheitskreis, am rechtwinkligen Dreieck und als Modellfunktion periodischer Prozesse thematisieren. Die Studie wurde mit Master Lehramtsstudierenden der gymnasialen Oberstufe an der Universität Bielefeld durchgeführt. Die Aufgaben wurden in Paararbeit von den Teilnehmenden gelöst, während sie mit einer Kamera gefilmt wurden. Die Diskussionen, die während der Bearbeitungsprozesse stattfanden, wurden transkribiert und anschließend mit einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) ausgewertet.

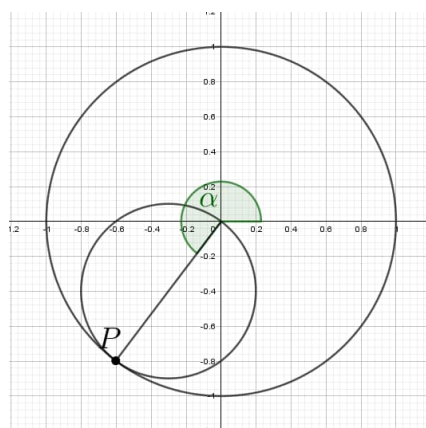
### **Analyseverfahren zur Rekonstruktion von Denkprozessen**

Das methodische Vorgehen zur Analyse der videographierten Daten orientiert sich an der Arbeitsweise von vom Hofe (1998). Dort werden Methoden der interpretativen Unterrichtsforschung mit der Analyse von Grundvorstellungen verbunden. Diese Forschungsmethode bietet sich an, „wenn man sich aus deskriptiver Sicht dafür interessiert, ob Erklärungsmodelle, mit denen man Lern- bzw. Problemlösungsprozesse beschreibt, tatsächlich in den Denkprozessen der Schüler die Rolle spielen, die man aus theoretischer Sicht vermutet“ (vom Hofe, 1998, S.259). Zur Auswertung der Videos wurden die Bearbeitungsprozesse nach einer ersten Sichtung in einzelne Szenen untergliedert. Anschließend wurden die einzelnen Szenen transkribiert. Ausgehend von den Transkripten, beginnt die Interpretation der einzelnen Szenen zuerst auf der *Beschreibungsebene*, auf der die subjektive Schüler\*innenlogik nachgezeichnet wird und wechselt danach zur *Erklärungsebene*, auf der die Denkprozesse mithilfe didaktischer Begriffe und Modelle erfasst und erklärt werden (vom Hofe, 1998). Das Grundvorstellungskonzept wurde an

drei Stellen der Analysen verwendet: Zunächst wurde in einer normativen Aufgabenanalyse geklärt welche Lösungswege und Grundvorstellungen bei der Bearbeitung der jeweiligen Probleme zu erwarten sind. In der Analyse der Transkripte wurden aus deskriptiver Perspektive die Denkprozesse und Vorstellungen der Studierenden rekonstruiert, indem die Aussagen und Handlungen mit den normativ formulierten Grundkenntnissen zu den jeweiligen Grundvorstellungen abgeglichen wurden. Abschließend dienten die funktionsklassenspezifischen Grundvorstellungen dazu, Probleme im Umgang mit den unterschiedlichen Darstellungen der Sinusfunktion zu erklären.

## Ergebnisse

Im Folgenden wird ein exemplarisches Ergebnis zum Umgang der Lehramtsstudierenden mit dem Sinus am Einheitskreis vorgestellt. Die Studierenden wurden dort dazu aufgefordert, das folgende Problem zu bearbeiten:



**Abb. 1:** Erkläre, warum der Schnittpunkt des inneren Kreises mit der y-Achse gleich  $(0, \sin(\alpha))$  ist.

In dieser Aufgabe sind die Studierenden mit einem Problem konfrontiert, in dem mit der Definition des Sinus als y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis gearbeitet werden sollte, ohne dass das zugehörige Referenzdreieck eingezeichnet wurde. Die Aufgabe zielte darauf ab zu untersuchen, welche Rolle die Vorstellung des Sinus als *Seitenverhältnis in einem rechtwinkligen Dreieck* (Seitenverhältnisvorstellung) für die Studierenden spielt und ob sie die Sinusfunktion als *Zuordnung zwischen einem Winkel und der y-Koordinate des entsprechenden Punktes P auf dem Einheitskreis* (Koordinatenvorstellung) in geeigneter Weise nutzen können.

In der Analyse der Bearbeitungsprozesse zeigte sich, dass für viele Studierende die Seitenverhältnisvorstellung auch am Einheitskreis das dominante Erklärungsmodell ist und nicht durch eine tragfähigere Koordinatenvorstellung abgelöst wird. Das führte dazu, dass beim Einzeichnen des Referenz-

dreiecks mehrere Problemfelder auftauchten: Studierende hatten Schwierigkeiten die entsprechenden Katheten zu identifizieren, wenn das Dreieck nicht im ersten Quadranten lag. Sie konnten dem Sinus außerdem keine sinnvolle Bedeutung in den Fällen  $\alpha = 0^\circ$  oder  $\alpha = 90^\circ$  zuordnen, da das Referenzdreieck in diesen Fällen verschwindet. Weiterhin wurde das Referenzdreieck mit dem Dreieck verwechselt, dass bei der Projektion des Punktes  $P$  auf die  $y$ -Achse auftritt.

## Fazit

Man sieht an den Ergebnissen, dass eine angemessene Vernetzung unterschiedlicher Grundvorstellungen zum Sinus beim Lernenden notwendig ist, um ein Grundverständnis aufzubauen und damit den aufgezeigten Schwierigkeiten entgegen zu wirken. Das bedeutet in dem vorliegenden Beispiel zum einen, dass Lernende in der Lage sind Zusammenhänge zwischen dem Sinus am Einheitskreis und am rechtwinkligen Dreieck zu erkennen, zum anderen, dass sie die Koordinatenvorstellung klar von der Seitenverhältnissvorstellung abgrenzen und als eigenständige Konzepte verwenden können. Das vorgestellte Beispiel zeigt außerdem, wie die Weiterentwicklung des Grundvorstellungskonzepts auf funktionsklassenspezifische Grundvorstellungen und die Einbindung in mathematikdidaktische Analyseverfahren zur Rekonstruktion von Denkprozessen dabei helfen kann, potentielle Fehlerquellen zu identifizieren und daraus Konsequenzen für die Lehrpraxis zu ziehen. Bei der Frage, inwieweit die hier identifizierten Grundvorstellungen zum Sinus geeignet sind um entsprechende Lernsituationen und Unterrichtskonzepte zu entwickeln, handelt es sich um ein sehr weites Forschungsfeld, das umfangreiche qualitative und quantitative Untersuchungen erfordert.

## Literatur

- Frohn, D. & Salle, A. (2017) Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus. *mathematik lehren*, 204, 10–16. <https://pub.uni-bielefeld.de/record/2915834>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H., Weigand, H. & Ulm, V. (2016) *Didaktik der Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Mayring, P. (2010). Qualitative Inhaltsanalyse. In: Mey, G., Mruck, K. (eds.) *Handbuch qualitative Forschung in der Psychologie*. Wiesbaden: VS Verlag: 601–613.
- Vollrath, H. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37. <https://doi.org/10.1007/BF03338719>
- vom Hofe, R. (1998). Probleme mit dem Grenzwert - Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19, 257–291. <https://doi.org/10.1007/BF03338877>